Cálculo Lambda I

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

10 de Abril de 2018

Objetivo de la clase

$(\lambda x\colon \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z\colon \text{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w\colon \text{Bool}.\ w)$

¿Qué significa esto? ¿Significa algo? ¿Es válido? ¿Es un valor? ¿Cómo nos damos cuenta?

Mapa del tema

Sintaxis	M, σ
Reglas de Tipado	$\Gamma \vdash M : \sigma$
Valores	V
Reglas de Evaluación	M $\to$ M'

Sintaxis

Ejercicio: ¿cuáles son expresiones sintácticamente válidas? Dibujar el árbol sintáctico y marcar las ocurrencias libres de variables.

1. $\lambda x : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}.x\ \mathit{true}$
2. $(\lambda x : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Nat}.x\ \mathit{true})\ (\lambda y : \mathsf{Bool}.x)$
3. $\lambda x : \mathsf{Nat}$
4. $\lambda x.\ x$
5. $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z : \mathsf{Bool}.z$
6. $x\ (\lambda y : \mathsf{Bool}.y)$
7. $\mathit{true}\ \mathit{false}$
8. $\mathsf{succ}(M)$
9. $\mathsf{succ}\ \mathit{true}$
10. $\text{if } \mathsf{succ}(\mathit{true}) \text{ then } \lambda x : \mathsf{Bool}.x$

Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1. $\emptyset \vdash (\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ x\ then\ true\ else\ y)\ false : \mathsf{Bool} \to \mathsf{Bool}$
2. $\emptyset \vdash if\ x\ then\ x\ else\ z : \mathsf{Bool}$
3. ¿Existen Γ y σ tal que $\Gamma \vdash x\,x : \sigma$?

Valores

Ejercicio: ¿cuáles de estos términos son valores?

1. if *true* then $(\lambda x : \text{Bool}.\ x)$ else $(\lambda x : \text{Bool}.\ \mathit{false})$
2. $\lambda x : \text{Bool}.\ \mathit{false}$
3. $(\lambda x : \text{Bool}.\ x)\ \mathit{false}$
4. succ(0)
5. succ(succ(0))
6. succ(pred(0))
7. $\lambda x : \text{Bool}.\ (\lambda y : \text{Bool}.x)\ \mathit{false}$
8. $\lambda x : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ x\ \mathit{true}$

Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1. $(\lambda x : Bool.\ \lambda y : Bool.\ if\ \ x\ \ then\ true\ else\ y)\ false$
2. $(\lambda x : \text{Bool}.\ \lambda y : \text{Bool} \to \text{Bool}.\ y\ (y\ x))\ ((\lambda z : \text{Bool}.\ \mathit{true})\ \mathit{false})\ (\lambda w : \text{Bool}.\ w)$

Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{bool} \stackrel{def}{=} \lambda x : \text{Bool}.x$
- $\text{and} \stackrel{def}{=} \lambda x : \text{Bool}.\lambda y : \text{Bool}.\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \mathit{false}$

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \to M'}{\lambda x : \tau.\ M \to \lambda x : \tau.\ M'}\ E - ABS$$

Ejercicio

1. Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si
   $(\lambda x : \text{Bool}.\ Id_{bool}\ true)$ es o no un valor.
2. ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?
3. Utilizando la nueva regla y los valores definidos, reducir la siguiente expresión
   $(\lambda x : \text{Nat} \to \text{Nat}.\ x\ \underline{23})\ (\lambda x : \text{Nat}.\ 0)$
   ¿Qué se puede concluir entonces? ¿Es seguro o no agregar esta regla?

Cambiando reglas semánticas

Ejercicio: considerar el cálculo **sin** la regla $pred(0) \to 0$ y evaluar:

1. $(\lambda x : Nat.\ \text{iszero}(\text{pred}(\text{succ}(x))))\, 0$
2. $(\lambda x : Nat.\ \text{succ}(\text{pred}(\text{pred}(\text{succ}(x)))))\, 0$

¿Habrá términos que nunca lleguen a una forma normal?... Clase que viene.

Continuará...

¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿?

$(\lambda x : Clase.\ fin\ x)\ (Cálculo\ Lambda\ I)$

Machete: Tipos y Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma \quad ::= \quad Bool \mid Nat \mid \sigma \to \rho$$

Sea $\mathcal{X}$ un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{array}{rcl} M & ::= & x \\ & \mid & true \\ & \mid & false \\ & \mid & \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ & \mid & \lambda x : \sigma.\ M \\ & \mid & M\,M \\ & \mid & 0 \\ & \mid & \text{succ}(M) \\ & \mid & \text{pred}(M) \\ & \mid & \text{iszero}(M) \end{array}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \ \vdash \ \mathit{true} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-True}) \qquad \frac{}{\Gamma \ \vdash \ \mathit{false} : \mathit{Bool}}\ (\text{T-False})$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \ \vdash \ x : \sigma}\ (\text{T-Var})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ M : \mathit{Bool} \quad \Gamma \ \vdash \ P : \sigma \quad \Gamma \ \vdash \ Q : \sigma}{\Gamma \ \vdash \ \mathit{if} \ M \ \mathit{then} \ P \ \mathit{else} \ Q : \sigma}\ (\text{T-If})$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \ \vdash \ M : \tau}{\Gamma \ \vdash \ \lambda x : \sigma .\ M : \sigma \to \tau}\ (\text{T-Abs}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \ \vdash \ N : \sigma}{\Gamma \ \vdash \ M\, N : \tau}\ (\text{T-App})$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \ \vdash \ 0 : \mathit{Nat}} \ (\text{T-Zero})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ M : \mathit{Nat}}{\Gamma \ \vdash \ \mathsf{succ}(M) : \mathit{Nat}} \ (\text{T-Succ}) \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ M : \mathit{Nat}}{\Gamma \ \vdash \ \mathsf{pred}(M) : \mathit{Nat}} \ (\text{T-Pred})$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ M : \mathit{Nat}}{\Gamma \ \vdash \ \mathsf{iszero}(M) : \mathit{Bool}} \ (\text{T-IsZero})$$

Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \,|\, \mathit{false} \,|\, \lambda x : \sigma.\ M \,|\, \underline{n}$$

donde $\underline{n}$ abrevia $\mathrm{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{M_1\ M_2 \to M_1'\ M_2}\ (\text{E-App1 o } \mu)$$

$$\frac{M_2 \to M_2'}{V_1\ M_2 \to V_1\ M_2'}\ (\text{E-App2 o } \nu)$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma.\ M)\ V \to M\{x \leftarrow V\}}\ (\text{E-AppAbs o } \beta)$$

Machete: Semántica operacional

$$V \quad ::= \quad \mathit{true} \mid \mathit{false} \mid \lambda x : \sigma.\ M \mid \underline{n}$$

donde $\underline{n}$ abrevia $\mathsf{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{}{\text{if } \mathit{true} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_2}\ (\text{E-IfTrue})$$

$$\frac{}{\text{if } \mathit{false} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to M_3}\ (\text{E-IfFalse})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \to \text{if } M_1' \text{ then } M_2 \text{ else } M_3}\ (\text{E-If})$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{succ}(M_1) \to \mathsf{succ}(M_1')}\ (\text{E-Succ})$$

$$\frac{}{\mathsf{pred}(0) \to 0}\ (\text{E-PredZero}) \qquad \frac{}{\mathsf{pred}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \underline{n}}\ (\text{E-PredSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{pred}(M_1) \to \mathsf{pred}(M_1')}\ (\text{E-Pred})$$

$$\frac{}{\mathsf{iszero}(0) \to \mathit{true}}\ (\text{E-IsZeroZero}) \qquad \frac{}{\mathsf{iszero}(\mathsf{succ}(\underline{n})) \to \mathit{false}}\ (\text{E-IsZeroSucc})$$

$$\frac{M_1 \to M_1'}{\mathsf{iszero}(M_1) \to \mathsf{iszero}(M_1')}\ (\text{E-IsZero})$$