

Cálculo Lambda Tipado (2/3)

Alejandro Ríos

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

*“There may, indeed, be other applications of the system
other than its use as a logic”*

Alonzo Church, 1932

La clase pasada

- ▶ Cálculo Lambda tipado y extensiones
 - ▶ Funciones, aplicación
 - ▶ Expresiones booleanas
 - ▶ Expresiones aritméticas
 - ▶ Unit
 - ▶ Declaraciones locales
 - ▶ Registros
- ▶ Para cada extensión
 - ▶ Expresiones de tipos
 - ▶ Términos
 - ▶ Tipado
 - ▶ Valores
 - ▶ Semántica operacional small-step

La clase pasada

$$\text{Corrección} = \text{Progreso} + \text{Preservación}$$

Progreso

Si M es cerrado y bien tipado entonces

1. M es un valor
2. o bien existe M' tal que $M \rightarrow M'$

La evaluación no puede trabarse para términos cerrados, bien tipados que no son valores.

Preservación

Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $M \rightarrow N$, entonces $\Gamma \triangleright N : \sigma$

La evaluación preserva tipos.

Terminación

La evaluación de todo término bien tipado termina.

La evaluación de los términos bien tipados no se cuelga.

Hoy - Dos extensiones más

- ▶ Referencias

Programación Imperativa = Progr. Funcional + Efectos

- ▶ Recursión

- ▶ Ninguna de las extensiones vistas permite definir funciones recursivas.
- ▶ Todas las funciones definibles hasta el momento son totales.

Referencias - Motivación

- ▶ En una expresión como $let\ x : Nat = \underline{2}\ in\ M$
 - ▶ x es una variable declarada con valor 2.
 - ▶ El valor de x permanece **inalterado** a lo largo de la evaluación de M .
 - ▶ En este sentido x es **immutable**: no existe una operación de asignación.
- ▶ En programación imperativa pasa todo lo **contrario**.
 - ▶ **Todas** las variables son **mutables**.
- ▶ Vamos a extender Cálculo Lambda Tipado con variables mutables.

Operaciones básicas

Alocación (Reserva de memoria)

$\text{ref } M$ genera una referencia fresca cuyo contenido es el valor de M .

Derreferenciación (Lectura)

$!x$ sigue la referencia x y retorna su contenido.

Asignación

$x := M$ almacena en la referencia x el valor de M .

Ejemplos

Nota: En los ejemplos de esta clase omitiremos los tipos de las let-expresiones para facilitar la lectura.

- ▶ $\text{let } x = \text{ref } \underline{2} \text{ in } (\lambda_ : \text{unit}.!x) (x := \text{succ}(!x))$ evalúa a $\underline{3}$.
- ▶ ¿ $\text{let } x = \text{ref } \underline{2} \text{ in } x$ a qué evalúa?
- ▶ $\text{let } x = \underline{2} \text{ in } x$ evalúa a $\underline{2}$.
- ▶ $\text{let } x = \text{ref } \underline{2} \text{ in let } y = x \text{ in } (\lambda_ : \text{unit}.!x) (y := \text{succ}(!y))$ evalúa a $\underline{3}$.
 - ▶ x e y son **alias** para la misma celda de memoria.

Comandos = Expresiones con efectos

- ▶ El término *let $x = \text{ref } \underline{2}$ in $x := \text{succ}(!x)$* , ¿A qué evalúa?
- ▶ La asignación es una expresión que interesa por su **efecto** y **no** su valor.
 - ▶ No tiene interés preguntarse por el **valor** de una asignación.
 - ▶ ¡Sí tiene sentido preguntarse por el **efecto**!

Comando

Expresión que se evalúa para causar un efecto; definimos a *unit* como su valor.

- ▶ Un lenguaje funcional **puro** es uno en el que las expresiones son **puras** en el sentido de carecer de efectos.

Expresiones de tipos

Las expresiones de tipos se extienden del siguiente modo

$$\sigma ::= Bool \mid Nat \mid \sigma \rightarrow \tau \mid Unit \mid Ref \sigma$$

Descripción informal:

- ▶ $Ref \sigma$ es el tipo de las referencias a valores de tipo σ .
- ▶ Ej. $Ref (Bool \rightarrow Nat)$ es el tipo de las referencias a funciones de $Bool$ en Nat .

Términos

$$\begin{array}{lcl} M & ::= & x \\ & | & \lambda x : \sigma. M \\ & | & M N \\ & | & unit \\ & | & \textcolor{blue}{ref } M \\ & | & \textcolor{blue}{!}M \\ & | & \textcolor{blue}{M} := \textcolor{blue}{N} \\ & | & \dots \end{array}$$

El sistema de tipado **excluirá** términos “mal formados”.

- ▶ $\textcolor{blue}{!}\underline{2}$
- ▶ $\underline{2} := \underline{3}$

Reglas de tipado

- ▶ Las reglas de tipado serán presentadas en **dos etapas**.
- ▶ Primera presentación:
 - ▶ es de carácter **preliminar**;
 - ▶ se basa en la sintaxis de términos introducidas al momento.
- ▶ Segunda presentación:
 - ▶ es la **definitiva**;
 - ▶ al estudiar la semántica operacional surgirá la necesidad de **ampliar la sintaxis** por cuestiones técnicas;
 - ▶ se basa en la sintaxis de términos **ampliada**.

Reglas de tipado - Preliminares

$$\frac{\Gamma \triangleright M_1 : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{ref } M_1 : \text{Ref } \sigma} \text{ (T-REF)}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma}{\Gamma \triangleright !M_1 : \sigma} \text{ (T-DEREF)}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma_1 \quad \Gamma \triangleright M_2 : \sigma_1}{\Gamma \triangleright M_1 := M_2 : \text{Unit}} \text{ (T-ASSIGN)}$$

Ejemplos

- ▶ $let\ x = ref\ \underline{2}\ in\ (\lambda_ : unit.\!x)\ (x := succ(!x))$
- ▶ $let\ x = ref\ \underline{2}\ in\ x$
- ▶ $let\ x = \underline{2}\ in\ x$
- ▶ $let\ x = ref\ \underline{2}\ in\ let\ y = x\ in\ (\lambda_ : unit.\!x)\ (y := succ(!y))$

Nota: el ítem del primer punto puede escribirse también:

$$let\ x = ref\ \underline{2}\ in\ (x := succ(!x));\!x$$

Recordemos que:

$$M_1; M_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x : Unit. M_2)\ M_1 \quad x \notin FV(M_2)$$

Motivación

Al intentar formalizar la semántica operacional surgen las preguntas:

- ▶ ¿Cuáles son los valores de tipo $Ref\ \sigma$?
- ▶ ¿Cómo modelizar la evaluación del término $ref\ M$?

Las respuestas dependen de otra pregunta.

¿Qué es una referencia?

Rta. Es una abstracción de una porción de memoria que se encuentra en uso.

Memoria o “store”

- ▶ Usamos direcciones (simbólicas) o “locations” $l, l_i \in \mathcal{L}$ para representar referencias.

Memoria (o “store”): función parcial de direcciones a valores.

- ▶ Usamos letras μ, μ' para referirnos a stores.
- ▶ Notación:
 - ▶ $\mu[l \mapsto V]$ es el store resultante de pisar $\mu(l)$ con V .
 - ▶ $\mu \oplus (l \mapsto V)$ es el store extendido resultante de ampliar μ con una nueva asociación $l \mapsto V$ (asumimos $l \notin \text{Dom}(\mu)$).

Los juicios de evaluación toman la forma:

$$M \mid \mu \rightarrow M' \mid \mu'$$

Valores

Intuición:

$$\frac{l \notin \text{Dom}(\mu)}{\text{ref } V \mid \mu \rightarrow l \mid \mu \oplus (l \mapsto V)} \text{ (E-REFV)}$$

Los valores posibles ahora incluyen las **direcciones**.

$$V ::= \text{unit} \mid \lambda x : \sigma. M \mid l$$

Dado que los valores son un **subconjunto** de los términos,

- ▶ debemos ampliar los términos con **direcciones**;
- ▶ éstas son producto de la formalización y **no** se pretende que sean utilizadas por el programador.

Términos extendidos

$$\begin{array}{lcl} M & ::= & x \\ & | & \lambda x : \sigma. M \\ & | & M N \\ & | & unit \\ & | & ref\ M \\ & | & !M \\ & | & M := N \\ & | & / \\ & | & \dots \end{array}$$

Juicios de tipado

$$\Gamma \triangleright l : ?$$

- ▶ **Depende** de los valores que se almacenen en la dirección l .
- ▶ Situación parecida a las **variables libres**.
- ▶ Precisamos un “**contexto de tipado**” para direcciones:
 - ▶ Σ función parcial de direcciones en tipos.

Nuevo juicio de tipado

$$\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma$$

Reglas de tipado - Definitivas

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright \text{ref } M_1 : \text{Ref } \sigma} \text{ (T-REF)}$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright !M_1 : \sigma} \text{ (T-DEREF)}$$

$$\frac{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 : \text{Ref } \sigma_1 \quad \Gamma|\Sigma \triangleright M_2 : \sigma_1}{\Gamma|\Sigma \triangleright M_1 := M_2 : \text{Unit}} \text{ (T-ASSIGN)}$$

$$\frac{\Sigma(l) = \sigma}{\Gamma|\Sigma \triangleright l : \text{Ref } \sigma} \text{ (T-LOC)}$$

Juicios de evaluación en un paso

- ▶ Retomamos la semántica operacional.
- ▶ Vamos a introducir axiomas y reglas que permiten darle significado al juicio de evaluación en un paso.

$$M \mid \mu \rightarrow M' \mid \mu'$$

- ▶ Recordar el conjunto de valores (expresiones resultantes de evaluar por completo a términos cerrados y bien tipados).

$$V ::= true \mid false \mid 0 \mid \underline{n} \mid unit \mid \lambda x : \sigma. M \mid /$$

Juicios de evaluación en un paso (1/4)

$$\frac{M_1 \mid \mu \rightarrow M'_1 \mid \mu'}{M_1 M_2 \mid \mu \rightarrow M'_1 M_2 \mid \mu'} \text{ (E-APP1)}$$

$$\frac{M_2 \mid \mu \rightarrow M'_2 \mid \mu'}{(\lambda x : \sigma.M) M_2 \mid \mu \rightarrow (\lambda x : \sigma.M) M'_2 \mid \mu'} \text{ (E-APP2)}$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.M) \textcolor{red}{V} \mid \mu \rightarrow M\{x \leftarrow \textcolor{red}{V}\} \mid \mu} \text{ (E-APPABS)}$$

Nota: Estas reglas no modifican el store.

Juicios de evaluación en un paso (2/4)

$$\frac{M_1 \mid \mu \rightarrow M'_1 \mid \mu'}{!M_1 \mid \mu \rightarrow !M'_1 \mid \mu'} \text{ (E-DEREF)}$$

$$\frac{\mu(l) = \textcolor{red}{V}}{!l \mid \mu \rightarrow \textcolor{red}{V} \mid \mu} \text{ (E-DEREFLOC)}$$

Juicios de evaluación en un paso (3/4)

$$\frac{M_1 \mid \mu \rightarrow M'_1 \mid \mu'}{M_1 := M_2 \mid \mu \rightarrow M'_1 := M_2 \mid \mu'} \text{ (E-ASSIGN1)}$$

$$\frac{M_2 \mid \mu \rightarrow M'_2 \mid \mu'}{\textcolor{red}{V} := M_2 \mid \mu \rightarrow \textcolor{red}{V} := M'_2 \mid \mu'} \text{ (E-ASSIGN2)}$$

$$\frac{}{l := \textcolor{red}{V} \mid \mu \rightarrow \textit{unit} \mid \mu[l \mapsto \textcolor{red}{V}]} \text{ (E-ASSIGN)}$$

Juicios de evaluación en un paso (4/4)

$$\frac{M_1 \mid \mu \rightarrow M'_1 \mid \mu'}{\text{ref } M_1 \mid \mu \rightarrow \text{ref } M'_1 \mid \mu'} \text{ (E-REF)}$$

$$\frac{l \notin \text{Dom}(\mu)}{\text{ref } \textcolor{red}{V} \mid \mu \rightarrow l \mid \mu \oplus (l \mapsto \textcolor{red}{V})} \text{ (E-REFV)}$$

Ejemplo

$let\ x = \text{ref}\ \underline{2}\ in\ (\lambda_ : Unit.!x)\ (x := succ(!x)) \mid \mu$

$\rightarrow let\ x = l_1\ in\ (\lambda_ : Unit.!x)\ (x := succ(!x)) \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{2})$

$\rightarrow (\lambda_ : Unit.!l_1)\ (l_1 := succ(!l_1)) \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{2})$

$\rightarrow (\lambda_ : Unit.!l_1)\ (l_1 := succ(\underline{2})) \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{2})$

$\rightarrow (\lambda_ : Unit.!l_1)\ unit \mid (\mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{2}))[l_1 \mapsto \underline{3}]$

$\rightarrow !l_1 \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{3})$

$\rightarrow \underline{3} \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \underline{3})$

Ejemplo

Sea

$$\begin{aligned} M &= \lambda r : \text{Ref}(\text{Unit} \rightarrow \text{Unit}). \\ &\quad \text{let } f = !r \\ &\quad \text{in } (r := \lambda x : \text{Unit}.f\ x); (!r)\ \text{unit} \end{aligned}$$

$M(\text{ref } (\lambda x : \text{Unit}.x)) \mid \mu$
→ $M\ l_1 \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \lambda x : \text{Unit}.x)$
→ $\text{let } f = !l_1 \text{ in } (l_1 := \lambda x : \text{Unit}.f\ x); (!l_1)\ \text{unit} \mid \dots$
→ $\text{let } f = \lambda x : \text{Unit}.x \text{ in } (l_1 := \lambda x : \text{Unit}.f\ x); (!l_1)\ \text{unit} \mid \dots$
→ $(l_1 := \lambda x : \text{Unit}.(\lambda x : \text{Unit}.x)\ x); (!l_1)\ \text{unit} \mid \dots$
→ $\text{unit}; (!l_1)\ \text{unit} \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \lambda x : \text{Unit}.(\lambda x : \text{Unit}.x)\ x)$
→ $(!l_1)\ \text{unit} \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \lambda x : \text{Unit}.(\lambda x : \text{Unit}.x)\ x)$
→ $(\lambda x : \text{Unit}.(\lambda x : \text{Unit}.x)\ x)\ \text{unit} \mid \dots$
→ $(\lambda x : \text{Unit}.x)\ \text{unit} \mid \dots$
→ $\text{unit} \mid \dots$

Ejemplo

Sea

$$\begin{aligned} M = & \lambda r : \text{Ref}(\text{Unit} \rightarrow \text{Unit}). \\ & \text{let } f = !r \\ & \text{in } (r := \lambda x : \text{Unit}. f\ x); (!r) \text{ unit} \end{aligned}$$

Reemplazamos f por $!r$ y nos queda

$$\begin{aligned} M' = & \lambda r : \text{Ref}(\text{Unit} \rightarrow \text{Unit}). \\ & (r := \lambda x : \text{Unit}. (!r)\ x); (!r) \text{ unit} \end{aligned}$$

Vamos a evaluar este nuevo M' aplicado al mismo término que en el slide anterior y ver qué pasa...

Ejemplo

$$M' = \lambda r : \text{Ref } (\text{Unit} \rightarrow \text{Unit}). \\ (r := \lambda x : \text{Unit}.(!r) x); (!r) \text{ unit}$$

$$\begin{aligned} & M' (\text{ref } (\lambda x : \text{Unit}.x)) \mid \mu \\ \rightarrow & M' l_1 \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \lambda x : \text{Unit}.x) \\ \rightarrow & (l_1 := \lambda x : \text{Unit}.(!l_1) x); (!l_1) \text{ unit} \mid \dots \\ \rightarrow & \text{unit}; (!l_1) \text{ unit} \mid \mu \oplus (l_1 \mapsto \lambda x : \text{Unit}.(!l_1) x) \\ \rightarrow & \boxed{(!l_1) \text{ unit}} \mid \dots \\ \rightarrow & (\lambda x : \text{Unit}.(!l_1) x) \text{ unit} \mid \dots \\ \rightarrow & \boxed{(!l_1) \text{ unit}} \mid \dots \\ \rightarrow & \dots \end{aligned}$$

Nota: no todo término cerrado y bien tipado termina en λ^{bnr}
(λ -cálculo con booleanos, naturales y referencias).

La clase pasada - Corrección de sistema de tipos

$$\text{Corrección} = \text{Progreso} + \text{Preservación}$$

Progreso

Si M es cerrado y bien tipado entonces

1. M es un valor
2. o bien existe M' tal que $M \rightarrow M'$

Preservación

Si $\Gamma \triangleright M : \sigma$ y $M \rightarrow N$, entonces $\Gamma \triangleright N : \sigma$

Debemos **reformular** estos resultados en el marco de referencias.

Preservación - Formulación ingenua

La formulación ingenua siguiente es **errónea**:

$$\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma \quad \text{y} \quad M | \mu \rightarrow M' | \mu' \quad \text{implica} \quad \Gamma | \Sigma \triangleright M' : \sigma$$

- ▶ **El problema**: puede que la semántica no respete los tipos asumidos por el sistema de tipos para las direcciones (i.e. Σ).
- ▶ Vamos a ver un ejemplo concreto.

Preservación - Formulación ingenua

$\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma$ y $M | \mu \rightarrow M' | \mu'$ implica $\Gamma | \Sigma \triangleright M' : \sigma$

Supongamos que

- ▶ $M = !I$
- ▶ $\Gamma = \emptyset$
- ▶ $\Sigma(I) = Nat$
- ▶ $\mu(I) = true$

Observar que

- ▶ $\Gamma | \Sigma \triangleright M : Nat$ y
- ▶ $M | \mu \rightarrow true | \mu$
- ▶ pero $\Gamma | \Sigma \triangleright true : Nat$ no vale.

Preservación - Formulación ingenua

$$\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma \quad \text{y} \quad M | \mu \rightarrow M' | \mu' \quad \text{implica} \quad \Gamma | \Sigma \triangleright M' : \sigma$$

Supongamos que

- ▶ $M = !I$
- ▶ $\Gamma = \emptyset$
- ▶ $\Sigma(I) = \boxed{Nat}$
- ▶ $\mu(I) = \boxed{true}$

Observar que

- ▶ $\Gamma | \Sigma \triangleright M : Nat$ y
- ▶ $M | \mu \rightarrow true | \mu$
- ▶ pero $\Gamma | \Sigma \triangleright true : Nat$ no vale.

Preservación - Reformulada

- Precisamos una noción de compatibilidad entre el store y el contexto de tipado para stores.

- Debemos “tipar” los stores.

- Introducimos un nuevo “juicio de tipado”:

$$\Gamma | \Sigma \triangleright \mu$$

- Este juicio se define del siguiente modo:

$$\Gamma | \Sigma \triangleright \mu \text{ sii}$$

1. $Dom(\Sigma) = Dom(\mu)$ y
2. $\Gamma | \Sigma \triangleright \mu(l) : \Sigma(l)$ para todo $l \in Dom(\mu)$.

Preservación - Reformulada

Reformulamos preservación del siguiente modo.

$$\text{Si } \Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma \text{ y } M | \mu \rightarrow N | \mu' \text{ y } \Gamma | \Sigma \triangleright \mu,$$
$$\text{entonces } \Gamma | \boxed{\Sigma} \triangleright N : \sigma.$$

- ▶ Esto es **casi** correcto.
- ▶ No contempla la posibilidad de que el Σ encuadrado haya crecido en dominio respecto a Σ .
 - ▶ Por posibles reservas de memoria.

Preservación - Definitiva

Si

- ▶ $\Gamma | \Sigma \triangleright M : \sigma$
- ▶ $M | \mu \rightarrow N | \mu'$
- ▶ $\Gamma | \Sigma \triangleright \mu$

implica que existe $\Sigma' \supseteq \Sigma$ tal que

- ▶ $\Gamma | \Sigma' \triangleright N : \sigma$
- ▶ $\Gamma | \Sigma' \triangleright \mu'$

Progreso - Reformulado

Si M es cerrado y bien tipado (i.e. $\emptyset \mid \Sigma \triangleright M : \sigma$ para algún Σ, σ) entonces:

1. M es un valor
2. o bien para cualquier store μ tal que $\emptyset \mid \Sigma \triangleright \mu$, existe M' y μ' tal que $M \mid \mu \rightarrow M' \mid \mu'$.

Recursión

Ecuación recursiva

$$f = \dots f \dots f \dots$$

Dos explicaciones de la función denotada (cuando existe).

- ▶ Denotacional
 - ▶ Límite de una cadena de aproximaciones
- ▶ Operacional
 - ▶ El “desdoblador” y puntos fijos

Nota: a desarrollar en el pizarrón.

Términos y tipado

$$M ::= \dots \mid \text{fix } M$$

- No se precisan nuevos tipos pero sí una regla de tipado.

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma_1 \rightarrow \sigma_1}{\Gamma \triangleright \text{fix } M : \sigma_1} \text{ (T-FIX)}$$

Semántica operacional small-step

No hay valores nuevos pero sí reglas de evaluación en un paso nuevas.

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{fix } M_1 \rightarrow \text{fix } M'_1} \text{ (E-FIX)}$$

$$\frac{}{\text{fix } (\lambda x : \sigma. M) \rightarrow M\{x \leftarrow \text{fix } (\lambda x : \sigma. M)\}} \text{ (E-FIXBETA)}$$

Ejemplos

Sea M el término

$\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.$

$\lambda x : \text{Nat}.$

$\text{if iszero}(x) \text{ then } \underline{1} \text{ else } x * f(\text{pred}(x))$

en

$\text{let fact} = \text{fix } M \text{ in fact } \underline{3}$

Ejemplos

Ahora podemos definir funciones parciales:

$$\text{fix}(\lambda x : \text{Nat}. \text{succ } x)$$

Ejemplos

Sea M el término

$\lambda s : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}.$

$\lambda x : \text{Nat}.$

$\lambda y : \text{Nat}.$

if iszero(x) *then* y *else* succ(s pred(x) y)

en

let suma = fix M in suma23

Letrec

Una construcción alternativa para definir funciones recursivas es

$$\textit{letrec } f : \sigma \rightarrow \sigma = \lambda x : \sigma. M \textit{ in } N$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\textit{letrec} \\ &\quad \textit{fact} : \textit{Nat} \rightarrow \textit{Nat} = \\ &\quad \lambda x : \textit{Nat}. \textit{if } x = 0 \textit{ then } \underline{1} \textit{ else } x * \textit{fact}(\textit{pred}(x)) \\ &\quad \textit{in fact } \underline{3} \end{aligned}$$

letrec puede escribirse en términos de *fix* del siguiente modo:

$$\textit{let } f = \textit{fix}(\lambda f : \sigma \rightarrow \sigma. \lambda x : \sigma. M) \textit{ in } N$$

Fin de la clase

La clase que viene...

...inferencia de tipos

...y algoritmo de unificación