



Ejercicio 1. ★ Las siguientes especificaciones no son correctas. Indicar por qué, y corregirlas para que describan correctamente el problema.

a) **buscar**: Dada una secuencia y un elemento, devuelve en *result* la posición de la secuencia en la cual se encuentra el elemento.
proc buscar (in l: seq(\mathbb{R}), in elem: \mathbb{R} , out result: \mathbb{Z}) {

Pre {elem \in l}

Post {l[result] = elem}

}

b) **progresionGeometricaFactor2**: Indica si la secuencia *l* representa una progresión geométrica factor 2. Es decir, si cada elemento de la secuencia es el doble del elemento anterior.

proc progresionGeometricaFactor2 (in l: seq(\mathbb{Z}), out result: Bool) {

Pre {True}

Post {result = True $\leftrightarrow ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow l[i] = 2 * l[i - 1]))$ }

}

c) **minimo**: Devuelve en *result* el menor elemento de *l*.

proc minimo (in l: seq(\mathbb{Z}), out result: \mathbb{Z}) {

Pre {True}

Post { $(\forall y : \mathbb{Z})(y \in l \wedge y \neq x \rightarrow y > result)$ }

}

Ejercicio 2. La siguiente no es una especificación válida, ya que para ciertos valores de entrada que cumplen la precondition, no existe una salida que cumpla con la postcondición.

proc elementosQueSumen (in l: seq(\mathbb{Z}), in suma: \mathbb{Z} , out result: seq(\mathbb{Z})) {

Pre {True}

Post {

/* La secuencia result está incluida en la secuencia l */

$(\forall x : \mathbb{Z})(x \in result \rightarrow \#apariciones(x, result) \leq \#apariciones(x, l))$

/* La suma de la result coincide con el valor suma */

$\wedge suma = \sum_{i=0}^{|result|-1} result[i]$

}

}

a) Mostrar valores para *l* y *suma* que hagan verdadera la precondition, pero tales que no exista *result* que cumpla la postcondición.

b) Supongamos que agregamos a la especificación la siguiente cláusula:

Pre : min_suma(l) \leq suma \leq max_suma(l)

fun min_suma(l) : $\mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|l|-1} \text{if } l[i] < 0 \text{ then } l[i] \text{ else } 0$ fi

fun max_suma(l) : $\mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|l|-1} \text{if } l[i] > 0 \text{ then } l[i] \text{ else } 0$ fi

¿Ahora es una especificación válida? Si no lo es, justificarlo con un ejemplo como en el punto anterior.

c) Dar una precondition que haga correcta la especificación.

Ejercicio 3. ★ Para los siguientes problemas, dar todas las soluciones posibles a las entradas dadas.

a) **proc** raizCuadrada (in x: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre $\{x \geq 0\}$
 Post $\{result^2 = x\}$
}

I) $x = 0$

II) $x = 1$

III) $x = 27$

b) ★ **proc** indiceDelMaximo (in l: $seq(\mathbb{R})$, out result: \mathbb{Z}) {
 Pre $\{|l| > 0\}$
 Post {
 $0 \leq result < |l|$
 $\wedge_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L l[i] \leq l[result]))$
 }
}

I) $l = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$

II) $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1 \rangle$

III) $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

c) ★ **proc** indiceDelPrimerMaximo (l: $seq(\mathbb{R})$, result: \mathbb{Z}) {
 Pre $\{|l| > 0\}$
 Post {
 $0 \leq result < |l|$
 $\wedge ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L (l[i] < l[result] \vee (l[i] = l[result] \wedge i \geq result))))$
 }
}

I) $l = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$

II) $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1 \rangle$

III) $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0 \rangle$

d) ¿Para qué valores de entrada indiceDelPrimerMaximo y indiceDelMaximo tienen necesariamente la misma salida?

Ejercicio 4. ★ Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(a, b) = \begin{cases} 2b & \text{si } a < 0 \\ b - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes especificaciones son correctas para el problema de calcular $f(x, y)$?
 Para las que no lo son, indicar por qué.

a) **proc** f (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre $\{True\}$
 Post {
 $(a < 0 \wedge result = 2 * b)$
 \wedge
 $(a \geq 0 \wedge result = b - 1)$
 }
}

- b) **proc f** (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post $\{(a < 0 \wedge result = 2 * b) \vee (a > 0 \wedge result = b - 1)\}$
 }
- c) **proc f** (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post $\{(a < 0 \wedge result = 2 * b) \vee (a \geq 0 \wedge result = b - 1)\}$
 }
- d) **proc f** (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post {
 $a < 0 \rightarrow result = 2 * b$
 \wedge
 $a \geq 0 \rightarrow result = b - 1$
 }
 }
- e) **proc f** (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post $\{(a < 0 \rightarrow result = 2 * b) \vee (a \geq 0 \rightarrow result = b - 1)\}$
 }
- f) **proc f** (in a, b: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post {*result* = (if $a < 0$ then $2 * b$ else $b - 1$ fi)}
 }

Ejercicio 5. ★ Considerar la siguiente especificación, junto con un algoritmo que dado x devuelve x^2 .

proc unoMasGrande (in x: \mathbb{R} , out result: \mathbb{R}) {
 Pre {*True*}
 Post {*result* > x }
 }

- a) ¿Qué devuelve el algoritmo si recibe $x = 3$? ¿El resultado hace verdadera la postcondición de **unoMasGrande**?
- b) ¿Qué sucede para las entradas $x = 0.5$, $x = 1$, $x = -0.2$ y $x = -7$?
- c) Teniendo en cuenta lo respondido en los puntos anteriores, escribir una precondition para **unoMasGrande**, de manera tal que el algoritmo sea una implementación correcta.

Ejercicio 6. ★ Sean x y r variables de tipo \mathbb{R} . Considerar los siguientes predicados:

P1: $\{x \leq 0\}$	Q1: $\{r \geq x^2\}$
P2: $\{x \leq 10\}$	Q2: $\{r \geq 0\}$
P3: $\{x \leq -10\}$	Q3: $\{r = x^2\}$

- a) Indicar la relación de fuerza entre P1, P2 y P3.
- b) Indicar la relación de fuerza entre Q1, Q2 y Q3.

c) Sea E1 la siguiente especificación. Escribir 2 programas que cumplan con E1.

```
proc hagoAlgo (in x:  $\mathbb{R}$ , out r:  $\mathbb{R}$ ) {
    Pre { $x \leq 0$ }
    Post { $r \geq x^2$ }
}
```

d) Sea A un algoritmo que cumple con E1. Decidir si necesariamente cumple las siguientes especificaciones:

a) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r \geq x^2\}$

b) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r \geq x^2\}$

c) Pre: $\{x \leq 0\}$, Post: $\{r \geq 0\}$

d) Pre: $\{x \leq 0\}$, Post: $\{r = x^2\}$

e) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r \geq 0\}$

f) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r \geq 0\}$

g) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r = x^2\}$

h) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r = x^2\}$

e) ¿Qué conclusión pueden sacar? ¿Qué debe cumplirse con respecto a las precondiciones y postcondiciones para que sea seguro reemplazar la especificación?

Ejercicio 7. ★ Considerar las siguientes dos especificaciones, junto con un algoritmo a que satisface la especificación de $p2$.

```
proc p1 (in x:  $\mathbb{R}$ , in n:  $\mathbb{Z}$ , out result:  $\mathbb{Z}$ ) {
    Pre { $x \neq 0$ }
    Post { $x^n - 1 < result \leq x^n$ }
}
```

```
proc p2 (in x:  $\mathbb{R}$ , in n:  $\mathbb{Z}$ , out result:  $\mathbb{Z}$ ) {
    Pre { $n \leq 0 \rightarrow x \neq 0$ }
    Post { $result = \lfloor x^n \rfloor$ }
}
```

a) Dados valores de x y n que hacen verdadera la precondición de $p1$, demostrar que hacen también verdadera la precondición de $p2$.

b) Ahora, dados estos valores de x y n , supongamos que se ejecuta a : llegamos a un valor de res que hace verdadera la postcondición de $p2$. ¿Será también verdadera la postcondición de $p1$?

c) ¿Podemos concluir que a satisface la especificación de $p1$?

Ejercicio 8. Considerar las siguientes especificaciones:

```
proc n-esimo1 (in l:  $seq(\mathbb{Z})$ , in n:  $\mathbb{Z}$ , out result:  $\mathbb{Z}$ ) {
    Pre {
        /*Los elementos están ordenados*/
         $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| - 1 \rightarrow_L l[i] < l[i + 1])$ 
         $\wedge 0 \leq n < |l|$ 
    }
    Post { $result = l[n]$ }
}
```

```
proc n-esimo2 (in l:  $seq(\mathbb{Z})$ , in n:  $\mathbb{Z}$ , out result:  $\mathbb{Z}$ ) {
    Pre {
        /*Los elementos son distintos entre sí*/
         $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L ((\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |l| \wedge i \neq j) \rightarrow_L l[i] \neq l[j]))$ 
         $\wedge$ 
    }
```

```

    0 ≤ n < |l|
  }
Post {
  result ∈ l
  ∧
  n = ∑i=0|l|-1 (if l[i] < result then 1 else 0 fi)
}
}

```

¿Es cierto que todo algoritmo que cumple con `n-esimo1` cumple también con `n-esimo2`? ¿Y al revés?

Sugerencia: Razonar de manera análoga a la del ejercicio anterior.

Ejercicio 9. ★ Especificar los siguientes problemas:

- Dado un número entero, decidir si es par.
- Dado un entero n y uno m , decidir si n es un múltiplo de m .
- Dado un número real, devolver su inverso multiplicativo.
- Dada una secuencia de caracteres, obtener de ella sólo los que son numéricos (con todas sus apariciones sin importar el orden de aparición).
- Dada una secuencia de reales, devolver la secuencia que resulta de duplicar sus valores en las posiciones impares
- Dado un número entero, listar todos sus divisores positivos (sin duplicados).

Ejercicio 10. Considerar el problema de decidir, dados n y m enteros, si n es múltiplo de m , y la siguiente especificación.

```

proc esMultiplo (in n, m: ℤ, out result: Bool) {
  Pre {m ≠ 0}
  Post {result = (n mód m = 0)}
}

```

- Según la definición matemática de múltiplo, ¿tiene sentido preguntarse si 4 es múltiplo de 0? ¿Cuál es la respuesta?
- ¿Debería ser $n = 4$, $m = 0$ una entrada válida para el problema? ¿Lo es en esta especificación?
- Corregir la especificación de manera tal que $n = 4$, $m = 0$ satisfaga la precondition (¡cuidado con las indefiniciones!).
- ¿Qué relación de fuerza hay entre la precondition nueva y la original?

Ejercicio 11. Considerar el problema de, dada una secuencia de números reales, devolver la que resulta de duplicar sus valores en las posiciones impares.

- Para la secuencia $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$, ¿es $\langle 0, 4, 0, 8 \rangle$ un resultado correcto?
- Sea la siguiente especificación:

```

proc duplicarEnImpares (in l: seq(ℝ), out result: seq(ℝ)) {
  Pre {True}
  Post {|result| = |l| ∧ (∀i : ℤ)((0 ≤ i < |result| ∧ i mód 2 = 1) →L result[i] = 2 * l[i])}
}

```

Si $l = \langle 1, 2, 3, 4 \rangle$, ¿ $result = \langle 0, 4, 0, 8 \rangle$ satisface la postcondición?

- Si es necesario, corregir la especificación para que describa correctamente el resultado esperado.
- ¿Qué relación de fuerza hay entre la nueva postcondición y la original?

Ejercicio 12. ★ Especificar el problema de dado un entero positivo retornar una secuencia de 0s y 1s que represente ese número en base 2 (es decir, en binario).

Ejercicio 13. Con lo visto en los ejercicios 9 a 12, ¿Encuentra casos de sub y sobre especificación en las especificaciones del ejercicio 8?

Ejercicio 14. Especificar los siguientes problemas:

- ★ Dado un número entero positivo, obtener la suma de sus factores primos.
- Dado un número entero positivo, decidir si es perfecto. Se dice que un número es perfecto cuando es igual a la suma de sus divisores (excluyéndose a sí mismo).
- Dado un número entero positivo n , obtener el menor entero positivo $m > 1$ tal que m sea coprimo con n .
- ★ Dado un entero positivo, obtener su descomposición en factores primos. Devolver una secuencia de tuplas (p, e) , donde p es un factor primo y e es su exponente, ordenada en forma creciente con respecto a p .
- Dada una secuencia de números reales, obtener la diferencia máxima entre dos de sus elementos.
- ★ Dada una secuencia de números enteros, devolver aquel que divida a más elementos de dicha secuencia. El elemento tiene que pertenecer a la secuencia original. Si existe más de un elemento que cumple esta propiedad, devolver alguno de ellos.

Ejercicio 15. Especificar los siguientes problemas sobre secuencias:

- `proc nEsimaAparicion(in l : seq(R), in e : R, in n : Z, out result : Z)`, que devuelve el índice de la n -ésima aparición de e en l .
- Dadas dos secuencias s y t , decidir si s es una subcadena de t .
- ★ Dadas dos secuencias s y t , decidir si s está *incluida* en t , es decir, si todos los elementos de s aparecen en t en igual o mayor cantidad.
- `proc mezclarOrdenado(in s, t : seq(Z), out result : seq(Z))`, que recibe dos secuencias ordenadas y devuelve el resultado de intercalar sus elementos de manera ordenada.
- Dadas dos secuencias s y t especificar el procedimiento *intersecciónSinRepetidos* que retorna una secuencia que contiene únicamente los elementos que aparecen en ambas secuencias.
- ★ Dadas dos secuencias s y t , devolver su *intersección*, es decir, una secuencia con todos los elementos que aparecen en ambas. Si un mismo elemento tiene repetidos, la secuencia retornada debe contener la cantidad mínima de apariciones en s y de t .

Ejercicio 16. Especificar los siguientes problemas:

- `proc cantApariciones(in l : String, out result : seq(Char × Z))` que devuelve la secuencia con todos los elementos de l , sin duplicados, con su cantidad de apariciones (en un orden cualquiera). Ejemplos:
 - $cantApariciones(\langle 'a' \rangle) = \langle \langle 'a', 1 \rangle \rangle$
 - $cantApariciones(\langle 'a', 'b', 'c' \rangle) = \langle \langle 'a', 1 \rangle, \langle 'c', 1 \rangle, \langle 'b', 1 \rangle \rangle$
 - $cantApariciones(\langle 'a', 'b', 'c', 'b', 'd', 'b' \rangle) = \langle \langle 'a', 1 \rangle, \langle 'b', 3 \rangle, \langle 'd', 1 \rangle, \langle 'c', 1 \rangle \rangle$
 - $cantApariciones(\langle \rangle) = \langle \rangle$
- Dada una secuencia, devolver una secuencia de secuencias que contenga todos sus prefijos, en orden creciente de longitud.
- ★ Dada una secuencia de secuencias de enteros l , devolver una secuencia de l que contenga el máximo valor. Por ejemplo, si $l = \langle \langle 2, 3, 5 \rangle, \langle 8, 1 \rangle, \langle 2, 8, 4, 3 \rangle \rangle$, devolver $\langle 8, 1 \rangle$ o $\langle 2, 8, 4, 3 \rangle$.
- `proc interseccionMultiple(in ls : seq(seq(R)), out l : seq(R))` que devuelve en l el resultado de la intersección de todas las secuencias de ls .
- ★ `proc separar(in l : String, in delim : Char, out ls : seq(String))` que devuelve la secuencia resultante de separar l en cada posición donde aparece el delimitador *delim* (y eliminar dicho delimitador).
Por ejemplo, `separar("hola; amigo; ven", ';') = ⟨ "hola", " amigo", " ven" ⟩`.
- ★ Dada una secuencia l con todos sus elementos distintos, devolver la secuencia de *partes*, es decir, la secuencia de todas las secuencias incluidas en l , cada una con sus elementos en el mismo orden en que aparecen en l .

Especificación de problemas usando inout

Ejercicio 17. ★ Dados dos enteros a y b , se necesita calcular su suma, y retornarla en un entero c . ¿Cuáles de las siguientes especificaciones son correctas para este problema? Para las que no lo son, indicar por qué.

- a) `proc sumar (inout a, b, c: \mathbb{Z}) {`
 `Pre { $True$ }`
 `Post { $a + b = c$ }`
}
- b) `proc sumar (in a, b: \mathbb{Z} , in c: \mathbb{Z}) {`
 `Pre { $True$ }`
 `Post { $c = a + b$ }`
}
- c) `proc sumar (in a, b: \mathbb{Z} , out c: \mathbb{Z}) {`
 `Pre { $True$ }`
 `Post { $c = a + b$ }`
}
- d) `proc sumar (inout a, b: \mathbb{Z} , out c: \mathbb{Z}) {`
 `Pre { $a = A_0 \wedge b = B_0$ }`
 `Post { $a = A_0 \wedge b = B_0 \wedge c = a + b$ }`
}

Ejercicio 18. ★ Dada una secuencia l , se desea sacar su primer elemento y devolverlo. Decidir cuáles de estas especificaciones son correctas. Para las que no lo son, indicar por qué y justificar con ejemplos.

- a) `proc tomarPrimero (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: \mathbb{R}) {`
 `Pre { $|l| > 0$ }`
 `Post { $result = head(l)$ }`
}
- b) `proc tomarPrimero (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: \mathbb{R}) {`
 `Pre { $|l| > 0 \wedge l = L_0$ }`
 `Post { $result = head(L_0)$ }`
}
- c) `proc tomarPrimero (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: \mathbb{R}) {`
 `Pre { $|l| > 0$ }`
 `Post { $result = head(L_0) \wedge |l| = |L_0| - 1$ }`
}
- d) `proc tomarPrimero (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: \mathbb{R}) {`
 `Pre { $|l| > 0 \wedge l = L_0$ }`
 `Post { $result = head(L_0) \wedge l = tail(L_0)$ }`
}

```
e) proc tomarPrimero (inout l: seq(R), out result:R) {
  Pre { |l| > 0 ∧ l = L0 }
  Post {
    result = head(L0)
    ∧ |l| = |L0| - 1
    ∧L ((∀ i : Z)(0 ≤ i < |l| →L l[i] = L0[i + 1]))
  }
}
```

Ejercicio 19. Considerar la siguiente especificación:

```
proc intercambiar (inout l: seq(R), in i, j: Z) {
  Pre { 0 ≤ i < |l| ∧ 0 ≤ j < |l| ∧ l = L0 }
  Post {
    /*Las secuencias tienen la misma longitud*/
    |l| = |L0|
    ∧
    /*Intercambia i*/
    l[i] = L0[j]
    ∧
    /*Intercambia j*/
    l[j] = L0[i]
  }
}
```

- ¿Esta especificación es válida? Si lo es, ¿qué problema describe?
- Mostrar con un ejemplo que la postcondición está sub-especificada (es decir, que hay valores que la hacen verdadera aunque no son deseables como solución).
- Corregir la especificación agregando a la postcondición una o más cláusulas Post : .

Ejercicio 20. Explicar coloquialmente la siguiente especificación:

```
proc copiarPrimero (inout l: seq(Z), inout i: Z) {
  Pre {
    /*Valores iniciales*/
    l = L0 ∧ i = I0
    ∧
    /*Secuencia no vacía*/
    |l| > 0
    ∧
    /*Índice en rango*/
    0 ≤ i < |l|
  }
  Post {
    l[I0] = L0[0]
    ∧
    i = L0[I0]
    ∧
    ((∀ j : Z)((0 ≤ j < |l| ∧ j ≠ I0) →L l[j] = L0[I0])
  }
}
```

Ejercicio 21. Dada una secuencia de enteros, se requiere multiplicar por 2 aquéllos valores que se encuentran en posiciones pares. Indicar por qué son incorrectas las siguientes especificaciones, y proponer una alternativa correcta.

- a) **proc** duplicarPares (inout l: seq(\mathbb{Z})) {
 Pre { $l = L_0$ }
 Post {
 $|l| = |L_0|$
 \wedge
 $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \wedge i \bmod 2 = 0) \rightarrow_L l[i] = 2 * L_0[i]$
 }
}
- b) **proc** duplicarPares (inout l: seq(\mathbb{Z})) {
 Pre { $l = L_0$ }
 Post { $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \bmod 2 \neq 0) \rightarrow_L l[i] = L_0[i])$
 \wedge
 $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \bmod 2 = 0) \rightarrow_L l[i] = 2 * L_0[i])$
 }
}
- c) **proc** duplicarPares (inout l: seq(\mathbb{Z}), out result:seq(\mathbb{Z})) {
 Pre {True}
 Post { $|l| = |result|$
 \wedge
 $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \bmod 2 \neq 0) \rightarrow_L result[i] = l[i])$
 \wedge
 $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \bmod 2 = 0) \rightarrow_L result[i] = 2 * l[i])$
 }
}

Ejercicio 22. Especificar los siguientes problemas de modificación de secuencias:

- a) ★ **proc** primosHermanos(inout l : seq(\mathbb{Z})), que dada una secuencia de enteros mayores a dos, reemplaza dichos valores por el número primo menor más cercano. Por ejemplo, si $l = \langle 6, 5, 9, 14 \rangle$, luego de aplicar **primosHermanos**(l), $l = \langle 5, 5, 7, 13 \rangle$
- b) ★ **proc** reemplazar(inout l : String, in a, b : Char), que reemplaza todas las apariciones de a en l por b.
- c) **proc** recortar(inout l : seq(\mathbb{Z}), in a : \mathbb{Z}), que saca de l todas las apariciones de a consecutivas que aparezcan al principio. Por ejemplo **recortar**($\langle 2, 2, 3, 2, 4 \rangle, 2$) = $\langle 3, 2, 4 \rangle$, mientras que **recortar**($\langle 2, 2, 3, 2, 4 \rangle, 3$) = $\langle 2, 2, 3, 2, 4 \rangle$.
- d) **proc** intercambiarParesConImpares(inout l : String), que toma una secuencia de longitud par y la modifica de modo tal que todas las posiciones de la forma $2k$ quedan intercambiadas con las posiciones $2k + 1$. Por ejemplo, **intercambiarParesConImpares**("adinle") modifica de la siguiente manera: "daniel".
- e) ★ **proc** limpiarDuplicados(inout l : String, inout dup : String), que elimina los elementos duplicados de l dejando sólo su primera aparición, y devuelve en dup todas las apariciones eliminadas (respetando el orden).