Algoritmos y Estructuras de Datos I

Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Secuencias o listas

Secuencias

- **Secuencia:** Varios elementos del mismo tipo T, posiblemente repetidos, ubicados en un cierto orden.
- $seq\langle T\rangle$ es el tipo de las secuencias cuyos elementos son de tipo T.
- T es un tipo arbitrario.
  - Hay secuencias de $\mathbb{Z}$, de Bool, de `Días`, de 5-uplas;
  - también hay secuencias de secuencias de T;
  - etcétera.

Secuencias. Notación

- Una forma de escribir un elemento de tipo $seq\langle T\rangle$ es escribir términos de tipo T separados por comas, entre $\langle \dots \rangle$.
  - $\langle 1, 2, 3, 4, 1, 0\rangle$ es una secuencia de $\mathbb{Z}$.
  - $\langle 1,\ 1+1,\ 3,\ 2*2,\ 5 \bmod 2,\ 0\rangle$ es otra secuencia de $\mathbb{Z}$ (igual a la anterior).
- La secuencia vacía se escribe $\langle\rangle$, cualquiera sea el tipo de los elementos de la secuencia.
- Se puede formar secuencias de elementos de cualquier tipo.
  - Como $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ es un tipo, podemos armar secuencias de $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ (secuencias de secuencias de $\mathbb{Z}$, o sea $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$).
  - $\langle\langle 12, 13\rangle, \langle -3, 9, 0\rangle, \langle 5\rangle, \langle\rangle, \langle\rangle, \langle 3\rangle\rangle$ es un elemento de tipo $seq\langle seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$.

Secuencias bien formadas

Indicar si las siguientes secuencias están bien formadas. Si están bien formadas, indicar su tipo ($seq\langle\mathbb{Z}\rangle, etc...$)

- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$ y $seq\langle\mathbb{R}\rangle$
- $\langle 1, 2, 3, 4, \frac{1}{0}\rangle$? No está bien formada porque uno de sus componentes está indefinido
- $\langle 1, true, 3, 4, 5\rangle$? No está bien formada porque no es homogénea (Bool y $\mathbb{Z}$)
- $\langle 'a', 2, 3, 4, 5\rangle$? No está bien formada porque no es homogénea ($Char$ y $\mathbb{Z}$)
- $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle Char\rangle$
- $\langle true, false, true, true\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle$Bool$\rangle$
- $\langle \frac{2}{5}, \pi, e\rangle$? Bien Formada. Tipa como $seq\langle\mathbb{R}\rangle$
- $\langle\rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle X\rangle$ donde X es un tipo válido.
- $\langle\langle\rangle\rangle$? Bien formada. Tipa como cualquier secuencia $seq\langle seq\langle X\rangle\rangle$ donde X es un tipo válido.

Funciones sobre secuencias
Longitud

- $length(a : seq\langle T\rangle) : \mathbb{Z}$
  - Representa la longitud de la secuencia a.
  - Notación: $length(a)$ se puede escribir como $|a|$ o como $a.length$.
- Ejemplos:
  - $|\langle\rangle| = 0$
  - $|\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle| = 4$
  - $|\langle 1, 1, 1, 1\rangle| = 4$

Funciones con secuencias
I-ésimo elemento

- Indexación: $seq\langle T\rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
  - Requiere $0 \leq i < |a|$.
  - Es el elemento en la i-ésima posición de a.
  - La primera posición es la 0.
  - Notación: $a[i]$.
- Ejemplos:
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[0] = 'H'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[1] = 'o'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[2] = 'l'$
  - $\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle[3] = 'a'$
  - $\langle 1, 1, 1, 1\rangle[0] = 1$
  - $\langle\rangle[0] = \perp$ (Indefinido)
  - $\langle 1, 1, 1, 1\rangle[7] = \perp$ (Indefinido)

Funciones con secuencias
Igualdad

Dos secuencias s_0 y s_1 (notación $s_0 = s_1$) son iguales si y sólo si

- Tienen la misma cantidad de elementos
- Dada una posición, el elemento contenido en la secuencia s_0 es igual al elemento contenido en la secuencia s_1.

Ejemplos:

- $\langle 1, 2, 3, 4\rangle = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$? Sí
- $\langle\rangle = \langle\rangle$? Sí
- $\langle 4, 4, 4\rangle = \langle 4, 4, 4\rangle$? Sí
- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$? No
- $\langle 1, 2, 3, 4, 5\rangle = \langle 1, 2, 4, 5, 6\rangle$? No

Funciones con secuencias
Cabeza o Head

- Cabeza: $head(a : seq\langle T\rangle) : T$
  - Requiere $|a| > 0$.
  - Es el primer elemento de la secuencia a.
  - Es equivalente a la expresión $a[0]$.
- Ejemplos:
  - $head(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = 'H'$
  - $head(\langle 1, 1, 1, 1\rangle) = 1$
  - $head(\langle\rangle) = \perp$ (Indefinido)

Funciones con secuencias
Cola o Tail

- Cola: $tail(a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Requiere $|a| > 0$.
  - Es la secuencia resultante de eliminar su primer elemento.
- Ejemplos:
  - $tail(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = \langle 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $tail(\langle 1, 1, 1, 1\rangle) = \langle 1, 1, 1\rangle$
  - $tail(\langle\rangle) = \perp$ (Indefinido)

Funciones con secuencias
Agregar al principio o addFirst

- Agregar cabeza: $addFirst(t : T, a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Es una secuencia con los elementos de a, agregándole t como primer elemento.
  - Es una función que no se indefine
- Ejemplos:
  - $addFirst('x', \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle) = \langle 'x', 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $addFirst(5, \langle 1, 1, 1, 1\rangle) = \langle 5, 1, 1, 1, 1\rangle$
  - $addFirst(1, \langle\rangle) = \langle 1\rangle$

Funciones con secuencias
Concatenación o concat

- Concatenación: $concat(a : seq\langle T\rangle, b : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
  - Es una secuencia con los elementos de a, seguidos de los de b.
  - Notación: $concat(a, b)$ se puede escribir $a ++ b$.
- Ejemplos:
  - $concat(\langle 'H', 'o'\rangle, \langle 'l', 'a'\rangle) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $concat(\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle) = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$
  - $concat(\langle\rangle, \langle\rangle) = \langle\rangle$
  - $concat(\langle 2, 3\rangle, \langle\rangle) = \langle 2, 3\rangle$
  - $concat(\langle\rangle, \langle 5, 7\rangle) = \langle 5, 7\rangle$

Funciones con secuencias
Subsecuencia o subseq

- Subsecuencia: $subseq(a : seq\langle T\rangle, d, h : \mathbb{Z}) : \langle T\rangle$
  - Es una sublista de a en las posiciones entre d (inclusive) y h (exclusive).
  - Cuando no es $0 \leq d \leq h \leq |a|$, se indefine!
  - Cuando es $0 \leq d = h \leq |a|$, retorna la secuencia vacía.
- Ejemplos:
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 1) = \langle 'H'\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 4) = \langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 2, 2) = \langle\rangle$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, -1, 3) = \perp$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 10) = \perp$
  - $subseq(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 3, 1) = \perp$

Funciones con secuencias

- Cambiar una posición:
  $setAt(a : seq\langle T\rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T\rangle$
  - Requiere $0 \leq i < |a|$
  - Es una secuencia igual a a, pero con valor val en la posición i.
- Ejemplos:
  - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 0, 'X') = \langle 'X', 'o', 'l', 'a'\rangle$
  - $setAt(\langle 'H', 'o', 'l', 'a'\rangle, 3, 'A') = \langle 'H', 'o', 'l', 'A'\rangle$
  - $setAt(\langle\rangle, 0, 5) = \perp$ (Indefinido)

Operaciones sobre secuencias

- $length(a : seq\langle T\rangle) : \mathbb{Z}$ (notación $|a|$)
- Indexación: $seq\langle T\rangle[i : \mathbb{Z}] : T$
- Igualdad: $seq\langle T\rangle = seq\langle T\rangle$
- $head(a : seq\langle T\rangle) : T$
- $tail(a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
- $addFirst(t : T, a : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$
- $concat(a : seq\langle T\rangle, b : seq\langle T\rangle) : seq\langle T\rangle$ (notación a++b)
- $subseq(a : seq\langle T\rangle, d, h : \mathbb{Z}) : \langle T\rangle$
- $setAt(a : seq\langle T\rangle, i : \mathbb{Z}, val : T) : seq\langle T\rangle$

Lemas sobre secuencias

Sea s_0, s_1 secuencias de tipo T y e un elemento de tipo T. Justificar brevemente por qué cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- $|addFirst(e, s_0)| = 1 + |s_0|$? Sí
- $|concat(s_0, s_1)| = |s_0| + |s_1|$? Sí
- $s_0 = tail(addFirst(e, s_0))$? Sí
- $s_0 = subseq(s_0, 0, |s_0|)$? Sí
- $s_0 = subseq(concat(s_0, s_1), 0, |s_0|)$? Sí
- $head(addFirst(e, s_0)) = e$? Sí
- $addFirst(e, s_0)[0] = e$? Sí
- $addFirst(e, s_0)[0] = head(addFirst(e, s_0))$? Sí

Repaso: Cuantificadores

El lenguaje de especificación provee formas de predicar sobre los elementos de un tipo de datos

- $(\forall x : T)P(x)$: Afirma que todos los elementos de tipo T cumplen la propiedad P.
  - Se lee "Para todo x de tipo T se cumple $P(x)$"
- $(\exists x : T)P(x)$: Afirma que al menos un elemento de tipo T cumple la propiedad P.
  - Se lee "Existe al menos un x de tipo T que cumple $P(x)$"

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si una secuencia de enteros sólo posee enteros mayores a 5.
- Solución:

  pred seq_gt_five(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L s[i] > 5)$
  }

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si todos los elementos en posiciones pares de una secuencia de enteros s son mayores a 5.
- Solución:

  pred seq_even_gt_five(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})($
  $((0 \leq i < |s|) \land (i \bmod 2 = 0))$
  $\rightarrow_L s[i] > 5)$
  }

Ejemplo

- Crear un predicado que sea **Verdadero** si y sólo si hay algún elemento en la secuencia s que sea par y mayor que 5.
- Solución:

  pred seq_has_elem_even_gt_five(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\exists i : \mathbb{Z})($
  $((0 \leq i < |s| \land_L s[i] \bmod 2 = 0) \land_L (s[i] > 5))$
  }

Predicando sobre secuencias

Secuencia vacía o "isEmpty"

- Definir un predicado `isEmpty` que indique si la secuencia s no tiene elementos.
- Solución

  pred isEmpty(s: $seq\langle T\rangle$) {
  $|s| = 0$
  }

Predicando sobre secuencias
Pertenencia o "has"

- Definir un predicado `has` que indique si el elemento e aparece (al menos una vez) en la secuencia s.
- Solución

```
pred has(s: seq⟨T⟩, e: T) {
  (∃i : ℤ)(0 ≤ i < |s| ∧_L s[i] = e)
}
```

- Notación: Podemos utilizar este predicado como $e \in s$

Predicando sobre secuencias
Igualdad o "equals"

- Definir un predicado `equals(s1,s2)` que indique si la secuencia $s1$ es igual a la secuencia $s2$.
- Solución

```
pred equals(s1, s2: seq⟨T⟩) {
  s1 = s2
}
```


Predicando sobre secuencias
Cambiar un elemento o "setAt"

- Definir un predicado `isSetAt(s1,s2,e,i)` que indique si la secuencia $s1$ es igual a la secuencia $s2$ pero reemplazando el elemento de la posición i con el elemento e.
- En el caso que **no se cumpla** que $0 \leq i < |s2|$, retornar **Falso** sólo si ambas secuencias **no son** iguales.
- Solución

```
pred isSetAt(s1, s2: seq⟨T⟩, e: T, i: ℤ) {
  if 0 ≤ i < |s2|
  then s1 = setAt[s2, e, i]
  else s1 = s2 fi
  )
}
```


$\sum$ - Sumatoria

El lenguaje de especificación provee formas de acumular resultados para los tipos numéricos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$.
El término

$$\sum_{i=from}^{to} Expr(i)$$

retorna la suma de todas las expresiones $Expr(i)$ entre *from* y *to*.
Es decir,

$$Expr(from) + Expr(from + 1) + \cdots + Expr(to - 1) + Expr(to)$$

- $Expr(i)$ debe ser un tipo numérico ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$).
- *from* y *to* es un **rango** (finito) de valores enteros y $from \leq to$ (retorna 0 si no se cumple).
- Si existe i tal que $from \leq i \leq to$ y $Expr(i) = \perp$, entonces toda la expresión se indefine!

$\sum$ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de una secuencia s de tipo $seq\langle T\rangle$.
Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} s[i]$$

Ejemplos:

- Si $s = \langle 1, 1, 3, 3\rangle$ retornará

$$s[0] + s[1] + s[2] + s[3] = 1 + 1 + 3 + 3 = 8$$

- Si $s = \langle\rangle$, entonces $from = 0$ y $to = -1$, por lo tanto retornará 0

$\sum$ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de la posición 1 (únicamente) de la secuencia s.
Solución:

$$\sum_{i=1}^{1} s[i]$$

Ejemplos:

- Si $s = \langle 7, 1, 3, 3, 2, 4\rangle$ retornará $s[1] = 1$.
- Si $s = \langle 7\rangle$ la sumatoria se indefine ya que $s[1] = \perp$.

$\sum$ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de los índices pares de la secuencia s.
Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (i \bmod 2 = 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})$$

Ejemplos:

- Si $s = \langle 7, 1, 3, 3, 2, 4\rangle$ retornará

$$s[0] + 0 + s[2] + 0 + s[4] + 0 = 7 + 0 + 3 + 0 + 2 + 0 = 12$$

- Si $s = \langle 7\rangle$ retornará $s[0] = 7$.

$\sum$ - Ejemplos

Retornar la sumatoria de los elementos mayores a 0 de la secuencia s.
Solución:

$$\sum_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (s[i] > 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 0 \text{ fi})$$

Ejemplos:

- Si $s = \langle 7, 1, -3, 3, 2, -4\rangle$ retornará

$$s[0] + s[1] + 0 + s[3] + s[4] + 0 = 7 + 1 + 0 + 3 + 2 + 0 = 13$$

- Si $s = \langle -7\rangle$ retornará 0.

$\prod$ - Productoria

El término

$$\prod_{i=from}^{to} Expr(i)$$

retorna el producto de todas las expresiones $Expr(i)$ entre *from* y *to*. Es decir,

$$Expr(from) * Expr(from + 1) * \cdots * Expr(to - 1) * Expr(to)$$

- $Expr(i)$ debe ser un tipo numérico ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{Z}$).
- *from* y *to* define un rango de valores enteros (finito) y $from \leq to$ (retorna 1 si no se cumple).
- Si $Expr(i) = \perp$, toda la productoria se indefine.

$\prod$ - Ejemplos

Retornar la productoria de los elementos mayores a 0 de la secuencia *s*.

Solución:

$$\prod_{i=0}^{|s|-1} (\text{if } (s[i] > 0) \text{ then } s[i] \text{ else } 1 \text{ fi})$$

Ejemplos:

- Si $s = \langle 7, 1, -3, 3, 2, -4 \rangle$ retornará

$$s[0] * s[1] * 1 * s[3] * s[4] * 1 = 7 * 1 * 1 * 3 * 2 * 1 = 42$$

- Si $s = \langle -7 \rangle$ retornará 1.

Funciones auxiliares imprescindibles

Definir una función que permita contar la cantidad de apariciones de un elemento *e* en la secuencia *s*:

fun #apariciones(s: $seq\langle T\rangle$, e: T): $\mathbb{Z}$ =
$\sum_{i=0}^{|s|-1}$(if $s[i] = e$ then 1 else 0 fi)

Ejemplos:

- #apariciones($\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3\rangle$, 1)=3
- #apariciones($\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3\rangle$, 2)=0
- #apariciones($\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3\rangle$, 3)=2
- #apariciones($\langle 5, 1, 1, 1, 3, 3\rangle$, 5)=1
- #apariciones($\langle\rangle$, 5)=0

Funciones auxiliares imprescindibles

Definir un predicado que sea verdadero si y sólo si una secuencia es una permutación[1] de otra secuencia:

pred $es\_permutacion(s1, s2 : seq\langle T\rangle)\{$
$(\forall x : T)(\#apariciones(s1, t) = \#apariciones(s2, t))$
$\}$

[1] mismos elementos y misma cantidad por cada elemento, en un orden potencialmente distinto

Un ejemplo con cantidades

Otra forma de definir un predicado que sea verdadero si un número entero n es primo:

pred $soy\_primo(n : \mathbb{Z})\{$
$n > 1 \wedge$
$(\sum_{i=2}^{n-1}(\text{if } (n \text{ mod } i = 0) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi})) = 0$
$\}$

1. Por cada número entre 2 y $n-1$ me fijo si n es divisible por ese número.
2. Cada vez que encuentro un número i que me divide, acumulo 1
3. Si al final no acumulé nada, quiere decir que no encontré ningún número entre 2 y $n-1$ que divida a n

Otro ejemplo con cantidades

Definir una función que retorne la cantidad de números primos menores a un entero n (o 0 si $n < 0$)

fun $\#primosMenores(n : \mathbb{Z}) =$
$\sum_{i=2}^{n-1}(\text{if } soy\_primo(i) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi})$

1. Por cada número entre 2 y $n-1$ me fijo si n es primo.
2. Cada vez que encuentro un número primo, acumulo 1
3. Si $n < 0$, entonces $\neg(2 \leq -1)$, por lo que $\sum$ retorna 0.

Contando elementos en un conjunto

- La siguiente expresión es muy común en especificaciones de problemas:
$$\sum_{i \in A} \text{if } P(i) \text{ then } 1 \text{ else } 0 \text{ fi}.$$
- Introducimos la siguiente notación como reemplazo sintáctico para esta sumatoria:
$$\#\{i \in A : P(i)\}$$
- Por ejemplo, podemos escribir
$$\#\{i : 1 \leq i \leq n-1 \ \wedge \ soy\_primo(i)\}.$$
- Observación: A tiene que se un conjunto **finito**.

Sumatoria de secuencias de $\mathbb{R}$

Definir una función que sume los inversos multiplicativos de una lista de reales.
Si no existe el inverso multiplicativo, ignorar el término.

fun $\text{sumarInvertidos}(s : seq\langle\mathbb{R}\rangle) : \mathbb{R} \ =$
$\sum_{i=0}^{|s|-1}(\text{if } s[i] \neq 0 \text{ then } \frac{1}{s[i]} \text{ else } 0 \text{ fi})$

Ejemplo de especificación con sumatorias

Especificar un programa que sume los inversos multiplicativos de una lista de reales, pero que requiera que todos los elementos de la secuencia **tengan** inverso multiplicativo.

pred todos_tienen_inverso(s: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L s[i] \neq 0)$
}

proc sumaInversos(in s: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: $\mathbb{R}$) {
Pre { todos_tienen_inverso(s) }
Post { result= sumarInvertidos(s) }
}

Secuencias de Char (strings)

Indistintamente las llamamos

- $seq\langle Char\rangle$
- String

Problema con strings y secuencias de string

- Nos gustaría especificar el problema de decidir si alguna de las palabras contenidas en una lista aparece en un texto.
- ¿Qué **argumentos** tiene mi problema?
  - Para representar un texto usamos el tipo String (i.e. $seq\langle Char\rangle$).
  - Para representar una palabra sola usamos también el tipo *String*.
  - Para representar la lista de palabras usamos $seq\langle String\rangle$.
- ¿Qué **precondiciones** tiene mi problema?
  - Cada palabra debe tener al menos una letra
  - Ninguna palabra contiene un espacio (dejarían de ser palabras)
  - Asumimos que todos los *Char* (menos el espacio) son caracteres válidos de una palabra.

Problema con string y secuencias de string

Primero, necesitamos asegurarnos que no haya palabras vacías. ¿Cómo lo podemos hacer?

pred noVacias(words: $seq\langle String\rangle$) {
$(\forall s : String)(s \in words \rightarrow |s| > 0)$
}

Segundo, necesitamos asegurarnos que la lista de strings efectivamente sea una lista de palabras (sin espacios en blanco)

pred sinEspacios(words: $seq\langle String\rangle$) {
$(\forall s : String)(s \in words \rightarrow '\_' \notin s)$
}

Problema con string y secuencias de string

Ahora, podemos empezar a especificar nuestro problema:

proc hayAlguna(in words: $seq\langle String\rangle$,
in book: $String$,
out result: Bool) {
Pre { $noVacias(words) \land sinEspacios(words)$ }
Post { ? }
}

Nos falta especificar la postcondición de nuestro problema.

Problema con string y secuencias de string

Tenemos que retornar **true** únicamente en el caso que exista una palabra en la lista de palabras que aparezca en el libro.
¿Cómo podemos saber si una palabra s aparece en el libro?

pred aparece(w: String, book: String) {
$(\exists\ d : \mathbb{Z})$
$(\exists\ h : \mathbb{Z})$
$((0 \leq d \leq h \leq |book|)$
$\land_L($
$subseq(book, d, h) = w$
$\land(d > 0 \rightarrow_L book[d-1] =' \_')$
$\land(h < |book| - 1 \rightarrow_L book[h+1] =' \_')$
$))$
}

Ya tenemos todas las funciones suficientes para terminar nuestra especificación

Problema con string y secuencias de string

Ahora, podemos empezar a especificar nuestro problema:

proc hayAlguna(in words: $seq\langle String\rangle$,
in book: $String$,
out result: Bool) {
Pre { $noVacias(words) \land sinEspacios(words)$ }
Post { result=true $\leftrightarrow$
$((\exists w : String)(w \in words \land aparece(w, book)))$ }
}

Especificaciones y nombres de predicados y funciones

Especificar el problema de retornar el índice del menor elemento de una lista de enteros no negativos y distintos entre sí.
Arranquemos definiendo predicados auxiliares que capturen las precondiciones de mi problema

- Los enteros en la secuencia son no negativos

  pred noNegativos(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(\ 0 \leq i < |s| \rightarrow_L s[i] > 0)$
  }

- No hay enteros repetidos en la secuencia:

  pred noHayRepetidos(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall t : \mathbb{Z})(\#apariciones(s, t) \leq 1)$
  }

Observación: Los nombres de los predicados/funciones ayudan a describir el significado de las precondiciones y postcondiciones de las especificaciones.

Especificaciones y comentarios

Ahora especifiquemos usando los predicados auxiliares que capturan las precondiciones del problema

proc menorElemDistintos(in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out result: $\mathbb{Z}$) {
  Pre { noNegativos(s) $\wedge$ noHayRepetidos(s) }
  Post {
    /* result es un indice válido de s */
    $0 \leq result < |s| \wedge_L$
    /* s[result] es el menor elemento de s */
    $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L s[result] \leq s[i])\}$
}

Observación: Los comentarios (/*...*/) también ayudan a describir el significado de las precondiciones y postcondiciones de las especificaciones y son útiles si no hay predicados

Matrices

- Una matriz es una secuencia de secuencias, todas con la misma longitud.
- Cada posición de esta secuencia es a su vez una secuencia, que representa una fila de la matriz.
- Definimos $Mat\langle\mathbb{Z}\rangle$ como un reemplazo sintáctico para $Seq\langle Seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$.
- Una $Seq\langle Seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ representa una matriz si todas las secuencias tienen la misma longitud! Definimos entonces:

  pred esMatriz(m: $Seq\langle Seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
    $(\forall i : \mathbb{Z})(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq i, j < |m|$
      $\rightarrow_L |m[i]| = |m[j]|)$
  }

- Notar que podemos reemplazar $Mat\langle\mathbb{Z}\rangle$ por $Seq\langle Seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$ en la definición del predicado.

Matrices

- Tenemos funciones para obtener la cantidad de filas y columnas de una matriz:

  fun rows($m : Mat\langle\mathbb{Z}\rangle) : \mathbb{Z} = |m|$
  fun columns($m : Mat\langle\mathbb{Z}\rangle) : \mathbb{Z}$
    $=$ if $rows(m) > 0$ then $|m[0]|$ else 0 fi

- En muchas ocasiones debemos recibir matrices cuadradas. Definimos también:

  pred esMatrizCuadrada(m: $Seq\langle Seq\langle\mathbb{Z}\rangle\rangle$) {
    $esMatriz(m) \ \wedge \ rows(m) = columns(m)$
  }

Matrices

- **Ejemplo:** Un predicado que determina si una matriz es una matriz identidad.

  pred esMatrizIdentidad(m: $Mat\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
    $esMatrizCuadrada(m) \wedge_L$
    (
      $(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \leq i < rows(m) \rightarrow_L m[i][i] = 1) \wedge$
      $(\forall i : \mathbb{Z})\ (\forall j : \mathbb{Z})\ (0 \leq i, j < rows(m) \wedge i \neq j$
        $\rightarrow_L m[i][j] = 0)$
)
  }

Sobrespecificación usando secuencias

Se desea especificar el problema de, dada una lista s con al menos dos elementos distintos, retornar una lista con los mismos elementos que no esté ordenada de menor a mayor.
¿Está *sobreespecificada* la siguiente especificación?

proc desordena(in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out result $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  Pre {
  /* al menos dos elementos distintos */
    $(\exists i : \mathbb{Z})\ ((0 \leq i < |s|) \wedge_L$
    $((\exists j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s|) \wedge_L (i \neq j \wedge s[i] \neq s[j])))$ }
  Post { $es\_permutacion(s, result) \wedge_L$
    $(\forall i : \mathbb{Z})\ (0 \leq i < |result| - 1) \rightarrow_L$
    $(result[i] \geq result[i+1]))$ }
}

Está sobreespecificada ya que fuerza a que todas las implementaciones retornen la secuencia ordenada de mayor a menor.

Sobrespecificación usando secuencias

¿Está *sobreespecificada* la siguiente especificación? pred ordenada(s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < (|s| - 1) \rightarrow_L (s[i] \leq s[i+1]))$
}
proc desordena(in s: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, result: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
  Pre {
  /* al menos dos elementos distintos */
    $(\exists i : \mathbb{Z})\ ((0 \leq i < |s|) \wedge_L$
      $((\exists j : \mathbb{Z})\ (0 \leq j < |s|) \wedge_L$
        $(i \neq j \wedge s[i] \neq s[j])))$ }
  Post { $es\_permutacion(s, result) \wedge \neg ordenada(result)$ }
}

Está nueva especificación no sobre-restringe las posibles implementaciones del problema.

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 4 - Predicates (cuantificación, variables libres y ligadas, etc.)
  - Chapter 5 - Notations and Conventions for Arrays (secuencias)