

PRÁCTICA 5 - SISTEMAS DEDUCTIVOS PARA LÓGICA PROPOSICIONAL Y APLICACIONES DE COMPACIDAD

Salvo que se indique lo contrario, *no* asumir que SP es correcto ni completo.

Ejercicio 1. Considerar la axiomatización SP para la lógica proposicional dada en la teórica. Demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas

- a. $\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
- b. $\vdash (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

Sugerencia: recordar que en SP vale el teorema de la deducción.

Ejercicio 2.

- a. Demostrar que (toda instanciación de) SP3 es una tautología.
- b. Demostrar que si las premisas de la regla MP son tautologías, el resultado es una tautología.
- c. Suponiendo además que (todas las instanciaciones de) SP1 y SP2 también son tautologías, demostrar que SP es correcto.

Ejercicio 3. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$. Demostrar que Γ es inconsistente (i.e. existe β tal que $\Gamma \vdash \beta$ y $\Gamma \vdash \neg\beta$) sii $\Gamma \vdash \alpha$ para todo α .

Ejercicio 4. Sea Γ un conjunto de fórmulas del lenguaje $\{\neg, \rightarrow\}$. Demostrar los siguientes puntos:

- a. Si Γ es un conjunto maximal consistente, entonces $\Gamma \vdash \alpha$ sii $\alpha \in \Gamma$.
- b. Γ es un conjunto maximal consistente sii sucede simultáneamente:
 1. Para toda α , o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg\alpha \in \Gamma$.
 2. Todos los axiomas de SP están en Γ .
 3. Γ está cerrado por MP, es decir: si $(\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$ y $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$.
- c. Si Γ es maximal consistente y $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \in \Gamma$, entonces $\alpha \in \Gamma$ ó $\beta \in \Gamma$.

Ejercicio 5. Recordemos el procedimiento de Lindenbaum para obtener un conjunto maximal consistente a partir de un conjunto consistente Γ .

- 1) Enumeramos las fórmulas de nuestro lenguaje $\alpha_1, \alpha_2, \dots$
- 2) Definimos la secuencia de conjuntos:

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \Gamma \\ \Gamma_{n+1} &= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{si el conjunto es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\alpha_n\} & \text{en otro caso} \end{cases} \\ \Gamma^+ &= \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n \end{aligned}$$

Demostrar los siguientes puntos:

- a. Cada Γ_i es consistente.
- b. Exactamente una de las fórmulas α y $\neg\alpha$ está en Γ^+ para cada fórmula α .
- c. Todos los teoremas están en Γ^+ .
- d. Γ^+ es un conjunto maximal consistente.

Ejercicio 6. Demostrar que las siguientes definiciones de compacidad son equivalentes:

- a. Si $\Gamma \models \alpha$ entonces para algún subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $\Gamma_0 \models \alpha$.
- b. Si todo subconjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible.
- c. Si Γ es insatisfacible, entonces algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible.

En los siguientes ejercicios se puede asumir que SP es correcto y completo.

Ejercicio 7. Sea α una fórmula que no es una tautología, y sea Γ el conjunto de todas las instanciaciones de α (por instancia de α nos referimos a reemplazar uniformemente las variables proposicionales de α por fórmulas arbitrarias). Demostrar que Γ es inconsistente.

Ejercicio 8. Sea β una fórmula fija y Γ un conjunto consistente, mostrar que si $\Gamma \not\models \beta$ y $\Gamma \not\models \neg\beta$, entonces existen Γ_1 y Γ_2 maximales consistentes, tales que $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\mathbf{Con}(\Gamma) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$, y $\Gamma_1 \vdash \beta$ y $\Gamma_2 \vdash \neg\beta$.

Ejercicio 9. Demostrar que si Γ es un conjunto maximal consistente entonces $\Gamma = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 10. Dados $\{\Gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que Γ_i es satisfacible y $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$. ¿Es $\Gamma^\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$ satisfacible?

Ejercicio 11. Sean Γ_1 y Γ_2 conjuntos satisfacibles de fórmulas tales que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existen fórmulas $\alpha \in \mathbf{Con}(\Gamma_1)$, $\beta \in \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ tales que $\alpha \rightarrow \neg\beta$ es una tautología. *Sugerencia:* usar el Teorema de Compacidad.

Ejercicio 12. Sea Γ un conjunto de contingencias tal que para todo par de fórmulas α, β se cumple que $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$. Probar que Γ es satisfacible.

Ejercicio 13. * Sea Γ un conjunto de fórmulas tal que cada valuación satisface al menos una fórmula de Γ . Probar que existe un número finito de fórmulas $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma$ tales que $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$ es tautología.

Ejercicio 14. Sea Γ un conjunto de fórmulas que verifica la siguiente propiedad: si $\alpha, \beta \in \Gamma$, entonces $\alpha \rightarrow \beta$ es tautología ó $\beta \rightarrow \alpha$ es tautología. Probar que si $\Gamma \models \gamma$, entonces existe $\delta \in \Gamma$ tal que $\{\delta\} \models \gamma$.

Ejercicio 15. Sean Γ_1, Γ_2 satisfacibles, tal que $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ es insatisfacible. Mostrar que existe un α tal que $\Gamma_1 \models \alpha$ y $\Gamma_2 \models \neg\alpha$.

Ejercicio 16. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera ó falsa y justificar: Si Γ_1 y Γ_2 son consistentes, entonces o bien a partir de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ se demuestra una contradicción o bien existe Δ maximal consistente tal que $\Gamma_1 \subseteq \Delta$ y $\Gamma_2 \subseteq \Delta$.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.