Práctica 4 - Lógica Proposicional

Ejercicio 1. Sea $v : \mathbf{Prop} \to \{0, 1\}$ una valuación, donde **Prop** denota el conjunto de símbolos proposiciones del cálculo proposicional. Si sólo se conocen $v(p_1), v(p_2)$ y $v(p_3)$, siendo $v(p_1) = v(p_2) = v(p_3) = 0$, argumentar si es posible decidir $v \models \alpha$ o $v \not\models \alpha$ en los siguientes casos:

a. $\alpha = \neg p_1$.

b. $\alpha = ((p_5 \vee p_3) \to p_1)$.

c. $\alpha = ((p_1 \vee p_2) \to p_3)$.

d. $\alpha = \neg p_4$.

e. $\alpha = ((p_8 \to p_5) \to (p_8 \wedge p_0))$.

Ejercicio 2. Dadas las siguientes fórmulas del cálculo proposicional:

- $\alpha_1 = (\neg p_1 \to (p_3 \vee p_4))$.
- $\alpha_2 = \neg(p_2 \to (p_3 \wedge p_1))$.
- $\alpha_3 = ((\neg p_2 \to p_3) \to (p_2 \vee (p_5 \to p_3)))$.

Hallar todas las valuaciones v tales que:

a. $v \models \alpha_i$.

b. $v \models \alpha_i$ y $v(p_j) = 0$ si $p_j \notin \mathbf{Var}(\alpha)$.

donde **Var** denota al conjunto de variables proposicionales y $\mathbf{Var}(\alpha)$ al subconjunto de **Var** cuyos elementos son las variables proposicionales que aparecen en α.

Ejercicio 3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$. Decimos que α es satisfacible cuando existe una valuación v tal que $v \models \alpha$. Demostrar que:

a. α es tautología si y solo si $\neg\alpha$ no es satisfacible.

b. $(\alpha \wedge \beta)$ es tautología si y sólo si α y β son tautologías.

c. $(\alpha \vee \beta)$ es contradicción si y sólo si α y β son contradicciones.

d. $(\alpha \to \beta)$ es contradicción si y sólo si α es tautología y β es contradicción.

Ejercicio 4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que si $\alpha \wedge \beta$ es una contingencia, entonces α es contingencia o β es contingencia.

b. Dadas dos valuaciones v, v', probar que si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i \in \mathbf{Var}(\alpha)$ entonces $v \models \alpha$ si y sólo si $v' \models \alpha$.

c. Usando el resultado anterior, mostrar que si $\mathbf{Var}(\alpha) \cap \mathbf{Var}(\beta) = \emptyset$, entonces $(\alpha \to \beta)$ es tautología si y sólo si α es contradicción ó β es tautología.

d. Análogamente, probar que si α y β son contingencias y no tienen variables proposicionales en común, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingencia.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, \neg\}$ y α una fórmula proposicional del lenguaje $\mathcal{L}$. Sea $\alpha^\star$ la fórmula que resulta de reemplazar en α: $\wedge \mapsto \vee$, $\vee \mapsto \wedge$ y para todo i, $p_i \mapsto \neg p_i$. Probar que para toda valuación v, $v \models \alpha^\star$ si y sólo si $v \not\models \alpha$.

Ejercicio 6. Dada una valuación v, sean p y q dos proposiciones tales que $v(p) = v(q)$. Demostrar que $v \models \varphi$ sii $v \models \varphi[p \mapsto q]$ para toda fórmula φ, donde $\varphi[p \mapsto q]$ denota la fórmula que resulta de reemplazar uniformemente la proposición p por q en φ.

Ejercicio 7. Dado un conjunto de fórmulas Γ, llamamos $\mathbf{Con}(\Gamma)$ al conjunto de consecuencias semánticas de Γ definido como $\mathbf{Con}(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \models \varphi\}$. Sean $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ conjuntos de fórmulas. Probar que:

a. $\Gamma \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma)$.

b. si $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, entonces $\mathbf{Con}(\Gamma_1) \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$.

c. si $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_2)$ y $\Gamma_2 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$ entonces $\Gamma_1 \subseteq \mathbf{Con}(\Gamma_3)$.

d. $\mathbf{Con}(\mathbf{Con}(\Gamma)) = \mathbf{Con}(\Gamma)$.

Ejercicio 8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbf{Form}$.

a. Probar que $\mathbf{Con}(\{\beta\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\alpha\})$ si y sólo si $\alpha \to \beta$ es tautología.

b. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   1) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \wedge \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cap \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   2) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \vee \beta)\}) = \mathbf{Con}(\{\alpha\}) \cup \mathbf{Con}(\{\beta\})$.
   3) $\mathbf{Con}(\{(\alpha \to \beta)\}) \subseteq \mathbf{Con}(\{\beta\})$.

Ejercicio 9. * Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{Form}$.

a. Probar que si Γ es satisfacible y $\Gamma' \subseteq \Gamma$, entonces Γ' es satisfacible. Mostrar que la recíproca no es cierta.

b. Probar que Γ es satisfacible si y sólo si $\mathbf{Con}(\Gamma)$ es satisfacible.

c. ¿Es cierto que para toda fórmula α sucede $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$?

Ejercicio 10. Demostrar que son equivalentes:

a. $\neg(\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \in \mathbf{Con}(\emptyset)$.

b. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son simultáneamente válidas para ninguna valuación.

c. Existe una fórmula β tal que $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ y $\neg\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$.

d. $\beta \in \mathbf{Con}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})$ para toda fórmula β.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.