Introducción a la Robótica Móvil

Primer cuatrimestre de 2018

Departamento de Computación - FCEyN - UBA

Robótica Probabilística - clase 13

Filtro de Kalman y Filtro Extendido de Kalman

Repaso: Regla de Bayes

Cuando el robot sensa no hace otra cosa que aplicar el teorema de Bayes:

$$P(x_i|z) = \frac{P(z|x_i)P(x_i)}{P(z)}$$

$P(x_i|z)$: probabilidad a Posteriori (Posterior Belief) dado que sensé z
$P(z|x_i)$: probabilidad de medición dado que estoy en x_i
$P(x_i)$: probabilidad a Priori de estar en x_i
$P(z)$: probabilidad de sensar z independientemente de donde esté.
Para hallar $P(z)$ usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(z) = \sum_{x_i} P(z|x_i)P(x_i)$$

Entonces podemos reescribir la regla de Bayes como:

$$P(x_i|z) = \frac{P(z|x_i)P(x_i)}{P(z)} = \eta P(z|x_i)P(x_i)$$

$$\text{donde } \eta = P(z)^{-1} = \frac{1}{\sum_{x_i} P(z|x_i)P(x_i)}$$

Nota: η es el término de normalización que usamos para que el posterior belief sea una probabilidad bien definida.

Repaso: Filtro Bayesiano

Dado un conjunto de obstervaciones y acciones de control del robot para moverse:

$$d_t = \{u_1, z_1, \dots, u_t, z_t\}$$

- El modelo de sensado es $p(z_t|x_t)$
- El modelo de movimiento es $p(x_t|u_t, x_{t-1})$
- La probabilidad a priori del estado del sistema es $p(x_t)$

Lo que queremos es estimar el estado de nuestro sistema a posterior de la acción y del sensado, o el posterior belief

$$bel(x_t) = p(x_t|u_1, z_1 \dots, u_t, z_t)$$

Repaso: Filtro Bayesiano

$$\begin{aligned}
bel(x_t) &= p(x_t|u_1, z_1 \ldots, u_t, z_t) = p(x_t|z_{1:t}, u_{1:t}) \\
\text{(por Bayes)} &= \eta p(z_t|x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
\text{(por Markov)} &= \eta p(z_t|x_t) p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\
\text{(por Prob. Total)} &= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|z_{1:t-1}, u_{1:t}, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \\
\text{(por Markov)} &= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t}) dx_{t-1} \\
\text{(por Markov)} &= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) p(x_{t-1}|z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \\
&= \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}
\end{aligned}$$

Repaso: Filtro Bayesiano

El algoritmo de Bayes recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

$$bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

Algoritmo del Filtro de Bayes($bel(x_{t-1}), u_t, z_t$)

1: **for** x_t **do**
2: $\quad \overline{bel}(x_t) = \int p(x_t|u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$
3: $\quad bel(x_t) = \eta p(z_t|x_t) \overline{bel}(x_t)$
4: **end for**
5: **return** $bel(x_t)$

---

donde η es el término de normalización y $\overline{bel}(x_t)$ es el prior belief del estado x_t, i.e. la *predicción* del estado x_t antes de la *medición* z_t.

¿Cómo calculamos el integral recorriendo todos los estados?
¿Cuáles son las funciones de densidad de probabilidad?

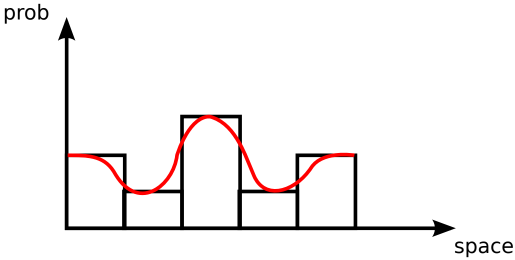
Estimadores Probabilísticos

- Queremos representar el estado del robot como una estimación probabilística.
- El Filtro de Kalman propone representar las funciones de densidad de probabilidad con una función Gaussiana
- Hay otras alternativas, por ejemplo podríamos dividir el mundo en una grilla de celdas, y a cada celda se le asigna una probabilidad contruyendo un Histograma (método de Monte Carlo).

Método de Monte Carlo

Con un histograma podemos aproximación (de manera discreta) la función de densidad continua que queremos modelar.

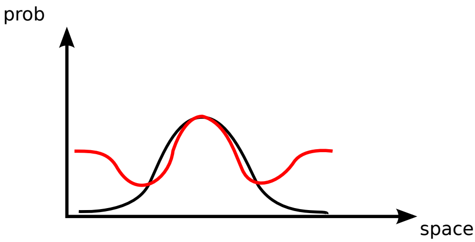
0.2	0.1	0.5	0.1	0.2



Filtro de Kalman: idea

El Filtro de Kalman propone usar una función Gaussiana como función de densidad de probabilidad para estimar la función de densidad real.

0.2	0.1	0.5	0.1	0.2



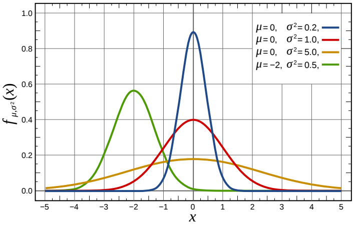
Filtro de Kalman: distribución gaussiana

$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$p(x) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top \Sigma^{-1}(x-\mu)}$$



Recordemos que:

- $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ es la forma de representar una distribución normal, con media μ y varianza σ^2.
- La varianza σ^2 es una medida de dispersión de una variable aleatoria X definida como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media $\sigma_X^2 = E[(X - \mu)^2]$
- $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$ para el caso discreto y $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$ para el continuo.
- La covarianza $\Sigma_{X_1 \ldots X_n} = \begin{pmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \cdots & \sigma_{X_1}\sigma_{X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n}\sigma_{X_1} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{pmatrix}$

Las transformaciones lineales preservan las distribución normal:

$$\left.\begin{array}{c} X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ Y = aX + b \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 X_2 \sim \mathcal{N}\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\mu_2, \frac{1}{\sigma_1^{-2} + \sigma_2^{-2}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c} X \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) \\ Y = AX + B \end{array}\right\} \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(A\mu + B, A\Sigma A^\top)$$

$$\left.\begin{array}{c} X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \Sigma_1) \\ X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \Sigma_2) \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 X_2 \sim \mathcal{N}\left(\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_1 + \frac{\Sigma_1}{\Sigma_1 + \Sigma_2}\mu_2, \frac{1}{\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1}}\right)$$

Filtro de Kalman: hipótesis

- Asunción de Markov (ya la tenemos por ser un filtro Bayesiano)
- Asunción sobre la transición: la probabilidad de transición de estado (predicción o modelo de movimiento) $p(x_t|u_t, x_{t-1})$ es lineal en sus parámetros con un ruido gaussiano agregado:

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + w_t$$

donde A_t es una matriz de $n \times n$ donde n es la dimensión del vector de estado x_t y B_t una matriz de $n \times m$ donde m es la dimensión del vector de control u_t.

$$p(x_t|u_t, x_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|Q_t|}} e^{-\frac{1}{2}(x_t - Ax_{t-1} - B_t u_t)^\top Q_t^{-1}(x_t - Ax_{t-1} - B_t u_t)}$$

donde w_t es un vector variables aleatorias (de la misma dimensión que el vector de estado x_t) que modela la incertidumbre del movimiento cuya media es 0 y Q_t es su matriz de covarianza.

Filtro de Kalman: hipótesis

- Asunción sobre el sensado: el modelo de sensado $p(z_t|x_t)$ también es lineal en sus parámetros con un ruido gassiano agregado:

$$z_t = C_t x_t + v_t$$

donde C_t es una matriz de $k \times n$ donde k es la dimensión del vector de mediciones z_t

$$p(z_t|x_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|R_t|}} e^{-\frac{1}{2}(z_t - C_t x_t)^\top R_t^{-1}(z_t - C_t x_t)}$$

donde v_t es un vector variables aleatorias (de la misma dimensión que el vector de mediciones z_t) que modela la incertidumbre producto del ruido de las mediciones, cuya media es cero y R_t es su matriz de covarianza.

- La información *a priori* del estado (el prior belief) debe tener una distribución normal.

Filtro de Kalman: modelo

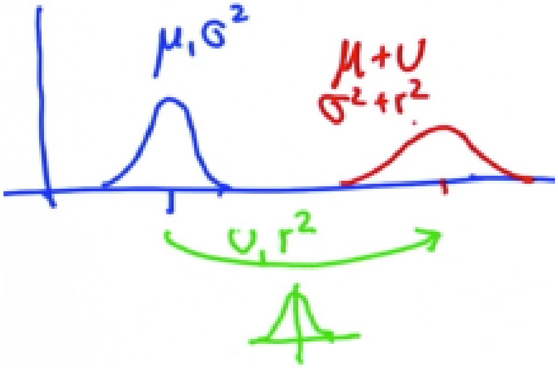
A partir de las hipótesis podemos proponer el modelo del Filtro de Kalman como un caso particular de Filtro Bayesiano donde:

$$\overline{bel}(x_t) = \int \underbrace{p(x_t | u_t, x_{t-1})}_{\sim\mathcal{N}(x_t; A_t x_{t-1} + B_t u_t, Q_t)} \quad \underbrace{bel(x_{t-1})}_{\sim\mathcal{N}(x_{t-1}; \mu_{t-1}, \Sigma_{t-1})} \quad dx_{t-1}$$

$$bel(x_t) = \eta \quad \underbrace{p(z_t | x_t)}_{\sim\mathcal{N}(z_t; C_t x_t, R_t)} \quad \underbrace{\overline{bel}(x_t)}_{\sim\mathcal{N}(x_t; \overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t)}$$

Notación: $\mathcal{N}(x; \mu, \Sigma)$ representa una función de densidad de la variable aleatoria x, con distribución normal, media μ y covarianza Σ.

Ejemplo: predicción luego del movimiento

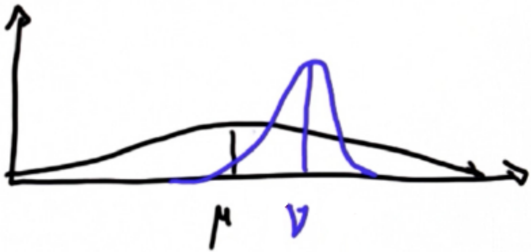


Analíticamente la actualización de los parámetros luego de un movimiento se realiza de la siguiente manera:

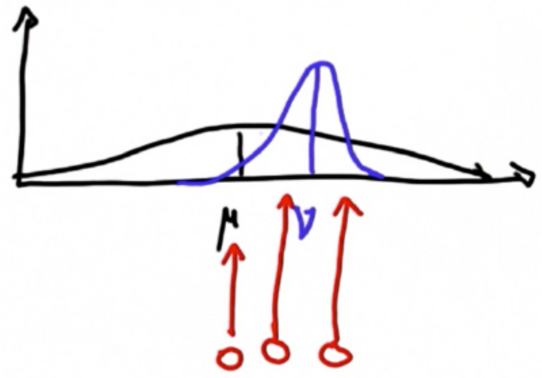
$$\mu' = \mu + \nu \qquad \sigma' = \sigma^2 + r^2$$

Ejemplo: actualización luego de la medición

- Pensemos primero un mundo de una sóla dimensión y un robot que se mueve en esa dimensión.
- El vehículo robótico tiene una distribución de probabilidad a priori, en **negro**, con media μ y varianza σ^2.
- Realiza una medición obteniendo información de su localización, en **azul**, con media ν y varianza r^2.

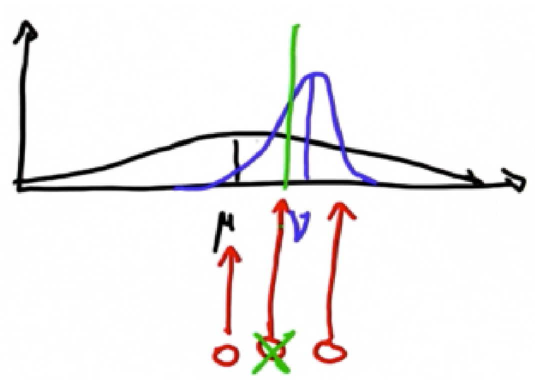


¿Dónde se va a encontrar la media de la nueva gaussiana?



Ejemplo: actualización luego de la medición

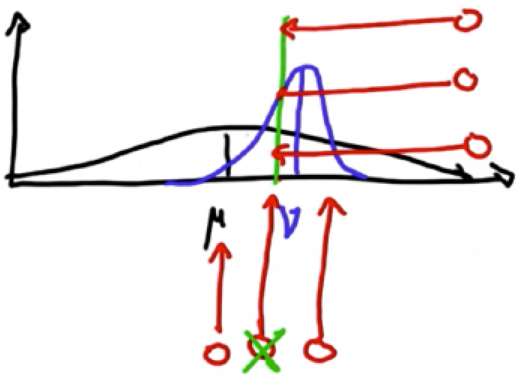
¿Dónde se va a encontrar la media de la nueva gaussiana?



La nueva media se va a ubicar entre las medias μ y ν. Especificamente, se encontrará más cerca de ν ya que la medición es más precisa, acerca de donde está el vehículo, que la distribución a priori.

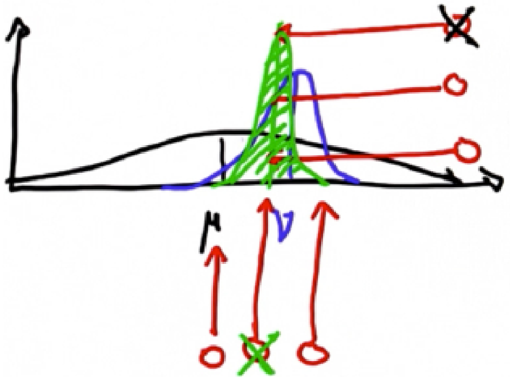
Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué altura va a tener la nueva gaussiana?



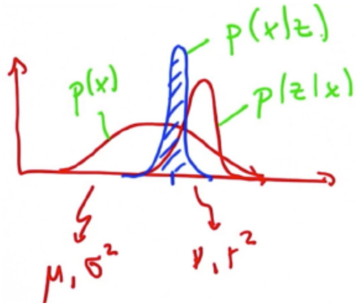
Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué altura va a tener la nueva gaussiana?



La gaussiana resultante es más "alta" que las dos gaussianas. Esto es, la nueva varianza es menor que las varianzas por separado. Intuitivamente, se gana información teniendo en cuenta el conocimiento previo y la medición.

Ejemplo: actualización luego de la medición

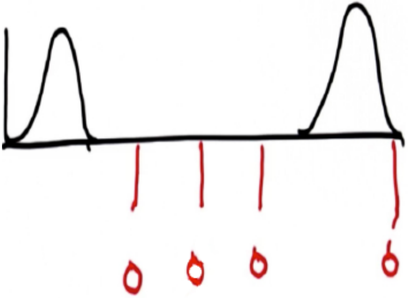


Analíticamente la actualización de los parámetros luego de una medición se realiza de la siguiente manera:

$$\mu' = \frac{r^2\mu + \sigma^2\nu}{\sigma^2 + r^2} \qquad \sigma' = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{r^2}}$$

Ejemplo: actualización luego de la medición

Supongamos que la probabilidad a priori y la medición están muy apartas una de la otra, y ambas tienen la misma varianza. ¿Dónde se encontrará la nueva gaussiana?



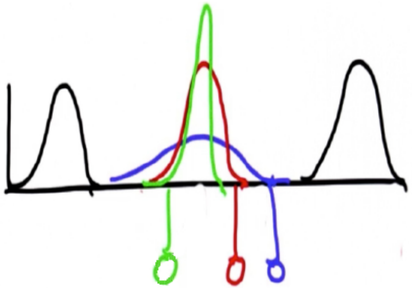
Ejemplo: actualización luego de la medición

Supongamos que la probabilidad a priori y la medición están muy apartas una de la otra, y ambas tienen la misma varianza. ¿Dónde se encontrará la nueva gaussiana?

La nueva media está en el medio ya que las varianzas son iguales.

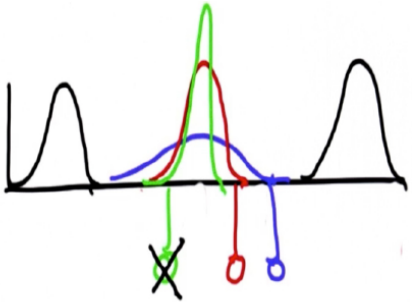
Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué forma tendría la gaussiana?



Ejemplo: actualización luego de la medición

¿Qué forma tendría la gaussiana?



La nueva gaussiana sería la de color verde, dado que su varianza se obtiene independientemente de las medias. Esto parece anti-intuitivo pero como tenemos dos fuentes de información esperamos que nuestro conocimiento sea mayor.

Filtro de Kalman: algoritmo

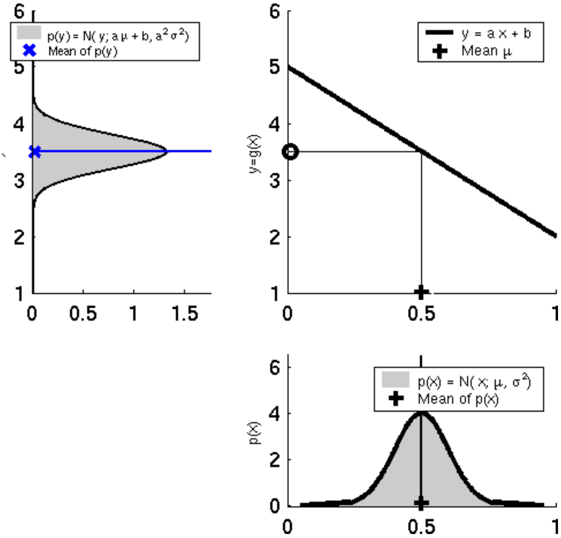
El algoritmo del Filtro de Kalman recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

Algoritmo del Filtro de Kalman($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)

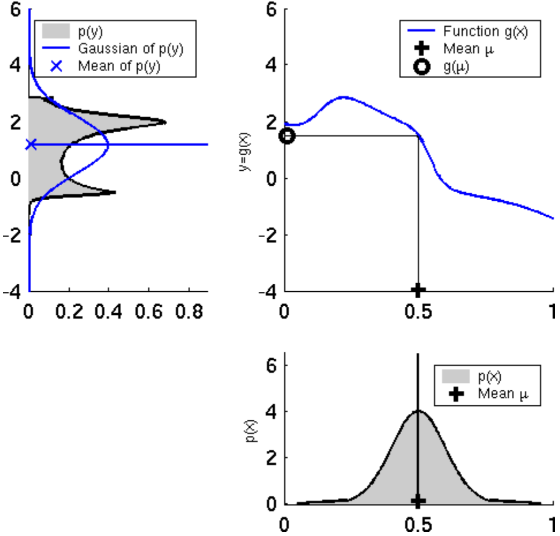
1: $\overline{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$
2: $\overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^\top + Q_t$
3: $K_t = \overline{\Sigma}_t C_t^\top (C_t \overline{\Sigma}_t C_t^\top + R_t)^{-1}$
4: $\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - C_t \overline{\mu}_t)$
5: $\Sigma_t = (I - K_t C_t)\overline{\Sigma}_t$
6: **return** μ_t, Σ_t

¿Qué función cumple K_t? (ganancia de Kalman)
¿Qué pasa si $\lim_{R_t \to 0} K_t = C_t^\top$?
¿Qué pasa si $\lim_{\overline{\Sigma}_t \to 0} K_t = 0$?

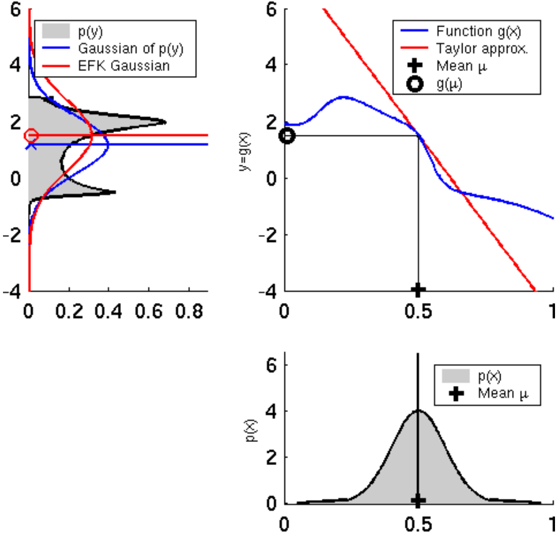
Filtro Extendido de Kalman



Filtro Extendido de Kalman



Filtro Extendido de Kalman



Filtro Extendido de Kalman

Modelos:

$$x_t = f(u_t, x_{t-1})$$
$$z_t = h(x_t)$$

Predicción:

$$f(u_t, x_{t-1}) \simeq f(u_t, \mu_{t-1}) + \frac{\partial f(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}(x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

$$f(u_t, x_{t-1}) \simeq f(u_t, \mu_{t-1}) + F_t(x_{t-1} - \mu_{t-1})$$

Actualización:

$$h(x_t) \simeq h(\overline{\mu_t}) + \frac{\partial h(\overline{\mu_t})}{\partial x_t}(x_t - \overline{\mu_t})$$

$$h(x_t) \simeq h(\overline{\mu_t}) + H_t(x_t - \overline{\mu_t})$$

Filtro Extendido de Kalman: algoritmo

El algoritmo del Filtro Extendido de Kalman recibe el posterior belief del estado anterior y devuelve posterior belief del estado actual:

Algoritmo del Filtro Extendido de Kalman($\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$)

1: $\overline{\mu}_t = f(u_t, \mu_{t-1})$
2: $\overline{\Sigma}_t = F_t \Sigma_{t-1} F_t^\top + Q_t$
3: $K_t = \overline{\Sigma}_t H_t^\top (H_t \overline{\Sigma}_t H_t^\top + R_t)^{-1}$
4: $\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t(z_t - h(\overline{\mu}_t))$
5: $\Sigma_t = (I - K_t H_t)\overline{\Sigma}_t$
6: **return** μ_t, Σ_t

---

donde:

$$H_t = \frac{\partial h(\overline{\mu}_t)}{\partial x_t}$$

$$F_t = \frac{\partial f(u_t, \mu_{t-1})}{\partial x_{t-1}}$$

Para el Taller: fusión del sensado para estimar la posición

¿Cuál es el estado?

$$x_t = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el control?

$$u_t = \begin{pmatrix} \upsilon \\ \omega \end{pmatrix}$$

¿Cuál es el modelo de proceso (predicción)?

$$f(x_t, u_t, w) = \begin{pmatrix} x + \upsilon \Delta t cos(\theta) + w_x \\ y + \upsilon \Delta t sen(\theta) + w_y \\ normalizar(\theta + \omega \Delta t) + w_\theta \end{pmatrix}$$

donde $w \sim \mathcal{N}(0, Q)$ es ruido blanco aditivo.

Para el Taller: fusión del sensado para estimar la posición

Queremos calcular la media:

$$\overline{\mu}_t = \overline{\hat{x}}_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_t, 0)$$

$$\overline{\hat{x}} \approx \tilde{x}_t + A(x_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) + W w_{t-1}$$

Donde:

$$\tilde{x}_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$$

$$A = \frac{\partial f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)}{\partial x}$$

y

$$W = \frac{\partial f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)}{\partial w}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -sen(\theta)\upsilon\Delta t \\ 0 & 1 & cos(\theta)\upsilon\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para el Taller: fusión del sensado para estimar la posición

Queremos calcular la covarianza:

$$\tilde{e}_{x_t} = x_t - \tilde{x}_t$$

$$\tilde{e}_{x_t} = A(X_{t-1} - \hat{x}_{t-1}) + \epsilon_t$$

donde ϵ_t es una nueva variable aleatoria del ruido.

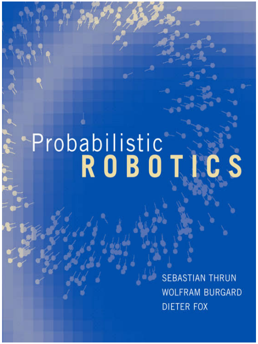
Sabemos que:

$$p(\tilde{e}_{x_t}) \sim \mathcal{N}(0, E[\tilde{e}_{x_t}\tilde{e}_{x_t}^\top])$$

$$p(\epsilon_t) \sim \mathcal{N}(0, WQ_tW^\top)$$

Luego, por ley de propagación de gaussianas:

$$\overline{\Sigma_t} = \overline{P_t} = A_t P_{t-1} A_t^\top + W_t Q_{t-1} W_t^\top$$



"Probabilistics Robotics", Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, Dieter Fox. MIT press, 2006. **Capítulos 1-3**