Introducción a la Robótica Móvil

Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Cinemática (Parte II) - clase 8

Cinemática directa, inversa y odometría

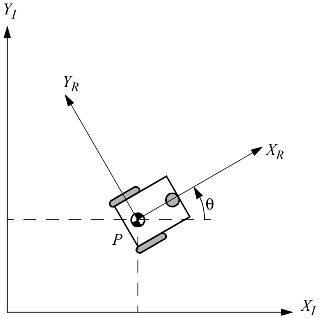
Cinemática de un robot móvil

Queremos describir el movimiento de un robot móvil sin considerar las causas que lo originan (fuerzas y torques).

- → Cinemática directa: dado el conjunto de velocidades de los actuadores determina la velocidad correspondiente del robot.
- → Cinemática inversa: dada una velocidad deseada para el robot, determina la velocidad correspondiente para cada actuador.

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Veamos un ejemplo sencillo: un robot terrestre con sistema de locomoción diferencial que se desplaza en el plano XY.



La pose del robot está definida por:

$$^I\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} ^Ix \\ ^Iy \\ ^I\theta \end{pmatrix}$$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Si derivamos con respecto al tiempo obtenemos la velocidad en cada grado de libertad del robot:

$$^{I}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} ^{I}\dot{x} \\ ^{I}\dot{y} \\ ^{I}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Para describir el **movimiento** del robot en términos del marco global necesitamos una transformación. ¿Cuál es?

$$^{I}\dot{\boldsymbol{\xi}} = {}^{I}\mathbf{R}_{R}(\theta)\,^{R}\dot{\boldsymbol{\xi}}$$

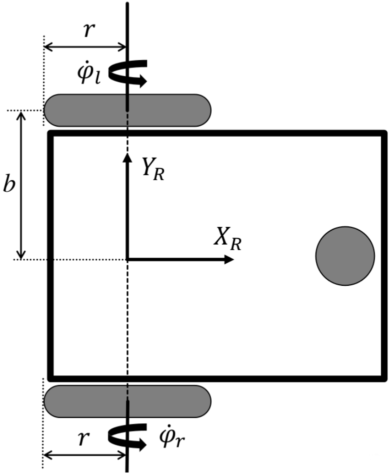
donde

$$^{I}\mathbf{R}_{R}(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Para poder modelar el movimiento del robot vamos a considerar una serie de hipótesis (que no son ciertas en la realidad!)

- → El robot se desplaza en una superficie plana.
- → El robot tiene dos ruedas estándar fijas cuyos ejes de dirección son ortogonales a la superficie.
- → Las ruedas tienen un sólo punto de contacto, no se deforman, no patinan.
- → Definimos el marco del robot en el medio del eje de rotación de las ruedas.



Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

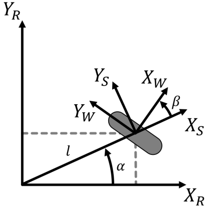
Las hipótesis anteriores me definen las restricciones para el movimiento de las ruedas:

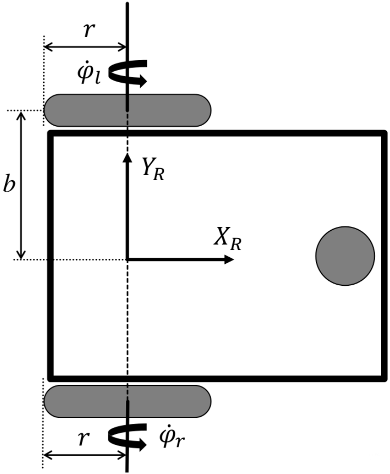
→ Restricción del movimiento de las ruedas sobre su eje (rodadura):

$$(sen(\alpha+\beta), cos(\alpha+\beta), lcos(\beta))\,{}^{R}\mathbf{R}_{I}\,{}^{I}\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\varphi}_{l}$$

→ Restricción de no desplazamiento trasversal:

$$(cos(\alpha+\beta), sen(\alpha+\beta), lsen(\beta))\,{}^{R}\mathbf{R}_{I}\,{}^{I}\dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$$





Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

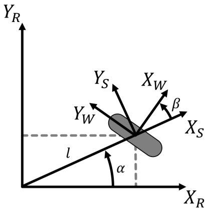
Las hipótesis anteriores me definen las restricciones para el movimiento de las ruedas:

- Restricción del movimiento de las ruedas sobre su eje (rodadura):

$$(sen(\alpha+\beta), cos(\alpha+\beta), l cos(\beta))^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\varphi} r$$

- Restricción de no desplazamiento trasversal:

$$(cos(\alpha+\beta), sen(\alpha+\beta), l sen(\beta))^R \dot{\boldsymbol{\xi}} = 0$$



- Para la rueda derecha:
  $\alpha = -\pi/2, \beta = 0, l = b$
- Para la rueda izquierda:
  $\alpha = -\pi/2, \beta = 0, l = -b$
- Restricción de rodadura:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \end{pmatrix} {}^R\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix}$$

- Restricción de no desplazamiento:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} {}^R\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Si juntamos ambas restricciones en un sólo sistema de ecuaciones tenemos que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} {}^R\dot{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix}}_{\dot{\varphi}}$$

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{4\times 3} {}^R\dot{\xi} = \underbrace{\mathbf{B}}_{4\times 2} \dot{\varphi}$$

A partir de esta ecuación podemos hallar la cinemática directa e inversa.

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Entonces la solución de la cinemática directa queda como:

$$ {}^{R}\dot{\xi} = (\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B}\dot{\varphi} $$

$$ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{\top}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{\top}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \\ br & -br \end{pmatrix} $$

$$ (\mathbf{A}^{\top}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\top}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & r \\ 0 & 0 \\ br & -br \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/2b & -r/2b \end{pmatrix} $$

Luego:

$$ \begin{pmatrix} {}^{R}\dot{x} \\ {}^{R}\dot{y} \\ {}^{R}\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/2b & -r/2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix} $$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Solución de la cinemática directa:

$$\begin{pmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ {}^R\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/2b & -r/2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix}$$

- Velocidad hacia adelante: ${}^R\dot{x} = r\frac{(\dot{\varphi}_{der}+\dot{\varphi}_{izq})}{2}$.
- No hay desplazamiento trasversal: ${}^R\dot{y} = 0$.
- Velocidad angular: ${}^R\dot{x} = r\frac{(\dot{\varphi}_{der}-\dot{\varphi}_{izq})}{2b}$.

Por otro lado, la solución de la cinemática inversa queda como:

$$\dot{\varphi} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^R \dot{\xi}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^\top \mathbf{B} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \mathbf{B}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} r & 0 & br \\ r & 0 & -rb \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/r^2 & 0 \\ 0 & 1/r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 & -br \\ 0 & 0 & br \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ {}^R\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

Solución de la cinemática inversa:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ {}^R\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

→ Velocidad motor derecho: $\dot{\varphi}_{der} = \frac{({}^R\dot{x} + {}^R\dot{\theta} b)}{r}$

→ Velocidad motor izquierdo: $\dot{\varphi}_{izq} = \frac{({}^R\dot{x} - {}^R\dot{\theta} b)}{r}$

Un ejemplo sencillo: robot terrestre diferencial

→ Cinemática directa:

$$\begin{pmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ {}^R\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r/2 & r/2 \\ 0 & 0 \\ r/2b & -r/2b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix}$$

→ Cinemática inversa:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{der} \\ \dot{\varphi}_{izq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/r & 0 & b/r \\ 1/r & 0 & -b/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^R\dot{x} \\ {}^R\dot{y} \\ {}^R\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Odometría

Queremos traducir el movimiento rotacional de las ruedas (medido con los encoders) en desplazamiento lineal y rotación del robot.

Si conocemos:

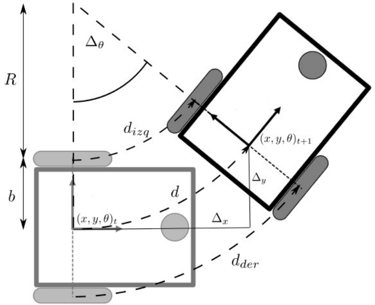
- Los pulsos (o cuentas) α_{der} y α_{izq} de los encoders ubicados en las ruedas derecha e izquierda respectivamente.
- El diámetro D de las ruedas que supondremos iguales.
- La cantidad de pulsos de encoders P por cada revolución de la rueda.
- La reducción de los motores G.

Tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{izq} &= R\Delta_\theta \\ d_{der} &= (R+2b)\Delta_\theta \end{aligned}$$

Para hallar Δ_θ podemos despejar R de ambas ecuaciones obteniendo:

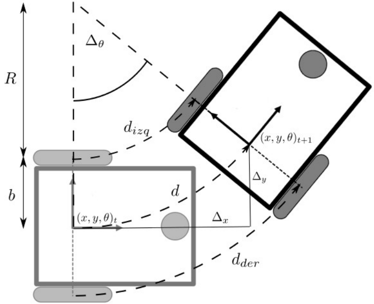
$$\frac{d_{izq}}{\Delta_\theta} = \frac{d_{der}}{\Delta_\theta} - 2b$$



Odometría

Entonces las cuentas de odometría quedan:

$$
\begin{aligned}
d_{izq/der} &= \pi D \frac{\Delta\alpha_{izq/der}}{P} G \\
\Delta\theta &= \frac{d_{der} - d_{izq}}{2b} \\
d &= \frac{d_{izq} + d_{der}}{2} \\
\Delta x &= d \cdot cos(\theta) \\
\Delta y &= d \cdot sen(\theta)
\end{aligned}
$$



Cuando trabajamos en simulación podemos considerar que el motor no tiene reducción ($G = 1$) que sería el caso donde el eje del motor se conecta a la rueda directamente.

Odometría

La odometría nos permite proveer una estimación de la pose del robot para cada instante de tiempo gracias a la información suministrada por los encoders de las ruedas.

- → **Ventaja:** sólo requiere de encoders, no es necesario ningún otro sensor, la integración de la información consisten en ecuaciones geométricas sencillas.
- → **Desventaja:** el error de la posición crece en forma no acotada a menos que una referencia externa pueda ser usada periódicamente.

Los errores de odometría se pueden dividir en:

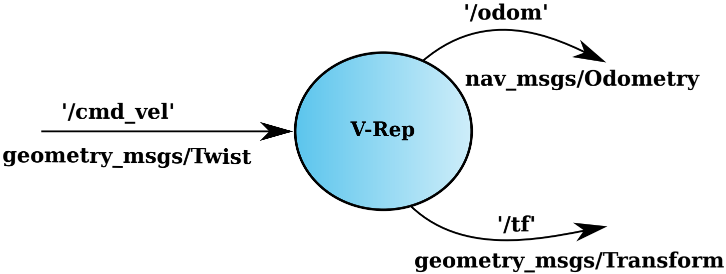
- → **No sistemáticos:** son causados por la interacción del robot con caracterísitcas impredecibles del entorno (por ejemplo, la rueda patina).
- → **Sistemáticos:** son específicos de las características del robot, no dependen del medio. Por ejemplo, el diámetro de las ruedas no es igual, la distancia entre las ruedas no exactamente la considerada para las ecuaciones.

Los errores sistemáticos se pueden contemplar para mejorar la estimación de la pose[1]

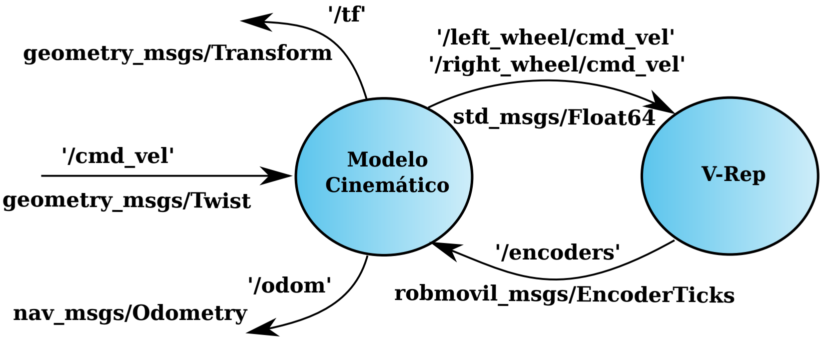
[1] J. Borenstein, Johann, L. Feng, "Measurement and correction of systematic odometry errors in mobile robots"

IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1996.

Para el Taller, ¿de dónde venimos?

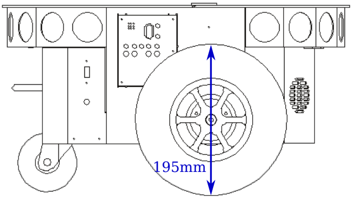


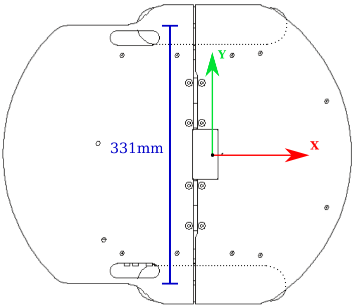
Para el Taller, ¿qué tenemos que hacer?



El modelo cinemático depende de la plataforma robot que se esté utilizando y de los actuadores que esta posea.

Detalles de la plataforma: Pioneer 3-DX





- Modelo diferencial de rueda fija.
- Diametro de la rueda: 195mm.
- Distancia entre las ruedas: 331mm.
- Encoder: 500 cuentas (ticks) por revolución (vuelta completa).
- Las ruedas se consideran centradas en el eje del robot.

Mensaje de odometría

nav_msgs/Odometry

std_msgs/Header header
string child_frame_id
geometry_msgs/PoseWithCovariance pose
geometry_msgs/TwistWithCovariance twist

std_msgs/Header

uint32 seq
time stamp
string frame_id

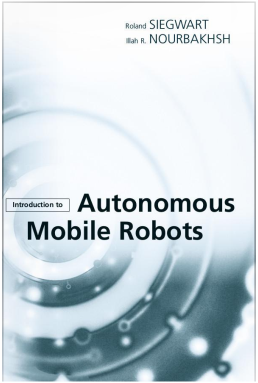
geometry_msgs/PoseWithCovariance

geometry_msgs/Pose pose
float64[36] covariance

geometry_msgs/Pose

geometry_msgs/Point position
geometry_msgs/Quaternion orientation

Más sobre cinemática



"Introduction to autonomous mobile robots", Siegwart, Roland, Illah Reza Nourbakhsh, Davide Scaramuzza. MIT press, 2011. **Capítulo 3**

Más sobre odometría

"Where am I?", Siegwart, J. Borenstein, Johann, L. Feng. University of Michigan, 1996. **Capítulo 1 y 5**