# Subtipado

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

21 de junio de 2018

# Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

**¿Podemos tipar la siguiente expresión?**

$$(\lambda r : \{x : \mathrm{Nat}\}\ .\ r.x)\ \{x = 1, y = 2\}$$

# Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

## ¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

## El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} \ \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

# Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

## ¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

## El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} \ \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?
y si lo hago con un Float, ¿funcionará?

# Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

## ¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} \ . \ r.x) \ \{x = 1, y = 2\}$$

## El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} \ . \ ...)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?
y si lo hago con un Float, ¿funcionará? ¿siempre?

# Sustitutividad

## La relación de subtipado

$$S <: T$$

- Cualquier término de tipo $S$ puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo $T$ es esperado

## Principio de Sustitutividad

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau}\ (\text{T-S{\scriptsize UB}})$$

# Las relación de subtipado

## Reglas - las fáciles

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}}\ (\text{S-BoolNat}) \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}}\ (\text{S-NatInt})$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}}\ (\text{S-IntFloat}) \qquad \frac{}{\sigma <: \text{Top}}\ (\text{S-Top})$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma}\ (\text{S-Refl}) \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho}\ (\text{S-Trans})$$

# Las relación de subtipado
## Reglas - pares

**Pensar en el principio de sustitutividad**

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

$$\frac{\sigma \ ? \ \tau \qquad \sigma_2 \ ? \ \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{ (S-Pair)}$$

# Las relación de subtipado

## Reglas - pares

**Pensar en el principio de sustitutividad**

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{ (S-PAIR)}$$

# Las relación de subtipado

## Reglas - pares

**Pensar en el principio de sustitutividad**

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

$$\frac{\sigma <: \tau \qquad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{ (S-PAIR)}$$

- Probar el siguiente juicio (¿quién es $\sigma$? )

$$\{y \;:\; \text{Bool}\} \triangleright (\lambda p : \text{Nat} \times \text{Nat} \;.\; succ(\pi_1(p)))\; (y, y) \;:\; \sigma$$

# Las relación de subtipado

## Reglas - funciones

**Pensar en el principio de sustitutividad**

¿Cuándo una función es reemplazable por otra?

$$\frac{\sigma' \ ? \ \sigma \qquad \tau' \ ? \ \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(S-ARROW)}$$

1. Definimos hipótesis que queremos testear: las reglas de subtipado que creemos que son correctas.
2. Creamos un programa que ejercite todas las particularidades del tipo a analizar. Al evaluarlo con algo del tipo esperado, no debe haber errores.
3. Evaluamos el programa con algo del tipo que queremos testear si es subtipo. Notar que el programa realizado en el punto anterior queda fijo (ya no se lo puede modificar).

Algunas hipótesis posibles:

$$\frac{\sigma' <: \sigma \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(Hipotesis 1 S-Arrow)}$$

$$\frac{\sigma' :> \sigma \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(Hipotesis 2 S-Arrow)}$$

$$\frac{\sigma' <: \sigma \qquad \tau' :> \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(Hipotesis 3 S-Arrow)}$$

$$\frac{\sigma' :> \sigma \qquad \tau' :> \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(Hipotesis 4 S-Arrow)}$$

# Las relación de subtipado
## Reglas - funciones

**Pensar en el principio de sustitutividad**

¿Cuándo una función es reemplazable por otra?

$$\frac{\sigma' :> \sigma \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{ (S-ARROW)}$$

# Las reglas en acción

## Ejercicio 1

¿Cuál de estas dos expresiones es tipable? ¿Qué tipo tiene?

$$(\lambda f : \text{Nat} \to \text{Nat} \,.\; f\ 3) \quad (\lambda b : \text{Bool} \,.\, 0,5)$$
$$(\lambda f : \text{Nat} \to \text{Nat} \,.\; f\ 3) \quad (\lambda x : \text{Float} \,.\; \text{true})$$

Suponemos

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat}}\ (\text{T-T}\textsc{hree}) \qquad \frac{}{\Gamma \triangleright 0,5 : \text{Float}}\ (\text{T-H}\textsc{alf})$$

# ¿Cómo extender $\lambda$-cálculo desde el subtipado?

**Ejercicio 2 (tipo parcial)**

1. Expresar con reglas de subtipado que el tipo de la *currificación* de una función es equivalente al tipo de dicha función. Es decir, cualquier función *currificada* mantiene el mismo tipo que la misma sin *currificar* y viceversa.
2. Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente témino tiene tipo $\mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}$.

$$(\lambda y : \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat} \,.\, \pi_1(y))\ 0$$

# ¿Cómo extender $\lambda$-cálculo desde el subtipado?

## Ejercicio 2 (tipo parcial)

1. $$\frac{}{\sigma \times \tau \to \rho <: \sigma \to \tau \to \rho}\ (\textsc{S-Curry})$$

   $$\frac{}{\sigma \to \tau \to \rho <: \sigma \times \tau \to \rho}\ (\textsc{S-Uncurry})$$

2. Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente témino tiene tipo $\mathrm{Nat} \to \mathrm{Nat}$.

   $$(\lambda y : \mathrm{Nat} \times \mathrm{Nat}\,.\ \pi_1(y))\ 0$$

**Ejercicio 4 - Subtipado (20 puntos)**

Supongamos que agregamos al lenguaje el tipo $Comp_\sigma$, para representar comparadores de términos de tipo $\sigma$. Los comparadores tienen la operación mejorSegún, que indica si el primer término es mejor que el segundo. La regla que refleja lo anterior es (T-Comp):

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Comp_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \mathsf{mejorSegún}(M, N, O) : Bool}$$

a) El siguente término:

$$\lambda c \colon Comp_{\{x:Int\}}.\mathsf{mejorSegún}(c, \{x = 1, y = 2\}, \{x = 0\})$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright \{x = 1, y = 2\} : \{x : Int, y : Int\} \qquad \Gamma \triangleright \{x = 0\} : \{x : Int\}$$

b) Dar la o las reglas de subtipado para comparadores.

c) El siguiente término:

$$\lambda c \colon Comp_{Float}.(\lambda x \colon Comp_{Nat}.\mathsf{mejorSegún}(x, 3, 4))\ c$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Según las reglas dadas, lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright 3 : Nat \qquad \Gamma \triangleright 4 : Nat$$

# Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \qquad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{(T-SUB)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{(S-BOOLNAT)} \qquad \frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{(S-NATINT)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{(S-INTFLOAT)} \qquad \frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{(S-TOP)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{(S-REFL)} \qquad \frac{\sigma <: \tau \qquad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{(S-TRANS)}$$

$$\frac{\sigma <: \sigma' \qquad \tau' <: \tau}{\sigma' \to \tau' <: \sigma \to \tau} \text{(S-ARROW)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \{k_j | 1 \leq j \leq m\} \qquad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | 1 \leq j \leq m\} <: \{l_i : \tau_i | 1 \leq i \leq n\}} \text{(S-RCD)}$$

# Listo!

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿Preguntas? ? ? ? ? ? ?