

Subtipado

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

21 de Febrero de 2018

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} . r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} . r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} . \dots)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} . r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} . \dots)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

y si lo hago con un Float, ¿funcionará?

Tipado: ¿Nos quedamos cortos?

¿Podemos tipar la siguiente expresión?

$$(\lambda r : \{x : \text{Nat}\} . r.x) \{x = 1, y = 2\}$$

El espíritu

Poder intercambiar tipos en caso de ser posible. Por ejemplo,

$$(\lambda x : \text{Nat} . \dots)$$

si evalúo la función con un Bool, ¿funcionará?

y si lo hago con un Float, ¿funcionará? ¿siempre?

La relación de subtipado

$$S <: T$$

- Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

La relación de subtipado

$$S <: T$$

- Cualquier término de tipo S puede ser usado en forma segura en un contexto en el cual un término de tipo T es esperado

Principio de Sustitutividad

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{ (T-SUB)}$$

Las relación de subtipado

Reglas - las fáciles

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{ (S-BOOLNAT)}$$

$$\frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{ (S-NATINT)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{ (S-INTFLOAT)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{ (S-TOP)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{ (S-REFL)}$$

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{ (S-TRANS)}$$

Las relación de subtipado

Reglas - pares

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

Las relación de subtipado

Reglas - pares

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\text{Bool} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Nat} \times \text{Nat}$?
- ¿Es un par de $\text{Nat} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Bool} \times \text{Bool}$?

Las relación de subtipado

Reglas - pares

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\text{Bool} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Nat} \times \text{Nat}$?
- ¿Es un par de $\text{Nat} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Bool} \times \text{Bool}$?

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{ (S-PAIR)}$$

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo un par es reemplazable por otro?

- ¿Es un par de $\text{Bool} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Nat} \times \text{Nat}$?
- ¿Es un par de $\text{Nat} \times \text{Bool}$ reemplazable por un par $\text{Bool} \times \text{Bool}$?

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \sigma_2 <: \tau_2}{\sigma \times \sigma_2 <: \tau \times \tau_2} \text{ (S-PAIR)}$$

- Probar el siguiente juicio (¿quién es σ ?)

$$\{y : \text{Bool}\} \triangleright (\lambda p : \text{Nat} \times \text{Nat} . \text{succ}(\pi_1(p))) (y, y) : \sigma$$

Pensar en el principio de sustitutividad

¿Cuándo una función es reemplazable por otra?

$$\frac{\sigma' ? \sigma \quad \tau' ? \tau}{\sigma' \rightarrow \tau' <: \sigma \rightarrow \tau} \text{ (S-ARROW)}$$

Ejercicio 1

¿Cuál de estas dos expresiones es tipable? ¿Qué tipo tiene?

$$\begin{array}{l} (\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} . f \ 3) \ (\lambda x : \text{Float} . \text{true}) \\ (\lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} . f \ 3) \ (\lambda b : \text{Bool} . 0, 5) \end{array}$$

Suponemos

$$\frac{}{\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat}} \text{ (T-THREE)} \quad \frac{}{\Gamma \triangleright 0, 5 : \text{Float}} \text{ (T-HALF)}$$

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{ (T-SUB)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{ (S-BOOLNAT)}$$

$$\frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{ (S-NATINT)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{ (S-INTFLOAT)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{ (S-TOP)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{ (S-REFL)}$$

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{ (S-TRANS)}$$

$$\frac{\sigma <: \sigma' \quad \tau' <: \tau}{\sigma' \rightarrow \tau' <: \sigma \rightarrow \tau} \text{ (S-ARROW)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \{k_j | 1 \leq j \leq m\} \quad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | 1 \leq j \leq m\} <: \{l_i : \tau_i | 1 \leq i \leq n\}} \text{ (S-RCD)}$$

¿Cómo extender λ -cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2

- 1 Expresar con reglas de subtipado que el tipo de la *currificación* de una función es equivalente al tipo de dicha función. Es decir, cualquier función *currificada* mantiene el mismo tipo que la misma sin *currificar* y viceversa.
- 2 Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$.

$$(\lambda y : \text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)) 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

¿Cómo extender λ -cálculo desde el subtipado?

Ejercicio 2

1

$$\frac{}{\sigma \times \tau \rightarrow \rho <: \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho} \text{ (S-CURRY)}$$

$$\frac{}{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho <: \sigma \times \tau \rightarrow \rho} \text{ (S-UNCURRY)}$$

- 2 Aprovechando las nuevas reglas, mostrar que el siguiente término tiene tipo $\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$.

$$(\lambda y : \text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)) \ 0$$

Una ejercitación mas completa sobre la currificación puede encontrarse en el ejercicio 9 de la práctica del tema.

Ejercicio II: Solución

sigue en la próxima slide

$$\frac{}{\emptyset \triangleright (\lambda y:\text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)):\text{Nat} \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat})} \text{ (T-SUB)} \quad \frac{}{\emptyset \triangleright 0:\text{Nat}} \text{ (T-ZERO)}$$

$$\emptyset \triangleright (\lambda y:\text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)) \ 0:\text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \quad \text{ (T-APP)}$$

Ejercicio II: Solución

_____ (T-PROY)

$\{y:\text{Nat} \times \text{Nat}\} \triangleright (\pi_1(y)):\text{Nat}$

_____ (T-ABS)

$\emptyset \triangleright (\lambda y:\text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)):\text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$

_____ (S-CURRY)

$\text{Nat} \times \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} <: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}$

_____ (T-SUB)

$\emptyset \triangleright (\lambda y:\text{Nat} \times \text{Nat} . \pi_1(y)):\text{Nat} \rightarrow (\text{Nat} \rightarrow \text{Nat})$

Ejercicio III

Supongamos que agregamos al lenguaje el tipo $Comp_\sigma$, para representar *comparadores* de términos de tipo σ . Los comparadores tienen la operación *mejorSegún*, que indica si el primer término es mejor que el segundo.

$$\frac{\Gamma \triangleright M : Comp_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{mejorSegún}(M, N, O) : \text{Bool}} \quad (\text{T-Comp})$$

a) El siguiente término:

$$\lambda c: Comp_{\{x:\text{Int}\}}. \text{mejorSegún}(c, \{x = 1, y = 2\}, \{x = 0\})$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad? ¿Lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright \{x = 1, y = 2\} : \{x : \text{Int}, y : \text{Int}\} \quad \Gamma \triangleright \{x = 0\} : \{x : \text{Int}\}$$

Ejercicio III

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \text{Comp}_{\sigma} \quad \Gamma \triangleright N : \sigma \quad \Gamma \triangleright O : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{mejorSegún}(M, N, O) : \text{Bool}} \text{ (T-Comp)}$$

- b) Dar la o las reglas de subtipado para comparadores.
c) El siguiente término:

$$\lambda c : \text{Comp}_{\text{Float}}. (\lambda x : \text{Comp}_{\text{Nat}}. \text{mejorSegún}(x, 3, 4)) \ c$$

¿Debería ser tipable, en términos del principio de sustitutividad?
¿Según las reglas dadas, lo es? En caso afirmativo, dar una derivación que lo pruebe. Pueden asumirse como axiomas:

$$\Gamma \triangleright 3 : \text{Nat} \qquad \Gamma \triangleright 4 : \text{Nat}$$

Ejercicio IV

Contar la cantidad de subtipos y supertipos (no estrictos) que tiene la expresión:

$$\{x : \text{Nat}, y : \text{Bool}\} \rightarrow \text{Nat}$$

Contar los tipos equivalentes (permutación de labels en los registros) como un único tipo.

Reglas de subtipado

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \sigma <: \tau}{\Gamma \triangleright M : \tau} \text{ (T-SUB)}$$

$$\frac{}{\text{Bool} <: \text{Nat}} \text{ (S-BOOLNAT)}$$

$$\frac{}{\text{Nat} <: \text{Int}} \text{ (S-NATINT)}$$

$$\frac{}{\text{Int} <: \text{Float}} \text{ (S-INTFLOAT)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \text{Top}} \text{ (S-TOP)}$$

$$\frac{}{\sigma <: \sigma} \text{ (S-REFL)}$$

$$\frac{\sigma <: \tau \quad \tau <: \rho}{\sigma <: \rho} \text{ (S-TRANS)}$$

$$\frac{\sigma <: \sigma' \quad \tau' <: \tau}{\sigma' \rightarrow \tau' <: \sigma \rightarrow \tau} \text{ (S-ARROW)}$$

$$\frac{\{l_i | 1 \leq i \leq n\} \subseteq \{k_j | 1 \leq j \leq m\} \quad k_j = l_i \Rightarrow \sigma_j <: \tau_i}{\{k_j : \sigma_j | 1 \leq j \leq m\} <: \{l_i : \tau_i | 1 \leq i \leq n\}} \text{ (S-RCD)}$$

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ Preguntas? ? ? ? ? ?