# Lógica de primer orden. Interpretaciones, distinguibilidad, expresabilidad, y definibilidad.

Sergio Abriola

25 de octubre de 2017

**Definición.** Un lenguaje de primer orden $\mathcal{L}$ está dado por un conjunto de símbolos de constantes $C$, un conjunto $F$ de símbolos de funciones (cada una con cierta aridad fija), y un conjunto $P$ no vacío de símbolos de predicados (cada uno con cierta aridad). A veces consideramos que $P$ contiene al símbolo de relación binaria $=$, el cual es siempre es interpretado como la igualdad usual.

Decimos que $\mathcal{M}$ es una $\mathcal{L}$-estructura (o una *interpretación* de $\mathcal{L}$) si consiste de un conjunto no vacío $M$ provisto de interpretaciones para todos los símbolos de $\mathcal{L}$. Es decir:

- Para cada símbolo de constante $c \in C$, hay un $c_{\mathcal{M}} \in M$.
- Para cada símbolo de función $f \in F$ de aridad $n$, hay una función (total) $f_{\mathcal{M}} : M^n \to M$.
- Para cada símbolo de predicado $p \in P$ de aridad $n$, hay una relación $n$-aria $p_{\mathcal{M}} \subseteq M^n$.

**Ejercicio 1.** Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad $\{c, f, R, =\}$, donde $c$ es un símbolo de constante, $f$ es un símbolo de función 1-aria, y $R$ un símbolo de predicado (o relación) 2-aria. Decidir si son $\mathcal{L}$-estructuras las siguientes estructuras:

1. $\mathcal{M}_1 = \{\mathbb{Z}, -3, s, <\}$. Donde $s$ es la función 'sucesor' ($s(x) = x + 1$) y $<$ es el 'menor' usual.
2. $\mathcal{M}_2 = \{\mathbb{N}, 1, +, <\}$. Donde $+$ es la función 'suma' ($+(x, y) = x + y$) y $<$ es el 'menor' usual.
3. $\mathcal{M}_3 = \{\mathbb{Z}, 0, r, p\}$. Donde $r(x) = \sqrt{x}$, y $x \in p$ sii $x > 0$.
4. $\mathcal{M}_4 = \{T, r, id, \downarrow\}$. Donde $T$ es un árbol maximal de altura 2 y ramificación 2, $r$ es la raíz de $T$, $\mathrm{id}(x) = x$, y $x \downarrow y$ sii $y$ es hijo de $x$.

*Resolución.*

1. Sí. Acá, $c_{\mathcal{M}_1} = -3, f_{\mathcal{M}_1} = s, R_{\mathcal{M}_1} =<$.
2. No. La suma $+$ no es una interpretación válida para $f$, porque $f$ es un símbolo de función 1-aria y la suma es 2-aria.
3. No. La raíz cuadrada no es una función total (y además el resultado no siempre está en $\mathbb{Z}$). Ademas, $p$ es relación unaria en vez de binaria.
4. Sí. Acá, $c_{\mathcal{M}_4} = r, f_{\mathcal{M}_4} = id, R_{\mathcal{M}_4} =\downarrow$.

□

**Definición.** Una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi$ se dice *universalmente válida* si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y toda valuación $v$ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi$ se dice *válida o verdadera* en una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ si para toda valuación $v$ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

Una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi$ se dice *satisfacible* si existe alguna $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ y una valuación $v$ tales que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$.

**Ejercicio 2.** Decidir si las siguientes $\mathcal{L}$-fórmulas son universalmente válidas, válidas en $\mathcal{M}_1$ o $\mathcal{M}_4$, satisfacibles, o insatisfacibles.

$$\varphi_1 : x = x$$

$$\varphi_2 : \forall x(\exists y(f(y) = x))$$

$$\varphi_3 : \forall x(xRf(x))$$

$$\varphi_4 : \forall x(x = c) \vee \forall x(f(x) \neq x \wedge f(f(x)) = x)$$

$$\varphi_5 : \forall x(x \neq c)$$

*Resolución.*

$\varphi_1$ : Universalmente válida

$\varphi_2$ : No es universalmente válida. Vale en $\mathcal{M}_1$ y en $\mathcal{M}_4$

$\varphi_3$ : No es universalmente válida. Vale en $\mathcal{M}_1$ y no en $\mathcal{M}_4$

$\varphi_4$ : No vale ni en $\mathcal{M}_1$ ni en $\mathcal{M}_4$, pero es verdadera en una estructura de un solo elemento

$\varphi_5$ : Insatisfacible

$\square$

**Definición.** Decimos que un elemento $e$ del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ es *distinguible* si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi$ con una sola variable libre $x$ tal que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

**Ejercicio 3.** Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje con igualdad que consiste únicamente de un predicado binario $R$. Sea $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-interpretación que consiste en un árbol ($R_{\mathcal{M}}$ es la relación de accesibilidad: $xR_{\mathcal{M}}y$ sii $y$ es hijo de $x$). Demostrar que la raíz de $\mathcal{M}$ es un elemento distinguible.

*Resolución.* En efecto, se puede distinguir a la raíz con la fórmula: $\varphi : \forall y(\neg(yRx))$. $\square$

**Ejercicio 4.** Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de primer orden con igualdad, con una relación binaria $<$. Considerar la siguiente $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo $\omega^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$.

$$(x, y) <_{\mathcal{M}} (x', y') \text{ iff } (x < x' \text{ o } x = x' \text{ y } y < y')$$

Demostrar que son distinguibles todos los elemento de la forma $(i, 0)$ con $i \in \mathbb{N}$.

*Resolución.* Vamos a construir inductivamente predicados $\varphi_i$, tales que cada uno tiene una única variable libre $y$ y cada $\varphi_i$ es válido únicamente en valuaciones $v$ tales que $v(y) = (i, 0)$.

Para el caso base, definimos

$$\varphi_0 : \neg(\exists x(x < y))$$

Efectivamente tiene como única variable libre a $y$, y solo se satisface en $\mathcal{M}$ cuando $v(y) = (0, 0)$.

Ahora, supongamos que tenemos a $\varphi_i$ construida para todo $i \leq n$. Veamos que podemos construir a $\varphi_{n+1}$. Para eso, primero construimos otra fórmula con variable libre $z$ que dice que $z$ es de la forma $(i, 0)$ para algún $i$.

$$\psi : \forall x(x < z \to \exists x_2(x < x_2 \wedge x_2 < z))$$

Ahora definimos

$$\varphi_{n+1} : \psi(y) \wedge \neg(\varphi_0(y)) \wedge \cdots \wedge \neg(\varphi_n(y)) \wedge \forall x((\psi(x) \wedge x < y) \to (\varphi_0(x) \vee \varphi_1(x) \cdots \vee \varphi_n(x)))$$

Observar que $\varphi_{n+1}$ distingue a $(n+1, 0)$, como queríamos.
Entonces, probamos que todos los elementos de $\mathcal{M}$ de la forma $(i, 0)$ son distinguibles. □

**Definición.** Dada una $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$ con universo $A$, decimos que una relación $R \subseteq A^n$ es *expresable* si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi$ con $n$ variables libres $x_1, \ldots, x_n$ tal que para toda valuación $v$, vale que $\mathcal{M} \models \varphi[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R_{\mathcal{M}}$.

**Ejercicio 5.** Sea $\mathcal{L} = \langle +, = \rangle$, con $+$ un símbolo de función binario. Sea, con cierto abuso de notación, $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, = \rangle$, donde $+$ es la suma de naturales usual. Demostrar que son expresables las relaciones $R_{\leq} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq x_2\}$ y $R_{<} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 < x_2\}$.

*Resolución.* La siguiente fórmula, de variables libres $x_1$, $x_2$ expresa $R_{\leq}$:

$$\varphi_{\leq} : \exists x(+(x_1, x) = x_2)$$

Por otro lado, la siguiente fórmula expresa $R_{<}$ al poner la condición que el nuevo sumando no sea el 0:

$$\varphi_{<} : \exists x(\neg(+(x, x) = x) \wedge +(x_1, x) = x_2)$$

□

**Definición.** Decimos que una clase de $\mathcal{L}$-estructuras $\mathcal{K}$ es *definible* si existe una sentencia $\varphi$ tal que para toda $\mathcal{L}$-interpretación $\mathcal{M}$, vale que $\mathcal{M} \models \varphi$ sii $\mathcal{M} \in \mathcal{K}$.

**Ejercicio 6.** Sea $\mathcal{L} = \langle R, = \rangle$, donde $R$ es un símbolo de relación binaria. Demostrar que es definible la clase de $\mathcal{L}$-modelos donde $R$ es una relación irreflexiva, transitiva, y con al menos un mínimo.

*Resolución.* Una sentencia que sirve es:

$$\varphi : \forall x(\neg(xRx)) \wedge \forall x(\forall y(\forall z(xRy \wedge yRz \to xRz))) \wedge \exists x(\forall y(x \neq y \to \neg(yRx)))$$

Si se quiere, se puede acortar a otra sentencia equivalente (usando irreflexividad al final):

$$\varphi' : \forall x(\forall y(\forall z(\neg(xRx) \wedge (xRy \wedge yRz \to xRz)))) \wedge \exists x(\forall y(\neg(yRx)))$$

□