

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Secuencias o listas

1

Secuencias

- **Secuencia:** Varios elementos del mismo tipo T , posiblemente repetidos, ubicados en un cierto orden.
- $seq\langle T \rangle$ es el tipo de las secuencias cuyos elementos son de tipo T .
- T es un tipo arbitrario.
 - Hay secuencias de \mathbb{Z} , de Bool, de Días, de 5-uplas;
 - también hay secuencias de secuencias de T ;
 - etcétera.

2

Secuencias. Notación

- Una forma de escribir un elemento de tipo $seq\langle T \rangle$ es escribir términos de tipo T separados por comas, entre $\langle \dots \rangle$.
 - $\langle 1, 2, 3, 4, 1, 0 \rangle$ es una secuencia de \mathbb{Z} .
 - $\langle 1, 1 + 1, 3, 2 * 2, 5 \bmod 2, 0 \rangle$ es otra secuencia de \mathbb{Z} (igual a la anterior).
- La **secuencia vacía** se escribe $\langle \rangle$, cualquiera sea el tipo de los elementos de la secuencia.
- Se puede formar secuencias de elementos de cualquier tipo.
 - Como $seq\langle \mathbb{Z} \rangle$ es un tipo, podemos armar secuencias de $seq\langle \mathbb{Z} \rangle$ (secuencias de secuencias de \mathbb{Z} , o sea $seq\langle seq\langle \mathbb{Z} \rangle \rangle$).
 - $\langle \langle 12, 13 \rangle, \langle -3, 9, 0 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle \rangle, \langle \rangle, \langle 3 \rangle \rangle$ es un elemento de tipo $seq\langle seq\langle \mathbb{Z} \rangle \rangle$.

3

Secuencias bien formadas

Indicar si las siguientes secuencias están bien formadas. Si están bien formadas, indicar su tipo ($seq\langle \mathbb{Z} \rangle$, etc...)

- $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle \mathbb{Z} \rangle$ y $seq\langle \mathbb{R} \rangle$
- $\langle 1, 2, 3, 4, \frac{1}{0} \rangle$? No está bien formada porque uno de sus componentes está indefinido
- $\langle 1, true, 3, 4, 5 \rangle$? No está bien formada porque no es homogénea (Bool y \mathbb{Z})
- $\langle 'H', 2, 3, 4, 5 \rangle$? No está bien formada porque no es homogénea ($Char$ y \mathbb{Z})
- $\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle Char \rangle$
- $\langle true, false, true, true \rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle Bool \rangle$
- $\langle \frac{2}{5}, \pi, e \rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle \mathbb{R} \rangle$
- $\langle \rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle X \rangle$ donde X es un tipo válido.
- $\langle \langle \rangle \rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle seq\langle X \rangle \rangle$ donde X es un tipo válido.

4

Funciones sobre secuencias

Longitud

- ▶ $length(a : seq\langle T \rangle) : \mathbb{Z}$
 - ▶ Representa la longitud de la secuencia a .
 - ▶ Notación: $length(a)$ se puede escribir como $|a|$ o como $a.length$.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $|\langle \rangle| = 0$
 - ▶ $|\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle| = 4$
 - ▶ $|\langle 1, 1, 1, 1 \rangle| = 4$

5

Funciones con secuencias

i -ésimo elemento

- ▶ Indexación: $seq\langle T \rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
 - ▶ Requiere $0 \leq i < |a|$.
 - ▶ Es el elemento en la i -ésima posición de a .
 - ▶ La primera posición es la 0.
 - ▶ Notación: $a[i]$.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle[0] = 'H'$
 - ▶ $\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle[1] = 'o'$
 - ▶ $\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle[2] = 'l'$
 - ▶ $\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle[3] = 'a'$
 - ▶ $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle[0] = 1$
 - ▶ $\langle \rangle[0] = \perp$ (Indefinido)
 - ▶ $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle[7] = \perp$ (Indefinido)

6

Funciones con secuencias

Igualdad

Dos secuencias s_0 y s_1 (notación $s_0 = s_1$) son iguales si y sólo si

- ▶ Tienen la misma cantidad de elementos
- ▶ Dada una posición, el elemento contenido en la secuencia s_0 es igual al elemento contenido en la secuencia s_1 .

Ejemplos:

- ▶ $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$? Sí
- ▶ $\langle \rangle = \langle \rangle$? Sí
- ▶ $\langle 4, 4, 4 \rangle = \langle 4, 4, 4 \rangle$? Sí
- ▶ $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$? No
- ▶ $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle = \langle 1, 2, 4, 5, 6 \rangle$? No

7

Funciones con secuencias

Cabeza o Head

- ▶ Cabeza: $head(a : seq\langle T \rangle) : T$
 - ▶ Requiere $|a| > 0$.
 - ▶ Es el primer elemento de la secuencia a .
 - ▶ Es equivalente a la expresión $a[0]$.
- ▶ Ejemplos:
 - ▶ $head(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle) = 'H'$
 - ▶ $head(\langle 1, 1, 1, 1 \rangle) = 1$
 - ▶ $head(\langle \rangle) = \perp$ (Indefinido)

8

Funciones con secuencias

Cola o Tail

- Cola: $tail(a : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$
 - Requiere $|a| > 0$.
 - Es la secuencia resultante de eliminar su primer elemento.
- Ejemplos:
 - $tail(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle) = \langle 'o', 'l', 'a' \rangle$
 - $tail(\langle 1, 1, 1 \rangle) = \langle 1, 1 \rangle$
 - $tail(\langle \rangle) = \perp$ (Indefinido)

9

Funciones con secuencias

Agregar al principio o addFirst

- Agregar cabeza: $addFirst(t : T, a : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$
 - Es una secuencia con los elementos de a , agregándole t como primer elemento.
 - Es una función que no se indefine
- Ejemplos:
 - $addFirst('x', \langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle) = \langle 'x', 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle$
 - $addFirst(5, \langle 1, 1, 1 \rangle) = \langle 5, 1, 1, 1 \rangle$
 - $addFirst(1, \langle \rangle) = \langle 1 \rangle$

10

Funciones con secuencias

Concatenación o concat

- Concatenación: $concat(a : seq\langle T \rangle, b : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$
 - Es una secuencia con los elementos de a , seguidos de los de b .
 - Notación: $concat(a, b)$ se puede escribir $a ++ b$.
- Ejemplos:
 - $concat(\langle 'H', 'o' \rangle, \langle 'l', 'a' \rangle) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle$
 - $concat(\langle 1, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle) = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$
 - $concat(\langle \rangle, \langle \rangle) = \langle \rangle$
 - $concat(\langle 2, 3 \rangle, \langle \rangle) = \langle 2, 3 \rangle$
 - $concat(\langle \rangle, \langle 5, 7 \rangle) = \langle 5, 7 \rangle$

11

Funciones con secuencias

Subsecuencia o subseq

- Subsecuencia: $subseq(a : seq\langle T \rangle, d, h : \mathbb{Z}) : \langle T \rangle$
 - Es una sublista de a en las posiciones entre d (inclusive) y h (exclusive).
 - Cuando no es $0 \leq d \leq h \leq |a|$, **se redefine!**
 - Cuando es $0 \leq d = h \leq |a|$, retorna la secuencia vacía.
- Ejemplos:
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 0, 1) = \langle 'H' \rangle$
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 0, 4) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle$
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 2, 2) = \langle \rangle$
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, -1, 3) = \perp$
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 0, 10) = \perp$
 - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 3, 1) = \perp$

12

Funciones con secuencias

- Cambiar una posición:
 $setAt(a : seq\langle T \rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T \rangle$
 - Requiere $0 \leq i < |a|$
 - Es una secuencia igual a a , pero con valor val en la posición i .
- Ejemplos:
 - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 0, 'X') = \langle 'X', 'o', 'l', 'a' \rangle$
 - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a' \rangle, 3, 'A') = \langle 'H', 'o', 'l', 'A' \rangle$
 - $setAt(\langle \rangle, 0, 5) = \perp$ (Indefinido)

13

Operaciones sobre secuencias

- $length(a : seq\langle T \rangle) : \mathbb{Z}$ (notación $|a|$)
- Indexación: $seq\langle T \rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
- Igualdad: $seq\langle T \rangle = seq\langle T \rangle$
- $head(a : seq\langle T \rangle) : T$
- $tail(a : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$
- $addFirst(t : T, a : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$
- $concat(a : seq\langle T \rangle, b : seq\langle T \rangle) : seq\langle T \rangle$ (notación $a++b$)
- $subseq(a : seq\langle T \rangle, d, h : \mathbb{Z}) : \langle T \rangle$
- $setAt(a : seq\langle T \rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T \rangle$

14

Lemas sobre secuencias

Sea s_0, s_1 secuencias de tipo T y e un elemento de tipo T .
Justificar brevemente por qué cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- $|addFirst(e, s_0)| = 1 + |s_0|$? Sí
- $|concat(s_0, s_1)| = |s_0| + |s_1|$? Sí
- $s_0 = tail(addFirst(e, s_0))$? Sí
- $s_0 = subseq(s_0, 0, |s_0|)$? Sí
- $s_0 = subseq(concat(s_0, s_1), 0, |s_0|)$? Sí
- $head(addFirst(e, s_0)) = e$? Sí
- $addFirst(e, s_0)[0] = e$? Sí
- $addFirst(e, s_0)[0] = head(addFirst(e, s_0))$? Sí

15

Repaso: Cuantificadores

El lenguaje de especificación provee formas de predicar sobre los elementos de un tipo de datos

- $(\forall x : T)P(x)$: Afirma que todos los elementos de tipo T cumplen la propiedad P .
 - Se lee “Para todo x de tipo T se cumple $P(x)$ ”
- $(\exists x : T)P(x)$: Afirma que al menos un elemento de tipo T cumple la propiedad P .
 - Se lee “Existe al menos un x de tipo T que cumple $P(x)$ ”

16

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si una secuencia de enteros sólo posee enteros mayores a 5.

- Solución:

```
pred seq_gt_five(s: seq<Z>) {  
  (∀i : Z)(0 ≤ i < |s| →L s[i] > 5)  
}
```

17

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si todos los elementos en posiciones pares de una secuencia de enteros s son mayores a 5.

- Solución:

```
pred seq_even_gt_five(s: seq<Z>) {  
  (∀i : Z)(  
    ((0 ≤ i < |s|) ∧ (i mod 2 = 0))  
    →L s[i] > 5)  
}
```

18

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si hay algún elemento en la secuencia s que sea par y mayor que 5.

- Solución:

```
pred seq_has_elem_even_gt_five(s: seq<Z>) {  
  (∃i : Z)(  
    ((0 ≤ i < |s| ∧ s[i] mod 2 = 0) ∧L (s[i] > 5))  
  )  
}
```

19

Predicando sobre secuencias

Secuencia vacía o “isEmpty”

- Definir un predicado isEmpty que indique si la secuencia s no tiene elementos.

- Solución

```
pred isEmpty(s: seq<T>) {  
  |s| = 0  
}
```

20

Predicando sobre secuencias

Pertenencia o "has"

- Definir un predicado `has` que indique si el elemento `e` aparece (al menos una vez) en la secuencia `s`.

- Solución

```
pred has(s: seq<T>, e: T) {  
  (∃i : ℤ)(0 ≤ i < |s| ∧ s[i] = e)  
}
```

- Notación: Podemos utilizar este predicado como $e \in s$

21

Predicando sobre secuencias

Igualdad o "equals"

- Definir un predicado `equals(s1,s2)` que indique si la secuencia `s1` es igual a la secuencia `s2`.

- Solución

```
pred equals(s1, s2: seq<T>) {  
  s1 = s2  
}
```

22

Predicando sobre secuencias

Cambiar un elemento o "setAt"

- Definir un predicado `isSetAt(s1,s2,e,i)` que indique si la secuencia `s1` es igual a la secuencia `s2` pero reemplazando el elemento de la posición `i` con el elemento `e`.
- En el caso que **no se cumpla** que $0 \leq i < \#(s2)$, retornar **Falso** sólo si ambas secuencias **no son** iguales.

- Solución

```
pred igualLongitud(s1, s2:seq<T>) {  
  |s1| = |s2|  
}  
pred enRango(i: ℤ, s:seq<T>) {  
  0 ≤ i < |s|  
}
```

23

Predicando sobre secuencias

Cambiar un elemento o "setAt" (cont.)

```
pred igualesExceptoElIndice(s1, s2: seq<T>, e: T, i:  
  ℤ) {  
  s1[i] = e  
  ∧  
  (∀i' : ℤ)((0 ≤ i' < |s1| ∧ i' ≠ i) → s1[i'] = s2[i'])  
}  
pred isSetAt(s1, s2: seq<T>, e: T, i: ℤ) {  
  (igualLongitud(s1, s2)  
  ∧  
  (enRango(i, s2) → igualesExceptoElIndice(s1, s2, e, i)  
  ∧  
  (¬(enRango(i, s2)) → s1 = s2)  
  )  
  )  
}
```

24

Σ - Sumatoria

El lenguaje de especificación provee formas de acumular resultados para los tipos numéricos \mathbb{Z} y \mathbb{R} .

El término

$$\sum_{i=from}^{to} Expr(i)$$

retorna la suma de todas las expresiones $Expr(i)$ entre $from$ y to . Es decir,

$$Expr(from) + Expr(from + 1) + \dots + Expr(to - 1) + Expr(to)$$

- ▶ $Expr(i)$ debe ser un tipo numérico (\mathbb{R} o \mathbb{Z}).
- ▶ $from$ y to es un **rango** (finito) de valores enteros y $from \leq to$ (retorna 0 si no se cumple).
- ▶ Si existe i tal que $from \leq i \leq to$ y $Expr(i) = \perp$, entonces toda la expresión se **indefine!**

25

Σ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de una secuencia s de tipo $seq\langle T \rangle$.

Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} s[i]$$

Ejemplos:

- ▶ Si $s = \langle 1, 1, 3, 3 \rangle$ retornará

$$s[0] + s[1] + s[2] + s[3] = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$$

- ▶ Si $s = \langle \rangle$, entonces $from = 0$ y $to = -1$, por lo tanto retornará 0

26

Σ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de la posición 1 (únicamente) de la secuencia s .

Solución:

$$\sum_{i=1}^1 s[i]$$

Ejemplos:

- ▶ Si $s = \langle 7, 1, 3, 3, 2, 4 \rangle$ retornará $s[1] = 1$.
- ▶ Si $s = \langle 7 \rangle$ la sumatoria se **indefine** ya que $s[1] = \perp$.

27

Σ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de los índices pares de la secuencia s .

Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (i \bmod 2 = 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})$$

Ejemplos:

- ▶ Si $s = \langle 7, 1, 3, 3, 2, 4 \rangle$ retornará

$$s[0] + 0 + s[2] + 0 + s[4] + 0 = 7 + 0 + 3 + 0 + 2 + 0 = 12$$

- ▶ Si $s = \langle 7 \rangle$ retornará $s[0] = 7$.

28

Σ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de los elementos mayores a 0 de la secuencia s .

Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (s[i] > 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})$$

Ejemplos:

► Si $s = \langle 7, 1, -3, 3, 2, -4 \rangle$ retornará

$$s[0] + s[1] + 0 + s[3] + s[4] + 0 = 7 + 1 + 0 + 3 + 2 + 0 = 13$$

► Si $s = \langle -7 \rangle$ retornará 0.

29

\prod - Productoria

El término

$$\prod_{i=from}^{to} Expr(i)$$

retorna el producto de todas las expresiones $Expr(i)$ entre $from$ y to . Es decir,

$$Expr(from) * Expr(from + 1) * \dots * Expr(to - 1) * Expr(to)$$

- $Expr(i)$ debe ser un tipo numérico (\mathbb{R} o \mathbb{Z}).
- $from$ y to define un rango de valores enteros (finito) y $from \leq to$ (retorna 1 si no se cumple).
- Si $Expr(i) = \perp$, toda la productoria se **define**.

30

\prod - Ejemplos

Retornar la productoria de los elementos mayores a 0 de la secuencia s .

Solución:

$$\prod_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (s[i] > 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 1 \text{ fi})$$

Ejemplos:

► Si $s = \langle 7, 1, -3, 3, 2, -4 \rangle$ retornará

$$s[0] * s[1] * 1 * s[3] * s[4] * 1 = 7 * 1 * 1 * 3 * 2 * 1 = 42$$

► Si $s = \langle -7 \rangle$ retornará 1.

31

Funciones auxiliares imprescindibles

Definir una función que permita contar la cantidad de apariciones de un elemento e en la secuencia s :

$$\text{fun \#apariciones}(s: \text{seq}\langle T \rangle, e: T): \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } s[i] = e \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi})$$

Ejemplos:

- $\#apariciones(\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3 \rangle, 1) = 3$
- $\#apariciones(\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3 \rangle, 2) = 0$
- $\#apariciones(\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3 \rangle, 3) = 2$
- $\#apariciones(\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3 \rangle, 5) = 1$
- $\#apariciones(\langle \rangle, 5) = 0$

32

Funciones auxiliares imprescindibles

Definir un predicado que sea verdadero si y sólo si una secuencia es una permutación¹ de otra secuencia:

```
pred es_permutacion(s1, s2 : seq(T)) {  
  |s1| = |s2| ∧  
  (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |s1|  
    → #apariciones(s1, s1[i]) = #apariciones(s2, s1[i]))  
}
```

¹mismos elementos y misma cantidad por cada elemento, en un orden potencialmente distinto

33

Un ejemplo con cantidades

Otra forma de definir un predicado que sea verdadero si un número entero n es primo:

```
pred soy_primo(n : ℤ) {  
  n > 1 ∧  
  (∑i=2n-1 (if (n mod i = 0) then 1 else 0 fi)) = 0  
}
```

1. Por cada número entre 2 y $n - 1$ me fijo si n es divisible por ese número.
2. Cada vez que encuentro un número i que me divide, acumulo 1
3. Si al final no acumulé nada, quiere decir que no encontré ningún número entre 2 y $n - 1$ que divida a n

34

Otro ejemplo con cantidades

Definir una función que retorne la cantidad de números primos menores a un entero n (o 0 si $n < 0$)

```
fun #primosMenores(n : ℤ) =  
  ∑i=2n-1 (if soy_primo(i) then 1 else 0 fi)
```

1. Por cada número entre 2 y $n - 1$ me fijo si n es primo.
2. Cada vez que encuentro un número primo, acumulo 1
3. Si $n < 0$, entonces $\neg(2 \leq -1)$, por lo que \sum retorna 0.

35

Contando elementos en un conjunto

- La siguiente expresión es muy común en especificaciones de problemas:

$$\sum_{i \in A} \text{if } P(i) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi.}$$

- Introducimos la siguiente notación como **reemplazo sintáctico** para esta sumatoria:

$$\#\{i \in A : P(i)\}$$

- Por ejemplo, podemos escribir

$$\#\{i : 1 \leq i \leq n - 1 \wedge \text{soy_primo}(i)\}.$$

- Observación: A tiene que ser un conjunto **finito**.

36

Sumatoria de secuencias de \mathbb{R}

Definir una función que sume los inversos multiplicativos de una lista de reales.

Si no existe el inverso multiplicativo, ignorar el término.

```
fun sumarInvertidos(s : seq<ℝ>) : ℝ =  
   $\sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } s[i] \neq 0 \text{ then } \frac{1}{s[i]} \text{ else } 0 \text{ fi})$ 
```

37

Ejemplo de especificación con sumatorias

Especificar un programa que sume los inversos multiplicativos de una lista de reales, pero que requiera que todos los elementos de la secuencia **tengan** inverso multiplicativo.

```
pred todos_tienen_inverso(s: seq<ℝ>) {  
   $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L s[i] \neq 0)$   
}  
  
proc sumarInversos(in s: seq<ℝ>, out result: ℝ) {  
  Pre { todos_tienen_inverso(s) }  
  Post { result = sumarInvertidos(s) }  
}
```

38

Secuencias de Char (strings)

Indistintamente las llamamos

- ▶ $seq<Char>$
- ▶ String

39

Problema con strings y secuencias de string

- ▶ Nos gustaría especificar el problema de decidir si alguna de las palabras contenidas en una lista aparece en un texto.
- ▶ ¿Qué **argumentos** tiene mi problema?
 - ▶ Para representar un texto usamos el tipo String (i.e. $seq<Char>$).
 - ▶ Para representar una palabra sola usamos también el tipo *String*.
 - ▶ Para representar la lista de palabras usamos $seq<String>$.
- ▶ ¿Qué **precondiciones** tiene mi problema?
 - ▶ Cada palabra debe tener al menos una letra
 - ▶ Ninguna palabra contiene un espacio (dejarían de ser palabras)
 - ▶ Asumimos que todos los *Char* (menos el espacio) son caracteres válidos de una palabra.

40

Problema con string y secuencias de string

Primero, necesitamos asegurarnos que no haya palabras vacías.
¿Cómo lo podemos hacer?

```
pred noVacias(words: seq<String>) {  
    (∀ s : String)(s ∈ words → |s| > 0)  
}
```

Segundo, necesitamos asegurarnos que la lista de strings efectivamente sea una lista de palabras (sin espacios en blanco)

```
pred sinEspacios(words: seq<String>) {  
    (∀ s : String)(s ∈ words → ' ' ∉ s)  
}
```

41

Problema con string y secuencias de string

Ahora, podemos empezar a especificar nuestro problema:

```
proc hayAlguna(in words: seq<String>,  
    in book: String,  
    out result: Bool) {  
    Pre { noVacias(words) ∧ sinEspacios(words) }  
    Post { ? }  
}
```

Nos falta especificar la postcondición de nuestro problema.

42

Problema con string y secuencias de string

Tenemos que retornar **true** únicamente en el caso que exista una palabra en la lista de palabras que aparezca en el libro.
¿Cómo podemos saber si una palabra *s* aparece en el libro?

```
pred aparece(w: String, book: String) {  
    (∃ desde : ℤ)  
    (∃ hasta : ℤ)  
    (  
        subseq(book, desde, hasta) = w  
        ∧ (desde > 0 →L book[desde - 1] = ' ')  
        ∧ (hasta < |book| - 1 →L book[hasta + 1] = ' ')  
    )  
}
```

Ya tenemos todas las funciones suficientes para terminar nuestra especificación

43

Problema con string y secuencias de string

Ahora, podemos empezar a especificar nuestro problema:

```
proc hayAlguna(in words: seq<String>,  
    in book: String,  
    out result: Bool) {  
    Pre { noVacias(words) ∧ sinEspacios(words) }  
    Post { result=true ↔  
        ((∃ w : String)(w ∈ words ∧ aparece(w, book))) }  
}
```

44

Especificaciones y nombres de predicados y funciones

Especificar el problema de retornar el índice del menor elemento de una lista de enteros no negativos y distintos entre sí.

Arranquemos definiendo predicados auxiliares que capturen las precondiciones de mi problema

- Los enteros en la secuencia son no negativos

```
pred noNegativos(s: seq<ℤ>) {  
  (∀i : ℤ) (0 ≤ i < |s| →L s[i] > 0)  
}
```

- No hay enteros repetidos en la secuencia:

```
pred noHayRepetidos(s: seq<ℤ>) {  
  (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)((0 ≤ i, j < |s| ∧ i ≠ j) →L s[i] ≠ s[j])  
}
```

Observación: Los nombres de los predicados/funciones ayudan a describir el significado de las precondiciones y postcondiciones de las especificaciones.

45

Especificaciones y comentarios

Ahora especifiquemos usando los predicados auxiliares que capturan las precondiciones del problema

```
proc menorElemDistintos(in s: seq<ℤ>, out result: ℤ) {  
  Pre { noNegativos(s) ∧ noHayRepetidos(s) }  
  Post {  
    /* result es un índice válido de s */  
    0 ≤ result < |s| ∧  
    /* s[result] es el menor elemento de s */  
    (∀i : ℤ)((0 ≤ i < |s|) →L s[result] ≤ s[i])  
  }  
}
```

Observación: Los comentarios (*/*...*/*) también ayudan a describir el significado de las precondiciones y postcondiciones de las especificaciones y son útiles si no hay predicados

46

Matrices

- Una **matriz** es una **secuencia de secuencias**, todas con la misma longitud.
- Cada posición de esta secuencia es a su vez una secuencia, que representa una fila de la matriz.
- Definimos **Mat<ℤ>** como un reemplazo sintáctico para **Seq<Seq<ℤ>>**.
- Una **Seq<Seq<ℤ>>** representa una matriz si todas las secuencias tienen la misma longitud! Definimos entonces:

```
pred esMatriz(m: Seq<Seq<ℤ>>) {  
  (∀i : ℤ)(∀j : ℤ)(0 ≤ i, j < |m|  
    →L |m[i]| = |m[j]|)  
}
```

- Notar que podemos reemplazar **Mat<ℤ>** por **Seq<Seq<ℤ>>** en la definición del predicado.

47

Matrices

- Tenemos funciones para obtener la cantidad de filas y columnas de una matriz:

```
fun rows(m : Mat<ℤ>) : ℤ = |m|  
fun columns(m : Mat<ℤ>) : ℤ  
  = if rows(m) > 0 then |m[0]| else 0 fi
```

- En muchas ocasiones debemos recibir matrices **cuadradas**. Definimos también:

```
pred esMatrizCuadrada(m: Seq<Seq<ℤ>>) {  
  esMatriz(m) ∧ rows(m) = columns(m)  
}
```

48

Matrices

- **Ejemplo:** Un predicado que determina si una matriz es una **matriz identidad**.

```
pred esMatrizIdentidad(m: Mat( $\mathbb{Z}$ )) {  
  esMatrizCuadrada(m)  $\wedge_L$   
  (  
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i < \text{rows}(m) \rightarrow_L m[i][i] = 1$ )  $\wedge$   
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $\forall j : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i, j < \text{rows}(m) \wedge i \neq j$   
       $\rightarrow_L m[i][j] = 0$ )  
  )  
}
```

49

Sobrespecificación usando secuencias

Se desea especificar el problema de, dada una lista s con al menos dos elementos distintos, retornar una lista con los mismos elementos que no esté ordenada de menor a mayor.
¿Está *sobreespecificada* la siguiente especificación?

```
proc desordena(in s: seq( $\mathbb{Z}$ ), out result seq( $\mathbb{Z}$ )) {  
  Pre {  
    /* al menos dos elementos distintos */  
    ( $\exists i : \mathbb{Z}$ ) ( $(0 \leq i < |s|) \wedge_L$   
      ( $\exists j : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq j < |s| \wedge_L (i \neq j \wedge s[i] \neq s[j])$ ))) }  
  Post { es_permutacion(s, result)  $\wedge_L$   
    ( $\forall i : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq i < |\text{result}| - 1 \rightarrow_L$   
      ( $\text{result}[i] \geq \text{result}[i + 1]$ )) }  
}
```

Está sobreespecificada ya que fuerza a que todas las implementaciones retornen la secuencia ordenada de mayor a menor.

50

Sobrespecificación usando secuencias

¿Está *sobreespecificada* la siguiente especificación? **pred**
ordenada(s: seq(\mathbb{Z})) {
 ($\forall i : \mathbb{Z}$) ($0 \leq i < (|s| - 1) \rightarrow_L (s[i] \leq s[i + 1])$)
}

```
proc desordena(in s: seq( $\mathbb{Z}$ ), result: seq( $\mathbb{Z}$ )) {  
  Pre {  
    /* al menos dos elementos distintos */  
    ( $\exists i : \mathbb{Z}$ ) ( $(0 \leq i < |s|) \wedge_L$   
      ( $\exists j : \mathbb{Z}$ ) ( $0 \leq j < |s| \wedge_L$   
        ( $i \neq j \wedge s[i] \neq s[j]$ ))) }  
  Post { es_permutacion(s, result)  $\wedge \neg \text{ordenada}(\text{result})$  }  
}
```

Esta nueva especificación no sobre-restringe las posibles implementaciones del problema.

51

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
 - Chapter 4 - Predicates (cuantificación, variables libres y ligadas, etc.)
 - Chapter 5 - Notations and Conventions for Arrays (secuencias)

52