Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Departamento de Estatística e Investigação Operacional

Introdução à Investigação Operacional - 2013/2014

1º Ano da Licenciatura em Engenharia Informática

Regime Diurno (cód: 22736) e Regime Pós Laboral (cód: 24001)

Exame 1 - 2014/01/20

Duração: 2h30m; Cotação total: 20 valores

Material permitido: esferográfica/caneta e régua.

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

GRUPO I (7 valores)

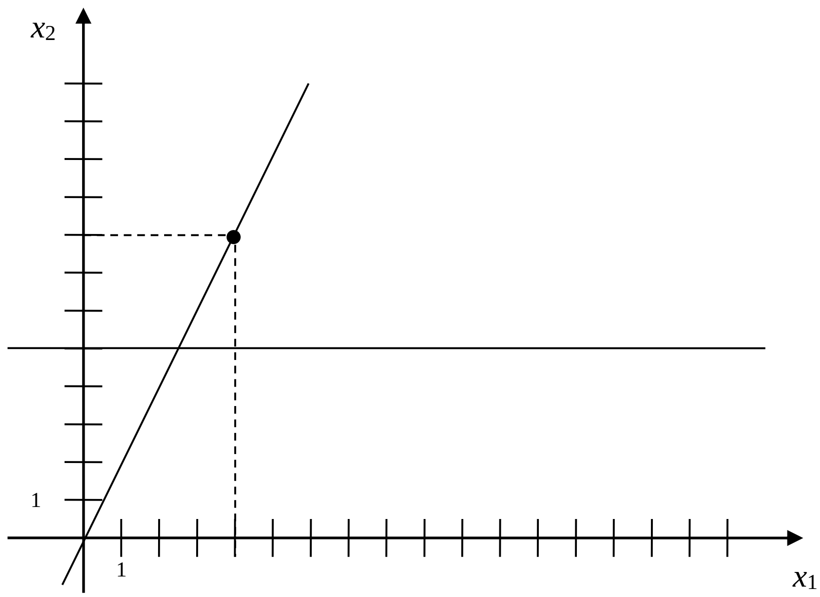
Determinada empresa produz dois tipos de peças para automóveis, tipo 1 e tipo 2, com um custo de 2 e de 1 euro por cada mil unidades de peças do tipo 1 e do tipo 2 produzidas, respectivamente. De forma a honrar os compromissos estabelecidos com os seus clientes, a produção semanal de ambas as peças não deverá ser inferior a 12 000 unidades, e por motivos estratégicos, a produção mínima semanal de peças do tipo 2 deverá ser de 5 000 unidades. A empresa pretende determinar a sua produção semanal óptima e considerou, para o efeito, a seguinte formulação em programação linear (note que existem ainda outras considerações que não foram explicitadas no texto):

$$\begin{array}{llrcrl}
\min & z = & 2x_1 & + & x_2 & \\
s.a: & & x_1 & + & x_2 & \geq 12 \\
 & & & & x_2 & \geq 5 \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & \geq 0 \\
 & & x_1 & , & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

a) Indique o significado das variáveis de decisão, da função objetivo e proponha uma interpretação para a 3ª restrição.

b) O gráfico (incompleto) apresentado na página seguinte está associado à formulação proposta. Complete-o e represente, convenientemente, o conjunto de soluções admissíveis deste problema.

c) Determine graficamente a solução ótima do problema bem como o seu valor ótimo e interprete-os face aos dados do problema.



d) Determine o valor marginal da 2ª restrição e interprete-o face aos dados do problema. Determine ainda os respetivos limites de validade.

e) Quanto deverá a empresa exigir a um novo cliente por cada mil unidades adicionais produzidas de ambas as peças de forma a não ter prejuízo?

f) Admita que o custo de produção das peças de tipo 2 foi mal estimado. Que valores poderá tomar este custo para não ser necessário alterar a solução determinada na alínea **c)**?

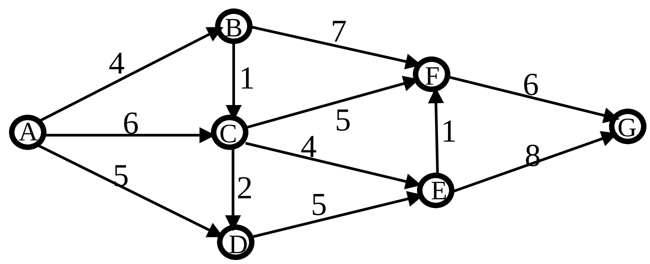
g) A empresa está a pensar produzir adicionalmente uma nova peça (tipo 3), a um custo de 3 euros por cada mil unidades produzidas. Embora a produção desta nova peça não deva ser contabilizada na restrição da quantidade total mínima de peças a produzir, terá certamente impacto na ocupação semanal das máquinas. Assim, sabe-se que, se as máquinas estiverem dedicadas exclusivamente a cada uma das peças, a sua produção semanal será a seguinte:

Peças	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Produção semanal (em milhares de unidades)	10	8	4

Reescreva a formulação dada de forma a contemplar esta nova situação (não resolva o novo problema).

GRUPO II (9 valores)

1. Considere o seguinte grafo orientado:



a) Determine o(s) caminho(s) mais curto(s) entre o vértice A e o vértice G, bem como o respetivo valor, usando o algoritmo estudado nas aulas.

b) Determine os valores que poderá ter o arco (B,F) de forma que o caminho mais curto obtido na alínea a) se mantenha.

c) Ignore as orientações dos arcos para responder às seguintes questões.

i. Indique, justificando devidamente, uma cadeia simples mas não elementar entre o vértice A e o vértice G.

ii. Utilizando o algoritmo estudado, obtenha uma árvore de suporte de custo mínimo partindo da árvore parcial que contém as arestas {B,C}, {C,D}, {C,E} e {E,F}.

2. Suponha que existem 9 atividades necessárias para a realização de um determinado projeto. A tabela de precedências é apresentada de seguida:

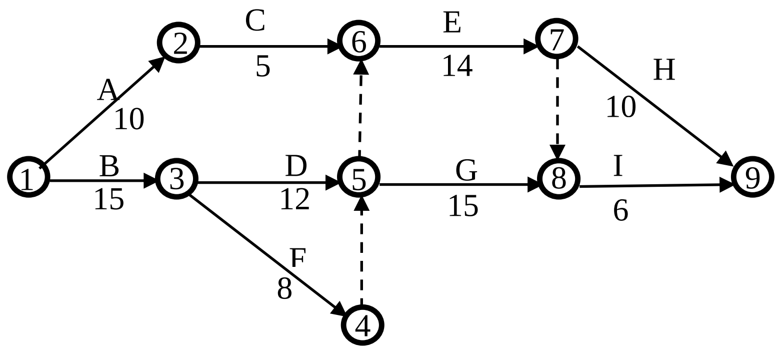
Atividades	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Precedentes	--	A	A	B	B	C,E	D,E	F,G	H

Construa a rede de atividades (atividades nos arcos).

3. Considere a rede de atividades (atividades nos arcos) de um projeto apresentada de seguida. O número associado a cada arco representa a duração (em dias) da atividade correspondente.

a) Obtenha a duração mínima de execução do projeto e indique as atividades críticas. Justifique devidamente.

b) Para as actividades D e I, determine as datas mais cedo e mais tarde de início e de conclusão, bem como as correspondentes folgas.



c) Qual o impacto para o prazo mínimo de conclusão do projecto decorrente de um atraso de 3 dias na execução da actividade I?

GRUPO III (4 valores)

Num aeroporto com uma única pista para aterragem, os aviões solicitam autorização para aterrar a uma média de um em cada 5 minutos, de acordo com um processo que se pode considerar próximo do processo de Poisson. Os aviões recebem autorização por ordem de chegada, ficando em espera os que não puderem aterrar imediatamente devido ao congestionamento do tráfego aéreo. O tempo que o único controlador aéreo de serviço para aterragens demora a fazer aterrar um avião, varia com a experiência do piloto, podendo-se considerar exponencialmente distribuído com valor médio 3 minutos. Verifique que este sistema atinge a fase estacionária e, para esta fase, determine:

a) O número médio de aviões em espera.

b) O número médio de aviões que pediram autorização para aterrar mas que ainda não estão no chão.

c) A probabilidade de que um avião esteja no chão em menos de 10 minutos após o seu pedido de autorização para aterrar.

d) A probabilidade de existirem mais do que 3 aviões em espera.

FILAS DE ESPERA - FORMULÁRIO

- Modelo (M/M/1):(GD/∞/∞)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, n = 1,2, \ldots$$

$$L_S = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W_S = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Modelo (M/M/1):(FIFO/∞/∞)

$$P(\mathcal{W} > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, t > 0$$

- Modelo (M/M/s):(GD/∞/∞)

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \frac{1}{1-\rho}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & n = 0,1, \ldots, s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0 & n = s, s+1, \ldots \end{cases}$$

$$L_Q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2}$$

$$L_S = L_Q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W_S = \frac{L_S}{\lambda}$$

- Modelo (M/M/1):(GD/K/∞)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^n & n = 0,1,2, \ldots, K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

$$L_S = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$L_Q = L_s - (1 - P_0)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$$

$$W_S = \frac{L_S}{\bar{\lambda}}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\bar{\lambda}}$$

- Modelo (M/M/s):(GD/K/∞)

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s+1}^{K} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} P_0 & n = 1,2, \ldots, s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}} P_0 & n = s, s+1, \ldots, K \\ 0 & n > K \end{cases}$$

$$L_Q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s!\,(1-\rho)^2} [1 - \rho^{K-s} - (K-s)\rho^{K-s}(1-\rho)]$$

$$L_S = \sum_{n=0}^{s-1} n P_n + L_Q + s\left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} P_n\right)$$

$$\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_K)$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\bar{\lambda}}$$

$$W_S = \frac{L_S}{\bar{\lambda}}$$