Algoritmos sobre secuencias ya ordenadas

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Apareo (merge) de secuencias ordenadas

- **Problema:** Dadas dos secuencias ordenadas, unir ambas secuencias en un única secuencia ordenada.
- Especificación:

  proc $merge(\text{in } a, b : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, \text{out } result : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{$
  Pre $\{ordenado(a) \ \wedge \ ordenado(b)\}$
  Post $\{ordenado(result) \ \wedge \ mismos(result, a + +b)\}$
  $\}$

  pred $mismos(s, t : seq\langle\mathbb{Z}\rangle)\{$
  $(\forall x : \mathbb{Z})(\#apariciones(s, x) = \#apariciones(t, x)$
  $\}$
- ¿Cómo lo podemos implementar?
  - Podemos copiar los elementos de a y b a la secuencia c, y después ordenar la secuencia c.
  - Pero selection sort e insertion sort iteran apróximadamente $|c|^2$
  - ¿Se podrá aparear ambas secuencias en una única pasada?

Apareo de secuencias ordenadas

Ejemplo:

- $a =$

1	3	5	7	9	
↑	↑	↑	↑	↑	↑
i	i	i	i	i	i

- $b =$

2	4	6	8	
↑	↑	↑	↑	↑
j	j	j	j	j

- $c =$

?1	?2	?3	?4	?5	?6	?7	?8	?9	
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k

Apareo de secuencias

- ¿Qué invariante de ciclo tiene esta implementación?

$$
\begin{aligned}
I \quad \equiv \quad & ordenado(a) \wedge ordenado(b) \\
\wedge \quad & ((0 \leq i \leq |a| \ \wedge \ 0 \leq j \leq |b| \ \wedge \ k = i + j) \\
\wedge_L \quad & (mismos(a[0, i) + +b[0, j), c[0, k)) \wedge ordenado(c[0, k)))) \\
\wedge \quad & i < |a| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < j \rightarrow_L b[t] \leq a[i]) \\
\wedge \quad & j < |b| \ \rightarrow_L \ (\forall t : \mathbb{Z})(0 \leq t < i \rightarrow_L a[t] \leq b[j])
\end{aligned}
$$

- ¿Qué función variante debería tener esta implementación?

$$fv = |a| + |b| - k$$

Apareo de secuencias

```
1  vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
2    vector<int> c(a.size()+b.size());
3    int i = 0; // Para recorrer a
4    int j = 0; // Para recorrer b
5    int k = 0; // Para recorrer c
6
7    while( k < c.size() ) {
8      if( /*Si tengo que avanzar i */ ) {
9        c[k++] = a[i++];
10     } else if(/* Si tengo que avanzar j */) {
11       c[k++] = b[j++];
12     }
13   }
14   return c;
15 }
```

- ¿Cuándo tengo que avanzar i? Cuando j está fuera de rango ó cuando i y j están en rango y $a[i] < b[i]$
- ¿Cuándo tengo que avanzar j? Cuando no tengo que avanzar i

Apareo de secuencias

```
1  vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
2    vector<int> c(a.size()+b.size());
3    int i = 0; // Para recorrer a
4    int j = 0; // Para recorrer b
5    int k = 0; // Para recorrer c
6
7    while( k < c.size() ) {
8      if( j>=b.size() || && a[i] < b[j] ) {
9        c[k++] = a[i++];
10     } else {
11       c[k++] = b[j++];
12     }
13   }
14   return c;
15 }
```

- Al terminar el ciclo, ¿ya está la secuencia c con los valores finales?

Apareo de secuencias

```
1  vector<int> merge(vector<int> &a, vector<int> &b) {
2    vector<int> c(a.size()+b.size());
3    int i = 0; // Para recorrer a
4    int j = 0; // Para recorrer b
5    int k = 0; // Para recorrer c
6
7    while( k < c.size() ) {
8      if( j>=b.size() || a[i] < b[j] ) {
9        c[k++] = a[i++];
10     } else {
11       c[k++] = b[j++];
12     }
13   }
14   return c;
15 }
```

- ¿Cuántes iteraciones realiza este programa en **peor caso** (como máximo)?
  - Realiza a lo sumo $|a| + |b|$ iteraciones

The welfare crook

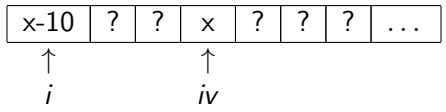
- **Problema:** Dadas tres secuencias ordenadas, sabemos que hay al menos un elemento en común entre ellos. Encontrar los índices donde está al menos uno de estos elementos repetidos.
- Usamos las metavariables iv, jv y kv para denotar las posiciones en las que las secuencias coinciden por primera vez.
- proc $crook(\text{in } a, b, c : seq\langle\mathbb{Z}\rangle, \text{out } i, j, k : \mathbb{Z})\{$

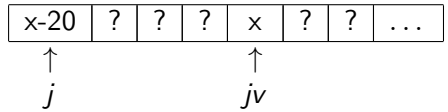
  Pre $\{ordenado(a) \ \wedge \ ordenado(b) \ \wedge \ ordenado(c)$
  $\wedge((0 \leq iv < |a| \wedge \ 0 \leq jv < |b| \wedge \ 0 \leq kv < |c|)$
  $\wedge_L \ a[iv] = b[jv] = c[kv])\}$

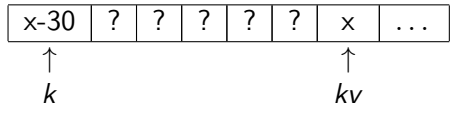
  Post $\{i = iv \ \wedge \ j = jv \ \wedge \ k = kv\}$

  $\}$

The welfare crook

- $a =$ 

- $b =$ 

- $c =$ 

- ¿Cuál es el invariante de esta implementación?

$$I \equiv 0 \leq i \leq iv \ \wedge \ 0 \leq j \leq jv \ \wedge \ 0 \leq k \leq kv$$

- ¿Cuál es una función variante para esta implementación?

$$fv = (iv - i) + (jv - j) + (kv - k)$$

The welfare crook

- Comenzamos con $i = j = k = 0$, y vamos subiendo el valor de estas variables.

```
1  void welfareCrook(vector<int> &a, vector<int> &b, vector<int> &c,
2        int &i, int &j, int &k) {
3    i = 0, j = 0, k = 0;
4    while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
5      // Incrementar i, j o k!
6    }
7    // i=iv, j=jv, k=kv
8  }
```

The welfare crook

- ¿A cuál de los índices podemos incrementar?
- Alcanza con avanzar cualquier índice que no contenga al máximo entre $a[i]$, $b[j]$ y $c[k]$
- En ese caso, el elemento que no es el máximo no es el elemento buscado

```
1   i = 0, j = 0, k = 0;
2   while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
3     if( a[i] < b[j] ) {
4       i++;
5     } else if( b[j] < c[k] ) {
6       j++;
7     } else {
8       k++;
9     }
10  }
```

The welfare crook

```
1   i = 0, j = 0, k = 0;
2   while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
3     if( a[i] < b[j] ) {
4       i++;
5     } else if( b[j] < c[k] ) {
6       j++;
7     } else {
8       k++;
9     }
10  }
```

- ¿Por qué se preserva el invariante?

1. $I \wedge B \wedge a[i] < b[j]$ implica $i < iv$, entonces es seguro avanzar i.
2. $I \wedge B \wedge b[j] < c[k]$ implica $j < jv$, entonces es seguro avanzar j.
3. $I \wedge B \wedge a[i] \geq b[j] \wedge b[j] \geq c[k]$ implica $k < kv$, por lo tanto es seguro avanzar k.

The welfare crook

```
1  void welfareCrook(vector<int> &a, vector<int> &b, vector<int> &c,
2        int &i, int &j, int &k) {
3    i = 0, j = 0, k = 0;
4    while( a[i] != b[j] || b[j] != c[k] ) {
5      if( a[i] < b[j] ) {
6        i++;
7      } else if( b[j] < c[k] ) {
8        j++;
9      } else {
10       k++;
11     }
12   }
13 }
```

- ¿Cuántas iteraciones realiza este programa en **peor caso** (i.e. como máximo)?
  - Como máximo tiene que realizar $|a| + |b| + |c|$ iteraciones

Bibliografía

- Vickers et al. - Reasoned Programming
  - 6.6 - Sorted Merge (apareo)
- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Welfare Crook)