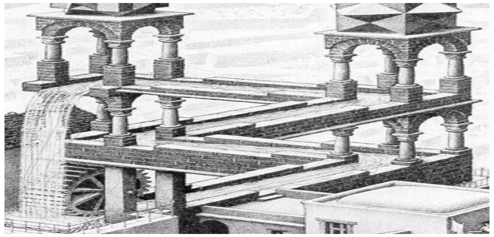
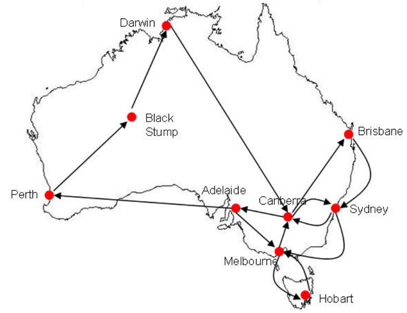
Ehrenfeucht-Fraisse

01/Septiembre/2017



EF - Grafos y Modelo Relacional

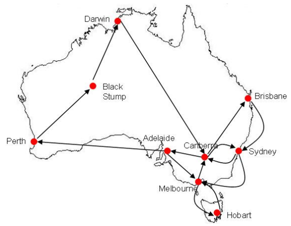
- Sea una BD donde se almacenan *i*) ciudades y *ii*) los pares (a,b), tq una aerolínea ofrece vuelo sin escalas intermedias entre ellas
- Podemos pensar la BD como grafo $G=(V,E)$, donde V es el conjunto de ciudades y $E(a,b)$ representa que existe un vuelo non-stop de a hacia b
- **Ejemplo.**



- $G = (V, E)$
- $V = \{Adelaide; Perth; Black\ Stump; Darwin; \ldots\}$
- $E = \{E(Adelaide, Perth); E(Perth, Black\ Stump); E(Black\ Stump, Darwin); \ldots\}$

EF - Grafos y Modelo Relacional (Cont.)

- Podemos considerar un lenguaje de Lógica de Primer Orden (LPO) como un lenguaje de consulta
- Ejemplo: $\varphi(x, y) = E(x, y) \vee (\exists z)(E(x, z) \wedge E(z, y))$
- **Ejemplo.**



$\{(Adelaide, Perth); (Perth, Black\ Stump); \ldots (Adelaide, Black\ Stump); (Perth, Darwin); \ldots\}$

- **Consulta.** Sobre G, y cuya condición es φ. Devuelve los pares de ciudades que se encuentran unidas por, como máximo, 1 escala intermedia
- LPO provee un lenguaje muy rico para hacer consultas a BDs
- Sin embargo, algunas consultas no pueden ser expresadas a través de LPO **Ejemplo.** ¿Es posible viajar desde x hacia y? (sin importar la cantidad de escalas)

EF - Preliminar

- **Objetivo Clase.** Demostrar que existen propiedades (consultas) que no son expresables en Lógica de Primer Orden (LPO)
- **Problema.**Muchas de las herramientas de Demostración de Teoría de Modelos no aplican para casos finitos
- **Herramienta.** Teorema Ehrenfeucht-Fraisse

EF - Reglas del juego

- Demostración basada en Teoría de Juegos
- 2 jugadores: Spoiler y Duplicator
- 1 Tablero: Grafos A y B
- Los jugadores juegan una determinada cantidad de rondas, donde cada ronda consta de los siguientes pasos
  - Spoiler elige uno de los dos grafos (A ó B), para realizar su jugada
  - Spoiler elige un nodo perteneciente al grafo que seleccionó
  - Duplicator responde eligiendo un nodo del otro grafo
- Objetivos
  - Spoiler: mostrar que ambos grafos son distinguibles mediante una consulta en LPO
  - Duplicator: mostrar que ambos grafos son indistinguibles

EF - Reglas y Notación

- Notamos como x_i e y_i a los vértices seleccionados en A y B, respectivamente, durante la i-ésima ronda del juego, independientemente de qué jugador seleccionó cada elemento.
- Sean $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ e $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$

Duplicator gana la ronda n del juego si el mapeo f de X en Y, $f(x_i) = y_i$, $i = 1, ..., n$ preserva adyacencia e igualdad. Esto significa:

- x_i, x_j son adyacentes en A si y solo si y_i, y_j son adyacentes en B
- $x_i = x_j$ si y solo si $y_i = y_j$.

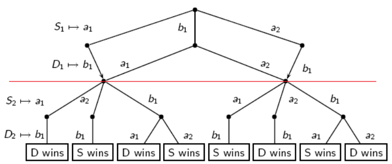
En este caso denominamos al mapeo f como **isomorfismo parcial** de los grafos A y B. Lo escribimos como $A \sim_n B$.

Caso contrario gana Spoiler

EF - Ejemplo Nro. 1

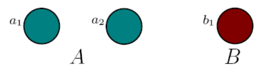
Tablero

- Análisis de las 2 primeras rondas
  - Primer Ronda: Comienza Spoiler, por lo tanto puede seleccionar alguno de los 3 nodos del tablero. Si Spoiler elige a_1 o a_2, Duplicator debe elegir un nodo del grafo B (su única opción es el nodo b_1). En cambio, si Spoiler elige b_1, entonce Duplicator debe elegir algún nodo del grafo A (tiene dos opciones: a_1 o a_2).
  - Árbol de movidas (primer ronda arriba de línea roja)

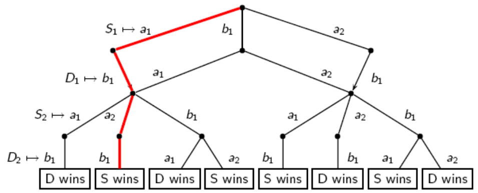


EF - Ejemplo Nro. 1 (Cont.)

Tablero



- Spoiler posee más de una estrategia ganadora utilizando 2 rondas.
- Una estrategia ganadora para Spoiler
  - Ronda 1: Spoiler elige a_1. Esto fuerza a Duplicator a elegir b_1
  - Ronda 2: Spoiler elige a_2. Esto fuerza a Duplicator a elegir b_1
- Spoiler gana porque el mapeo f,de $\{a1, a2\}$ a $\{b_1\}$, $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_1$ no es un isomorfismo parcial (ver reglas en slide anterior).



EF - Intuición

Intuición

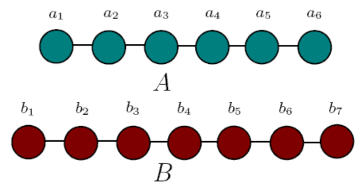
Duplicator gana el juego a n pasos si puede duplicar las n movidas que hace Spoiler. Por lo tanto, en las n rondas del juego EF no es posible distinguir entre A y B. En ese caso, lo escribimos como $A \sim_n B$. Caso contrario Spoiler gana las n rondas del juego EF y es posible distinguir entre A y B.

Observaciones

- Spoiler decide al comienzo de cada ronda sobre qué grafo jugar. Esta elección puede cambiar en cada ronda.
- Si ambos grafos (A y B) tienen más de n nodos, en la n-ésima ronda del juego no tiene sentido para Spoiler repetir su jugadas. Por ejemplo, si en la j-ésima ronda, Spoiler selecciona un nodo x_j igual al x_i seleccionado en una ronda i previa, entonces Duplicator puede repetir su selección anterior ($y_j = y_i$)

EF - Ejemplo Nro. 2

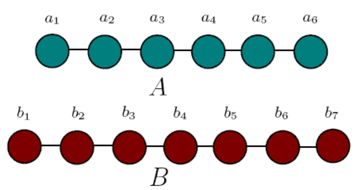
Tablero

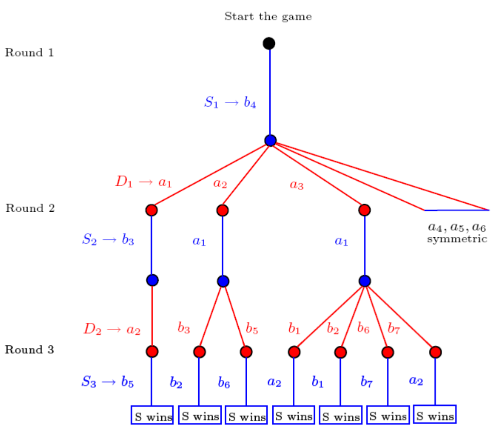


- ¿Cuán grandes son las diferencias entre ambos grafos? O, en otras palabras ¿Cuántas rondas se necesitan para que *Duplicator* pierda?
- ¿Qué jugador tiene estrategia ganadora para 1-ronda? ¿y para 2-rondas?
- *Duplicator*, en ambos casos
- ¿Qué jugador tiene estrategia ganadora para 3-rondas?
- Veremos que *Spoiler* ...

EF - Ejemplo Nro. 2 (Cont.)

- Análisis de rondas





- Observar que b_4 no es cualquier nodo. Se encuentra en medio del grafo B
- Dependiendo de la respuesta de Duplicator, Spoiler responde de diferente manera

EF - Ejemplo Nro. 2 (Cont.)

Análisis de rama

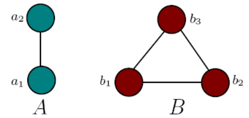
$$(b_4, a_3, a_1, b_1, a_2)$$

Ronda 1	Ronda 2	Ronda 3
Spoiler elige b_4	Spoiler elige a_1	Spoiler elige a_2
Duplicator elige a_3	Duplicator elige b_1	Duplicator puede elegir cualquier b_* de B
$x_1 := a_3$ y $y_1 := b_4$	$x_2 := a_1$ y $y_2 := b_1$	$x_3 := a_2$ y $y_3 := b_*$

- $X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{a_3, a_1, a_2\}$ e $Y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{b_4, b_1, b_*\}$
- El mapeo f de X a Y, $f(a_3) = b_4$, $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_*$ no es un isomorfismo parcial. Rompe la condición de adyacencia, dado que a_2 es adyacente a a_1 y a a_3 mientras que cualquier nodo b_* que Duplicator elija en la ronda 3, no puede ser adyacente a la vez a b_1 y a b_4
- Spoiler ganó al explotar el hecho de que en el grafo B, b_4 está a 3 nodos del extremo de la cadena, mientras que en el grafo A a_3 está a 2 nodos del extremos izquierdo y a 3 nodos del extremo derecho. El hecho de que Spoiler haya jugado b_4 en la primer ronda es muy importante

EF - Ejemplo Nro. 3

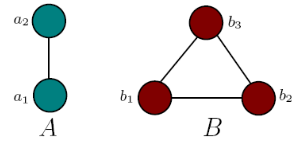
Tablero



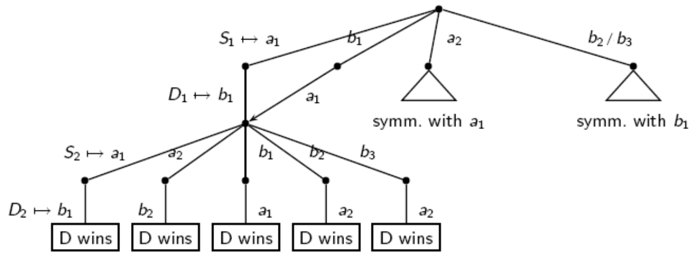
- A 2 rondas, ¿qué jugador tiene estrategia ganadora? *Duplicator*
- Ronda 1
  - *Spoiler* puede elegir un nodo de A ó B
  - Si *Spoiler* elige uno de A, entonces *Duplicator* elegirá b_1, si no elegirá a_1
  - Asumamos que *Spoiler* eligió a_2. Entonces $x_1 := a_2, y_1 := b_1$
- Ronda 2
  - No importa qué elija *Spoiler*, *Duplicator* lo puede espejar. Por ejemplo, si *Spoiler* elige un nodo de B
    - Si *Spoiler* elige b_1 (mismo $y_1 = b_1$), entonces *Duplicator* debe repetir la elección de la ronda 1, y elige a_2
    - Si *Spoiler* elige b_2 o b_3 (nodos adyacentes a $y_1 = b_1$), entonces *Duplicator* debe elegir un nodo adyacente a $x_1 = a_2$.
  - Así $x_2 := a_2$ y $y_2 := b_1$, ó $x_2 := a_1$ e $y_2 := b_2/b_3$.
- Es fácil chequear que en ambos casos, f de X a Y es un isomorfismo parcial

EF - Ejemplo Nro. 3 (Cont.)

Tablero



Estrategia



EF - Estrategia Ganadora

- **Estrategia de un jugador.** Conjunto de reglas que describe exactamente cómo debe hacer su elección el jugador, dependiendo de las movidas de su oponente. Estas reglas dependen de las movidas previas realizadas por ambos jugadores
- **Estrategia ganadora de un jugador.** Es una estrategia por la cual el jugador gana en todos los juegos donde la utilice, sin importar las movidas que realice el jugador contrario
- **Existe un ganador.** Siempre hay una estrategia ganadora para Spoiler ó Duplicator
- **Notación.** Escribimos $A \sim_n B$, si existe una estrategia ganadora de n-rondas para Duplicator en base a los grafos A y B

EF - Estrategia Ganadora (Cont.)

Estrategia ganadora para Spoiler puede describirse así

Existe una movida posible para Spoiler tal que
Para toda posible respuesta de Duplicator
Existe una movida posible para Spoiler tal que
Para toda posible respuesta de Duplicator
...
Luego de n rondas, Spoiler gana

Estrategia ganadora para Duplicator puede describirse así

Para toda posible movida de Spoiler
Existe una posible movida para Duplicator tal que
Para toda posible movida de Spoiler
Existe una posible movida para Duplicator tal que
...
Luego de n rondas, Duplicator gana

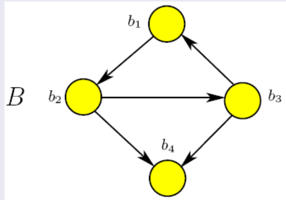
Observación: Si Duplicator posee una estrategia ganadora para n rondas, entonces también posee una estrategia ganadora para k rondas, con $k \leq n$

EF - LPO - Definiciones

- **Aclaración.** Sólo daremos una introducción a Lógica de Primer Orden (LPO) adaptada al lenguaje de grafos dirigidos y no dirigidos.
- **Grafos.** En lenguaje de grafos, notamos con $E(x, y)$ al eje que relaciona a los nodos x e y
- **Afirmación** Decimos que $E(x, y)$ es verdadero en el grafo A, si existe un eje que va de x a y. Caso contrario, decimos que es falso
- **Simplificación.** Dado un nodo x, no vamos a permitir $E(x, x)$

EF - LPO - Grafo Dirigido

Ejemplo Grafo Dirigido

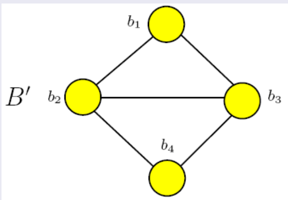


$E(b_1,b_2), E(b_2,b_3), E(b_2,b_4), E(b_3,b_1), E(b_3,b_4)$ son verdaderas en el grafo B

$E(b_1,b_3), E(b_1,b_4), E(b_2,b_1), E(b_3,b_2), E(b_4,b_1), E(b_4,b_2), E(b_4,b_3)$ son falsas en el grafo B

EF - LPO - Grafo No Dirigido

Ejemplo Grafo No Dirigido



$E(b_1,b_2), E(b_2,b_1), E(b_2,b_3), E(b_3,b_2), E(b_2,b_4), E(b_4,b_2), E(b_3,b_1), E(b_1,b_3), E(b_3,b_4), E(b_4,b_3)$ son verdaderas en el grafo B'

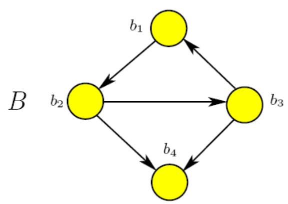
$E(b_1,b_4), E(b_4,b_1)$ son falsas en el grafo B'.

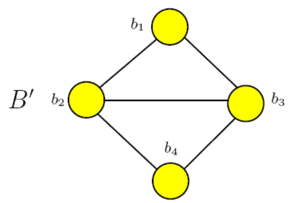
EF - LPO - Construcción

- $E(b_1, b_2)$ es un ejemplo de una fórmula atómica en el lenguaje de grafos
- A partir de fórmulas atómicas podemos construir proposiciones: conjunciones ($\wedge$), disjunciones ($\vee$) y negaciones ($\neg$) de fórmulas atómicas
- Convenimos que la negación tiene prioridad sobre las conjunciones y disjunciones. Para el resto, paréntesis impone el orden de prioridad

Ejemplo

La proposición $P = E(b_1,b_2) \wedge \neg E(b_1,b_3)$ es <u>VERDADERA</u> en el grafo B, y <u>FALSA</u> en el grafo B'

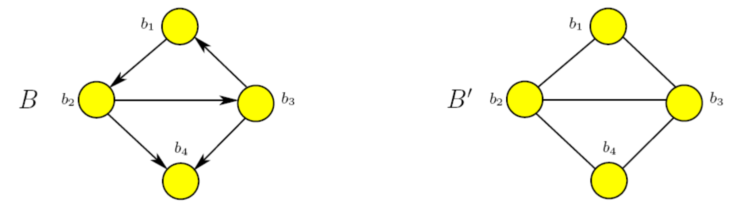




EF - LPO - Construcción (Cont.)

- LPO tiene un lenguaje más rico que la lógica proposicional. Su léxico contiene no sólo los símbolos de la lógica proposicional ($\wedge, \vee, \neg$), sino que agrega los símbolos Existe ($\exists$) y Para todo ($\forall$), junto con varios símbolos para representar variables, constantes, funciones y relaciones
- **Notación.** Utilizaremos las últimas letras del alfabeto para denotar variables. Ejemplo: x, y son variables, b_1, b_2 son constantes, $E(x, y)$ es una relación entre dos nodos (eje), $E(b_1, b_2)$ es una proposión, $E(b_1, y)$ es una relación, que es evaluada como verdadera para aquellos nodos y para los cuales existe un eje entre b_1 e y

EF - LPO - Ejemplo Sentencia



Ejemplo

Sea la sentencia $\exists x_1 \forall x_2 \neg E(x_1, x_2)$

- ¿Qué expresa?
- "¿Existe un nodo x_1 tal que para todo nodo x_2 no existe un eje entre x_1 y x_2?"
- o "¿Existe un nodo que no tiene ejes hacia ningún otro nodo?"
- En el grafo B existe: b_4. Decimos que esta sentencia es **verdadera** en B
- En el grafo B' no existe un nodo que cumpla esta propiedad. Todo nodo en B' posee al menos 2 ejes que lo conectan con sus vecinos, por lo tanto esta sentencia es falsa en B'

EF - LPO - Quantifier Rank

- **quantifier rank** de una fórmula LPO: Concepto necesario para la demostración formal y para lo que sigue
- **Definición**: Sea f una fórmula de LPO. El **quantifier rank** de f, denotado por $qr(f)$ es la profundidad del anidamiento de los cuantificadores en f. Más formalmente, $qr(f)$ se define inductivamente así:
  - Si f es una fórmula atómica, entonces $qr(f) = 0$
  - Si f es de la forma $\neg g$, para una fórmula g, entonces $qr(f) = qr(g)$
  - Si f es de la forma $(g \wedge h)$, o $(g \vee h)$, entonces $qr(f) = max\{qr(g), qr(h)\}$
  - Si f es de la forma $(\exists x\, g)$, o $(\forall x\, g)$, entonces $qr(f) = qr(g) + 1$

Ejemplo

- El quantifier rank de $E(x, y)$ es ... 0, dado que E no posee cuantificadores. Escribimos $qr(E(x, y)) = 0$
- $qr(\exists x_1 \forall x_2 \neg E(x_1, x_2)) = 2$

EF - Juego de EF y LPO - Introducción

Estrategias Ganadoras para los juegos de EF pueden trasladarse naturalmente a LPO

Estrategia ganadora para Spoiler

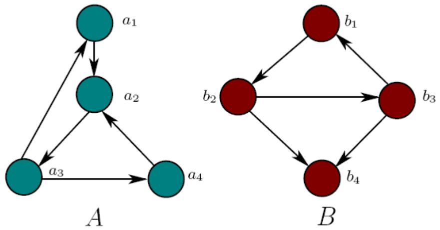
Existe una movida posible para Spoiler tal que
Para toda posible respuesta de Duplicator
Existe una movida posible para Spoiler tal que
Para toda posible respuesta de Duplicator
...
Luego de n rondas, Spoiler gana

Estrategia ganadora para Spoiler (traducida)

Existe un nodo en A (que Spoiler elegirá como parte de su estrategia ganadora) tal que
Para todo nodo en B (cualquier nodo que Duplicator elegirá a modo de respuesta)
Existe otro nodo en A/B (que Spoiler elegirá) tal que
Para todo nodo en A/B (que Duplicator podría elegir)
...
Alguna setencia de LPO con quantifier rank n se vuelve verdadera en A, y falsa en B, o viceversa

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 1

Tablero



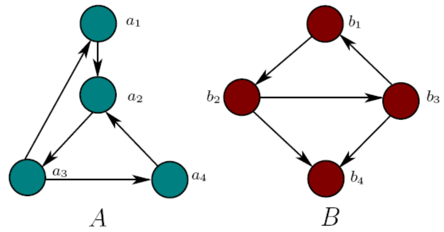
Tip - Estrategia Ganadora Spoiler

En lugar de intentar adivinar los movimientos apropiados para Spoiler, primero analizar los dos grafos e intentar identificar una propiedad (expresable en LPO) que sólo posee uno de los dos grafos

A primera vista se observa que en el grafo B hay un nodo sin ejes de salida, b_4, mientras que en el grafo A todos los nodos tienen ejes de salida. Así, es posible formular una propiedad que distingue los dos grafos: $\exists x_1 \forall x_2 \neg E(x_1, x_2)$

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 1 (Cont.)

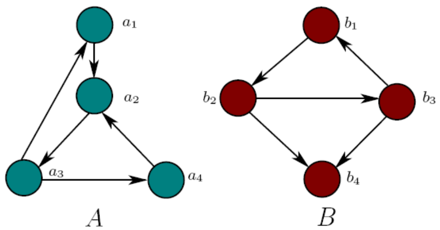
Tablero



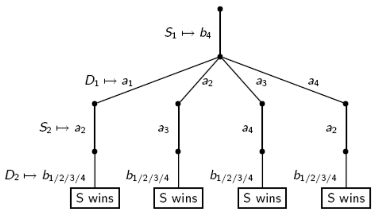
- Esta propiedad ($\exists x_1 \forall x_2 \neg E(x_1, x_2)$) genera una estrategia ganadora para Spoiler en 2 rondas
- Spoiler elige b_4 en primera ronda
- Duplicador selecciona algún nodo a_i en A
- Spoiler selecciona el nodo a_k en A para el cual $E(a_i, a_k)$ es verdadero
- Spoiler gana, porque Duplicator es incapaz de elegir un nodo b_* en B para el cual $E(b_4, b_*)$ es verdadero
- Así, Duplicador es incapaz de responder de una manera en la que se mantiene el isomorfismo parcial

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 1 (Cont.)

Tablero



Estrategia



EF - Juego de EF y LPO - Teorema EF

Vale la pena mencionar que la observación anterior es en realidad un teorema

Teorema de Ehrenfeucht-Fraisse

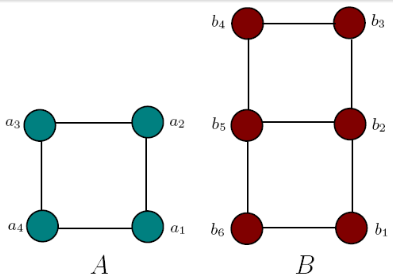
Sean A, B dos grafos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A y B satisfacen las mismas sentencias de quantifier rank n
- $A \sim_n B$ (Duplicator gana la n-ésima movida del juego EF con tablero A y B)

Queda como tarea leer Demostración de bibliografía

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 2

Tablero



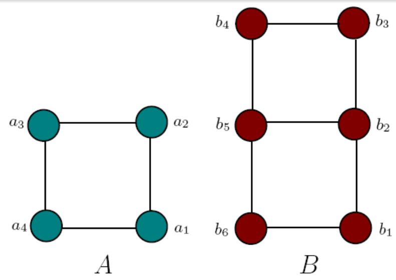
Se cumple que:

1. $A \sim_2 B$ (Duplicator gana la movida número 2 del juego EF sobre A, B)
2. Spoiler gana la movida número 3 del juego EF sobre A, B

Veamos ...

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 2 (Cont.)

Tablero

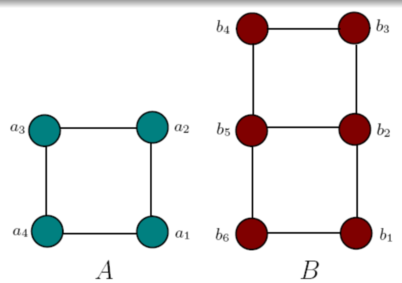


1. **$A \sim_2 B$ (Duplicator gana la movida número 2 del juego EF sobre A, B)**

   Duplicator puede ganar si cumple que si hay un eje entre x_1 y x_2 hay un eje entre y_1 y y_2, donde x_1, y_1, x_2, y_2 representan los nodos elegidos en las dos primeras rondas. Por lo tanto $\{x_1, x_2\}$ e $\{y_1, y_2\}$ forman un isomorfismo parcial sobre A y B.

EF - Juego de EF y LPO - Ejemplo 2 (Cont.)

Tablero

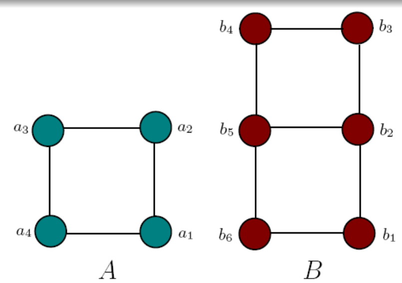


2. **Spoiler gana la movida número 3 del juego EF sobre A, B**

   Spoiler puede ganar en 3 movidas tomando 3 elementos en B que no comparten ejes entre ellos. La sentencia en LPO de quantifier rank 3 que captura esta diferencia es: $\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z \wedge \neg E(x,y) \wedge \neg E(x,z) \wedge \neg E(y,z))$
   Spoiler gana seleccionado 3 nodos b_i, b_j y b_k de B para los cuales la siguiente proposición es verdadera:
   $b_i \neq b_j \wedge b_i \neq b_k \wedge b_j \neq b_k \wedge \neg E(b_i, b_j) \wedge \neg E(b_i, b_k) \wedge \neg E(b_j, b_k)$

EF - Juego de EF y LPO - Ejercicio

Tablero



Ejercicio

- Proponer otra sentencia en lógica de primer orden de quantifier rank 3 que muestre la diferencia entre A y B
- Utilizarla para formular una estrategia diferente para Spoiler, para ganar en 3 movidas el juego de EF sobre A y B

EF - Aplicaciones

Una aplicación muy potente del Teorema de EF es la de mostrar los límites de expresividad de la lógica de primer orden

Demostración Inexpresibilidad de Propiedad usando Lógica de Primer Orden

Dada una propiedad P, no existe una sentencia en lógica de primer orden que exprese P, sí y sólo sí, para cada número entero positivo n, es posible hallar 2 grafos A y B tal que:

- La propiedad P es verdadera en A
- La propiedad P es falsa en B
- $A \sim_n B$ (Duplicator puede ganar el juego de EF de n movidas sobre A y B)

EF - ¿Es Par?

Propiedad: Dado un grafo, ¿Tiene cantidad par de nodos?

Expresabilidad

¿Es expresable en LPO? Es decir, ¿Existe una sentencia en LPO tq devuelve verdadero sii un grafo posee cantidad par de nodos?

Demostración (por contradicción)

Supongamos que sí existe. Entonces,

- Sea φ una sentencia de LPO tq dado un grafo finito $G = (V, E)$, $G \models \varphi \Leftrightarrow |V|$ es par

Como φ es una sentencia de LPO, le podemos medir su qr. Sea $k \in \mathbb{N}$, tq $qr(\varphi) = k$

Entonces, hasta ahora tenemos:

- φ, sentencia de LPO que es verdadera si cantidad de nodos del grafo es par
- $k = qr(\varphi)$

EF - ¿Es Par? (Cont.)

Para continuar, necesitamos el siguiente Teorema ...

Teorema

Sea $m > 0$ y sean A y B dos grafos de la clase órdenes lineales, ambos de tamaño (cantidad de nodos) al menos 2^m. Entonces, $A \sim_m B$

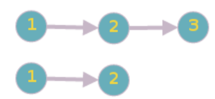
Demostración formal de Teorema, para m genérico:
Libkin. Elements of Finite Model Theory. Springer. pp 28-31. 2012.

Intuición en el siguiente ejemplo . . .

EF - ¿Es Par? (Cont.)

Tablero

A



B

- A y B son grafos de la clase órdenes lineales
- Ambos poseen al menos 2^1 nodos (m=1)
- Por teorema anterior, $A \sim_1 B$ (Duplicator gana el juego de EF de 1 movida)

Análisis (Spoiler comienza jugando en A)

1. Primer movida, Spoiler juega 2 en A
2. Duplicator tiene que responder 1 ó 2 en B. Supongamos que elige 1
3. Spoiler elige 1 en A. Duplicator pierde, ya que no existe un antecesor de 1 en B

2. Duplicator tiene que responder 1 ó 2 en B. Supongamos que esta vez elige 2
3. Spoiler elige 3 en A. Duplicator pierde, ya que no existe sucesor de 2 en B

Observaciones

- $A \sim_1 B$
- $\neg(A \sim_2 B)$
- Se puede lograr estrategia ganadora para Duplicator, en más movidas, si ambos grafos (A y B) poseen más nodos
- Intuición: Spoiler va acorralando a Duplicator
- Demostración formal de teorema, para m genérico en Libkin. Elements of Finite

EF - ¿Es Par? (Cont.)

Propiedad: Dado un grafo, ¿Tiene cantidad par de nodos?

Expresabilidad

¿Es expresable en LPO? Es decir, ¿Existe sentencia en LPO tq devuelve verdadero sii un grafo posee cantidad par de nodos?

Demostración (por contradición)

Supongamos que sí existe. Entonces,

- Sea φ una sentencia de LPO tq dado un grafo finito $G = (V, E)$, $G \models \varphi \Leftrightarrow |V|$ es par
- $qr(\varphi) = k$

Definimos los grafos A y B, órdenes lineales tq:

- A=(V_A,E_A), $|V_A|$=2^k+2 nodos (cantidad par)
- B=(V_B,E_B), $|V_B|$=2^k+3 nodos (cantidad impar)

Por Teorema anterior, $A{\sim}_k B$ (es decir, para toda sentencia ψ tq $qr(\psi){\leq}k$, $A{\models}\psi \Leftrightarrow B{\models}\psi$)
Entonces,

- φ, sentencia de LPO que es verdadera sii el grafo es par
- $qr(\varphi) = k$
- $A{\sim}_k B$

Así, $A{\models}\varphi \Leftrightarrow B{\models}\varphi$. Lo cual es una contradiccón ya que A es par y B impar. La

verdadero sii un grafo posee cantidad par de nodos

EF - ¿Es Par? - Herramienta

Herramienta utilizada ...

Demostración Inexpresibilidad de Propiedad usando Lógica de Primer Orden

Dada una propiedad P, no existe una sentencia en lógica de primer orden que exprese P, sí y sólo sí, para cada número entero positivo n, es posible hallar 2 grafos A y B tal que:

- La propiedad P es verdadera en A
- La propiedad P es falsa en B
- $A \sim_n B$ (Duplicator puede ganar el juego de EF de n movidas sobre A y B)

EF - ¿Es Conexo?

Propiedad: Dado un grafo, ¿Es conexo?

Expresabilidad

¿Es expresable en LPO? Es decir, ¿Existe una sentencia en LPO tq devuelve verdadero sii el grafo es conexo?

Demostración (por contradición)

Supongamos que sí existe. Entonces,

- Sea φ una sentencia de LPO tq dado un grafo finito $G = (V, E)$, $G \models \varphi \Leftrightarrow G$ es conexo

Como φ es una sentencia de LPO, le podemos medir su qr. Sea $k \in \mathbb{N}$, tq $qr(\varphi) = k$

Necesitamos definir elementos adicionales para la Demostración ...

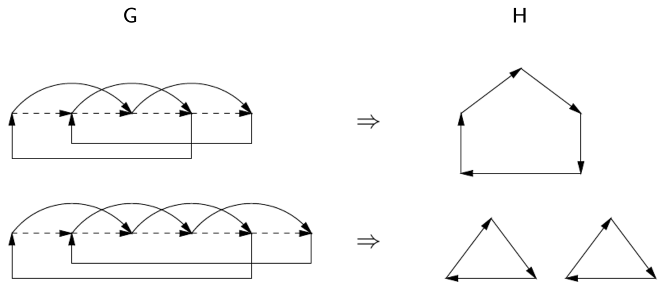
EF - ¿Es Conexo? (Cont.)

Sea un grafo finito G=(V,E) de la clase orden lineal

Sean $x, y \in V$

- $succ(x, y) \equiv E(x, y)$
- $succDeSucc(x, y)$ es verdadero sii ocurre alguna de estas opciones:
  - y es el sucesor del sucesor de x: $(\exists z)(succ(x,z) \wedge succ(z,y))$
  - x es el anteúltimo elemento e y el primero: $(\exists z)(succ(x,z) \wedge (\forall u)\neg(E(z,u)))$ $\wedge (\forall u)\neg(E(u,y))$
  - x es el último elemento e y el segundo: $(\forall u)\neg(E(x,u)) \wedge$ $(\exists z)(succ(z,y) \wedge (\forall u)\neg(E(u,z)))$

EF - ¿Es Conexo? (Cont.)



Dado un grafo $G = (V, E)$ de la clase orden lineal, generamos un nuevo grafo $H = (W, succDeSucc)$ que surge de reemplazar las relaciones E por $succDeSucc$

Propiedad. El grafo H es conexo sii $|V|$ de G es impar

EF - ¿Es Conexo?

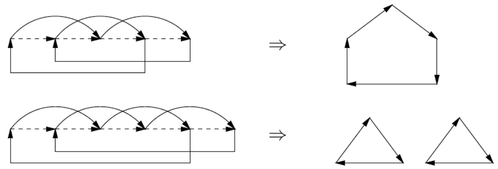
Expresabilidad

¿Es expresable en LPO? Es decir, ¿Existe una sentencia en LPO tq devuelve verdadero sii el grafo es conexo?

Demostración (por contraejemplo). Definimos los grafos A y B de clase orden lineal tq:

- $A=(V_A,E_A)$, $|V_A|=2^k+3$ nodos (cantidad impar)
- $B=(V_B,E_B)$, $|V_B|=2^k+2$ nodos (cantidad par)

Sean los grafos AT y BT los grafos A y B tranformados (utilizando $E \rightarrow succDeSucc$)



Pero que exista una sentencia en LPO tq devuelva verdadero sii el grafo AT (o BT) es conexo es equivalente a que exista una sentencia de LPO tq devuelva verdadero sii el grafo A (o B) posee cantidad impar de nodos, que es lo que demostramos que no es posible (paridad no es expresable en LPO).

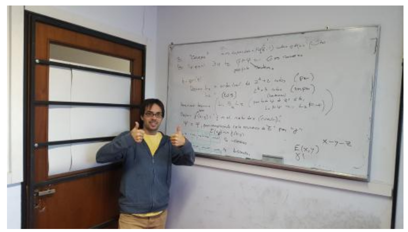
EF - Propiedades No LPO

Existen otras consultas que no son expresables en LPO. Algunas de ellas son:

- es Euleriano(G)?
- es Acíclico(G)?
- es k-Colerable(G)?
- existeCaminoHamiltoneano(G)?

EF - Agradecimientos

Joos Heintz



Santiago Figueira

EF - Bibliografía

- Ehrenfeucht-Frass games, Math Explorers Club, Cornell Department of Mathematics. `http://www.math.cornell.edu/~mec/Summer2009/Raluca`
- Libkin. Elements of Finite Model Theory. Springer. 2012.