Lógica Proposicional

Lógica y Computabilidad

Julián Dabbah (sobre clases de María Emilia Descotte y Laski)

6 de octubre de 2017

Repaso

Sintaxis

- Variables / símbolos proposicionales (PROP): p, p', p", ... (los notamos p, q, r..., p_1, p_2, p_3 ...)
- Fórmulas (FORM):
    - Variables proposicionales
    - $\neg\psi$, donde ψ es una fórmula.
    - $(\varphi \to \psi)$, donde φ y ψ son fórmulas.
- Notación:
    - $\varphi \vee \psi$ es $(\neg\varphi \to \psi)$
    - $\varphi \wedge \psi$ es $\neg(\varphi \to \neg\psi)$

Semántica

- Valuaciones (VAL): $v : \mathsf{PROP} \to \{0, 1\}$
    - $v \models p$ sii $v(p) = 1$
    - $v \models \neg\psi$ sii $v \not\models \psi$
    - $v \models \psi \to \varphi$ sii $v \not\models \psi$ o $v \models \varphi$
- Observación:
    - $v \models \psi \wedge \varphi$ sii $v \models \psi$ y $v \models \varphi$
    - $v \models \psi \vee \varphi$ sii $v \models \psi$ o $v \models \varphi$

Una fórmula φ:

- es una TAUTOLOGÍA si para cualquier valuación $v \in \mathsf{VAL}$, se tiene $v \models \varphi$.
- es una CONTINGENCIA si hay vaulaciones $v, w \in \mathsf{VAL}$ tales que $v \models \varphi$ y $w \not\models \varphi$.
- es una CONTRADICCIÓN si para cualquier valuación $v \in \mathsf{VAL}$, se tiene que $v \not\models \varphi$.

Ejercicio 1

Demostrar que si $\varphi \in \mathsf{FORM}$ y todas sus variables proposicionales aparecen una única vez, entonces φ es una contingencia.

Demostración

Vamos a dar dos valuaciones $v, w \in \mathsf{VAL}$, tal que $v \models \varphi$ y $w \not\models \varphi$. Por inducción estructural:

- Caso base: Si $\varphi = p$, tomo v tal que $v(x) = 1$ para todas las variables, y w tal que $w(x) = 0$.
- Caso inductivo: Supongamos que vale para φ y para ψ y
  - veamos que vale para $\neg\varphi$:
    Observemos que como $\neg\varphi$ no tiene variables repetidas, φ tampoco. Luego, por HI, existen $v', w' \in \mathsf{VAL}$ tales que $v' \models \varphi$ y $w' \not\models \varphi$. Por la semántica de $\neg$, basta tomar $v = w'$ y $w = v'$.
  - veamos que vale para $\varphi \to \psi$:
    Observemos que como $\varphi \to \psi$ no tiene variables repetidas, entonces tampoco las tienen φ y psi. Luego, por HI existen valuaciones $v_1, w_1, v_2, w_2 \in \mathsf{VAL}$ tales que $v_1 \models \varphi$, $w_1 \not\models \varphi$, $v_2 \models \psi$, $w_2 \not\models \psi$. Por la semántica de $\to$, basta tomar $v = w_1$ (¿o cuál otra?). Falta encontrar una valuación que la haga falsa. Para esto, deberíamos conseguir una valuación que haga verdadera φ y falsa ψ. Veamos cómo podemos construirla a partir de las valuaciones que obtuvimos de la hipótesis inductiva. Para esto, aprovechamos que como en $\varphi \to \psi$ no hay símbolos proposicionales repetidos, φ y psi no tienen variables en común. Luego, definamos w de la siguiente manera:

    $$w(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{si } x \text{ aparece en } \varphi \\ w_2(x) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

    La formalización de que $w \models \varphi$ y $w \not\models \psi$ se completa con el resultado del ejercicio 4.b de la práctica 4, pues coincide con v_1 en las variables de φ y con w_2 en las variables de ψ. Si esto es cierto, tenemos, como queríamos, $w \not\models \varphi \to \psi$.

Tablas de verdad

Una TABLA DE VERDAD es un método que nos permite decidir si una fórmula es tautología, contradicción o contingencia, y, en ese último caso, ver qué valuaciones la hacen verdadera.

El método se basa fuertemente en que para saber cómo evalúan las valuaciones a una fórmula φ alcanza con mirar qué valor les asigna a las variables en $\mathbf{Var}(\varphi)$. (Ejercicio 4.b de la práctica 4)

Ejercicio 2

Hallar todas las valuaciones v que cumplen $v \models \neg(q \to (r \wedge p))$.

Por el resultado mencionado, basta ver los 8 casos para $(p, q, r) \in \{0, 1\}^3$. Los ordenamos en forma de tabla y tenemos:

p	q	r	$r \wedge p$	$q \to (r \wedge p)$	$\neg(q \to (r \wedge p))$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	0	**1**
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	**1**
1	1	1	1	1	0

De lo anterior, podemos ver que las valuaciones que nos interesan son las v tales que: $v(p) = v(r) = 0$ y $v(q) = 1$, ó $v(p) = 0$ y $v(q) = v(r) = 1$, ó $v(p) = v(q) = 1$ y $v(r) = 0$. Recordemos que hay infinitas v que cumplen cada una de estas tres condiciones.

Funciones booleanas y Conjuntos adecuados

Definiciones

- Una FUNCIÓN BOOLEANA es una función $f : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$.
- Si $\varphi \in \mathsf{FORM}$ con $\mathbf{Var}(\varphi) \subseteq \{p_1, \ldots, p_n\}$ (con $n \leq m$), decimos que φ INDUCE f si

$$f(x_1, \ldots, x_m) = 1 \text{ sii } v_{x_1,\ldots,x_m} \models \varphi$$

  donde $v_{x_1,\ldots,x_m}(p_i) = \begin{cases} x_i & \text{si } 1 \leq i \leq m \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

  Por ejemplo, la fórmula $p \to q$ induce la función

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(0,\ 0) &= 1 \\ \mathrm{f}(0,\ 1) &= 1 \\ \mathrm{f}(1,\ 0) &= 0 \\ \mathrm{f}(1,\ 1) &= 1 \end{aligned}$$

- Un conjunto de conectivos se dice ADECUADO si toda función booleana es inducida por alguna fórmula que solo use esos conectivos.

Ejercicio

Demostrar que $\{\neg, \wedge, \vee\}$ es adecuado.

Demostración

Sea $f : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$. Queremos una fórmula φ que cumpla $f(x_1, \ldots, x_m) = 1$ sii $v_{x_1,\ldots,x_m} \models \varphi$ y utilice sólo los conectivos $\vee$, $\wedge$ y $\neg$.

- Caso I: Si $f(x_1, \ldots, x_m) = 0 \ \forall (x_1, \ldots, x_m) \in \{0,1\}^m$, quiero una φ que no valga nunca y que solo use $\{\neg, \wedge, \vee\}$. Basta tomar $p \wedge \neg p$.

- Caso II: Supongamos que existe por lo menos un $(x_1, \ldots, x_m) \in \{0,1\}^m$ tal que $f(x_1, \ldots, x_m) = 1$. Sea $E_f = \{(e^1_1, \ldots, e^1_m), \ldots, (e^k_1, \ldots, e^k_m)\} \subseteq \{0,1\}^m$ el conjunto de todas las m-uplas en las que f vale 1.
  Luego, queremos φ tal que $v_{e^i_1,\ldots,e^i_m} \models \varphi$ para todos los $i = 1, \ldots, k$ y que $v_{g_1,\ldots,g_m} \not\models \varphi$ para todo $(g_1, \ldots, g_m) \notin E_f$.
  Vamos a armar una fórmula ψ_i para cada $(e^i_1, \ldots, e^i_m) \in E_f$, tal que, para cada $1 \leq i \leq k$, $v_{e^i_1,\ldots,e^i_m}$ haga verdadera a β_i y a ninguna otra β_j si $i \neq j$. Finalmente, tomaremos el $\bigvee$ de esas fórmulas.

  - A partir de cada $(e^i_1, \ldots, e^i_m) \in E_f$ definimos $\gamma^i_j = \begin{cases} p_i & \text{si } e^j_i = 1 \\ \neg p_i & \text{si } e^j_i = 0 \end{cases}$
    (Convencerse de que $v_{e^i_1,\ldots,e^i_m} \models \gamma^j_i$, para cada $1 \leq i \leq k$ y $1 \leq j \leq m$.)
  - Luego, definimos $\psi_i = \bigwedge_{1 \leq j \leq m} \gamma^j_i$.
    (Convencerse de que $v_{e^i_1,\ldots,e^i_m} \models \psi_i$ para cada $1 \leq i \leq k$, y, sobre todo, de que $v_{e^i_1,\ldots,e^i_m} \not\models \psi_j$ si $i \neq j$ o $(e^i_1, \ldots, e^i_m) \notin E_f$.)
  - Finalmente, definimos $\varphi = \bigvee_{1 \leq i \leq k} \psi_i$.
    (A esta altura, debería ser fácil convencerse de que φ es la buscada.)

  (Ejercicio: Escribir formalmente los argumentos usados para convencerse de cada ítem.)

Ejercicio

Demostrar que $\{\rightarrow, \wedge\}$ no es adecuado.

Demostración

Veamos qué tipo de funciones puedo inducir con una sola variable y los conectores $\{\rightarrow, \wedge\}$. Si f está inducida por una fórmula de este estilo...

- $f(0)$ puede ser 0 o 1 (si f está inducida por p_1 da 0, si esta inducida por $p_1 \rightarrow p_1$ da 1).
- Pero $f(1)$ solo puede ser 1 (intuitivamente: tanto como si está inducida por p_1, $p_1 \wedge p_1$ o $p_1 \rightarrow p_1$, da 1; pero nos faltan argumentos para decir lo mismo de $p_1 \wedge p_1 \wedge p_1$ o $p_1 \rightarrow p_1 \wedge p_1$, etc.).

Demostración por inducción estructural. Sea f_α inducida por α, veamos que $f_\alpha(1) = 1$, para cualquier α construida con estos conectivos.

- Caso base: $\alpha = p_1$.
  Luego, $f_\alpha(1) = 1$, pues $v_1 \models p_1 = \alpha$
- Casos inductivos (HI: $f_\varphi(1) = 1$ y $f_\psi(1) = 1$)
  - $\alpha = \varphi \wedge \psi$
    Luego, $f_\alpha(1) = f_{\varphi\wedge\psi}(1) = 1$ sii $v_1 \models \varphi \wedge \psi$ (por definición de función inducida). Esto vale sii $v_1 \models \varphi$ y $v_1 \models \psi$ (por la semántica de $\wedge$), y esto vale sii $f_\varphi(1) = 1$ y $f_\psi(1) = 1$ (por definición de función inducida, otra vez), y esto ya sabemos que es cierto pues es la hipótesis inductiva.
  - $\alpha = \varphi \rightarrow \psi$
    Con el mismo argumento que antes, tenemos:
    $f_\alpha(1) = f_{\varphi\rightarrow\psi}(1) = 1$ sii $v_1 \models \varphi \rightarrow \psi$ sii $v_1 \not\models \varphi$ o $v_1 \models \psi$ sii $f_\varphi(1) = 0$ ó $f_\psi(1) = 1$. Como vale esto último por hipótesis inductiva, tenemos lo que queríamos.

Finalmente, concluimos que nunca podremos inducir, por ejemplo,

$$f(0) = 0, f(1) = 0$$

Observación

Una vez que uno tiene un conjunto adecuado de conectivos, puede probar que otros conjuntos son adecuados, reduciéndolos a éstos. Más precisamente:

- Si A es un conjunto adecuado de conectivos y para toda fórmula α con conectivos de A existe una fórmula β con conectivos de B que es equivalente a α (es decir, $v \models \alpha$ sii $v \models \beta$), luego, B es adecuado.

- Si A no es un conjunto adecuado de conectivos y para toda fórmula β con conectivos de B, existe una fórmula α con conectivos de A y equivalente a β, entonces B no es adecuado.

Ojo con el orden en el que aparecen α y β en los enunciados anteriores. El primero dice que si mostramos que todo lo que se puede expresar con los conectivos de A (que es adecuado) lo puedo escribr con los conectivos de B, entonces B tiene que ser adecuado. El segundo dice que si todas las cosas que puedo escribr con los conectivos de B las puedo traducir a los conectivos de A, y ya sé que A no es adecuado, no puede ser que B sea adecuado, pues puede expresar a lo sumo tantas cosas como A.
Ojo bis: El resultado anterior para conjuntos no adecuados, si bien es cierto, no es muy útil, pues para que se pueda aplicar, los dos conjuntos no adecuados deben inducir exactamente las mismas funciones. (Esto es así, pues si alguno tiene una fórmula que induce una función que el otro no puede inducir, seguro que esa fórmula no va a poder ser traducida, pues si lo fuera, su traducción induciría la función.) Por ejemplo, ninguno de los conjuntos $\{\wedge\}$ y $\{\neg\}$ es adecuado, pero hay por lo menos una fórmula de cada uno que no se puede traducir a una del otro, con lo cual no podríamos usar la observación anterior en ninguno de los dos sentidos. (Ejercicio: probar que no podemos expresar $\neg p$ utilizando sólo $\wedge$ ni $p \wedge q$ utilizando sólo $\neg$; ¿qué función induce cada uno que el otro no?). Esto no es una preocupación en el caso de los conjuntos adecuados, pues todos éstos siempre inducen exactamente las mismas funciones: todas.

Ejercicio

Demostrar que $\{\wedge, \neg\}$ es un conjunto adecuado.

Veamos que podemos "traducir" cualquier fórmula escrita con $\{\wedge, \vee, \neg\}$ a una escrita con $\{\wedge, \neg\}$. Es decir, dada α, que usa $\wedge$, $\vee$ y $\neg$, vamos a mostrar α^* que sólo usa $\wedge$ y $\neg$ y además $v \models \alpha$ sii $v \models \alpha^*$.

Veámoslo por inducción estructural sobre α.

- Caso base: $\alpha = p_i$.
  Basta tomar $\alpha^* = p_i$.

- Casos inductivos:

  - $\alpha = \neg\varphi$.
    Por HI, existe φ^* que usa solo $\wedge$ y $\neg$, y además es equivalente a φ. Luego, basta tomar $\alpha^* = \neg\varphi^*$.
  - $\alpha = \varphi \wedge \psi$.
    Con el mismo argumento que antes, podemos tomar $\alpha^* = \varphi^* \wedge \psi^*$.

- $\alpha = \varphi \vee \psi$.
Éste es el caso realmente interesante, pues no podemos usar $\vee$ en α^*. Inspirándonos en alguna ley de De Morgan, proponemos $\alpha^* = \neg(\neg\varphi^* \wedge \neg\psi^*)$, donde φ^* y ψ^* existen y son como queremos por HI. Con esto, ya tenemos resuelta la parte de que α^* solo use $\wedge$ y $\neg$, falta ver que es equivalente a α:
$v \models \alpha^* \quad \Leftrightarrow \quad v \not\models \neg\varphi^* \wedge \neg\psi^* \quad \Leftrightarrow \quad v \not\models \neg\varphi^*$ ó $v \not\models \neg\psi^* \quad \Leftrightarrow \quad v \models \varphi^*$ ó $v \models \psi^*$.
Por HI, esto es equivalente a:
$v \models \varphi$ ó $v \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad v \models \varphi \vee \psi \quad \Leftrightarrow \quad v \models \alpha$.

Consecuencia semántica y conjuntos satisfacibles

$\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}, \varphi \in \mathsf{FORM}$

- Decimos que v SATISFACE A Γ si $v \models \gamma$ para todas las $\gamma \in \Gamma$. Lo notamos $v \models \Gamma$.
- Decimos que Γ es SATISFACIBLE hay alguna valuación $v \in \mathsf{VAL}$ tal que $v \models \Gamma$.
- Escribimos $\Gamma \models \varphi$ si para toda valuación v que satisface a Γ, v hace verdadera a φ. Formalmente: para cualquier $v \in \mathsf{VAL}$ se tiene que $v \models \Gamma \Rightarrow v \models \varphi$. Decimos que φ es CONSECUENCIA SEMÁNTICA de Γ o que Γ FUERZA la validez de φ.
- Definimos EL CONJUNTO CONSECUENCIA de Γ como $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\psi \in \mathsf{FORM} \mid \Gamma \models \psi\}$, es decir, el conjunto de todas las fórmulas que son consecuencia semántica de Γ.

Ejercicio

Demostrar que:

- para cualquier $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$, $\mathsf{TAUT} \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.
- $\mathbf{Con}(\emptyset) = \mathsf{TAUT}$.

Demostración

- Sea $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$, y sea $v \in \mathsf{VAL}$ tal que $v \models \Gamma$. Tenemos que ver que si $\tau \in \mathsf{TAUT}$, entonces $v \models \tau$. Y esto es inmediato por la definición de tautología.
- $\varphi \in \mathbf{Con}(\emptyset)$ sii para cualquier $v \in \mathsf{VAL}$, $v \models \emptyset \Rightarrow v \models \varphi$. Ahora, como todas las valuaciones satisfacen $\emptyset$ trivialmente, debe ser que para toda $v \in \mathsf{VAL}$, $v \models \varphi$. Y esto es equivalente a decir que $\varphi \in \mathsf{TAUT}$.

Ejercicio

Un conjunto de fórmulas Γ se dice INDEPENDIENTE si para toda $\varphi \in \Gamma$ $\varphi \notin \mathbf{Con}(\Gamma \setminus \{\varphi\})$.
Sea $\Gamma \subseteq \mathsf{FORM}$ independiente. Demostrar que para todo $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito y no vacío $\{\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi\}$ es independiente.

Demostración:
Sea $\Gamma_0 \subset \Gamma$ finito. Aplicando la definición de conjunto independiente, vemos que queremos probar que $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi \notin \mathbf{Con}(\emptyset)$. O sea, por el resultado del ejercicio anterior, que $\bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi$ no es una tautología. Con lo cual, para esto alcanza con que exista una valuación v tal que $v \not\models \varphi$ para algún $\varphi \in \Gamma_0$, pues entonces $v \not\models \bigwedge_{\varphi \in \Gamma_0} \varphi$.

Supongamos que no, es decir, que para toda $v \in \mathsf{VAL}$, $v \models \varphi$ para toda $\varphi \in \Gamma_0$. Luego, todas las $\varphi \in \Gamma_0$ son tautologías, y, como vimos en el ejercicio anterior, están contenidas en las consecuencias de cualquier conjunto. Luego, si elegimos alguna $\varphi \in \Gamma$, tenemos que $\varphi \in \mathbf{Con}(\Gamma \setminus \{\varphi\})$, lo cual es absurdo pues Γ era independiente.