Funciones primitivas recursivas y clases PRC (parte I)

Pablo Ariel Heiber

Viernes 15 de agosto de 2014

Funciones iniciales

Definición. Llamamos *funciones iniciales* a

$$\begin{aligned} \mathrm{n}(x) &= 0 \\ \mathrm{s}(x) &= x+1 \\ \mathrm{u}_i^n(x_1,...,x_n) &= x_i \quad \text{para todo } 1 \leqslant i \leqslant n. \end{aligned}$$

Nótese que dado que hay infinitas funciones proyectoras u_i^n, también hay infinitas funciones iniciales.

Composición

Definición. Sean $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $g_1, ..., g_k : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. Sea $h : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ definida como

$$h(x_1,...,x_n) = f(g_1(x_1,...,x_n),...,g_k(x_1,...,x_n)).$$

Decimos entonces que h es obtenida a partir de f y $g_1,...,g_k$ por *composición*.
Una clase de funciones $\mathcal{C}$ es *cerrada por composición* si para cualquier elección de $f, g_1, ..., g_k \in \mathcal{C}$ la h obtenida por composición de ellas está en $\mathcal{C}$.

Aplicando composición y proyecciones

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{C}$ una clase cerrada por composición que contiene las funciones iniciales. Ver que están en $\mathcal{C}$:

a. $\mathrm{uno} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \mathrm{uno}(x) = 1$.

b. $\mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \mathrm{id}(x) = x$.

c. $\mathrm{s}_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \mathrm{s}_1(x,y) = x+1$.

d. $\tilde{f} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, \tilde{f}(x,y) = f(y,x)$ sabiendo que $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.

e. $f_{\times k} : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}, f_{\times k}(x_1,...,x_k) = f(x_1)$ sabiendo que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.

f. $f_{/k} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f_{/k}(x) = f(x,x,...,x)$ sabiendo que $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$.

g. $\mathrm{p}(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \mathrm{p}(x) = x \dot{-} 1$.

Resolución ejercicio 1.

a. $\mathrm{uno}(x) = 1 = \mathrm{s}(\mathrm{n}(x))$ aplicando composición con $k = n = 1, f = \mathrm{s}, g_1 = \mathrm{n}$.

b. $\mathrm{id} = \mathrm{u}_1^1$.

c. $\mathrm{s}_1(x,y) = x+1 = \mathrm{s}(x) = \mathrm{s}(\mathrm{u}_1^2(x,y))$ aplicando composición con $k = 1, n = 2, f = \mathrm{s}, g_1 = \mathrm{u}_1^2$.

d. $\tilde{f}(x, y) = f(y, x) = f(\mathrm{u}_2^2(x, y), \mathrm{u}_1^2(x, y))$ aplicando composición con $k = 2, n = 2, f = f, g_1 = \mathrm{u}_2^2, g_2 = \mathrm{u}_1^2$.

e. $f_{\times k}(x_1, ..., x_k) = f(x_1) = f(\mathrm{u}_1^k(x_1, ..., x_k))$ aplicando composición con $k = 1, n = k, f = f, g_1 = \mathrm{u}_1^k$.

f. $f_{/k}(x) = f(x, x, ..., x) = f(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(x), ..., \mathrm{id}(x))$ aplicando composición con $k = k, n = 1, f = f, g_1 = g_2 = ... = g_k = \mathrm{id}$.

g. No se puede. Demostración queda como ejercicio (ver ejercicio 3 de la práctica 1).

Límites de la composición y proyecciones

Ejercicio 2. Sea $\mathcal{C}$ la clase mas chica que contiene las funciones iniciales y está cerrada por composición. Sea $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \in \mathcal{C}$. Demostrar que existen $i \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f = g \circ u_i^n$.

Resolución ejercicio 2. Para las funciones iniciales es trivial la verificación. Supongamos como hipótesis inductiva que vale para $f, g_1, ..., g_k$ y veamos que vale para h obtenida por composición.

$$h(x_1, ..., x_n) = f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))$$

Sean i_f y g_f tal que $g_f \circ u_{i_f}^k = f$. Sean i_g y g_g tal que $g_g \circ u_{i_g}^n = g_{i_f}$. Tomando $g = g_f \circ g_g$ e $i = i_g$ termina la demostración, ya que

$$\begin{aligned} f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n)) &= g_f(u_{i_f}^k(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n))) \\ &= g_f(g_{i_f}(x_1, ..., x_n)) \\ &= g_f(g_g(u_{i_g}^n(x_1, ..., x_n))). \end{aligned}$$

Recursión Primitiva

Definición. Sean $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$. Sea $h : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ definida como

$$\begin{aligned} h(x_1, ..., x_n, 0) &= f(x_1, ..., x_n) \\ h(x_1, ..., x_n, t + 1) &= g(h(x_1, ..., x_n, t), x_1, ..., x_n, t). \end{aligned}$$

Decimos entonces que h es obtenida a partir de f y g por *recursión primitiva*. En este contexto vamos considerar que una función 0-aria es una constante k. Si $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, entonces $h(t) = k = \mathrm{s}^{(k)}(\mathrm{n}(t))$ cuando $t = 0$.
Una clase de funciones $\mathcal{C}$ es *cerrada por recursión primitiva* si para cualquier elección de $f, g \in \mathcal{C}$ la h obtenida por recursión primitiva de ellas está en $\mathcal{C}$.

Ejercicio 3. Cómo se comportan las siguientes funciones definidas por recursión primitiva de f y g?

a. $n = 1, f = \mathrm{s}, g(x, y, z) = x + y + z$.

b. $n = 2, f(x, y) = x + y, g(x, y, z, w) = xyz$.

c. $n = 0, f = 0, g(x, y) = y$.

Resolución ejercicio 3.

a. $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ dada por

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= f(x) = \mathrm{s}(x) = x + 1 \\ h(x, t + 1) &= g(h(x, t), x, t) = h(x, t) + x + t \end{aligned}$$

entonces

$$h(x, y) = (y + 1)x + 1 + \sum_{i=1}^{y}(i - 1).$$

b. $h : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ dada por

$$\begin{aligned} h(x, y, 0) &= f(x, y) = x + y \\ h(x, y, t + 1) &= g(h(x, t), x, y, t) = h(x, y, t)xy \end{aligned}$$

entonces

$$h(x, y, z) = (x + y)x^z y^z$$

c. $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$\begin{aligned} h(0) &= f = 0 \\ h(t + 1) &= g(h(x, t), t) = t \end{aligned}$$

entonces

$$h(x) = x \dot{-} 1 = \mathrm{p}(x).$$

Como f y g se pueden obtener de funciones iniciales y composición, p está en toda clase PRC.

Aplicando recursión primitiva

Ejercicio 4. Sea $\mathcal{C}$ una clase PRC (cerrada por composición y recursión primitiva y que contiene las funciones iniciales). Ver que están en $\mathcal{C}$:

a. $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, f(x, y) = x \dot{-} y$

b. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x!$

Resolución ejercicio 4.

a. Vamos a aplicar recursión primitiva de manera que nos quede $h(x, y) = x \dot{-} y$. Es claro que necesitamos $n = 1$.

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= x \dot{-} 0 = x = f(x) \Leftrightarrow f = \mathrm{id} \\ h(x, t + 1) &= x \dot{-} (t + 1) = \mathrm{p}(x \dot{-} t) = \mathrm{p}(h(x, t)) = g(h(x, t), x, t) \Leftrightarrow g(x, y, z) = \mathrm{p}(x). \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathrm{id} \in \mathcal{C}$. También que $\mathrm{p} \in \mathcal{C}$ y que podemos obtener $g(x, y, z) = \mathrm{p}(x)$ por composición con $f = \mathrm{p}$ y $g_1 = u_1^3$.

b. Vamos a aplicar recursión primitiva de manera que nos quede $h(x) = x!$. Es claro que necesitamos $n = 0$.

$$\begin{aligned} h(0) &= 0! = 1 = f \Leftrightarrow f = 1 \\ h(t + 1) &= (t + 1)! = (t + 1)t! = (t + 1)h(t) = g(h(t), t) \Leftrightarrow g(x, y) = x\,\mathrm{s}(y). \end{aligned}$$

Cualquier constante está en toda clase PRC, con lo cual falta ver que g está en $\mathcal{C}$. Como $\mathrm{s} \in \mathcal{C}$ solo falta ver que el producto está en $\mathcal{C}$ y luego usar proyecciones y composición como hicimos antes (quedan como ejercicio esos detalles). Para ver que el producto está en $\mathcal{C}$, usamos otra aplicación de recursión primitiva con $h(x, y) = xy$. En este caso tenemos $n = 1$, con lo cual el argumento general es parecido al ítem anterior.

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= x0 = 0 = f(x) \Leftrightarrow f = \mathrm{n} \\ h(x, t + 1) &= x(t + 1) = xt + x = h(x, t) + x = g(h(x, t), x, t) \Leftrightarrow g(x, y, z) = x + y \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\mathrm{n} \in \mathcal{C}$. Usando proyecciones y composición (detalles quedan como ejercicio), reducimos el problema a ver que la función suma está en $\mathcal{C}$. Aplicamos recursión primitiva nuevamente para que $h(x, y) = x + y$. Nuevamente queda $n = 1$.

$$\begin{aligned} h(x, 0) &= x + 0 = x = f(x) \Leftrightarrow f = \mathrm{id} \\ h(x, t + 1) &= x + (t + 1) = \mathrm{s}(x + t) = \mathrm{s}(h(x, t)) = g(h(x, t), x, t) \Leftrightarrow g(x, y, z) = \mathrm{s}(x) \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathrm{s} \in \mathcal{C}$ así que podemos terminar al igual que en el primer ítem.