Introducción a la Robótica Móvil

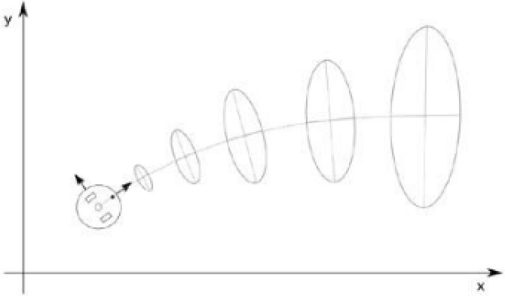
Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Robótica Probabilística - clase 14

Propagación de la incertidumbre

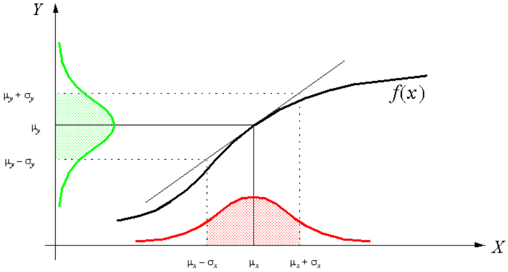
¿Cómo se propaga la incertidumbre?



- Queremos estimar cómo se propaga la incertidumbre de la pose de un robot diferencial a medida que se mueve.
- Las variables aleatorias x, y, θ se estiman a oartir del modelo cinemático que involucra las velocidades lineal v y angular ω (el control) y los errores de movimiento (otras variales aleatorias).
- Si suponemos funciones de distribución de probabilidad gaussianas, entonces sabemos cómo resolver la propagación para el caso lineal (suma y multiplicación de gaussianas dan gaussianas).

Ley de propagación del error (incertidumbre)

- Si $y = ax + b$ entonces $y \sim \mathcal{N}\left(a\mu_x + b, a^2\sigma_x^2\right)$, i.e. $\sigma_y = a^2\sigma_x^2$.
- ¿Qué pasa si $y = f(x)$ es no lineal?
- Podemos aplicar Taylor de grado 1 para hallar una aproximación lineal.
- Entonces:
  $\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2$
  $y \sim \mathcal{N}\left(f(\mu_x), \sigma_y^2\right)$
- Nos da una medida de cómo afecta un cambio de x en y.



Ley de propagación del error (incertidumbre)

- ¿Qué pasa cuando tenemos múltiples dimensiones?
- Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ vectores de variables aleatorias.
- Si $y = Ax + B$ entonces $y \sim \mathcal{N}(A\mu_x + B, A\Sigma_x A^\top)$ donde:

$$\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \dots & \sigma_{x_1}\sigma_{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n}\sigma_{x_1} & \dots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix}$$

- Si $y = f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ es no lineal aproximamos por Taylor de grado 1 (como en el caso de una dimensión).
- ¿Cómo calculamos la media μ_y y la covarianza Σ_y?
- $\mu_y = f(\mu_x)$ y $\Sigma_y = F_x \Sigma_x F_x^\top$ donde F_x es el jacobiano de $f(x)$ respecto de x.

$$F_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Ejemplo: propagación del error para un robot diferencial

¿Cuál es el estado?

$$x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el control?

$$u_t = \begin{pmatrix} \upsilon \\ \omega \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el modelo de proceso (predicción)?

$$f(x_t, u_t, w) = \begin{pmatrix} x + \upsilon \Delta t cos(\theta) + w_x \\ y + \upsilon \Delta t sen(\theta) + w_y \\ normalizar(\theta + \omega \Delta t) + w_\theta \end{pmatrix}$$

donde $w \sim \mathcal{N}(0, Q)$ es ruido blanco aditivo.

Ejemplo: propagación del error para un robot diferencial

¿Cómo calculamos la media?

$$\mu_{x_{t+1}} = f(\mu_{x_t}, u_t, \mu_w = 0) = f(\mu_{x_t}, u_t, 0)$$

¿Cómo calculamos la covarianza? i.e. ¿Cómo se propaga el error?
Sean x_1 y x_2 dos variables aleatorias. Entonces:

$$y = x_1 + x_2 \sim \mathcal{N}(\mu_{x_1} + \mu_{x_2}, \sigma^2_{x_1} + \sigma^2_{x_2})$$

$$\Sigma_{x_{t+1}} = F_x \Sigma_{x_t} F_x^\top + W \Sigma_{w_t} W^\top = F_x \Sigma_{x_t} F_x^\top + WQW^\top$$

Donde:

$$F_x = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial x}$$

$$W = \frac{\partial f(x,u,w)}{\partial w}$$

$$F_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -sen(\theta)\upsilon\Delta t \\ 0 & 1 & cos(\theta)\upsilon\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$