Conjuntos c.e., co-c.e. y otras yerbas

Ariel Bendersky

Febrero 2018

Conjuntos y función característica - Mini repaso

Si tenemos un conjunto C, su función característica $f_C(x)$ se define como:

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Definiciones

- Un conjunto se dice p.r. si su función característica es p.r.
- Un conjunto se dice computable si su función característica es computable.

Conjuntos y función característica - Mini repaso

Si tenemos un conjunto C, su función característica $f_C(x)$ se define como:

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Definiciones

- Un conjunto se dice p.r. si su función característica es p.r.
- Un conjunto se dice computable si su función característica es computable.

Conjuntos computablemente enumerables (c.e.)

Un conjunto C es computablemente enumerable si existe una función parcial computable g_C tal que:

$$g_C(x) = \begin{cases} \downarrow & \text{si } x \in C \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \right\}$$

Un conjunto C es co-c.e. si $\overline{C}$ es c.e.

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \right\}$$

Conjuntos computablemente enumerables (c.e.)

Un conjunto C es computablemente enumerable si existe una función parcial computable g_C tal que:

$$g_C(x) = \begin{cases} \downarrow & \text{si } x \in C \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \right\}$$

Un conjunto C es co-c.e. si $\overline{C}$ es c.e.

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \right\}$$

Conjuntos computablemente enumerables (c.e.)

Un conjunto C es computablemente enumerable si existe una función parcial computable g_C tal que:

$$g_C(x) = \begin{cases} \downarrow & \text{si } x \in C \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \downarrow \right\}$$

Un conjunto C es co-c.e. si $\overline{C}$ es c.e.

Ejemplo

$$C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)}(x) \uparrow \right\}$$

Teoremas y propiedades

- Si A y B son c.e. entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también son c.e.
- A es computable sii A es c.e. y co-c.e.
- Un conjunto A es c.e. sii es el dominio de una función (parcial) computable.
- A es c.e. $\Leftrightarrow$ A es el rango de una función p.r. $\Leftrightarrow$ A es el rango de una función computable $\Leftrightarrow$ A es el rango de una función parcial computable.
- Hay un par más en la teórica.

Los problemas se resuelven con las mismas herramientas que usamos para ver si una función era computable o no.

Reducciones

Decimos que A es reducible (computablemente) a B y notamos $A \leq B$ si existe una f computable tal que $x \in A$ sii $f(x) \in B$.

- Si B es computable, c.e. o co-c.e., A también.

Problema 1

Decidir y justificar si el siguiente conjunto es p.r., computable, c.e. o co-c.e.:

$$C = \left\{ \langle x, y \rangle : \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y+1) \downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(y) + 1 = \Phi_x^{(1)}(y+1) \right\}$$

Solución 1

C es c.e.
Armo un programa que termina sii $X_1 \in C$.

$$
\begin{aligned}
Z_1 &\leftarrow \Phi^{(1)}_{l(X_1)}(r(x_1)) \\
Z_2 &\leftarrow \Phi^{(1)}_{l(X_1)}(r(x_1)+1) \\
[A]\text{IF } & Z_1 + 1 = Z_2 \text{ GOTO } E \\
& \text{GOTO } A
\end{aligned}
$$

Luego, C es c.e.

Solución 1

C no es computable. ¿Cómo sabemos? Consideremos una reducción.

$$B = \left\{x : \Phi_x^{(1)}(0)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(1)\downarrow \text{ y } \Phi_x^{(1)}(0) + 1 = \Phi_x^{(1)}(1)\right\}$$

Supongo C computable, miro si $\{x, 0\}$ pertenece a C y automáticamente sé que pertenece a B. Luego, B es computable. Pero B es un conjunto no trivial de índices, por Rice, no es computable. Luego, C no es computable.

Solución 1

C es p.r. C no es computable.
Luego, C no es co-c.e. (si lo fuera, C sería c.e. y co-c.e., por lo tanto computable).
Si C no es computable, mucho menos es p.r.

Problema 2

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función total y $G = \{\langle x, y\rangle : y = f(x)\}$.
Decidir si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

a. Si G es c.e. entonces G es computable.

Solución 2

Es verdadero. Si G es c.e., entonces es computable (por un programa de número e) la siguiente función:

$$g(\langle x, y\rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = f(x) \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Es fácil ver, entonces, que se puede escribir
$f(x) = \min_{\langle y,t\rangle} \mathrm{STP}\left(\langle x, y\rangle, e, t\right)$.
Esa minimización no acotada siempre termina porque f es total, y la minimización no acotada de una función p.r. es computable.
Luego, si G es c.e., f tiene que ser computable.
Falta ver, y queda como ejercicio, que si f es total computable (ahora lo sabemos), el conjunto $G = \{\langle x, y\rangle : y = f(x)\}$ es computable.

Problema 3

Sean A y B dos conjuntos de números naturales tales que A es c.e. y B es computable. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a. $A \setminus B$ es c.e.

b. $B \setminus A$ es c.e.

Solución 3 a.

Es verdadero. Sean f_a la función cuyo dominio es A y g_b la función característica de B.

$$Z_1 \leftarrow f_a(X_1)$$
$$Z_2 \leftarrow g_b(X_1)$$
$$[P]\text{IF } Z_2 \neq 0 \text{ GOTO P}$$

Ese programa termina si $X_1 \in A \setminus B$ y se indefine si no. Luego, $A \setminus B$ es c.e.

Solución 3 b.

Falso. Veamos un contraejemplo. Si $B = \mathbb{N}$ y $A = K$, $B \setminus A$ es el complemento de K que no es c.e.

TOT

TOT es el conjunto de los números de programa que computan funciones totales computables.

$$\mathrm{TOT} = \left\{ x : \forall y \Phi_x^{(1)}(y) \downarrow \right\}$$

1. TOT no es computable.
2. TOT no es c.e.
3. TOT no es co-c.e.

Problema 4

Sea el conjunto $C = \left\{ x : \Phi_x^{(1)} \text{ computa la función constante } 5 \right\}$.
Decidir si es c.e. o co-c.e.

Problema 4 - Intuición

No parece c.e., porque deberíamos mirar todos los valores de x para saber si en todos da igual a 5 antes de devolver 1.
No parece co-c.e., porque deberíamos encontrar algún valor en el que se defina y sea distinto de 5 o que se indefina siempre. Ambas cosas nos costaría encontrar.

Solución 4 - Intento reducir a TOT

Me gustaría encontrar una $f(x)$ total computable tal que $x \in TOT$ sii $f(x)$ me da un número que computa la función constante 5. Así mirando si $f(x)$ pertenece a C podría saber si $x \in TOT$, lo que constituye un absurdo.
Voy a proponer un e fijo tal que $f(x) = s_1^1(x, e)$ es la función del teorema del parámetro. Y quién es e lo voy a elegir dentro de poco.

Solución 4 - Intento reducir a TOT

Necesito que $\forall y \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow$ sii $\forall y \Phi_{s_1^1(x,e)}^{(1)}(y) = 5$.

Pero $\Phi_{s_1^1(x,e)}^{(1)}(y) = \Phi_e^{(2)}(y,x)$. Luego, elijo e tal que

$$\Phi_e^{(2)}(y,x) = \begin{cases} 5 & \text{si } \Phi_x^{(1)}(y)\downarrow \\ \uparrow & \text{si no} \end{cases}$$

Esa función es parcial computable. Supongamos que C es c.e. o co-c.e. y veamos como eso haría que TOT también lo sea (y lleguemos al absurdo).

Quiero saber si $x \in TOT$. Miro si $s_1^1(x,e) \in C$. Pero si $s_1^1(x,e) \in C$, entonces $\Phi_{s_1^1(x,e)}^{(1)}$ computa la constante 5. Por lo tanto, $\Phi_x^{(1)}(y)\downarrow$ para todo y, por lo tanto $x \in TOT$. Es decir, C es una reducción de TOT. Por lo tanto, C no es c.e. ni co-c.e.