Lógica proposicional: sistemas deductivos y compacidad

Lógica y Computabilidad

Franco Frizzo

13 de octubre de 2017

1. Sistema deductivo SP

Repaso

El **sistema deductivo SP** consta de:

- Tres *axiomas*:
  SP1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  SP2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
  SP3: $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$
- Una *regla de inferencia*:
  MP: La fórmula β es consecuencia inmediata de las fórmulas $(\alpha \to \beta)$ y α.

Si α una fórmula, entonces:

- Definición. Una **demostración** para α es una cadena finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donde $\alpha_n = \alpha$ y cada α_i es
  - un axioma, o
  - consecuencia inmediata de fórmulas anteriores.
- Definición. α es un **teorema** ($\vdash \alpha$) si tiene demostración.
- Teorema. El sistema SP es **consistente**: no existe ninguna fórmula γ tal que $\vdash \gamma$ y $\vdash \neg\gamma$.

Si α, β son fórmulas y Γ es un conjunto de fórmulas, entonces:

- Definición. Una **derivación** de α a partir de Γ es una cadena finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, donde $\alpha_n = \alpha$ y cada α_i es
  - un axioma, o
  - una fórmula de Γ, o
  - consecuencia inmediata de fórmulas anteriores.
- Definición. α es **consecuencia sintáctica** de Γ ($\Gamma \vdash \alpha$) si tiene una derivación a partir de Γ.
- Definición. Γ es **consistente** si no existe ninguna fórmula γ tal que $\Gamma \vdash \gamma$ y $\Gamma \vdash \neg\gamma$.
- **Teorema de la deducción**. Si $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.
- Proposición 1. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente si y solo si $\Gamma \vdash \alpha$.
  $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente si y solo si $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Ejercicio 1

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.

(a) $\{\neg\alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$.

(b) Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma \vdash (\alpha \wedge \beta)$.

(c) Existen un conjunto consistente Γ y una fórmula α tal que $\vdash \alpha$ y $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente.

Resolución

(a) **Verdadero.** La afirmación "dice", intuitivamente, que podemos derivar la verdad de una implicación a partir del hecho de que no vale su antecedente; por lo tanto, intuitivamente parece ser verdadera. Sin embargo, no debemos olvidar que estamos trabajando con el concepto de *consecuencia sintáctica* y que, por lo tanto, la interpretación de los símbolos nos resulta indiferente; lo único importante es la forma en la que está definido nuestro sistema deductivo.

Una manera simple de mostrar que la afirmación es verdadera es dar explícitamente una derivación; por ejemplo:

1.	$\neg\alpha$	
2.	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	[SP1]
3.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	[MP 1 y 2]
4.	$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$	[SP3]
5.	$\alpha \to \beta$	[MP 3 y 4]

(b) **Verdadero.** De nuevo, la propiedad parece intuitivamente verdadera, pero solo podemos demostrarlo si tenemos en cuenta las propiedades de nuestro sistema deductivo. Primero que nada, debemos recordar que $\alpha \wedge \beta$ no es más que una forma bonita de escribir $\neg(\alpha \to \neg\beta)$. Consideremos, entonces, un conjunto Γ tal que $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$, y veamos que $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$.

Como se demostró en la clase teórica, para cualquier fórmula γ, $\Gamma \vdash \gamma$ si y solo si $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es inconsistente (proposición 1). En particular, $\Gamma \vdash \neg(\alpha \to \neg\beta)$ si y solo si $\Gamma' := \Gamma \cup \{\alpha \to \neg\beta\}$ es inconsistente. La idea es probar esta última afirmación, es decir, hallar una fórmula γ tal que $\Gamma' \vdash \gamma$ y $\Gamma' \vdash \neg\gamma$.

Por un lado, como $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y $\Gamma \vdash \beta$, entonces $\Gamma' \vdash \beta$. Veremos que también podemos derivar $\neg\beta$ a partir de Γ', mostrando que Γ' es inconsistente. Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ($\alpha_n = \alpha$) una derivación de α a partir de $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Como $(\alpha \to \neg\beta) \in \Gamma'$, podemos construir la siguiente lista de fórmulas:

1.	α_1	
	$\vdots$	
$n-1$.	α_{n-1}	
n.	α	
$n+1$.	$\alpha \to \neg\beta$	
$n+2$.	$\neg\beta$	[MP n y $n+1$]

Podemos observar que se trata de una derivación válida de $\neg\beta$ a partir de Γ': todas las fórmulas hasta la n-ésima ya formaban parte de una derivación a partir de Γ', la fórmula número $n+1$ está en Γ', y la última se obtiene por MP a partir de fórmulas anteriores. Luego $\Gamma' \vdash \beta$ y $\Gamma' \vdash \neg\beta$, y por lo tanto, Γ' es inconsistente, como queríamos probar.

(c) **Falso.** Recordemos que, si α es un teorema, entonces es consecuencia sintáctica de cualquier conjunto. En particular, para cualquier conjunto Γ, vale $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$. Por otro lado, todas las fórmulas de un conjunto son consecuencias sintácticas del mismo, por lo que $\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$. Por lo tanto, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ es inconsistente para cualquier conjunto de fórmulas Γ (sea o no consistente) y cualquier teorema α.

2. Conjuntos maximales consistentes

Repaso

- Definición. Un conjunto Γ es **maximal consistente** si:
  - es consistente, y
  - si $\alpha \notin \Gamma$, entonces $\Gamma \cup \{\alpha\}$ es inconsistente.
- **Lema de Lindembaum**. Si Γ es consistente, existe Γ' maximal consistente tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. (Ej. 5, p. 5)
- Si Γ es maximal consistente, entonces:
  - Proposición 2. $\alpha \in \Gamma$ si y solo si $\neg\alpha \notin \Gamma$. (Ej. 4.b.1, p. 5)
  - Proposición 3. $\Gamma \vdash \alpha$ si y solo si $\alpha \in \Gamma$. (Ej. 4.a, p. 5)

Ejercicio 2

Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones.

(a) Una fórmula es un teorema si y solo si pertenece a todo conjunto maximal consistente.

(b) Si Γ_1 y Γ_2 son conjuntos inconsistentes, entonces $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ no es maximal consistente.

(c) Si Γ es un conjunto consistente, y definimos

$$\Gamma' = \{\neg\alpha \rightarrow \beta : \alpha \in \Gamma, \beta \in \textbf{Form}\}$$

entonces existe un conjunto Δ maximal consistente tal que $\Gamma' \subseteq \Delta$.

Resolución

(a) **Verdadero.** La "*ida*" es sencilla de demostrar. Si consideramos un teorema α y un conjunto maximal consistente Γ cualquiera, claramente $\Gamma \vdash \alpha$. Como Γ es maximal consistente, $\Gamma \vdash \alpha$ si y solo si $\alpha \in \Gamma$ (proposición 3). Es decir, un teorema pertenece a todo conjunto maximal consistente.

La verdad de la afirmación depende de que valga la "*vuelta*". Consideremos entonces una fórmula α que pertenezca a todo conjunto maximal consistente, y analicemos si se trata (necesariamente) de un teorema.

Si Γ es un conjunto maximal consistente y $\alpha \in \Gamma$, seguro que $\neg\alpha \notin \Gamma$ (proposición 2). Por lo tanto, $\neg\alpha$ no pertenece a ningún conjunto maximal consistente.

Sea Δ cualquier conjunto tal que $\neg\alpha \in \Delta$. Si Δ fuera consistente, por el lema de Lindembaum, se podría extender a un conjunto maximal consistente, al cual pertenecería $\neg\alpha$. Como esto no es posible, Δ debe ser inconsistente. En particular, el conjunto $\{\neg\alpha\}$ es inconsistente.

Reescribiendo $\{\neg\alpha\} = \varnothing \cup \{\neg\alpha\}$, podemos afirmar que $\{\neg\alpha\}$ es inconsistente si y solo si $\varnothing \vdash \alpha$ (proposición 1). Como las únicas consecuencias sintácticas del conjunto vacío son los teoremas, entonces α es necesariamente un teorema.

(b) **Falso.** Construiremos un contraejemplo partiendo de un conjunto maximal consistente. A partir de ahí es sencillo obtener un conjunto inconsistente: basta con agregar cualquier fórmula nueva.

Sea Δ un conjunto maximal consistente. Como todo conjunto maximal consistente es infinito, podemos tomar $\alpha, \beta \in \Delta$ tales que $\alpha \neq \beta$. Definimos:

- $\Gamma_1 = \Delta \cup \{\neg\alpha\}$. Como Δ es maximal consistente y $\alpha \in \Delta$, entonces $\neg\alpha \notin \Delta$. Entonces, por definición de conjunto maximal consistente, Γ_1 es inconsistente.
- $\Gamma_2 = \Delta \cup \{\neg\beta\}$. Un argumento análogo muestra que Γ_2 también es inconsistente.

Ahora bien, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \big(\Delta \cup \{\neg\alpha\}\big) \cap \big(\Delta \cup \{\neg\beta\}\big) = \Delta$, que definimos maximal consistente. Por lo tanto, Γ_1 y Γ_2 no cumplen la propiedad enunciada.

(c) **Verdadero.** Lo primero que podemos observar es que para que pueda existir un tal Δ, Γ' debe ser consistente, ya que todo subconjunto de un conjunto consistente es también consistente.

Analizando con cuidado Γ', podemos observar que todas sus fórmulas pueden derivarse a partir de Γ, ya que son implicaciones donde el antecedente es la negación de una fórmula de dicho conjunto. Intuituvamente, esto parece indicar que Γ' debe ser consistente, ya que si permitiera derivar una contradicción, esta podría derivarse también desde Γ, que ya sabemos consistente. Intentemos demostrarlo por el absurdo.

Supongamos que Γ' no es consistente. En tal caso, existe una fórmula γ tal que $\Gamma' \vdash \gamma$ y $\Gamma' \vdash \neg\gamma$. Sea $\gamma_1, \ldots, \gamma_n = \gamma$ una derivación de γ a partir de Γ'. A partir de ella, construiremos una derivación de γ a partir de Γ. Para cada γ_i:

- Si γ_i es un axioma de SP o se obtiene por MP a partir de fórmulas anteriores, podemos dejarlo como está.
- Si γ_i es una fórmula de Γ', es de la forma $(\neg\alpha \to \beta)$, con $\alpha \in \Gamma$. Como demostramos en el ejercicio 1 (a), $\{\alpha\} \vdash (\neg\alpha \to \beta)$, y como $\{\alpha\} \subseteq \Gamma$, vale que $\Gamma \vdash \gamma_i$. Entonces, existe una derivación de γ_i ($\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_m = \gamma_i$) a partir de Γ. Si en la derivación original agregamos, antes de γ_i, las fórmulas $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_{m-1}$, seguimos teniendo una derivación válida, pero habiendo reemplazado las fórmulas de Γ' por fórmulas de Γ.

Esto nos permite ver que $\Gamma \vdash \gamma$. No obstante, se puede realizar un procedimiento análogo para construir una derivación de $\neg\gamma$ a partir de Γ, y así concluir que $\Gamma \vdash \neg\gamma$. Esto es absurdo, porque Γ era consistente. Debe ser entonces que Γ' también es consistente.

Aplicando el lema de Lindembaum, concluimos que Γ' puede extenderse a un conjunto Δ maximal consistente, como queríamos ver.

3. Correctitud y completitud de SP

Repaso

Sean α una fórmula y Γ un conjunto de fórmulas.

- Teorema. SP es **correcto**. Es decir, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$.
- Teorema. SP es **completo**. Es decir, si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$.
- Corolario. Γ es satisfacible si y solo si Γ es consistente.

Ejercicio 3

Demostrar que $\Gamma \subseteq$ **Form** es un conjunto maximal consistente si y solo si, para alguna valuación v,

$$\Gamma = \{\alpha : v \models \alpha\}.$$

Resolución

($\Rightarrow$) Si Γ es maximal consistente, en particular, es consistente. Por lo tanto, es satisfacible, es decir, existe una valuación v tal que $v \models \alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Para esta v, se cumple que

$$\Gamma \subseteq \{\alpha : v \models \alpha\}.$$

Veamos que $\Gamma \supseteq \{\alpha : v \models \alpha\}$, y por lo tanto, ambos conjuntos son iguales. Supongamos que existe una fórmula β tal que $\beta \in \{\alpha : v \models \alpha\}$, pero $\beta \notin \Gamma$. Por definición de conjunto maximal consistente, el conjunto $\Gamma \cup \{\beta\}$ debe ser inconsistente. Pero, a su vez,

$$\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq \{\alpha : v \models \alpha\},$$

que es un conjunto satisfacible (por la valuación v), y por lo tanto también debe ser consistente. Esto es absurdo, porque un conjunto consistente no puede tener un subconjunto inconsistente. Entonces, debe ser que todo $\beta \in \{\alpha : v \models \alpha\}$ cumple $\beta \in \Gamma$, y por lo tanto,

$$\Gamma = \{\alpha : v \models \alpha\}.$$

($\Leftarrow$) Sea v cualquier valuación. Consideremos el conjunto

$$\Gamma = \{\alpha : v \models \alpha\}$$

y veamos que es maximal consistente.

Para empezar, Γ es claramente satisfacible ($v \models \Gamma$), así que debe ser también consistente. Para que sea maximal consistente, debe pasar que para cualquier fórmula $\beta \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\beta\}$ es inconsistente, o lo que es lo mismo, $\Gamma \vdash \neg\beta$ (proposición 1).

Veamos que esto efectivamente es así. Si tomamos β tal que $\beta \notin \Gamma$, por definición de Γ, sabemos que $v \not\models \beta$. Por lo tanto, $v \models \neg\beta$. Esto quiere decir que $\neg\beta \in \Gamma$, y entonces, $\Gamma \vdash \neg\beta$. Concluimos entonces que Γ debe ser maximal consistente, como queríamos demostrar.

4. Teorema de compacidad

Repaso

- **Teorema de compacidad.** Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.

Ejercicio 4

(a) Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \varnothing$. Probar que Γ es satisfacible. (Ej. 12, p. 5)

(b) Sean $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$ y $\beta \in \mathbf{Form}$ tales que para toda valuación v, existe un $\alpha \in \Gamma$ tal que $v \not\models \alpha \wedge \beta$. Demostrar que existe una cantidad finita de fórmulas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que

$$(\beta \to \neg\alpha_1) \vee (\beta \to \neg\alpha_2) \vee \cdots \vee (\beta \to \neg\alpha_n)$$

es una tautología.

Resolución

(a) No es difícil convencerse de que la propiedad que tenemos que demostrar es verdadera. Todo indica que, dado que las contingencias en Γ no comparten ninguna variable, siempre podremos construir una valuación que las satisfaga a todas simultáneamente. No obstante, para poder demostrar esto con un buen grado de formalidad, conviene utilizar el teorema de compacidad.

El objetivo es probar que Γ, un conjunto no necesariamente finito, es satisfacible, demostrando que todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ lo es. Dado que tenemos que probar la satisfacibilidad de *cualquier* subconjunto finito, el problema puede resultar difícil de abordar. Lo haremos usaremos una técnica muy útil, que es hacer inducción en el cardinal de los subconjuntos.[1]

Probaremos, entonces, que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo subconjunto $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ con n elementos es satisfacible.

(C.B.) Si $n = 0$, entonces $\Gamma_0 = \varnothing$, que es trivialmente satisfacible por cualquier valuación.

(P.I.) Si Γ_0 tiene $n + 1$ elementos, podemos escribir

$$\Gamma_0 = \Gamma_0' \cup \{\alpha\}$$

donde Γ_0' tiene n elementos. Como α es una contingencia, existe una valuación v_1 tal que $v_1 \models \alpha$. Además, por hipótesis inductiva, Γ_0' es satisfacible, es decir, existe una valuación v_2 tal que $v_2 \models \Gamma_0'$. Definimos la siguiente valuación:

$$v(p) = \begin{cases} v_1(p) & \text{si } p \in \mathbf{Form}(\alpha) \\ v_2(p) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos ver que v está bien definida, ya que, por hipótesis, si $p \in \mathbf{Var}(\alpha)$, entonces $p \notin \mathbf{Var}(\beta)$ para cualquier otra fórmula $\beta \in \Gamma$.

Además, $v(p) = v_1(p)$ para cualquier variable $p \in \mathbf{Var}(\alpha)$, por lo que $v \models \alpha$ si y solo si $v_1 \models \alpha$. Análogamente, para cualquier fórmula $\beta \in \Gamma_0'$, $v \models \beta$ si y solo si $v_2 \models \beta$. Esto nos permite ver que v satisface todas las fórmulas en Γ_0, es decir, $v \vdash \Gamma_0$. Por lo tanto, Γ_0 es satisfacible, como queríamos demostrar.

Esto prueba que todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, de donde, aplicando compacidad, se sigue que Γ también es satisfacible.

(b) En este caso, nos interesa usar el teorema de compacidad para demostrar la existencia de algún subconjunto *finito* dentro de otro conjunto. Para estas ocasiones, viene bien tener presente su formulación contrarrecíproca, es decir:

Si un conjunto Δ es insatisfacible, existe algún subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ insatisfacible.

Para poder usar el teorema, en primer lugar, debemos tener un conjunto insatisfacible. Intentemos construir, a partir de Γ, un conjunto Δ que sea insatisfacible. Esto quiere decir que, para toda valuación v, existe alguna fórmula $\delta \in \Delta$ tal que $v \not\models \delta$. Esto es exactamente lo que cumplen las fórmulas del tipo $\alpha \wedge \beta$, donde α es alguna de las fórmulas de Γ.

Si definimos, entonces,

$$\Delta := \{\alpha \wedge \beta : \alpha \in \Gamma\},$$

podemos estar seguros de que, para cada valuación v, habrá una fórmula en Δ que no será verdadera. Es decir, Δ es un conjunto insatisfacible.

[1] Es muy importante tener presente que solo podemos hacer esto cuando estamos considerando subconjuntos *finitos*, cuyos cardinales son números naturales.

Aplicando ahora el teorema de compacidad, sabemos que existe un subconjunto finito $\Delta_0 \subseteq \Delta$ finito e insatisfacible. Este conjunto es de la forma

$$\Delta_0 = \{(\alpha_1 \wedge \beta), (\alpha_2 \wedge \beta), \dots, (\alpha_n \wedge \beta)\}$$

y, como es insatisfacible, es falso que todas sus fórmulas sean verdaderas al mismo tiempo. Es decir, la fórmula

$$\neg\big((\alpha_1 \wedge \beta) \wedge (\alpha_2 \wedge \beta) \wedge \cdots \wedge (\alpha_n \wedge \beta)\big),$$

que equivale a

$$\big(\neg(\alpha_1 \wedge \beta)\big) \vee \big(\neg(\alpha_2 \wedge \beta)\big) \vee \cdots \vee \big(\neg(\alpha_n \wedge \beta)\big),$$

es una tautología.

Solo queda recordar que $(\alpha \wedge \beta)$ es una abreviatura para $\neg(\alpha \to \neg\beta)$, y que a su vez, esta fórmula equivale a $\neg(\beta \to \neg\alpha)$.[2] Haciendo los reemplazos correspondientes en la tautología anterior, vemos que equivale a

$$(\beta \to \neg\alpha_1) \vee (\beta \to \neg\alpha_2) \vee \cdots \vee (\beta \to \neg\alpha_n).$$

Es decir, esta última forma es una tautología, como queríamos demostrar.

[2] La demostración de las equivalencias entre fórmulas lógicas que usamos queda como ejercicio. Tener en cuenta que estamos hablando de equivalencia semántica, es decir, que las fórmulas sean verdaderas para exactamente las mismas valuaciones.