Introducción a la Robótica Móvil

Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Cinemática (Parte I) - clase 7

Sistemas de coordenadas, transformaciones y rotaciones

Cinemática de un robot móvil

Queremos describir el movimiento de un robot móvil sin considerar las causas que lo originan (fuerzas y torques).

- El robot lo podemos representar como un cuerpo rígido.
- El movimiento podemos modelarlo como una serie de posiciones y orientaciones del robot en el tiempo.
- La posición y orientación determinan univocamente la ubicación del cuerpo rígido en el espacio y se denomina *pose*.
- Una pose siempre está referenciada a un origen de coordenadas o marco de referencia

Marco de referencia de coordenadas

Un marco de referencia de coordenadas, o marco a secas (*frame*), i consiste en:

- Un origen denotado O_i.
- Una terna de vectores ortonormales denotados $(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i)$ que conforman una base.

Un desplazamiento de un cuerpo rígido (nuestro robot) puede expresarse como el desplazamiento entre dos marcos de referencia, uno que diremos que está fijo y el otro en movimiento (la pose del robot).

El desplazamiento puede ser una traslación, una rotación o una combinación de ambas. Pero, ¿cómo las representamos?

Posición y traslación

La posición de un punto **p** relativo al marco de referencia i puede denotarse con el vector

$$^{i}\mathbf{p} = \begin{pmatrix} ^{i}p^{x} \\ ^{i}p^{y} \\ ^{i}p^{z} \end{pmatrix}$$

Si lo expresamos en función de la terna de vectores ortonormales del marco i tenemos que $^{i}\mathbf{p} = {}^{i}p^{x}\hat{\mathbf{x}}_i + {}^{i}p^{y}\hat{\mathbf{y}}_i + {}^{i}p^{z}\hat{\mathbf{z}}_i$

Si queremos trasladar el punto le tenemos que sumar un vector de traslación: $^{i}\mathbf{p}' = {}^{i}\mathbf{p} + {}^{i}\mathbf{t}$. La traslación en el marco de referencia i viene dada por:

$$^{i}\mathbf{t} = \begin{pmatrix} ^{i}p'^{x} - {}^{i}p^{x} \\ ^{i}p'^{y} - {}^{i}p^{y} \\ ^{i}p'^{z} - {}^{i}p^{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ^{i}t^{x} \\ ^{i}t^{y} \\ ^{i}t^{z} \end{pmatrix}$$

Posición y traslación

¿Qué pasa si queremos trasladar el marco i (en lugar de trasladar el punto)?

Importante: La posición de un marco de referencia siempre la tenemos que referenciar respecto de otro marco.

La posición del origen de coordenadas del marco i relativo al marco j puede denotarse como:

$$^{j}\mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} ^{j}p_i^x \\ ^{j}p_i^y \\ ^{j}p_i^z \end{pmatrix}$$

Las componentes del vector $^{j}\mathbf{p}_i$ representan las coordenadas Cartesianas del origen O_i en el marco j.

Posición y traslación

Entonces, la posición del origen de coordenadas del marco i trasladado (lo llamaremos marco i') relativo al marco j puede denotarse como:

$$ {}^{j}\mathbf{p}_{i'} = \begin{pmatrix} {}^{j}p_{i'}^{x} \\ {}^{j}p_{i'}^{y} \\ {}^{j}p_{i'}^{z} \end{pmatrix} $$

Las componentes del vector ${}^{j}\mathbf{p}_{i'}$ representan las coordenadas Cartesianas del origen $O_{i'}$ en el marco j.

Luego tenemos que ${}^{j}O_{i'} = {}^{j}O_{i} + {}^{j}\mathbf{t}$ donde ${}^{j}\mathbf{t} = {}^{j}\mathbf{p}_{i'} - {}^{j}\mathbf{p}_{i}$

Posición y traslación

- Una traslación es un desplazamiento en la que el cuerpo rígido mantiene su orientación.
- La traslación de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de su posición anterior seguida de una traslación.
- A la inversa, la posición de un cuerpo rígido puede expresarse como una traslación que lleva al cuerpo rígido desde una posición en la que el marco del cuerpo coincide con el marco fijo a otra donde los marcos no coinciden.

Orientación y rotaciones

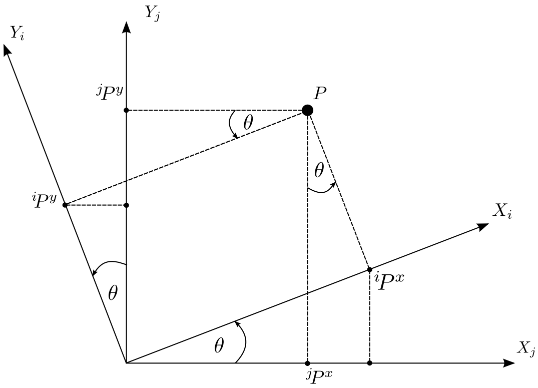
La orientación del marco i relativa al marco j puede denotarse representando los versores $(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i)$ en función de los versores $(\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\mathbf{y}}_j, \hat{\mathbf{z}}_j)$, lo que define la matriz de rotación:

$$^{j}\mathbf{R}_i = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j & \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j & \hat{\mathbf{z}}_i \cdot \hat{\mathbf{x}}_j \\ \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j & \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j & \hat{\mathbf{z}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j \\ \hat{\mathbf{x}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}_j & \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}_j & \hat{\mathbf{z}}_i \cdot \hat{\mathbf{z}}_j \end{pmatrix}$$

donde cada columna de la matriz $^{j}\mathbf{R}_i$ representa la proyección de un eje del marco de referencia i en el marco de referencia j.

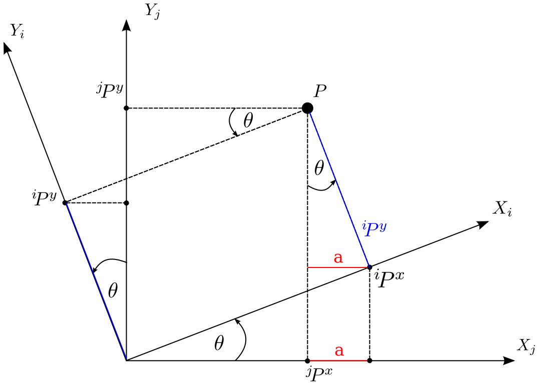
- → Una rotación es un desplazamiento en la que al menos un punto del cuerpo rígido mantiene su posición inicial (por donde pasa el eje de rotación).
- → Una representación de una orientación puede usarse para generar una representación de rotación y viceversa (idem posición y traslación).

Rotaciones en 2D



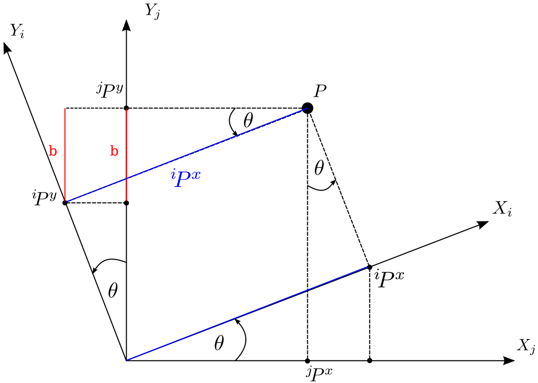
- Representar el marco de i relativo al marco j puede resolverse interpretando todos los puntos pertenecientes a los ejes del marco i “bajo la perspectiva” del marco j.
- De forma aún más general, para todo punto P relativo al marco i, i.e. ${}^iP = ({}^iP^x, {}^iP^y)$ buscamos encontrar ${}^jP = ({}^jP^x, {}^jP^y)$.

Rotaciones en 2D



$$ {}^jP^x = cos(\theta)^iP^x - a = cos(\theta)^iP^x - sen(\theta)^iP^y $$

Rotaciones en 2D



$$^jP^x = cos(\theta)^iP^x - a = cos(\theta)^iP^x - sen(\theta)^iP^y$$
$$^jP^y = b + cos(\theta)^iP^y = sen(\theta)^iP^x + cos(\theta)^iP^y$$

Este análisis resulta en un sistema de ecuaciones tal que:

- ${}^{j}P^{x} = cos(\theta)^{i}P^{x} - sen(\theta)^{i}P^{y}$
- ${}^{j}P^{y} = sen(\theta)^{i}P^{x} + cos(\theta)^{i}P^{y}$

Pudiendo representarse como una matriz a la que llamaremos **matriz de rotación**:

$$ {}^{j}\mathbf{R}_{i}(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} $$

De manera que ${}^{j}\mathbf{R}_{i}$ permite interpretar el marco i en relación a j. Y no solo eso, sino que permite interpretar todo punto expresado en referencia a i, en relación a j.

Rotaciones en 3D

Es posible llevar el mismo concepto a 3 dimensiones, teniendo **3 rotaciones distintas** para cada par de ejes:

- Se escribe la rotación del marco *i* sobre el eje $\hat{\mathbf{z}}_j$ de ángulo θ como:

$$\mathbf{R}_Z(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- La rotación sobre el eje $\hat{\mathbf{y}}_j$

$$\mathbf{R}_Y(\gamma) = \begin{pmatrix} cos(\gamma) & 0 & sen(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\gamma) & 0 & cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

- Y sobre el eje $\hat{\mathbf{x}}_j$

$$\mathbf{R}_X(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\rho) & -sen(\rho) \\ 0 & sen(\rho) & cos(\rho) \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz de rotación

- La matriz de rotación ${}^{j}\mathbf{R}_{i}$ contiene 9 elementos, pero sólo 3 parámetros se requieren para definir la orientación de un cuerpo en el espacio.
- Como los versores $(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i)$ del marco i son ortogonales al igual que los versores $(\hat{\mathbf{x}}_j, \hat{\mathbf{y}}_j, \hat{\mathbf{z}}_j)$ del marco j, las columnas de ${}^{j}\mathbf{R}_{i}$ son también ortogonales.
- Una matriz compuesta por vectores columna ortogonales se conoce como matriz ortogonal y tiene la propiedad de que su inversa es la traspuesta. La orientación del marco j respecto del marco i es la matriz de rotación ${}^{i}\mathbf{R}_{j}$ cuyas filas son las columnas de la matriz ${}^{j}\mathbf{R}_{i}$.
- Además, las matrices de rotación se pueden combinar a través del producto matricial. La orientación del marco i respecto del marco k puede expresarse como:

$$ {}^{k}\mathbf{R}_{i} = {}^{k}\mathbf{R}_{j}{}^{j}\mathbf{R}_{i}. $$

Ángulos de Euler

- Para una representación minimal, la orientación del marco *i* relativa al marco *j* puede denotarse como un vector de tres ángulos (α, β, γ) que se los conoce como ángulos de Euler.
- Podemos pensar como que aplicamos una matriz de rotación simple por cada uno de los ejes.
- La ubicación del eje de cada rotación sucesiva depende de las rotaciones precedentes por lo que el orden de las rotaciones debe acompañar los tres ángulos para definir la orientación. Tenemos que tomar una convención sobre en qué orden aplicamos las rotaciones.
- Por ejemplo, podemos usar los ángulos (α, β, γ) para denotar las rotaciones sobre los ejes Z-Y-X respectivamente. Tomando un marco *i* y un marco *j* inicialmente coincidente, α es la rotación sobre el eje $\hat{z}$ del marco *i*.
- El problema es que con los ángulos de Euler tengo más de una forma de representar la misma rotación (gimbal lock).

Cuaterniones

Un cuaternión $\boldsymbol{\epsilon}$ se define como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 + \epsilon_1 i + \epsilon_2 j + \epsilon_3 k,$$

donde los componentes ϵ_0, ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 son escalares y i, j y k son operadores que se definen de manera de satisfacer que:

$$\begin{aligned} ii &= jj = kk = -1, \\ ij &= k, jk = i, ki = j, \\ ji &= -k, jk = -i, ki = -j \end{aligned}$$

- Para sumar dos cuaterniones se suman cada componente respectivamente (los operadores actúan como separadores):

$$\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}' = \epsilon_0 + \epsilon_0' + (\epsilon_1 + \epsilon_1')i + (\epsilon_2 + \epsilon_2')j + (\epsilon_3 + \epsilon_3')k$$

- El elemento neutro para la suma es el cuaternión $\mathbf{0} = 0 + 0i + 0j + 0k$. La suma es asociativa, conmutativa y distributuva.

- El elemento neutro para la multiplicación es $\mathbf{I} = 0 + 0i + 0j + 0k$. La multiplicación es asociativa y distributiva, pero no conmutativa. Siguiendo la convención de operadores y sumas, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}' =& \epsilon_0\epsilon_0' - \epsilon_1\epsilon_1' - \epsilon_2\epsilon_2' - \epsilon_3\epsilon_3' + \\
&+(\epsilon_0\epsilon_1' + \epsilon_1\epsilon_0' + \epsilon_2\epsilon_3' - \epsilon_3\epsilon_2')i + \\
&+(\epsilon_0\epsilon_2' + \epsilon_2\epsilon_0' + \epsilon_3\epsilon_1' - \epsilon_1\epsilon_3')j + \\
&+(\epsilon_0\epsilon_3' + \epsilon_3\epsilon_0' + \epsilon_1\epsilon_2' - \epsilon_2\epsilon_1')k
\end{aligned}$$

Cuaterniones

- El conjugado de un cuaternión se define como:

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon_0 - \epsilon_1 i - \epsilon_2 j - \epsilon_3 k$$

de manera que:

$$\boldsymbol{\epsilon}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2$$

- Un cuaternión unitario puede definirse como aquel que satisface que $\boldsymbol{\epsilon}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = 1$. En este caso ϵ_0 se referencia como la parte escalar y $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ como la parte vectorial.
- Un vector se puede definir en la notación de cuaterniones como un cuaternión donde $\epsilon_0 = 0$, i.e. $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ puede expresarse como $\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k$.
- Los cuaterniones unitarios se usan para describir una orientación. Para cualquier cuaternión unitario $\boldsymbol{\epsilon}$, la operación $\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{v}\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ realiza una rotación del vector $\mathbf{v}$ en la dirección $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de magnitud ϵ_0.

Transformaciones Homogéneas

Una transformación homogénea combina un vector de traslación y una matriz de rotación en una sola matriz.

- Recordemos que la posición del origen de coordenadas del marco i respecto del marco j puede denotarse por el vector ${}^j\mathbf{p}_i = ({}^jp_i^x \; {}^jp_i^y \; {}^jp_i^z)^\top$ y que la orientación del marco i relativa al marco j puede denotarse con la matriz ${}^j\mathbf{R}_i$.
- Entonces, cualquier vector ${}^i\mathbf{a}$ expresado relativo al marco i puede expresarse respecto del marco j:

$$ {}^j\mathbf{a} = {}^j\mathbf{R}_i {}^i\mathbf{a} + {}^j\mathbf{p}_i $$

- Esta ecuación podemos reescribirla de forma:

$$ \begin{pmatrix} {}^j\mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^j\mathbf{R}_i & {}^j\mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^i\mathbf{a} \\ 1 \end{pmatrix} $$

donde ${}^jT_i = \begin{pmatrix} {}^j\mathbf{R}_i & {}^j\mathbf{p}_i \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$ es la transformación homogénera y $({}^j\mathbf{a} \quad 1)^\top$ y $({}^i\mathbf{a} \quad 1)^\top$ son las representaciones homogéneas de los vectores ${}^j\mathbf{a}$ y ${}^i\mathbf{a}$ respectivamente.

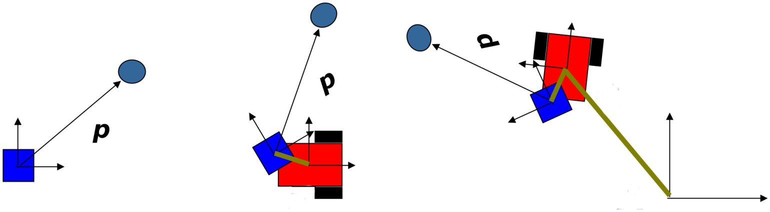
Transformaciones Homogéneas

- La matriz ${}^{j}T_{i}$ transforma vectores desde el marco i al marco j.
- Su inversa ${}^{j}T_{i}^{-1}$ transforma vectores del marco j al marco i:

$$
{}^{j}T_{i}^{-1} = {}^{i}T_{j} = \begin{pmatrix} {}^{j}\mathbf{R}_{i}^{\top} & -{}^{j}\mathbf{R}_{i}^{\top}\,{}^{j}\mathbf{p}_{i} \\ \mathbf{0}^{\top} & 1 \end{pmatrix}
$$

- La composición de transformaciones homogéneas se lo logra multiplicando matrices: ${}^{k}T_{i} = {}^{k}T_{j}\,{}^{j}T_{i}$. Como la multiplicación de matrices no conmuta, el orden de la multiplicación es muy importante!

Veamos un ejemplo. Tengo un punto en el mundo que es observado desde un sensor:



Si queremos hallar la transformación para poder representar el punto P desde el marco de referencia del mundo tenemos que hacer:

$$
\begin{aligned}
{}^{w}P &= {}^{w}T_{r}\,{}^{r}T_{s}\,{}^{s}P \\
{}^{w}P &= {}^{w}T_{s}\,{}^{s}P
\end{aligned}
$$