

PRÁCTICA 1 - FUNCIONES PRIMITIVAS RECURSIVAS Y CLASES *PRC*

Ejercicio 1. Mostrar que, dado un k fijo, la función constante $f(x) = k$ puede definirse usando las funciones iniciales y composición (*sin* usar recursión primitiva).

Ejercicio 2. Probar que las siguientes funciones son primitivas recursivas, mostrando que pueden obtenerse a partir de las funciones iniciales usando composición y/o recursión primitiva:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x + y & f_2(x, y) &= x \cdot y & f_3(x, y) &= x^y & f_4(x, y) &= \underbrace{x^{x^{\dots^x}}}_{y \text{ veces}} \\ g_1(x) &= x \div 1 & g_2(x, y) &= x \div y & g_3(x, y) &= \max\{x, y\} & g_4(x, y) &= \min\{x, y\} \end{aligned}$$

Observación: $x \div y = \begin{cases} x - y & \text{if } y \leq x \\ 0 & \text{if } y > x \end{cases}$; y se asume que $f_4(x, 0) = 1$.

Ejercicio 3. Sea \mathcal{C}_i la clase de funciones iniciales, es decir, aquella que contiene a:

$$n(x) = 0 \quad s(x) = x + 1 \quad u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \{1, \dots, n\}$$

y sea \mathcal{C}_c la (mínima) clase que extiende a \mathcal{C}_i y se encuentra cerrada por composición, i.e., si f, g_1, \dots, g_m están en \mathcal{C}_c , entonces $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$ también lo está.

- Demostrar que para toda $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, f está en \mathcal{C}_c sii existe $k \geq 0$ tal que, o bien sucede $f(x_1, \dots, x_n) = k$, o bien para algún i fijo, se tiene $f(x_1, \dots, x_n) = x_i + k$.
- Mostrar que existe una función primitiva recursiva que no está en \mathcal{C}_c .

Ejercicio 4. Llamamos *predicado* a cualquier función $p : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$, escribimos $p(a_1, \dots, a_n)$ en lugar de $p(a_1, \dots, a_n) = 1$ y decimos, informalmente, en ese caso, que “ $p(a_1, \dots, a_n)$ es verdadero”. Mostrar que los predicados $\leq, \geq, =, \neq, < y >$: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ están en cualquier clase *PRC*.

Ejercicio 5. Sea \mathcal{C} una clase *PRC*, sean $f_1, \dots, f_k, g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ funciones en \mathcal{C} y sean también $p_1, \dots, p_k : \mathbb{N}^n \rightarrow \{0, 1\}$ predicados disjuntos en \mathcal{C} (i.e., no sucede $p_i(a_1, \dots, a_n) = p_j(a_1, \dots, a_n) = 1$ con $i \neq j$ para ningún $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$). Mostrar que también está en \mathcal{C} cualquier función h que cumpla:

$$h(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) & \text{si } p_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \\ f_k(x_1, \dots, x_n) & \text{si } p_k(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) & \text{si no} \end{cases}$$

Observar que h queda completamente determinada por este esquema.

Ejercicio 6. a. Demostrar que el predicado $\text{par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ está en toda clase *PRC*.

b. Demostrar que la función $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ está en toda clase *PRC*.

c. Sea \mathcal{C} una clase *PRC*, y sean $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ y $g_1, g_2 : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ funciones en \mathcal{C} . Mostrar que también está en \mathcal{C} cualquier h que cumpla:

$$h(x_1, \dots, x_n, t) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{si } t = 0 \\ g_1(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n, k, h(x_1, \dots, x_n, t-1)) & \text{si } t = 2 \cdot k + 2 \end{cases}$$

Observar que h queda completamente determinada por este esquema.

Ejercicio 7. Sea \mathcal{C} una clase *PRC* y sea $p : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$ un predicado en \mathcal{C} . Mostrar que también están en \mathcal{C} las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
\text{cantidad}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= |\{t \mid y \leq t \leq z \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\}| \\
\text{todos}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (\forall t : y \leq t \leq z) p(x_1, \dots, x_n, t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{alguno}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= \begin{cases} 1 & \text{si } (\exists t : y \leq t \leq z) p(x_1, \dots, x_n, t) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{minimo}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= \begin{cases} \min\{t \mid y \leq t \leq z \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\} & \text{si existe tal } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{maximo}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= \begin{cases} \max\{t \mid y \leq t \leq z \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\} & \text{si existe tal } t \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{unico}_p(x_1, \dots, x_n, y, z) &= \begin{cases} u & \text{si } \{u\} = \{t \mid y \leq t \leq z \wedge p(x_1, \dots, x_n, t)\} \\ z + 1 & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observación: pueden usarse los operadores acotados ($\min, \Sigma, \forall, \exists$) vistos en la teórica.

Ejercicio 8. Mostrar que las siguientes funciones están en toda clase *PRC*:

$$\begin{aligned}
\text{cociente}(x, y) &= \lfloor x/y \rfloor \\
\text{resto}(x, y) &= x \bmod y \\
\text{divide}(x, y) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ divide a } y \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{primo}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número primo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\
\text{raiz}(x, y) &= \begin{cases} \lfloor \sqrt[y]{x} \rfloor & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases} \\
\text{nprimo}(n) &= k \text{ si } k \text{ es primo y hay sólo } n - 1 \text{ primos positivos menores que } k
\end{aligned}$$

Observación: Se asume que $\text{cociente}(x, 0) = 0$ y $\text{resto}(x, 0) = x$.

Ejercicio 9. Considerar la codificación de pares de naturales dada por $\langle x, y \rangle = 2^x(2y + 1) \div 1$. Mostrar que las funciones observadoras $l, r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $l(\langle x, y \rangle) = x$ y $r(\langle x, y \rangle) = y$ están en toda clase *PRC*.

Ejercicio 10. Mostrar que *fib*, la función de Fibonacci, está en toda clase *PRC*, donde:

$$\begin{aligned}
\text{fib}(0) &= 0 \\
\text{fib}(1) &= 1 \\
\text{fib}(n + 2) &= \text{fib}(n + 1) + \text{fib}(n)
\end{aligned}$$

Ejercicio 11. * Demostrar que toda clase *PRC* se encuentra cerrada por *recursión mutua*. Es decir, dada \mathcal{C} , una clase *PRC* y dadas f_1, f_2, g_1 y g_2 funciones en \mathcal{C} , mostrar que también están en \mathcal{C} las funciones h_1 y h_2 que cumplen:

$$\begin{aligned}
h_1(x_1, \dots, x_n, t) &= \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) & \text{si } t = 0 \\ g_1(h_1(x_1, \dots, x_n, t - 1), h_2(x_1, \dots, x_n, t - 1), x_1, \dots, x_n, t) & \text{si no} \end{cases} \\
h_2(x_1, \dots, x_n, t) &= \begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_n) & \text{si } t = 0 \\ g_2(h_2(x_1, \dots, x_n, t - 1), h_1(x_1, \dots, x_n, t - 1), x_1, \dots, x_n, t) & \text{si no} \end{cases}
\end{aligned}$$

Observar que h_1 y h_2 quedan completamente determinadas por el esquema de recursión mutua.

Ejercicio 12. Sea \mathcal{C}_{i+p} la clase de funciones que extiende a la clase de funciones iniciales \mathcal{C}_i con la función codificadora de pares $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ y las observadoras $l, r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ y sea \mathcal{C}_{Ack} la (mínima) clase que incluye a \mathcal{C}_{i+p} y se encuentra cerrada por composición y por *iteración de funciones unarias*, i.e., si $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ está en \mathcal{C}_{Ack} , entonces también está $h(n, x) = f^{(n)}(x)$ (recordar que $f^{(n)} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$).

- Demstrar que $\mathcal{C}_{Ack} \subset PR$.
- Observar que en \mathcal{C}_{Ack} se tienen las funciones codificadoras de n-tuplas y sus observadoras.
- Demstrar que si $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ pertenecen a la clase \mathcal{C}_{Ack} y h se obtiene mediante el esquema de recursión primitiva a partir de f y g , entonces la función $s : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $s(\bar{x}, y) = \langle \bar{x}, y, h(\bar{x}, y) \rangle$ también pertenece a la clase \mathcal{C}_{Ack} .
- Concluir que $PR \subset \mathcal{C}_{Ack}$ y, por lo tanto, coinciden.

Ejercicio 13. Considerar la codificación de secuencias finitas de números naturales dada por $[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^n \text{nprimo}(i)^{a_i}$, donde nprimo es la función definida en el Ejercicio 8.

- Mostrar que la codificación dada forma una biyección entre el conjunto de secuencias finitas que no terminan en cero y los números naturales mayores que cero.
- Determinar qué valor codifica la secuencia vacía y mostrar que las siguientes funciones están en toda clase PRC :

- $|\cdot| : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $|[a_1, \dots, a_n]| = n$ (longitud)
- $\cdot[i] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $[a_1, \dots, a_n][i] = \begin{cases} a_i & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$ (observador)
- $[\cdot] : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $[x]$ es la lista con único elemento x (creación)
- $\cdot \circ \cdot : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $[a_1, \dots, a_n] \circ [b_1, \dots, b_m] = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$ (concatenación)
- $\text{sub} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $\text{sub}([a_1, \dots, a_n], i, j) = [a_i, \dots, a_j]$ (sublista)

- Proponer una codificación de secuencias $\rho : \text{Listas} \rightarrow \mathbb{N}$ que forme una biyección entre los números naturales (incluyendo el cero) y el conjunto de *todas* las secuencias finitas de naturales tal que las funciones del punto b estén en toda clase PRC .

Ejercicio 14. a. Demstrar que toda clase PRC se encuentra cerrada por *recursión global* (*course-of-values recursion*). Es decir, dada \mathcal{C} , una clase PRC , y dada una función $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ en \mathcal{C} , mostrar que la función definida como

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, 0) &= f([], x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, t+1) &= f([h(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, h(x_1, \dots, x_n, t)], x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

también está en \mathcal{C} .

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión global.

- Demstrar, a partir del ítem anterior, que dada \mathcal{C} , una clase PRC , y funciones $g_1 : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $g_2 : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ en \mathcal{C} , la función definida como

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n, 0) &= g_1(x_1, \dots, x_n) \\ h(x_1, \dots, x_n, t+1) &= g_2([h(x_1, \dots, x_n, 0), \dots, h(x_1, \dots, x_n, t)], x_1, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

también está en \mathcal{C} .

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión global.

Ejercicio 15. Demostrar que toda clase PRC se encuentra cerrada por *recursión doble*. Es decir, dadas $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^4 \rightarrow \mathbb{N}$ pertenecientes a \mathcal{C} , una clase PRC, demostrar que también está en \mathcal{C} la función $h : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ que cumple:

$$\begin{aligned}h(x, 0, z) &= f(x, 0, z) \\h(x, y, 0) &= f(x, y, 0) \\h(x, y + 1, z + 1) &= g(x, y, z, h(x, y, z))\end{aligned}$$

Observar que h queda completamente determinada por el esquema de recursión doble.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.