Resolución en lógica de primer orden

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

28 de septiembre de 2017

Forma clausal

- Es una forma normal conjuntiva, en notación de conjuntos.
- Análogo a la forma clausal del marco proposicional.
- Pero requiere tener en cuenta los cuantificadores.
- El pasaje a forma clausal consiste en seis pasos de conversión.
  1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación).
  2. Pasar a forma normal negada.
  3. Pasar a forma normal prenexa (opcional).
  4. Pasar a forma normal de Skolem.
  5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva.
  6. Distribuir cuantificadores universales.

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en forma normal negada (FNN) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A, A y $\neg A$ están en FNN.
2. Si $A, B \in \mathrm{FNN}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \mathrm{FNN}$.
3. Si $A \in \mathrm{FNN}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \mathrm{FNN}$.

Ejemplos

- $\neg\exists x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \supset (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ no está en FNN.
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$ está en FNN.

Forma normal negada

Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra en FNN.

Dem.
Por inducción estructural usando:

$$\begin{array}{rcl} \neg(A \wedge B) & \iff & \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) & \iff & \neg A \wedge \neg B \\ \neg\neg A & \iff & A \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \neg\forall x.A & \iff & \exists x.\neg A \\ \neg\exists x.A & \iff & \forall x.\neg A \end{array}$$

Ejemplos

- $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \vee (\exists z.R(x,z) \vee P(a)))$ se transforma en
- $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x,y)) \wedge (\forall z.\neg R(x,z) \wedge \neg P(a)))$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n.B$, $n \geq 0$, donde

- B sin cuantificadores (llamada matriz)
- $x_1, \ldots, x_n$ son variables
- $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma prenexa

Toda fórmula A es lógicamente equivalente a una fórmula B en forma prenexa.

Demostración

Por inducción estructural usando (las fórmulas se asumen rectificadas):

$$
\begin{array}{lcllcl}
(\forall x.A) \land B & \iff & \forall x.(A \land B) & (\forall x.A) \lor B & \iff & \forall x.(A \lor B) \\
(A \land \forall x.B) & \iff & \forall x.(A \land B) & (A \lor \forall x.B) & \iff & \forall x.(A \lor B) \\
(\exists x.A) \land B & \iff & \exists x.(A \land B) & (\exists x.A) \lor B & \iff & \exists x.(A \lor B) \\
(A \land \exists x.B) & \iff & \exists x.(A \land B) & (A \lor \exists x.B) & \iff & \exists x.(A \lor B)
\end{array}
$$

- Nota: Con estas equivalencias basta, si asumimos que A está en FNN.

Ejemplo

1. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.Q(y) \vee \forall z.P(z))$
2. $\forall x.\neg P(x) \wedge (\exists y.(Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
3. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z.P(z)))$
4. $\exists y.(\forall x.\neg P(x) \wedge \forall z.(Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y.\forall z.(\forall x.\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y.\forall z.\forall x.(\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Forma normal de Skolem

- Hasta ahora tenemos una fórmula que:
  1. está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$,
  2. si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada),
  3. (opcionalmente) si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (forma normal prenexa).
- El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama skolemización.
- El objetivo de la skolemización es
  1. eliminar los cuantificadores existenciales
  2. sin alterar la satisfactibilidad.

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ¿Cómo eliminamos los $\exists$ sin cambiar la satisfactibilidad?
- Introducimos "testigos" para los mismos.
  - Todo cuantificador existencial se instancia en una constante o función de skolem.
  - Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden.
  - Estas funciones y constantes se suelen conocer como parámetros.

¿Cómo se altera el significado de la fórmula?

Prop.

Si A' es el resultado de skolemizar A, entonces A es satisfactible sii A' es satisfactible.

- Consecuencia: La skolemización preserva insatisfactibilidad.
- Esto es suficiente para poder aplicar el método de resolución, tal como veremos.

¿Preservación de validez?

- ¿Podremos eliminar los cuantificadores existenciales, usando Skolemización, sin alterar la validez?
- Esto es mucho más fuerte que preservar satisfactibilidad...
- Respuesta: No.
- Ejemplo: $\exists x.(P(a) \supset P(x))$ es válida pero $P(a) \supset P(b)$ no lo es.
- Tal como se mencionó, la skolemización sí preserva satisfactibilidad y ello es suficiente para el método de resolución.

Skolemización

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

donde

- $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución (sustituir todas las ocurrencias libres de una variable en una expresión - fórmula o término - por otra expresión).
- Si $\exists x.B$ forma parte de una fórmula mayor, decimos que x depende de las variables libres de B, y sólo de ellas (por ejemplo, en $\forall z.\forall y.\exists x.P(y,x)$ la x depende de y).
- f es un símbolo de función nuevo y las $x_1, \ldots, x_n$ son las variables de las que depende x en B.

Definición de forma normal de Skolem (1/2)

- Sea A una sentencia rectificada en FNN.
  - No es necesario que esté en forma prenexa.
- Una forma normal de Skolem de A (escrito $\mathbf{SK}(A)$) es una fórmula sin existenciales que se obtiene recursivamente como sigue.
- Sea A' cualquier subfórmula de A.
  - Si A' es una fórmula atómica o su negación, $\mathbf{SK}(A') = A'$.
  - Si A' es de la forma $(B \star C)$ con $\star \in \{\vee, \wedge\}$, entonces $\mathbf{SK}(A') = (\mathbf{SK}(B) \star \mathbf{SK}(C))$.
  - Si A' es de la forma $\forall x.B$, entonces $\mathbf{SK}(A') = \forall x.\mathbf{SK}(B)$.
  - *Sigue en siguiente diapositiva.*

Definición de forma normal de Skolem (2/2)

- Si A' es de la forma $\exists x.B$ y $\{x, y_1, \ldots, y_m\}$ son las variables libres de B[1], entonces

  1. Si $m > 0$, crear un nuevo símbolo de función de Skolem, f_x de aridad m y definir
  $$\textbf{SK}(A') = \textbf{SK}(B\{x \leftarrow f_x(y_1, \ldots, y_m)\})$$
  2. Si $m = 0$, crear una nueva constante de Skolem c_x y
  $$\textbf{SK}(A') = \textbf{SK}(B\{x \leftarrow c_x\})$$

Nota: dado que A está rectificada, cada f_x y c_x es única.

[1] Notar que se ligan en A dado que A es sentencia

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x.\left(P(a) \vee \exists y.(Q(y) \wedge \forall z.(P(y,z) \vee \exists u.Q(x,u)))\right) \vee \exists w.Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z.(P(g(x),z) \vee Q(x,f(x))))) \vee Q(c)$$

Ejemplos

- Considere la sentencia:

$$\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$$

1. Alternativa 1 (rojo, azul)
   1.1 $\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$
   1.2 $\forall x.\exists z.R(x,f(x),z)$
   1.3 $\forall x.R(x,f(x),g(x))$
2. Alternativa 2 (azul, rojo)
   2.1 $\forall x.\exists y.\exists z.R(x,y,z)$
   2.2 $\forall x.\exists y.R(x,y,h(x,y))$
   2.3 $\forall x.R(x,k(x),h(x,k(x)))$
3. La skolemización no es determinística.

- Es mejor skolemizar de afuera hacia adentro.

Forma clausal

Hasta ahora tenemos una fórmula que:

1. está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall$;
2. si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (forma normal negada);
3. si tiene cuantificadores, son universales (forma normal de Skolem);
4. si está en forma normal prenexa y tiene cuantificadores, éstos se encuentran todos en el prefijo.

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n . B$$

Forma clausal

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.B$$

1. Pasar B a forma normal conjuntiva B' como si fuera una fórmula proposicional arrojando

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.B'$$

2. Distribuir los cuantificadores sobre cada conjunción usando la fórmula válida $\forall x.(A \wedge B) \iff \forall x.A \wedge \forall x.B$ arrojando una conjunción de cláusulas

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n.C_1 \wedge \ldots \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_n.C_m$$

   donde cada C_i es una disyunción de literales

3. Se simplifica escribiendo $\{C_1, \ldots, C_m\}$.

Ejemplo

$$\forall x.\forall z.(P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge (P(g(x), z) \vee Q(x, f(x))))) \vee Q(c)$$

1. Pasamos la matriz a forma normal conjuntiva
$$\forall x.\forall z.\big([P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)] \wedge [P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)]\big)$$
2. Distribuimos los cuantificadores
$$\forall x.\forall z.\big[P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)\big] \wedge \forall x.\forall z.\big[P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)]$$
3. Pasamos a notación de conjuntos
$$\Big\{\{P(a), Q(g(x)), Q(c)\}, \{P(a), P(g(x), z), Q(x, f(x)), Q(c)\}\Big\}$$

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a forma normal negada
3. Pasar a forma normal prenexa
4. Pasar a forma normal de Skolem (puede hacerse antes de 3)
5. Pasar matriz a forma normal conjuntiva
6. Distribuir cuantificadores universales

Nota: todos los pasos preservan validez lógica, salvo la skolemización (que preserva la satisfactibilidad).

Resolución en lógica proposicional

Consideremos la siguiente fórmula:

$$(\forall x.P(x)) \land \neg P(a)$$

- Es satisfactible? NO.
- Su forma clausal es

$$\{\{P(x)\},\{\neg P(a)\}\}$$

- ¿Podemos aplicar la regla de resolución?

$$\frac{\{A_1,\ldots,A_m,Q\} \quad \{B_1,\ldots,B_n,\neg Q\}}{\{A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n\}}$$

- No. $P(x)$ y $P(a)$ no son idénticos, son ... unificables.

Ahora sí, la Regla de resolución

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \ldots, B_k, D_1, \ldots, D_j\}$.

- Asumimos que las cláusulas $\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}$ no tienen variables en común; en caso contrario se renombran las variables.
- Observar que $\sigma(B_1) = \ldots = \sigma(B_k) = \sigma(D_1) = \ldots = \sigma(D_j)$.
- La cláusula $\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})$ se llama resolvente (de $\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}$).

Método de resolución

- Las siguientes nociones son análogas al caso proposicional.
  - Cláusula vacía
  - Paso de resolución
  - Refutación
- Al igual que en el caso proposicional contamos con el siguiente resultado.

Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel

Cada paso de resolución preserva satisfactibilidad.

Ejemplo

Supongamos que dado A, obtenemos $\neg A$, lo convertimos a forma clausal y nos queda: $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ donde

- $C_1 = \forall z_1.\forall x.(\neg P(z_1, a) \vee \neg P(z_1, x) \vee \neg P(x, z_1))$
- $C_2 = \forall z_2.(P(z_2, f(z_2)) \vee P(z_2, a))$
- $C_3 = \forall z_3.(P(f(z_3), z_3) \vee P(z_3, a))$

Abreviado (sin cuantificadores + notación de conjuntos):

$$\Big\{\{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\},\\ \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\},\\ \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\}\Big\}$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\}, \\
C_2 &= \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\}, \\
C_3 &= \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\}.
\end{aligned}
$$

1. De C_1 y C_2 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_2 \leftarrow a\}$:
   $C_4 = \{P(a, f(a))\}$
2. De C_1 y C_3 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_3 \leftarrow a\}$:
   $C_5 = \{P(f(a), a)\}$
3. De C_1 y C_5 con $\{z_1 \leftarrow f(a), x \leftarrow a\}$:
   $C_6 = \{\neg P(a, f(a))\}$
4. De C_4 y C_6: $\square$

Otro ejemplo

- Consideremos las siguientes fórmulas:
  - $F_1 : \forall x.\forall y.(P(x,y) \supset P(y,x))$
  - $F_2 : \forall x.\forall y.\forall z.((P(x,y) \wedge P(y,z)) \supset P(x,z))$
  - $F_3 : \forall x.\exists y.P(x,y)$
- Establecen que P es simétrica, transitiva y total

Apelar al método de resolución para probar que P es reflexiva

- Tenemos que probar
$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x.P(x,x)$$
- Para ello, basta con probar que
$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x.P(x,x))$$
es insatisfactible.

  Notar que $\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x.P(x,x))$ es equivalente a $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \neg\forall x.P(x,x)$.

Otro ejemplo (cont.)

Pasamos la siguiente fórmula a forma clausal.

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x.P(x,x))$$

- Donde
  - $F_1 : \forall x.\forall y.(P(x,y) \supset P(y,x))$
  - $F_2 : \forall x.\forall y.\forall z.((P(x,y) \wedge P(y,z)) \supset P(x,z))$
  - $F_3 : \forall x.\exists y.P(x,y)$
- Sus formas clausales son:
  - $C_1 : \{\neg P(x,y), P(y,x)\}$
  - $C_2 : \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}$
  - $C_3 : \{P(x,f(x))\}$
- Finalmente, nos queda hallar una refutación a partir del conjunto de cláusulas

$$\{C_1, C_2, C_3, \{\neg P(a,a)\}\}$$

Otro ejemplo (cont.)

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\neg P(x,y), P(y,x)\},\\
C_2 &= \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\},\\
C_3 &= \{P(x, f(x))\},\\
C_4 &= \{\neg P(a,a)\}.
\end{aligned}
$$

1. De C_2 y C_4 con $\{x \leftarrow a, z \leftarrow a\}$:
   $C_5 = \{\neg P(a,y), \neg P(y,a)\}$
2. De C_3 y C_5 con $\{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$:
   $C_6 = \{\neg P(f(a), a)\}$
3. De C_1 y C_6 con $\{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$:
   $C_7 = \{\neg P(a, f(a))\}$
4. De C_3 y C_7 con $\{x \leftarrow a\}$: $\square$

Diferencias con proposicional

1. En proposicional

$$\frac{\{Q, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg Q, B_1, \ldots, B_n\}}{\{A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_n\}}$$

2. En primer orden

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \ldots, \neg D_j, C_1, \ldots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

   donde σ es el MGU de $\{B_1, \ldots, B_k, D_1, \ldots, D_j\}$.

Regla de resolución binaria

$$\frac{\{B, A_1, \ldots, A_m\} \quad \{\neg D, C_1, \ldots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B, D\}$.

- Es incompleta.
- Ejemplo: intentar refutar $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$

Regla de resolución binaria

- Se puede recuperar la completitud incorporando una regla adicional: factorización.

$$\frac{\{B_1, \ldots, B_k, A_1, \ldots, A_m\}}{\sigma(\{B_1, A_1, \ldots, A_m\})}$$

  donde σ es el MGU de $\{B_1, \ldots, B_k\}$.

- En el ejemplo anterior

  1. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$
  2. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}\}$ (fact.)
  3. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}\}$ (fact.)
  4. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}, \Box\}$ (resolución (binaria))