

Cálculo Lambda I

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

5 de Febrero de 2018

Ejercicio: ¿Cuáles son expresiones sintácticamente válidas? Dibujar el árbol sintáctico y marcar las ocurrencias libres de variables.

1 $\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}.x \text{ true}$

2 $(\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}.x \text{ true}) (\lambda y : \text{Bool}.x)$

3 $\lambda x : \text{Nat}$

4 $\lambda x. x$

5 $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z : \text{Bool}.z$

6 $x (\lambda y : \text{Bool}.y)$

7 true false

8 $\text{succ}(M)$

9 succ true

10 $\text{if succ(true) then } \lambda x : \text{Bool}.x$

Ejercicio: Demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

Ejercicio: Demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

- 1 $\emptyset \vdash (\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y) \text{ false} : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$
- 2 $\emptyset \vdash \lambda f : \text{Nat} \rightarrow \text{Bool}. \lambda g : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}. \lambda x : \text{Bool}. f (g x) : (\text{Nat} \rightarrow \text{Bool}) \rightarrow (\text{Bool} \rightarrow \text{Nat}) \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$
- 3 $\emptyset \vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } z : \text{Bool}$

Solución: Demostración 1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{x \in \{x:\text{Bool}, y:\text{Bool}\}}{\emptyset \vdash x:\text{Bool}} \text{ (T-VAR)} \quad \frac{y \in \{x:\text{Bool}, y:\text{Bool}\}}{\emptyset \vdash y:\text{Bool}} \text{ (T-VAR)} \\
 \frac{}{\emptyset \vdash \text{true}:\text{Bool}} \text{ (T-TRUE)} \\
 \hline
 \frac{}{\{x:\text{Bool}, y:\text{Bool}\} \vdash \text{if } x \text{ then true else } y:\text{Bool}} \text{ (T-IF)} \\
 \hline
 \frac{}{\{x:\text{Bool}\} \vdash \lambda y:\text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{ (T-ABS)} \\
 \hline
 \frac{}{\emptyset \vdash \lambda x:\text{Bool}. \lambda y:\text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{ (T-ABS)} \quad \frac{}{\emptyset \vdash \text{false}:\text{Bool}} \text{ (T-FALSE)} \\
 \hline
 \frac{}{\emptyset \vdash (\lambda x:\text{Bool}. \lambda y:\text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y) \text{ false}:\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}} \text{ (T-APP)}
 \end{array}$$

Ejercicio: ¿Cuáles de estos términos son valores?

- 1 `if true then ($\lambda x : \text{Bool}. x$) else ($\lambda x : \text{Bool}. \text{false}$)`
- 2 `$\lambda x : \text{Bool}. \text{false}$`
- 3 `($\lambda x : \text{Bool}. x$) false`
- 4 `succ(0)`
- 5 `succ(succ(0))`
- 6 `succ(pred(0))`
- 7 `$\lambda x : \text{Bool}. (\lambda y : \text{Bool}. x) \text{false}$`
- 8 `$\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. x \text{true}$`

Ejercicio: ¿Cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado, es siempre un valor?

1 $(\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y) \text{ false}$

2 $(\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. y (y x)) ((\lambda z : \text{Bool}. \text{true}) \text{ false}) (\lambda w : \text{Bool}. w)$

Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{bool} \stackrel{def}{=} \lambda x: Bool. x$
- $and \stackrel{def}{=}$

Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia. Por ejemplo:

- $Id_{bool} \stackrel{def}{=} \lambda x: Bool. x$
- $and \stackrel{def}{=} \lambda x: Bool. \lambda y: Bool. \text{if } x \text{ then } y \text{ else } false$

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x: \tau. M \rightarrow \lambda x: \tau. M'} E - ABS$$

Ejercicio

- 1 Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x: \text{Bool}. Id_{\text{bool}} \text{ true})$ es o no un valor.

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x: \tau. M \rightarrow \lambda x: \tau. M'} E - ABS$$

Ejercicio

- 1 Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x: \text{Bool}. \text{Id}_{\text{bool}} \text{ true})$ es o no un valor.
- 2 ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x: \tau. M \rightarrow \lambda x: \tau. M'} E - ABS$$

Ejercicio

- 1 Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x: \text{Bool}. \text{Id}_{\text{bool}} \text{ true})$ es o no un valor.
- 2 ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?
- 3 Utilizando la nueva regla y los valores definidos, reducir la siguiente expresión
 $(\lambda x: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}. x \ 23) (\lambda x: \text{Nat}. 0)$
¿Qué se puede concluir entonces? ¿Es seguro o no agregar esta regla?

¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿?

($\lambda x : \text{Clase. fin } x$) (Cálculo Lambda I)

Machete: Tipos y Términos

Expresiones de Tipos

Expresiones de Términos

Las expresiones de tipos (o simplemente tipos) son

$$\sigma ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \sigma \rightarrow \rho$$

Sea \mathcal{X} un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los términos están dados por

$$\begin{aligned} M ::= & \quad x \\ & \quad | \quad \text{true} \\ & \quad | \quad \text{false} \\ & \quad | \quad \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\ & \quad | \quad \lambda x : \sigma. M \\ & \quad | \quad M M \\ & \quad | \quad 0 \\ & \quad | \quad \text{succ}(M) \\ & \quad | \quad \text{pred}(M) \end{aligned}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{(T-TRUE)}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \text{(T-FALSE)}$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \text{(T-VAR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma} \text{(T-IF)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{(T-ABS)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{(T-APP)}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma \vdash 0 : \text{Nat}} \text{(T-ZERO)} \\[1em] \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}} \text{(T-SUCC)} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}} \text{(T-PRED)} \\[1em] \frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{iszero}(M) : \text{Bool}} \text{(T-ISZERO)} \end{array}$$

Machete: Semántica operacional

$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \underline{n}$
donde \underline{n} abrevia $\text{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2} \text{ (E-APP1 o } \mu \text{)}$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{V_1 M_2 \rightarrow V_1 M'_2} \text{ (E-APP2 o } \nu \text{)}$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma. M) V \rightarrow M\{x \leftarrow V\}} \text{ (E-APPABS o } \beta \text{)}$$

Machete: Semántica operacional

$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \underline{n}$
donde \underline{n} abrevia $\text{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{}{\text{if } \text{true} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_2} \text{ (E-IFTRUE)}$$

$$\frac{}{\text{if } \text{false} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_3} \text{ (E-IFFALSE)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow \text{if } M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3} \text{ (E-IF)}$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{succ}(M_1) \rightarrow \text{succ}(M'_1)} \text{ (E-SUCC)}$$

$$\frac{}{\text{pred}(0) \rightarrow 0} \text{ (E-PREDZERO)}$$

$$\frac{}{\text{pred}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \underline{n}} \text{ (E-PREDSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{pred}(M_1) \rightarrow \text{pred}(M'_1)} \text{ (E-PRED)}$$

$$\frac{}{\text{iszero}(0) \rightarrow \text{true}} \text{ (E-ISZEROZERO)}$$

$$\frac{}{\text{iszero}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \text{false}} \text{ (E-ISZEROSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{iszero}(M_1) \rightarrow \text{iszero}(M'_1)} \text{ (E-ISZERO)}$$