Clase práctica
Resolución en lógica de primer orden

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

24/05/2018

Agenda

¿Qué es?

- Procedimiento para determinar la insatisfactibilidad de una fórmula.
- Es útil como técnica de demostración por refutación (i.e., probar que A es válida mostrando que $\neg A$ es insatisfactible).
- Consiste en la aplicación sucesiva de una regla de inferencia a un conjunto de cláusulas.

Satisfactibilidad y validez

En general,

- Una *asignación* asocia variables a valores del dominio.
- Una fórmula A es *válida* sii toda asignación la hace verdadera.
- Una fórmula A es *satisfactible* sii alguna asignación la hace verdadera.

El siguiente hecho permite utilizar al método como técnica de demostración:

$$A \text{ es válida sii } \neg A \text{ es insatisfactible}$$

Cláusulas y FNC

El método trabaja con fórmulas en **forma normal conjuntiva**.

- Conjunción de disyunciones de literales, siendo un *literal* una fórmula atómica o su negación.
- Una *cláusula* es cada una de estas disyunciones de literales. Las representamos en notación de conjuntos.

Ejemplo:

$$\{\neg \mathrm{menor}(X, Y), \mathrm{menor}(c, Y)\}$$

representa la cláusula

$$\forall X, Y.(\neg \mathrm{menor}(X, Y) \lor \mathrm{menor}(c, Y))$$

Cláusulas y FNC

De esta manera, notamos a una fórmula en FNC como un conjunto de cláusulas. Este se entiende como la conjunción de todas ellas.

Por ejemplo, el conjunto que contiene a las cláusulas

- $\{\neg \text{menor}(X, Y), \text{menor}(c, Y)\}$
- $\{\text{impar}(Z), \text{mayor}(Z, w)\}$

representa la fórmula

$$\forall X, Y.(\neg \text{menor}(X, Y) \vee \text{menor}(c, Y)) \wedge \forall Z.(\text{impar}(Z) \vee \text{mayor}(Z, w))$$

Pasaje a FNC

Paso a paso

1. Eliminar implicación
2. Forma normal negada
3. Forma normal prenexa (opcional)
4. Forma normal de Skolem (dependencias = variables libres dentro del alcance del $\exists$)
5. Forma normal conjuntiva
6. Distribución de cuantificadores y renombre de variables

La regla de resolución en el marco proposicional

$$\frac{\mathcal{A}_i = \{A_1, \ldots, A_m, Q\} \qquad \mathcal{A}_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q\}}{\mathcal{B} = \{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}}$$

- A $\mathcal{B}$ se lo llama **resolvente** (de $\mathcal{A}_i$ y $\mathcal{A}_j$)
- La regla se apoya en el hecho de que la siguiente proposición es una tautología:

$$(A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \Leftrightarrow (A \vee P) \wedge (B \vee \neg P) \wedge (A \vee B)$$

- El conjunto de cláusulas $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k\}$ es lógicamente equivalente a $\{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k, \mathcal{B}\}$

La regla de resolución en primer orden

$$\frac{\mathcal{A}_i = \{A_1, \ldots, A_m, P_1, \ldots, P_k\} \quad \mathcal{A}_j = \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_l\}}{\mathcal{B} = \sigma(\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\})}$$

- σ es el MGU de $\{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l\}$
  es decir, $\sigma(P_1) = \ldots = \sigma(P_k) = \sigma(Q_1) = \ldots = \sigma(Q_l)$
- A $\mathcal{B}$ se lo llama **resolvente** (de $\mathcal{A}_i$ y $\mathcal{A}_j$)
- Cada paso de resolución **preserva satisfactibilidad** (Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel)

Resolución en lógica de primer orden

Repaso

Estrategia

- Para demostrar que la fórmula F es universalmente válida
  Demostramos que $\neg F$ es insatisfactible.
- Para demostrar que F se deduce de $H_1, \ldots H_n$
  Demostramos que $H_1, \ldots, H_n, \neg F$ es insatisfactible.

Esquema general

- Expresar la o las fórmulas como cláusulas.
- Aplicar sucesivamente un paso de resolución
  (generando nuevas cláusulas)...
- Hasta llegar a la cláusula vacía
  o concluir que no es posible llegar a ella.
- Importante: al aplicar resolución suelen presentarse varias opciones.
  Conviene tener un plan.

Cosas importantes para recordar[1]

- Al skolemizar, usar la misma constante o función si y sólo si la variable que estamos eliminando es **la misma** (nunca para otras, aun si tienen el mismo nombre).
- Para encontrar las dependencias, ver qué variables están libres dentro del alcance del $\exists$ (sin contar la que se está eliminando).
- ¡No olvidarse de negar lo que se quiere demostrar! Y recordar que $\neg((A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \supset B) = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$.
- Antes de empezar a aplicar pasos de resolución, convencerse de que lo que se quiere demostrar es verdadero, y trazar un plan para demostrarlo (mentalmente o por escrito).
- Recordar bien cómo funciona la unificación, y sustituir siempre **variables** (ni funciones, ni constantes, ni predicados).

[1] Seguir las indicaciones de esta lista previene los errores más frecuentes en los parciales.

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

- Representar en forma clausal la siguiente información referida a conjuntos, pertenencia (predicado Pert) e inclusión (predicado Inc).
    - i $\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z\ \mathrm{Pert}(Z, X) \supset \mathrm{Pert}(Z, Y)))$
      X está incluido en Y si y sólo si cada elemento de X es un elemento de Y.
    - ii $\forall X\ \neg\mathrm{Pert}(X, \emptyset)$
      Ningún elemento pertenece al vacío.
- Usar resolución para probar que el vacío está incluido en todo conjunto.
- Indicar justificando si la prueba realizada es SLD (volveremos sobre esto más adelante).

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.:	$X \subseteq Y$ si y sólo si cada elemento de X es un elemento de Y.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Inc}(X,Y) \Leftrightarrow (\forall Z\ \mathrm{Pert}(Z,X) \supset \mathrm{Pert}(Z,Y)))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathrm{Pert}(Z_1, X_1), \mathrm{Pert}(Z_1, Y_1)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_2, Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
Cast.:	Ningún elemento pertenece al vacío.
1° o.:	$\forall X\ \neg\mathrm{Pert}(X, \emptyset)$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	El vacío está incluido en todo conjunto.
1° o.:	$\forall X\ \mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Neg.:	$\exists X\ \neg\mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Claus.:	$\{\neg\mathsf{Inc}(\emptyset, \mathsf{c})\}$

Ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

Cast.:	$X \subseteq Y$ si y sólo si cada elemento de X es un elemento de Y.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Inc}(X, Y) \Leftrightarrow (\forall Z\ \mathrm{Pert}(Z, X) \supset \mathrm{Pert}(Z, Y)))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathrm{Pert}(Z_1, X_1), \mathrm{Pert}(Z_1, Y_1)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_2, Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$ $\{\mathrm{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
Cast.:	Ningún elemento pertenece al vacío.
1° o.:	$\forall X\ \neg\mathrm{Pert}(X, \emptyset)$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Pert}(X_4, \emptyset)\}$

Ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	El vacío está incluido en todo conjunto.
1° o.:	$\forall X \ \mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Neg.:	$\exists X \ \neg\mathsf{Inc}(\emptyset, X)$
Claus.:	$\{\neg\mathsf{Inc}(\emptyset, \mathsf{c})\}$

Ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 1° Cuat. 2012

$$\frac{\{A_1, \ldots, A_m, P_1, \ldots, P_k\} \qquad \{B_1, \ldots, B_n, \neg Q_1, \ldots, \neg Q_l\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_l\}$.

1. $\{\neg \mathrm{Inc}(X_1, Y_1), \neg \mathrm{Pert}(Z_1, X_1), \mathrm{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\mathrm{Inc}(X_2, Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\mathrm{Inc}(X_3, Y_3), \neg \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg \mathrm{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg \mathrm{Inc}(\emptyset, \mathrm{c})\}$
6. (2 y 5) $\{\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c}), \emptyset)\}$ $\sigma = \{X_2 \leftarrow \emptyset,\ Y_2 \leftarrow \mathrm{c}\}$
7. (6 y 4) $\square$ $\sigma = \{X_4 \leftarrow \mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c})\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuela a partir de la relación Madre:

- Los hijos son descendientes:
$\forall X\, \forall Y\, (\mathrm{Madre}(X, Y) \supset \mathrm{Descendiente}(Y, X))$
- La relación de descendencia es transitiva:
$\forall X\, \forall Y\, \forall Z\, (\mathrm{Descendiente}(X, Y) \wedge \mathrm{Descendiente}(Y, Z) \supset \mathrm{Descendiente}(X, Z))$
- La abuela es madre de alguien que es madre del nieto:
$\forall X\, \forall Y\, (\mathrm{Abuela}(X, Y) \supset \exists Z\, (\mathrm{Madre}(X, Z) \wedge \mathrm{Madre}(Z, Y)))$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Abuela}(X, Y) \supset \mathrm{Descendiente}(Y, X))$$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas. Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.:	La relación: Los hijos son descendientes.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\text{Madre}(X,Y) \supset \text{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\neg\text{Madre}(X_1,Y_1), \text{Descendiente}(Y_1,X_1)\}$
Cast.:	La relación de descendencia es transitiva.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\text{Descendiente}(X,Y) \wedge \text{Descendiente}(Y,Z) \supset \text{Descendiente}(X,Z))$
Claus.:	$\{\neg\text{Descendiente}(X_2,Y_2), \neg\text{Descendiente}(Y_2,Z_2), \text{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$
Cast.:	La abuela es madre de alguien que es madre del nieto.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\text{Abuela}(X,Y) \supset \exists Z\ (\text{Madre}(X,Z) \wedge \text{Madre}(Z,Y)))$
Claus.:	$\{\neg\text{Abuela}(X_3,Y_3), \text{Madre}(X_3,\text{medio}(X_3,Y_3))\}$ $\{\neg\text{Abuela}(X_4,Y_4), \text{Madre}(\text{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	Los nietos son descendientes
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Abuela}(X, Y) \supset \mathrm{Descendiente}(Y, X))$
Neg.:	$\exists X\ \exists Y\ (\mathrm{Abuela}(X, Y) \wedge \neg\mathrm{Descendiente}(Y, X))$
Claus.:	$\{\mathrm{Abuela}(a, b)\}$
	$\{\neg\mathrm{Descendiente}(b, a)\}$

Otro ejemplo

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

Cast.:	Los hijos son descendientes.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Madre}(X,Y) \supset \mathrm{Descendiente}(Y,X))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Madre}(X_1,Y_1), \mathrm{Descendiente}(Y_1,X_1)\}$
Cast.:	La relación de descendencia es transitiva.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (\mathrm{Descendiente}(X,Y) \wedge \mathrm{Descendiente}(Y,Z) \supset \mathrm{Descendiente}(X,Z))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Descendiente}(X_2,Y_2), \neg\mathrm{Descendiente}(Y_2,Z_2), \mathrm{Descendiente}(X_2,Z_2)\}$
Cast.:	La abuela es madre de alguien que es madre del nieto.
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathrm{Abuela}(X,Y) \supset \exists Z\ (\mathrm{Madre}(X,Z) \wedge \mathrm{Madre}(Z,Y)))$
Claus.:	$\{\neg\mathrm{Abuela}(X_3,Y_3), \mathrm{Madre}(X_3,\mathrm{medio}(X_3,Y_3))\}$ $\{\neg\mathrm{Abuela}(X_4,Y_4), \mathrm{Madre}(\mathrm{medio}(X_4,Y_4),Y_4)\}$

Otro ejemplo (cont.)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

A partir de ellas, se desea demostrar que:

Cast.:	Los nietos son descendientes
1° o.:	$\forall X\ \forall Y\ (\mathsf{Abuela}(X, Y) \supset \mathsf{Descendiente}(Y, X))$
Neg.:	$\exists X\ \exists Y\ (\mathsf{Abuela}(X, Y) \wedge \neg\mathsf{Descendiente}(Y, X))$
Claus.:	$\{\mathsf{Abuela}(a, b)\}$
	$\{\neg\mathsf{Descendiente}(b, a)\}$

Otro ejemplo (resolviendo)

Recuperatorio 2° parcial 2° Cuat. 2008

1. $\{\neg \mathrm{Madre}(X_1, Y_1), \mathrm{Descendiente}(Y_1, X_1)\}$
2. $\{\neg \mathrm{Descendiente}(X_2, Y_2), \neg \mathrm{Descendiente}(Y_2, Z_2), \mathrm{Descendiente}(X_2, Z_2)\}$
3. $\{\neg \mathrm{Abuela}(X_3, Y_3), \mathrm{Madre}(X_3, \mathrm{medio}(X_3, Y_3))\}$
4. $\{\neg \mathrm{Abuela}(X_4, Y_4), \mathrm{Madre}(\mathrm{medio}(X_4, Y_4), Y_4)\}$
5. $\{\mathrm{Abuela}(a, b)\}$
6. $\{\neg \mathrm{Descendiente}(b, a)\}$

Resolvámoslo con nuestra herramienta.

Cómo mantenernos en línea

Si un conjunto de cláusulas es insatisfactible, existe una secuencia de pasos de resolución *lineal* que lo refuta (prueba su insatisfactibilidad). Es decir, una secuencia de la forma:

$$
\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[dr, dash] & C_0 \arrow[d, dash] & \\
B_2 \arrow[dr, dash] & C_1 \arrow[d, dash] & \sigma_1 \\
B_3 \arrow[dr, dash] & C_2 \arrow[d, dash] & \sigma_2 \\
 & C_3 & \sigma_3 \\
B_{p-1} \arrow[dr, dash] & \cdots \arrow[d, dash] & \\
B_p \arrow[dr, dash] & C_{p-1} \arrow[d, dash] & \sigma_{p-1} \\
 & C_p = \square & \sigma_p
\end{tikzcd}
$$

donde C_0 y cada B_i es un elemento de S o algún C_j con $j < i$.

Resolución SLD (*Selective Linear Definite*)

La resolución es cara, pero hay cupones de descuento...

- El método de resolución es completo, pero ineficiente.
- El espacio de búsqueda - inicialmente cuadrático - crece en cada paso.
- Resolución lineal reduce el espacio de búsqueda.
- Resolución SLD es lineal y (un poco) más eficiente, preservando completitud...
  ¡pero no puede aplicarse a cualquier conjunto de cláusulas!

Cláusulas de Horn

Cláusulas con a lo sumo un literal positivo

- $\cancel{\{P(x), P(y), \neg Q(y,z)\}}$
- $\{Q(E,z)\}$ ✓ $\rightarrow$ cláusula de definición (*hecho*)
- $\{P(x), \neg P(E)\}$ ✓ $\rightarrow$ cláusula de definición (*regla*)
- $\cancel{\{P(x), \neg P(E), Q(x,y)\}}$
- $\{P(x), \neg P(E), \neg Q(x,y)\}$ ✓ $\rightarrow$ cláusula de definición (*regla*)
- $\{\neg P(x), \neg P(E), \neg Q(x,y)\}$ ✓ $\rightarrow$ cláusula objetivo

No toda fórmula puede expresarse como una cláusula de Horn

$$\forall x(P(x) \vee Q(x))$$

Resolución SLD

Un caso particular de la resolución general

- Cláusulas de Horn con exactamente una cláusula objetivo
- Resolvemos la cláusula objetivo con una cláusula de definición
- Eso nos da otra cláusula objetivo
- Repetimos el proceso con esta nueva cláusula
- Hasta llegar a la cláusula vacía
- Si se busca un resultado, computamos la sustitución respuesta

$$\frac{\overbrace{\{R, \neg B_1, \ldots, \neg B_n\}}^{\text{def.}} \qquad \overbrace{\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m\}}^{\text{obj.}}}{\underbrace{\sigma(\{\neg A_1, \ldots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \ldots, \neg B_n, \neg A_{k+1}, \ldots, \neg A_m\})}_{\text{nuevo obj.}}}$$

donde σ es el MGU de $\{R, A_k\}$.

Volviendo al primer ejercicio que resolvimos...

1. $\{\neg\mathrm{Inc}(X_1, Y_1), \neg\mathrm{Pert}(Z_1, X_1), \mathrm{Pert}(Z_1, Y_1)\}$
2. $\{\mathrm{Inc}(X_2, Y_2), \mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_2, Y_2), X_2)\}$
3. $\{\mathrm{Inc}(X_3, Y_3), \neg\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(X_3, Y_3), Y_3)\}$
4. $\{\neg\mathrm{Pert}(X_4, \emptyset)\}$
5. $\{\neg\mathrm{Inc}(\emptyset, \mathrm{c})\}$
6. (2 y 5) $\{\mathrm{Pert}(\mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c}), \emptyset)\}$ $\sigma = \{X_2 \leftarrow \emptyset,\ Y_2 \leftarrow \mathrm{c}\}$
7. (6 y 4) $\square$ $\sigma = \{X_4 \leftarrow \mathrm{f}(\emptyset, \mathrm{c})\}$

¿Esto es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Resolución SLD

Ejemplo (computando una solución)

"Los enemigos de mis enemigos son mis amigos."

1. $\{\text{amigo}(A, B), \neg\text{enemigo}(A, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$
2. $\{\text{enemigo}(\text{Reed}, \text{Dr. Doom})\}$
3. $\{\text{enemigo}(\text{Dr. Doom}, \text{Ben})\}$
4. $\{\text{enemigo}(\text{Dr. Doom}, \text{Johnny})\}$
5. $\{\neg\text{amigo}(\text{Reed}, X)\}$
6. (1 y 5) $\{\neg\text{enemigo}(\text{Reed}, C), \neg\text{enemigo}(C, B)\}$
   $\sigma_6 = \{A \leftarrow \text{Reed}, X \leftarrow B\}$
7. (2 y 6) $\{\neg\text{enemigo}(\text{Dr. Doom}, B)\}$
   $\sigma_7 = \{C \leftarrow \text{Dr. Doom}\}$
8. (3 y 7) $\square$ $\sigma_8 = \{B \leftarrow \text{Ben}\}$
   $\sigma = \sigma_8 \circ \sigma_7 \circ \sigma_6 =$
   $\{A \leftarrow \text{Reed}, X \leftarrow \text{Ben}, B \leftarrow \text{Ben}, C \leftarrow \text{Dr. Doom}\}$

Árbol de resolución

¡Es una secuencia!

- La resolución SLD es lineal: no hay vuelta atrás posible.
- Si el objetivo puede resolverse con más de una regla, elegir la correcta.
- Si hay más de una, elegir cualquiera.
- Si nos equivocamos, entonces lo que hicimos no es parte de la resolución SLD.
- Puede haber varias resoluciones SLD posibles.
- Prolog intenta buscar todas (resolución SLD + backtracking).

Resolución SLD y Prolog

Preguntas generales

- El mecanismo de búsqueda en la resolución SLD ¿está determinado?
- ¿El método es completo?
- ¿Prolog usa resolución SLD? ¿Su método es completo? ¿Está determinado?
- ¿Dónde está el problema (o la diferencia)?

Resolución SLD y Prolog

El ejemplo anterior en Prolog

"Los enemigos de mis enemigos son mis amigos."

$\{\text{amigo}(A,B), \neg\text{enemigo}(A,C), \neg\text{enemigo}(C,B)\}$	`amigo(A, B) :- enemigo(A, C), enemigo(C, B).`
$\{\text{enemigo}(\text{Reed}, \text{Dr. Doom})\}$	`enemigo(reed, drdoom).`
$\{\text{enemigo}(\text{Dr. Doom}, \text{Ben})\}$	`enemigo(drdoom, ben).`
$\{\text{enemigo}(\text{Dr. Doom}, \text{Johnny})\}$	`enemigo(drdoom, johnny).`
$\{\neg\text{amigo}(\text{Reed}, X)\}$	`?- amigo(reed, X).`

¿Cuál es la relación? ¿Cualquier ejemplo se puede traducir así?
¿Qué hay que tener en cuenta?

Resolución SLD y Prolog

Veamos ahora este ejemplo tomado de la práctica de Prolog:

1. `natural(0).`
2. `natural(suc(X)) :- natural(X).`
3. `menorOIgual(X, suc(Y)) :- menorOIgual(X, Y).`
4. `menorOIgual(X,X) :- natural(X).`

¿Qué pasa en Prolog si ejecutamos la consulta `menorOIgual(0,X)`?

¿Podremos encontrar la respuesta usando resolución? Veámoslo en el pizarrón.

De Prolog a Resolución

Considerar las siguientes definiciones en prolog:

```
preorder(nil,[]).
preorder(bin(I,R,D),[R|L]) :- append(LI,LD,L), preorder(I,LI),
                              preorder(D,LD).
append([],YS,YS).
append([X|XS],YS,[X|L]) :- append(XS,YS,L).
```

- ¿Qué sucede al realizar la consulta
  `?- preorder(bin(bin(nil,2,nil),1,nil),Lista).`?
- Utilizar el método de resolución para encontrar la solución al problema. Para ello, convertir el programa a forma clausal.
- Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD, y justificar. En caso de ser SLD, ¿respeta el orden en que Prolog hubiera resuelto la consulta?

Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

En este ejercicio usaremos el método de resolución para demostrar una propiedad de las relaciones binarias; a saber, que una relación no vacía no puede ser a la vez irreflexiva, simétrica y transitiva.

Para esto tomaremos una relación R y se demostrará que, si R satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía.

Dadas las siguientes definiciones:

1. R **es irreflexiva:** $\forall X \neg R(X, X)$
2. R **es simétrica:** $\forall X \forall Y (R(X, Y) \supset R(Y, X))$
3. R **es transitiva:** $\forall X \forall Y \forall Z ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \supset R(X, Z))$
4. R **es vacía:** $\forall X \neg \exists Y R(X, Y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).

Último ejercicio

2° parcial 1° Cuat. 2011

Cast.:	R es irreflexiva.
1° o.:	$\forall X \neg R(X, X)$
Claus.:	$\{\neg R(X_1, X_1)\}$
Cast.:	R es simétrica
1° o.:	$\forall X \forall Y (R(X, Y) \supset R(Y, X))$
Claus.:	$\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
Cast.:	R es transitiva.
1° o.:	$\forall X \forall Y \forall Z ((R(X, Y) \wedge R(Y, Z)) \supset R(X, Z))$
Claus.:	$\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$

Último ejercicio (cont.)

2° parcial 1° Cuat. 2011

Se desea demostrar que:

Cast.:	R es vacía:
1° o.:	$\forall X \neg \exists Y R(X, Y)$
Neg.:	$\exists X \; \exists Y \; R(X, Y)$
Claus.:	$\{R(\mathrm{a}, \mathrm{b})\}$

Último ejercicio (resolviendo)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(\mathrm{a}, \mathrm{b})\}$
5. (4 y 2) $\{R(\mathrm{b}, \mathrm{a})\}$ $\sigma = \{X_2 \leftarrow \mathrm{a},\ Y_2 \leftarrow \mathrm{b}\}$
6. (5 y 3) $\{\neg R(X_6, \mathrm{b}), R(X_6, \mathrm{a})\}$ $\sigma = \{Y_3 \leftarrow \mathrm{b},\ Z_3 \leftarrow \mathrm{a}\}$ renombrando X_3 a X_6
7. (6 y 4) $\{R(\mathrm{a}, \mathrm{a})\}$ $\sigma = \{X_6 \leftarrow \mathrm{a}\}$
8. (7 y 1) $\square$ $\sigma = \{X_1 \leftarrow \mathrm{a}\}$

¿Esta demostración por resolución es SLD? ¿Por qué, o por qué no?

Alternativa SLD

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(\mathrm{a}, \mathrm{b})\}$
5. (1 y 3) $\{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ $\sigma = \{X_3 \leftarrow X_1,\ Z_3 \leftarrow X_1\}$
6. (5 y 4) $\{\neg R(\mathrm{b}, \mathrm{a})\}$ $\sigma = \{X_1 \leftarrow \mathrm{a},\ Y_3 \leftarrow \mathrm{b}\}$
7. (6 y 2) $\{\neg R(\mathrm{a}, \mathrm{b})\}$ $\sigma = \{X_2 \leftarrow \mathrm{a},\ Y_2 \leftarrow \mathrm{b}\}$
8. (7 y 4) $\Box$ $\sigma = \emptyset$

¿Es la única posible?

Otra alternativa SLD (más corta)

2° parcial 1° Cuat. 2011

1. $\{\neg R(X_1, X_1)\}$
2. $\{\neg R(X_2, Y_2), R(Y_2, X_2)\}$
3. $\{\neg R(X_3, Y_3), \neg R(Y_3, Z_3), R(X_3, Z_3)\}$
4. $\{R(a, b)\}$
5. (1 y 3) $\{\neg R(X_1, Y_3), \neg R(Y_3, X_1)\}$ $\sigma = \{X_3 \leftarrow X_1,\ Z_3 \leftarrow X_1\}$
6. (5 y 2) $\{\neg R(X_2, Y_2)\}$ $\sigma = \{X_1 \leftarrow X_2,\ Y_3 \leftarrow Y_2\}$
7. (6 y 4) $\square$ $\sigma = \{X_2 \leftarrow a,\ Y_2 \leftarrow b\}$

Fin □