Lógica Digital

Organización del Computador I

David Alejandro González Márquez

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

01.02.2018

Agenda

- Introducción
- Fórmulas booleanas
- Circuitos básicos
- Circuitos aritméticos

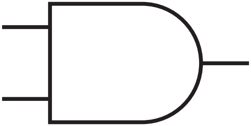
Repaso...

- Operadores lógicos:
  - NOT, OR, AND, NAND, NOR, XOR
  - Son descriptos por su tabla de verdad

- Expresiones booleanas:
  - Combinación de operadores lógicos y variables boleanas
    Ej. $F(X, Y, Z) = X + Y \cdot Z$
  - Una tabla de verdad describe todas las combinaciones de valores de verdad para una función lógica determinada
  - Dos expresiones son iguales $\leftrightarrow$ tienen la misma tabla de verdad

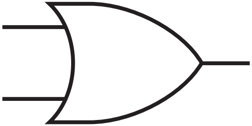
Compuertas AND y OR

AND $(A \cdot B)$



A	B	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

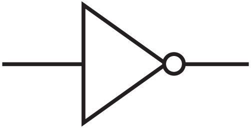
OR $(A + B)$



A	B	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

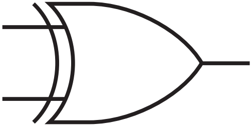
Compuertas NOT y XOR

NOT ($\overline{A}$)



A	NOT
0	1
1	0

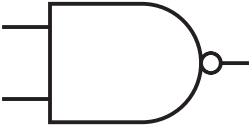
XOR ($A \oplus B$)



A	B	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

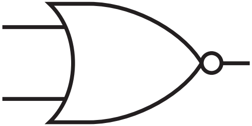
Compuertas NAND y NOR

NAND $(A|B)$



A	B	NAND
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR $(A \downarrow B)$



A	B	NOR
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Propiedades

Propiedades para las operaciones $(\cdot)$ y $(+)$:

Identidad	$1 \cdot A = A$	$0 + A = A$
Nulo	$0 \cdot A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Inverso	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Conmutatividad	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociatividad	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributividad	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Ejercicio 1: Equivalencias

- Demostrar si la siguiente igualdad entre funciones booleanas es verdadera o falsa:

$$(X + \overline{Y}) = \overline{(\overline{X} \cdot Y)} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} + \overline{(Y + Z)}$$

Ejercicio 1: Equivalencias

- Demostrar si la siguiente igualdad entre funciones booleanas es verdadera o falsa:

$$(X + \overline{Y}) = \overline{(\overline{X} \cdot Y)} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} + \overline{(Y + Z)}$$

Solución:

$\overline{(\overline{X} \cdot Y)} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} + \overline{(Y + Z)} \longleftarrow$ De Morgan

$\overline{(\overline{X} \cdot Y)} \cdot Z + X \cdot \overline{Z} + \overline{Y} \cdot \overline{Z} \longleftarrow$ distributiva

$\overline{(\overline{X} \cdot Y)} + (X + \overline{Y}) \cdot \overline{Z} \longleftarrow$ De Morgan

$(X + \overline{Y}) \cdot Z + (X + \overline{Y}) \cdot \overline{Z} \longleftarrow$ distributiva

$(X + \overline{Y}) \cdot (Z + \overline{Z}) \longleftarrow$ inverso

$(X + \overline{Y}) \cdot 1 \longleftarrow$ identidad

$X + \overline{Y}$

Suma de Productos o Producto de Sumas

- Formas canónicas de expresiones booleanas

Suma de Productos

A	B	$F(A,B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$F(A,B) = (\overline{A} \cdot \overline{B}) + (A \cdot \overline{B})$$

Producto de Sumas

A	B	$F(A,B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$F(A,B) = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

Ejercicio 2: Fórmula o circuito equivalente

- Dada la siguiente tabla de verdad:
  1. Escribir la función booleana que representa.
  2. Implementar la función usando a lo sumo una compuerta binaria AND, una compuerta binaria OR y una compuerta NOT

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Ejercicio 2: Solución

- Como productos de sumas:

Ejercicio 2: Solución

- Como productos de sumas:

  $$(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

- Como suma de productos:

Ejercicio 2: Solución

- Como productos de sumas:

  $(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$

- Como suma de productos:

  $(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)+(\overline{A}\cdot B\cdot C)+(A\cdot B\cdot C)$

Ejercicio 2: Solución

- Como productos de sumas:

$$(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+C)\cdot(\overline{A}+B+C)\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

- Como suma de productos:

$$(\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C)+(\overline{A}\cdot B\cdot C)+(A\cdot B\cdot C)$$

$$\begin{aligned}
&\longrightarrow ((\overline{A}\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot B)+(A\cdot B))\cdot C\\
&\longrightarrow ((\overline{A}\cdot\overline{B})+(\overline{A}+A)\cdot B)\cdot C\\
&\longrightarrow ((\overline{A}\cdot\overline{B})+1.B)\cdot C\\
&\longrightarrow ((\overline{A}\cdot\overline{B})+B)\cdot C\\
&\longrightarrow ((\overline{A}+B)\cdot(\overline{B}+B))\cdot C\\
&\longrightarrow ((\overline{A}+B)\cdot 1)\cdot C\\
&\longrightarrow (\overline{A}+B)\cdot C
\end{aligned}$$

Ejercicio 2: Sino, pensando un poco...

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La fórmula buscada es igual que C, excepto para cuando A y B valen 1 y 0 respectivamente.

Ejercicio 2: Sino, pensando un poco...

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La fórmula buscada es igual que C, excepto para cuando A y B valen 1 y 0 respectivamente.

Debería ser de la forma: $C \cdot (?)$

Ejercicio 2: Sino, pensando un poco...

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La fórmula buscada es igual que C, excepto para cuando A y B valen 1 y 0 respectivamente.

Debería ser de la forma: $C \cdot (?)$

Entonces necesito una expresión (?) sobre A y B, que de 1 para cualquier valor, menos para cuando A vale 1 y B vale 0.

Ejercicio 2: Sino, pensando un poco...

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

La fórmula buscada es igual que C, excepto para cuando A y B valen 1 y 0 respectivamente.

Debería ser de la forma: $C \cdot (?)$

Entonces necesito una expresión (?) sobre A y B, que de 1 para cualquier valor, menos para cuando A vale 1 y B vale 0.

Luego tengo que (?) puede ser $\overline{A} + B$.

Luego la expresión es $C \cdot (\overline{A} + B)$.

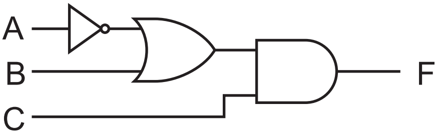
Ejercicio 2: Implementación

1. ...
2. Implementar la función usando a lo sumo una compuerta binaria AND, una compuerta binaria OR y una compuerta NOT

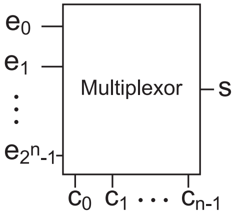
Ejercicio 2: Implementación

1. ...
2. Implementar la función usando a lo sumo una compuerta binaria AND, una compuerta binaria OR y una compuerta NOT

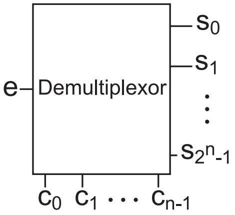
Por último, la implementación correspondería a:



Multiplexor y Demultiplexor



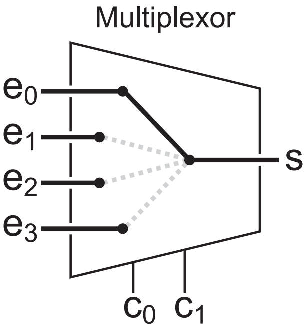
Las líneas de control c permiten seleccionar una de las entradas e, la que corresponderá a la salida s.



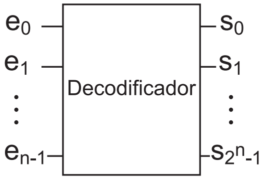
Las líneas de control c permiten seleccionar cual de las salidas s tendrá el valor de e.

Multiplexor y Demultiplexor

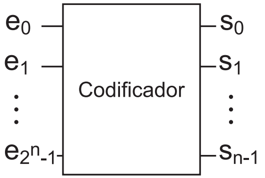
- Ejemplo,



Codificador y Decodificador



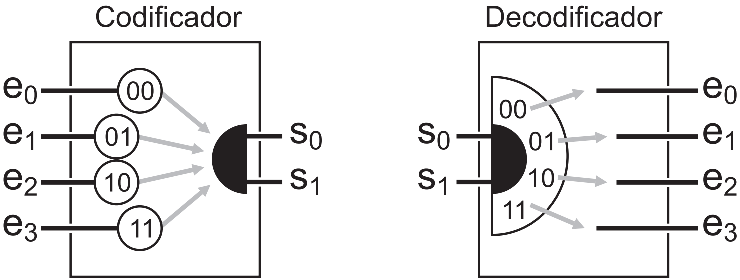
Cada combinación de las líneas *e* corresponderá a una sola línea en alto de la salida *s*.



Una y sólo una línea en alto de *e* corresponderá a una combinación en la salida *s*.

Codificador y Decodificador

- Ejemplo,



Ejercicio 3: Armando un circuito

- Armar un inversor de 3 bits. Este circuito invierte o no las tres entradas de acuerdo al valor de una de ellas que actúa como control.

  En otras palabras, un inversor de k-bits es un circuito de k entradas $(e_k, \cdots, e_0)$ y $k-1$ salidas $(s_k-1, \cdots, s_0)$ que funciona del siguiente modo:

  - Si $e_k = 1$, entonces $s_i = not(e_i)$ para todo $i < k$
  - Si $e_k = 0$, entonces $s_i = e_i$ para todo $i < k$

  Ejemplo:
  inversor(1,011)=100
  inversor(0,011)=011
  inversor(1,100)=011
  inversor(1,101)=010

Ejercicio 3: Solución

Primero pensar como invertir un bit,

ei	ek	si
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ejercicio 3: Solución

Primero pensar como invertir un bit,

ei	ek	si
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Como suma de productos,
$(\overline{ei} \cdot ek) + (ei \cdot \overline{ek})$

¡Oh! casualidad, es una XOR ($\oplus$)
$(\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A \oplus B$

Ejercicio 3: Solución

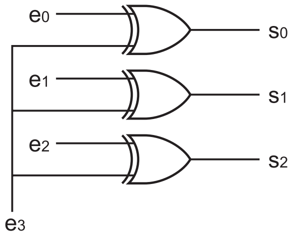
Primero pensar como invertir un bit,

ei	ek	si
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Como suma de productos,
$(\overline{ei} \cdot ek) + (ei \cdot \overline{ek})$

¡Oh! casualidad, es una XOR ($\oplus$)
$(\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A \oplus B$

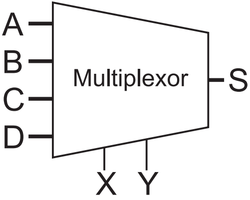
Implementado con XOR:



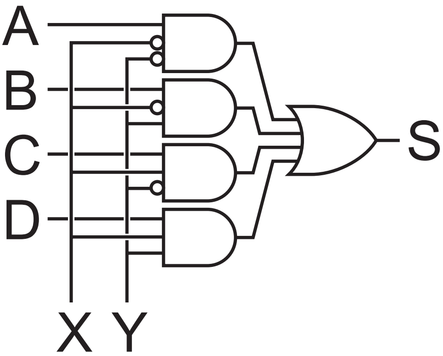
Ejercicio 4: Multiplexor

- Construir un multiplexor de 4 entradas de datos, 2 entradas de control y 1 salida.

A	B	C	D	X	Y	S
A	B	C	D	0	0	A
A	B	C	D	0	1	B
A	B	C	D	1	0	C
A	B	C	D	1	1	D



Ejercicio 4: Solución

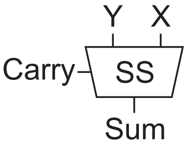


Sumadores

- Sumador Simple:
  Es un circuito de dos entradas y dos salidas, que responde a la siguiente tabla de verdad.

X	Y	$Carry$	Sum
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

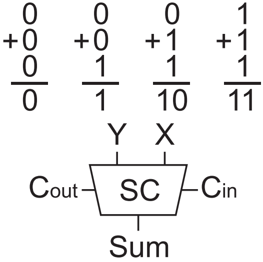
$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 10 \end{array}$$



Sumadores

- Sumador Completo:
  Es un circuito de tres entradas y dos salidas, que responde a la siguiente tabla de verdad.

X	Y	C_{in}	C_{out}	Sum
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

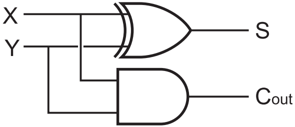


Ejercicio 5: Armando un sumador completo

1. Construir el circuito de un sumador simple

Ejercicio 5: Armando un sumador completo

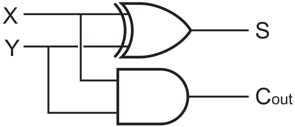
1. Construir el circuito de un sumador simple



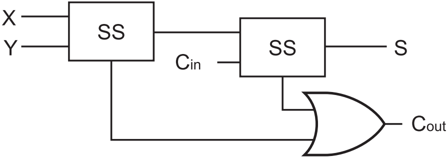
2. Teniendo dos sumadores simples y solo una compuerta a elección, arme un sumador completo

Ejercicio 5: Armando un sumador completo

1. Construir el circuito de un sumador simple



2. Teniendo dos sumadores simples y solo una compuerta a elección, arme un sumador completo



Ejercicio 6: Más circuitos aritméticos

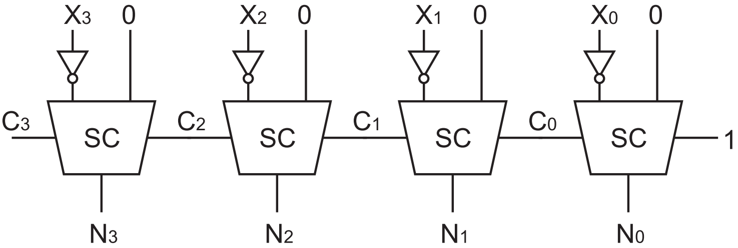
- Usando sumadores completos, armar un circuito que convierta un entero en su inverso aditivo (el inverso aditivo de un número n es el número x tal que $x + n = 0$).

  Los enteros se representan con notación complemento a 2 de 4 bits, no contemplar los casos en que no exista inverso aditivo en la notación utilizada.

  Ejemplo:

  inversoAd(0001)=1111
  inversoAd(1001)=0111
  inversoAd(0110)=1010

Ejercicio 6: Más circuitos aritméticos



¿Preguntas?