

Práctica N^o 3 - Inferencia de Tipos

Aclaraciones:

- Los ejercicios marcados con el símbolo ★ constituyen un subconjunto mínimo de ejercitación. Sin embargo, aconsejamos fuertemente hacer todos los ejercicios.
- Usaremos las expresiones de tipos y términos vistas en clase, con los tipos `Bool`, `Nat` y funciones ya definidos.
- Para esta práctica será necesario utilizar los axiomas y reglas de tipado e inferencia vistos en clase (tanto en las teóricas como en las prácticas).
- Siempre que se pide definir extensiones, se asume que el algoritmo de unificación (MGU) y el de borrado (**Erase**) ya se encuentran correctamente extendidos, de manera que sólo es necesario extender el algoritmo \mathbb{W} (también conocido como **Principal Typing**).

Gramáticas a tener en cuenta:

- Términos **anotados**
 $M ::= x \mid \lambda x: \sigma. M \mid M \ M \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \mid 0 \mid \text{succ}(M) \mid \text{pred}(M) \mid \text{isZero}(M)$ Donde la letra x representa un *nombre de variable* arbitrario. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{X} = \{w, w_1, w_2, \dots, x, x_1, x_2, \dots, y, y_1, y_2, \dots, f, f_1, f_2, \dots\}$
- Términos **sin anotaciones**
 $M' ::= x \mid \lambda x. M' \mid M' \ M' \mid \text{True} \mid \text{False} \mid \text{if } M' \text{ then } M' \text{ else } M' \mid 0 \mid \text{succ}(M') \mid \text{pred}(M') \mid \text{isZero}(M')$
- Tipos
 $\sigma ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \sigma \rightarrow \sigma \mid \mathbf{s}$
Donde la letra \mathbf{s} representa una *variable de tipos* arbitraria. Tales nombres se toman de un conjunto infinito dado $\mathfrak{T} = \{\mathbf{s}, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{t}, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots\}$

Ejercicio 1

Determinar qué expresiones son sintácticamente válidas y, para las que sean, indicar a qué gramática pertenecen.

- | | |
|---|---|
| I. $\lambda x: \text{Bool}. \text{succ}(x)$ | V. \mathbf{s} |
| II. $\lambda x. \text{isZero}(x)$ | VI. $\mathbf{s} \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow \mathbf{t})$ |
| III. $\mathbf{s} \rightarrow \sigma$ | VII. $\lambda x: \mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{s}_2. \text{if } 0 \text{ then True else } 0 \text{ succ}(\text{True})$ |
| IV. $\text{Erase}(f \ y)$ | VIII. $\text{Erase}(\lambda f: \text{Bool} \rightarrow \mathbf{s}. \lambda y: \text{Bool}. f \ y)$ |

Ejercicio 2

Determinar el resultado de aplicar la sustitución S a las siguientes expresiones

- | | |
|--|---|
| I. $S = \{\mathbf{t} \leftarrow \text{Nat}\}$ | $S(\{x: \mathbf{t} \rightarrow \text{Bool}\})$ |
| II. $S = \{\mathbf{t}_1 \leftarrow \mathbf{t}_2 \rightarrow \mathbf{t}_3, \mathbf{t} \leftarrow \text{Bool}\}$ | $S(\{x: \mathbf{t} \rightarrow \text{Bool}\}) \triangleright S(\lambda x: \mathbf{t}_1 \rightarrow \text{Bool}. x): S(\text{Nat} \rightarrow \mathbf{t}_2)$ |

Ejercicio 3 ★

Determinar el resultado de aplicar el MGU (“most general unifier”) sobre las ecuaciones planteadas a continuación. En caso de tener éxito, mostrar la sustitución resultante.

- | | |
|--|--|
| I. MGU $\{t_1 \rightarrow t_2 \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}\}$ | V. MGU $\{t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq t_2 \rightarrow t_3\}$ |
| II. MGU $\{t_1 \rightarrow t_2 \doteq t_3\}$ | VI. MGU $\{t_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, t_1 \doteq t_2 \rightarrow t_3\}$ |
| III. MGU $\{t_1 \rightarrow t_2 \doteq t_2\}$ | VII. MGU $\{t_1 \rightarrow \text{Bool} \doteq \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}, t_2 \doteq t_1 \rightarrow t_1\}$ |
| IV. MGU $\{(t_2 \rightarrow t_1) \rightarrow \text{Bool} \doteq t_2 \rightarrow t_3\}$ | VIII. MGU $\{t_1 \rightarrow t_2 \doteq t_3 \rightarrow t_4, t_3 \doteq t_2 \rightarrow t_1\}$ |

Ejercicio 4

Unir con flechas los tipos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mg* (“most general unifier”).

$$\begin{array}{ccccccc}
 t \rightarrow u & \text{Nat} & u \rightarrow \text{Bool} & a \rightarrow b \rightarrow c \\
 t & \text{Nat} \rightarrow \text{Bool} & (\text{Nat} \rightarrow u) \rightarrow \text{Bool} & \text{Nat} \rightarrow u \rightarrow \text{Bool}
 \end{array}$$

Ejercicio 5

Decidir, utilizando el método del árbol, cuáles de las siguientes expresiones son tipables. Mostrar qué reglas y sustituciones se aplican en cada paso y justificar por qué no son tipables aquéllas que fallan.

- | | |
|--|---|
| I. $\lambda z. \text{if } z \text{ then } 0 \text{ else succ}(0)$ | V. $\text{if True then } (\lambda x. 0) \text{ else } (\lambda x. 0) \text{ False}$ |
| II. $\lambda y. \text{succ}((\lambda x.x) y)$ | VI. $(\lambda f. \text{if True then } f \text{ else } f \text{ False}) (\lambda x. 0)$ |
| III. $\lambda x. \text{if isZero}(x) \text{ then } x \text{ else } (\text{if } x \text{ then } x \text{ else } x)$ | VII. $\lambda x. \lambda y. \lambda z. \text{if } z \text{ then } y \text{ else succ}(x)$ |
| IV. $\lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then } y \text{ else succ}(0)$ | VIII. $\text{fix } (\lambda x. \text{pred}(x))$ |

Para el punto VIII, asumir extendido el algoritmo de inferencia con $\mathbb{W}(\text{fix}) = \emptyset \vdash \text{fix}_a : (a \rightarrow a) \rightarrow a$ donde a es una variable fresca.

Ejercicio 6 ★

Utilizando el árbol de inferencia, inferir el tipo de las siguientes expresiones o demostrar que no son tipables. En cada paso donde se realice una unificación, mostrar el conjunto de ecuaciones a unificar y la sustitución obtenida como resultado de la misma.

- | | |
|--|---|
| ■ $\lambda x. \lambda y. \lambda z. (z x) y z$ | ■ $\lambda x. (\lambda x. x)$ |
| ■ $\lambda x. x (w (\lambda y. w y))$ | ■ $\lambda x. (\lambda y. y) x$ |
| ■ $\lambda x. \lambda y. xy$ | ■ $(\lambda z. \lambda x. x (z (\lambda y. z))) \text{ True}$ |
| ■ $\lambda x. \lambda y. yx$ | |

Ejercicio 7 (Numerales de Church)

Indicar tipos σ y τ apropiados de modo que los términos de la forma $\lambda y : \sigma. \lambda x : \tau. y^n(x)$ resulten tipables para todo n natural. El par (σ, τ) debe ser el mismo para todos los términos. Observar si tienen todos el mismo tipo. Notación: $M^0(N) = N, M^{n+1}(N) = M(M^n(N))$. *Sugerencia:* empezar haciendo inferencia para $n = 2$ – es decir, calcular $\mathbb{W}(\lambda y. \lambda x. y(yx))$ – y generalizar el resultado.

Ejercicio 8

- I. Utilizar el algoritmo de inferencia sobre la siguiente expresión: $\lambda y. (x \ y) \ (\lambda z. x_2)$
- II. Una vez calculado, demostrar (utilizando chequeo de tipos) que el juicio encontrado es correcto.
- III. ¿Qué ocurriría si x_2 fuera x ?

Ejercicio 9 ★

Tener en cuenta un nuevo tipo par definido como: $\sigma ::= \dots \mid \sigma \times \sigma$

Con expresiones nuevas definidas como: $M ::= \dots \mid \langle M, M \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M)$

Y las siguientes reglas de tipado:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \tau}{\Gamma \triangleright \langle M, N \rangle : \sigma \times \tau} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_1(M) : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \times \tau}{\Gamma \triangleright \pi_2(M) : \tau}$$

- I. Adaptar el algoritmo de inferencia para que funcione sobre esta versión extendida.
- II. Tipar la expresión $(\lambda f. \langle f, 2 \rangle) (\lambda x. x \ 1)$ utilizando la versión extendida del algoritmo.
- III. Intentar tipar la siguiente expresión utilizando la versión extendida del algoritmo.
 $(\lambda f. \langle f \ 2, f \ \text{True} \rangle) (\lambda x. x)$
Mostrar en qué punto del mismo falla y por qué motivo.

Ejercicio 10

- a) Extender el sistema de tipado y el algoritmo de inferencia con las reglas necesarias para introducir los tipos **Either** $\sigma \ \sigma$ y **Maybe** σ , cuyos términos son análogos a los de Haskell.
- b) Utilizando estas reglas y el método del árbol, tipar la expresión:
 $\lambda x. \text{if } x \text{ then Just (Left 0) else Nothing}$

Ejercicio 11 ★

- a) Extender el algoritmo de inferencia para soportar la inferencia de tipos de árboles binarios. En esta extensión del algoritmo sólo se considerarán los *constructores* del árbol.

La sintaxis de esta extensión es la siguiente:

$$\sigma ::= \dots \mid AB_\sigma \qquad M ::= \dots \mid Nil_\sigma \mid Bin(M, N, O)$$

Y sus reglas de tipado, las siguientes:

$$\frac{}{\Gamma \triangleright Nil_\sigma : AB_\sigma} \qquad \frac{\Gamma \triangleright M : AB_\sigma \quad \Gamma \triangleright O : AB_\sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright Bin(M, N, O) : AB_\sigma}$$

Nota: la función *Erase*, que elimina la información de tipos que el inferidor se encargará de inferir, se extiende de manera acorde para la sintaxis nueva:

$$\begin{aligned} Erase(nil_\sigma) &= Nil \\ Erase(Bin(M, N, O)) &= Bin(Erase(M), Erase(N), Erase(O)) \end{aligned}$$

Recordar que una entrada válida para el algoritmo es un pseudo término con la información de tipos eliminada. Por ejemplo:

$$(\lambda x. Bin(nil, 5, Bin(nil, x, nil))) 5$$

b) Escribir la regla de tipado para el case de árboles binarios, y la regla análoga en el algoritmo de inferencia.

Ejercicio 12 ★

Extender el algoritmo de inferencia \mathbb{W} para que soporte el tipado del *switch* de números naturales, similar al de C o C++. La extensión de la sintaxis es la siguiente:

$$M = \dots \mid \text{switch } M \{ \text{case } \underline{n}_1 : M_1 \dots \text{case } \underline{n}_k : M_k \text{ default} : M_{k+1} \}$$

donde cada \underline{n}_i es un numeral (un *valor* de tipo **Nat**, como 0, *succ*(0), *succ*(*succ*(0)), etc.). Esto forma parte de la sintaxis y no hace falta verificarlo en el algoritmo.

La regla de tipado es la siguiente:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \text{Nat} \quad \forall i, j (1 \leq i, j \leq k \wedge i \neq j \Rightarrow n_i \neq n_j) \quad \Gamma \triangleright N_1 : \sigma \dots \Gamma \triangleright N_k : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{switch } M \{ \text{case } \underline{n}_1 : N_1 \dots \text{case } \underline{n}_k : N_k \text{ default} : N \} : \sigma}$$

Por ejemplo, una expresión como:

$$\lambda x. \text{switch } (x) \{ \text{case } 0 : \text{True} \text{ default} : \text{False} \}$$

debería tipar a $\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}$. En cambio, la expresión:

$$\text{switch } \underline{3} \{ \text{case } \underline{1} : \underline{1} \text{ case } \underline{2} : 0 \text{ default} : \text{False} \}$$

no tiene tipo, pues entre los casos hay números y booleanos. Y finalmente, la expresión:

$$\text{switch } \underline{3} \{ \text{case } \underline{1} : \underline{1} \text{ case } \underline{2} : \underline{2} \text{ case } \underline{1} : \underline{3} \text{ default} : 0 \}$$

tampoco tiene tipo, ya que el número 1 se repite entre los casos.

Ejercicio 13

En este ejercicio extenderemos el algoritmo de inferencia para soportar operadores binarios. Dichos operadores se comportan de manera similar a las funciones, excepto que siempre tienen 2 parámetros y su aplicación se nota de manera infija. Para esto extenderemos la sintaxis y el sistema de tipos del cálculo lambda tipado de la siguiente manera:

$$M ::= \dots \mid \varphi x : \sigma \ y : \tau. M \mid \langle M \ N \ O \rangle \qquad \sigma ::= \dots \mid \text{Op}(\sigma, \tau \rightarrow v)$$

Aquí φ es el constructor de operadores que liga las variables x (parámetro anterior al operador) e y (parámetro posterior) y $\langle M \ N \ O \rangle$ es la aplicación del operador N a los parámetros M y O (lo ponemos entre \langle y \rangle para evitar problemas de ambigüedad con la aplicación estándar). $\text{Op}(\sigma, \tau \rightarrow v)$, por otro lado, representa el tipo de los operadores cuyo parámetro anterior es de tipo σ , el posterior de tipo τ y dan como resultado un tipo v .

Las reglas de tipado que se incorporan son las siguientes:

$$\frac{\Gamma \cup \{x : \sigma, y : \tau\} \triangleright M : v}{\Gamma \triangleright \varphi x : \sigma \ y : \tau. M : \text{Op}(\sigma, \tau \rightarrow v)}$$

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \sigma \quad \Gamma \triangleright N : \text{Op}(\sigma, \tau \rightarrow v) \quad \Gamma \triangleright O : \tau}{\Gamma \triangleright \langle M \ N \ O \rangle : v}$$

- I. Dar la extensión al algoritmo necesaria para soportar el tipado de las nuevas expresiones. Recordar que el parámetro de entrada es un término **sin anotaciones de tipos**.
- II. Aplicar el algoritmo extendido con el método del árbol para tipar: $\langle (\lambda x. \text{succ}(x)) \ (\varphi xy. xy) \ 0 \rangle$

Ejercicio 14

Considerar el algoritmo de inferencia extendido para soportar listas:

$\mathbb{W}([\]) \stackrel{def}{=} \emptyset \triangleright [\]_{\mathbf{t}} : [\mathbf{t}]$, con \mathbf{t} variable fresca.

$\mathbb{W}(M : N) \stackrel{def}{=} S\Gamma_1 \cup S\Gamma_2 \triangleright S(U : V) : [S\sigma]$, con:

$$\mathbb{W}(M) = \Gamma_1 \triangleright U : \sigma$$

$$\mathbb{W}(N) = \Gamma_2 \triangleright V : \tau$$

$$S = \text{MGU}(\{\tau \doteq [\sigma]\} \cup \{\alpha \doteq \beta/x : \alpha \in \Gamma_1 \wedge x : \beta \in \Gamma_2\})$$

- I. Extender el algoritmo de inferencia para soportar expresiones de la forma “ $\exists x$ in M/N ”.

$$\frac{\Gamma \cup \{x : \sigma\} \triangleright N : \text{Bool} \quad \Gamma \triangleright M : [\sigma]}{\Gamma \triangleright \exists x \text{ in } M/N : \text{Bool}}$$

- II. Aplicar el algoritmo extendido con el método del árbol para tipar las siguientes expresiones. Si alguna de ellas no tipa, indicar el motivo.

I) $(\lambda x. \exists y \text{ in } x/y)(0 : [\])$

II) $(\lambda x. \exists y \text{ in } x/y)(\text{iszero}(z) : [\])$

III) $\exists x \text{ in } [\]/\text{True}$

IV) $\exists x \text{ in } [\]/(\lambda y. \text{True})$

V) $\exists x \text{ in } (0 : [\])/\text{iszero}(x)$

Ejercicio 15

Se desea diseñar un algoritmo de inferencia de tipos para el cálculo λ extendido con fórmulas proposicionales de la siguiente manera:

$$M ::= \dots \mid \neg M \mid M \supset M \mid \text{esTautología}(M)$$

$$\sigma ::= \dots \mid \text{Prop}$$

Las reglas de tipado son:

$$\frac{\Gamma \triangleright M : \text{Prop}}{\Gamma \triangleright \neg M : \text{Prop}} \text{TNEG} \quad \frac{\Gamma \triangleright M : \text{Prop} \quad \Gamma \triangleright N : \text{Prop}}{\Gamma \triangleright M \supset N : \text{Prop}} \text{TIMP}$$

$$\frac{\Gamma, x_1 : \text{Prop}, \dots, x_n : \text{Prop} \triangleright M : \text{Prop} \quad \text{fv}(M) = \{x_1, \dots, x_n\}}{\Gamma \triangleright \text{esTautología}(M) : \text{Bool}} \text{TTAUT}$$

Notar que $\text{esTautología}(M)$ liga **todas** las variables libres de M . Por ejemplo, $\text{esTautología}(p \supset (q \supset p))$ es un término cerrado y bien tipado (de tipo **Bool**).

- I. Extender el algoritmo de inferencia para admitir las expresiones incorporadas al lenguaje, de tal manera que implemente las reglas de tipado TNEG, TÍMP y TTAUT.
- II. Aplicar el algoritmo extendido con el método del árbol para tipar las siguientes expresiones (exhibiendo siempre las sustituciones utilizadas). Si alguna de ellas no tipa, indicar el motivo.
 - $\lambda y. \neg((\lambda x. \neg x)(y \supset y))$
 - $(\lambda x. \text{esTautología}(\text{if } x \text{ then } y \text{ else } z))\text{True}$

Ejercicio 16 ★

En este ejercicio modificaremos el algoritmo de inferencia para incorporar la posibilidad de utilizar letrec en nuestro cálculo.

- $M ::= \dots \mid \text{letrec } f = M \text{ in } N$
- letrec permite por ejemplo representar el factorial de 10 de la siguiente manera:

$\text{letrec } f = (\lambda x : \text{Nat} . \text{if isZero}(x) \text{ then } 1 \text{ else } x \times f(\text{pred}(x))) \text{ in } f \ 10$

Para ello se agrega la siguiente regla de tipado:

$$\frac{\Gamma \cup \{f : \pi \rightarrow \tau\} \triangleright M : \pi \rightarrow \tau \quad \Gamma \cup \{f : \pi \rightarrow \tau\} \triangleright N : \sigma}{\Gamma \triangleright \text{letrec } f = M \text{ in } N : \sigma}$$

Suponiendo que se propone el siguiente pseudocódigo:

$\mathbb{W}(\text{letrec } f = M \text{ in } N) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \triangleright S(\text{letrec } f = M' \text{ in } N') : S \sigma$
donde

- $\mathbb{W}(M) = \Gamma_1 \triangleright M' : \pi \rightarrow \tau$
- $\mathbb{W}(N) = \Gamma_2 \triangleright N' : \sigma$
- $\tau_1 = \rho / f : \rho \in \Gamma_1$
- $\tau_2 = \delta / f : \delta \in \Gamma_2$
- $S = \text{MGU} \{ \tau_1 \doteq \tau_2, \text{COMPLETAR} \}$
- $\Gamma = S \Gamma_1 \cup S \Gamma_2$

- I. Explicar cuál es el error en los llamados recursivos. Dar un ejemplo que debería tipar y no lo hace debido a este error.
- II. Explicar cuál es el error en el pseudocódigo con respecto la definición de τ_1 y τ_2 . Dar un ejemplo que debería tipar y no lo hace debido a este error.
- III. El contexto Γ ¿puede contener a f ? ¿Es un comportamiento deseable? Mostrar un ejemplo donde esto trae conflictos (ayuda: usar **letrec** dentro de un término más grande).
- IV. Reescribir el pseudocódigo para que funcione correctamente (corregir los errores y completar la definición de S).