Organización del computador

Sistemas de representación

Organización

- Recordemos que la organización de un computador refiere al diseño específico de sus componentes, y como estas se coordinan para llevar a cabo una tarea
- Un factor decisivo en como se estructuran las componentes (y cómo estas están implementadas a través de circuitos) es cómo está representada la información
- Los sistemas modernos (a partir de The First Draft) utilizan el sistema binario (de donde proviene la palabra **bit** - **bi**nary digi**t**)

Sistemas de numeración

Magnitudes vs. Números

- Lo que conocemos como **números** son formas de expresar **magnitudes** que son preexistentes (i.e. los dedos de las manos de un ser humano siempre fueron diez, aun antes de que existiera el número 10, X, etc.)
- Usar el **sistema decimal** condiciona la forma en la que comprendemos las magnitudes pues es la forma en la que las racionalizamos, por ejemplo, en la escritura.
- Las culturas mesopotámicas usaban el sistema duodecimal (base 12), introducido por los astrónomos (12 meses solares, 12 horas de día, 12 horas de noche, etc.) acabó por regir el comercio a través de la docena, la gruesa, etc.

Sistemas de numeración

Sistemas de numeración

- Un **sistema de numeración** es un conjunto de símbolos y un conjunto de reglas que permiten combinarlos de forma que es posible representar información, en particular, **magnitudes**
  - Entre los sistemas de numeración, una clase de suma importancia son los **sistemas posicionales**

Representación

$$(a_n \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_b = a_n * b^n + \ldots + a_2 * b^2 + a_1 * b + a_0 + a_{-1} * b^{-1} + a_{-2} * b^{-2} + \ldots + a_{-m} * b^{-m}$$

- b es un entero mayor que 1 y para todo $-m \leq i \leq n$, vale que $0 \leq a_i < b$
- el punto que aparece entre a_0 y a_{-1} se denomina **punto fraccionario** separando la parte entera de un número de su arte fraccionaria

Sistemas de numeración

- **Sistema decimal**: b = 10 y los dígitos pertenecen al conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; es el sistema de numeración de uso cotidiano
- **Sistema binario**: b = 2 y los dígitos pertenecen al conjunto {0,1}; es el sistema de numeración sobre el que basa la construcción de componentes de electrónica digital
- **Sistema octal**: b = 8 y los dígitos pertenecen al conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}
- **Sistema hexadecimal**: b = 16 y los dígitos pertenecen al conjunto {0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}; muy utilizado en la representación compacta tanto del contenido de la memoria de una computadora, como de las direcciones de sus palabras, pues 1 dígito hexadecimal = 2 bytes.

Sistemas de numeración

Cambio de base

- Una representación de una magnitud en un sistema de numeración puede ser modificada a partir de cambiar la base, preservando la magnitud
- Si observamos que para nosotros las magnitudes son racionalizadas en base 10:

De representación a magnitud

$$(a_n \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m})_{10} = a_n * 10^n + \ldots + a_2 * 10^2 + a_1 * 10 + a_0 + a_{-1} * 10^{-1} + a_{-2} * 10^{-2} + \ldots + a_{-m} * 10^{-m}$$

$$\Vert$$

$$(b_p \ldots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-q})_c = b_p * c^p + \ldots + b_2 * c^2 + b_1 * c + b_0 + b_{-1} * c^{-1} + b_{-2} * c^{-2} + \ldots + b_{-q} * c^{-q}$$

Sistemas de numeración

Cambio de base

- Una representación de una magnitud en un sistema de numeración puede ser modificada a partir de cambiar la base, preservando la magnitud
- Si observamos que para nosotros las magnitudes son racionalizadas en base 10:

De representación a magnitud

$$(307)_{10} = 3*10^2+0*10+7$$

$$\|$$

$$(102101)_3 = 1*3^5+0*3^4+2*3^3+1*3^2+0*3+1$$

$$\|$$

$$(100110011)_2 = 1*2^8+0*2^7+0*2^6+1*2^5+1*2^4+0*2^3+0*2^2+1*2+1$$

Sistemas de numeración

Cambio de base (parte entera)

- Vimos cómo pasar de cualquier base a base 10,
- Ahora solo resta poder pasar de base 10 a cualquier base:

Restas sucesivas:

$$
\begin{array}{r}
104 \\
-81 = 3^4*1 \\
\hline
23 \\
-0 = 3^3*0 \\
\hline
23 \\
-18 = 3^2*2 \\
\hline
5 \\
-3 = 3^1*1 \\
\hline
2 \\
-2 = 3^0*2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$(104)_{10} = (10212)_3$

Restos de cocientes:

$$
\begin{array}{r|l}
104 & 3 \\
\hline
2 \quad 34 & 3 \\
\hline
1 \quad 11 & 3 \\
\hline
2 \quad 3 & 3 \\
\hline
0 \quad 1 &
\end{array}
$$

$(104)_{10} = (10212)_3$

Sistemas de numeración

Cambio de base (parte fraccionaria)

- Vimos cómo pasar de cualquier base a base 10,
- ahora solo resta poder pasar de base 10 a cualquier base:

Restas sucesivas:

$$
\begin{array}{r}
0.4304 \\
-0.4000 \\
\hline
0.0304 \\
-0.0000 \\
\hline
0.0304 \\
-0.0240 \\
\hline
0.0064 \\
-0.0064 \\
\hline
0.0000
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
= 5^{-1} * 2 \\
\\
= 5^{-2} * 0 \\
\\
= 5^{-3} * 3 \\
\\
= 5^{-4} * 4
\end{array}
$$

$(0.4304)_{10} = (0.2034)_5$

Restos de cocientes:

$$
\begin{array}{r}
0.4304 \\
* \ 5 \\
\hline
2.1520 \\
* \ 5 \\
\hline
0.7600 \\
* \ 5 \\
\hline
3.8000 \\
* \ 5 \\
\hline
4.0000
\end{array}
$$

$(0.4304)_{10} = (0.2034)_5$

Sistemas de numeración

Cambio de base (parte fraccionaria)

- No toda parte fraccionaria puede ser cambiada de base en forma exacta resultando en una expresión finita:

$$(0.2)_3 = 2*3^{-1} = 2/3$$

- Por ello, las partes fraccionarias solo pueden ser estimadas con cierta precisión (i.e. con una cantidad de decimales)

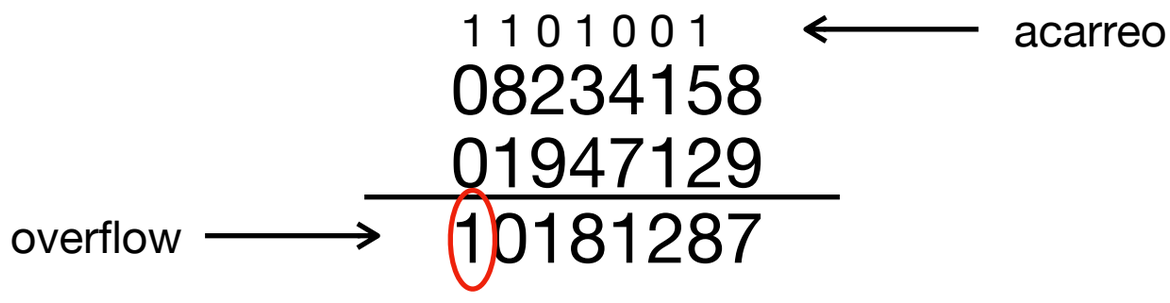
Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Magnitud signada

- Se utiliza es dígito más a la izquierda para representar el signo
  - el número $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ es positivo si $a_n = 0$ y negativo en caso contrario
  - $(a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ representa la magnitud
  - permite representar las magnitudes $[-(b^{n-1}-1), b^{n-1}-1]$
- La suma es igual que la operación clásica incluyendo el concepto de **acarreo** y como se cuenta con una cantidad fija de dígitos puede provocar **overflow**

Ejemplo en base 10:



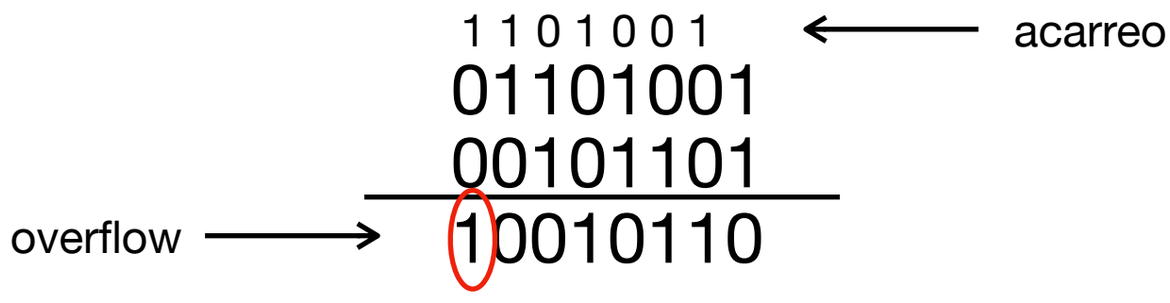
Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Magnitud signada

- Se utiliza es dígito más a la izquierda para representar el signo
  - el número $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ es positivo si $a_n = 0$ y negativo en caso contrario
  - $(a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$ representa la magnitud
  - permite representar las magnitudes $[-(b^{n-1}-1), b^{n-1}-1]$
- La suma es igual que la operación clásica incluyendo el concepto de **acarreo** y como se cuenta con una cantidad fija de dígitos puede provocar **overflow**

Ejemplo en base 2:



Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Sistema de complemento

- Se utilizan los números más grandes para representar los números negativos
- El complemento de un número n se obtiene restando n al número más grande que puede representarse

  Si el número más grande representable es b^k-1 entonces -n se codifica en complemento como b^k-1-n

Ejemplo en base 10:

$(-52)_{10} = (999)_{10} - (52)_{10} = (947)_{10}$

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Sistema de complemento

- Se utilizan los números más grandes para representar los números negativos
- El complemento de un número n se obtiene restando n al número más grande que puede representarse

  Si el número más grande representable es b^k-1 entonces -n se codifica en complemento como b^k-1-n

Ejemplo en base 2:

$(-10)_2 = (111)_2 - (010)_2 = (101)_2$

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Sistema de complemento

- Permite resolver la resta de dos números usando solo sumas y la obtención de complemento

Ejemplo en base 10:

$(167)_{10} - (52)_{10} = (167)_{10} - (52)_{10} + (1000)_{10} - (1000)_{10}$

$= (167)_{10} - (52)_{10} + [(999)_{10} + (1)_{10} - (1000)_{10}]$

$= (167)_{10} + [(999)_{10} - (52)_{10}] + (1)_{10} - (1000)_{10}$

$= (167)_{10} + (947)_{10} + (1)_{10} - (1000)_{10}$

$(167)_{10} - (52)_{10} = (167)_{10} + [(999)_{10} - (52)_{10}]$

$= (167)_{10} + (947)_{10}$

$= (114)_{10}$ Se suma descartando el acarreo

$(114)_{10} + (1)_{10} = (115)_{10}$ Se adiciona 1

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Complemento a 1

- Especializa lo visto en base 10 para números binarios
- El **complemento a 1** de un número es invertir los bits que lo componen:

  $(-101)_2 = (1111)_2 - (0101)_2 = (1010)_2$

  Los números “más grandes” del rango se distinguen de los “más chicos” por tener el bit más significativo en 1 en lugar de 0,
- El rango representado es el mismo que en signed magnitude (si no tomamos en cuenta el bit que determina si un número es “grande” o “chico” nos quedan n-1 bits para la magnitud y uno para el signo)

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Complemento a 2

- El **complemento a 2** es similar al complemento a 1 salvo que se se calcula en relación al número más chico mayor que el máximo representable:

  $(-101)_2 = (10000)_2 - (0101)_2 = (1011)_2$

- A diferencia de complemento a 1, el rango representado es $[-2^{n-1}, 2^{n-1}-1]$
- Se computa como el complemento a 1 y se le suma 1 al resultado

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Representación decimal de un número en complemento a 2

- Para magnitudes **positivas** se evalúa el polinomio en se 2
- Para magnitudes **negativas**:

1. Se invierten los bits
2. Se adiciona 1

Complemento a 2

3. Se convierte a decimal como si fuera una magnitud positiva
4. Se coloca el signo -

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Suma de números en complemento a 2

- La suma se realiza como una suma binaria clásica
- Cambia la detección de **overflow** si el acarreo sobre el bit más significativo es igual al acarreo fuera de la representación, no hay overflow, si fueran distintos sí lo hay:

no overflow

acarreo

1 ← 1 1 0 1 0 0 1

01101001
10101101
00010110

overflow

acarreo

0 ← 1 1 0 1 0 0 1

01101001
01101101
11010110

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Multiplicación de números enteros en complemento a 2

- La multiplicación binaria se realiza como sucesión de sumas desplazadas tal como en base 10 pero resulta muy fácil: si el bit es 1 se suma el multiplicando y se desplaza, si es 0 solo se desplaza:

Multiplicando	**Multiplicando**	**Producto parcial**
1001	1101	
10010	1101	00001001
100100	1101	00001001
1001000	1101	00101101
		01110101

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

División de números enteros en complemento a 2

- La división se realiza a partir de realizar sustracciones sucesivas de divisor al dividendo
- En el caso de la división entera el resultado se expresa como el par (cociente, resto)
- En el caso de la división no entera depende de la representación y lo veremos más adelante cuando veamos la representación de los números reales

Sistemas de numeración

Magnitudes con signo

Notación exceso

- La notación **exceso-N** es similar al complemento a 2 salvo que se assume que el número 0…00 representa la magnitud menos significativa mientras que 1…11 representa a la más significativa
- Si se trata de representaciones de k bits $N = 2^{k-1}$ se obtiene una representación análoga a complemento a 2 pero en la que 0 está representado por el bit más significativo en 1 seguido de 0s
- Permite representar rangos asimétricos pues N determina la representación del 0: veamos $(-101)_2$ (i.e. 5) en notación exceso-7

  $(-101)_2 = (00111)_2 - (101)_2 = (00010)_2$

  $(-111)_2 = (00111)_2 - (111)_2 = (00000)_2$