

Rep y Abs: soluciones

Algoritmos y Estructuras de Datos 2

1. Consejos para escribir el invariante

- Escribirlo primero en castellano y luego pasarlo a lógica (y relacionar ambas partes con números). De hecho, esto se pide explícitamente en algunos ejercicios.
- Tratar de resolver un predicados lógico de entrada con un \Leftrightarrow (“si y sólo si”) puede trabarnos y hacernos incurrir en errores. Usar el \Leftrightarrow con cuidado y verificar que las dos implicaciones \Rightarrow y \Leftarrow sean equivalentes al \Leftrightarrow .
- Tener en cuenta (tipo checklist) que el invariante debe abarcar estos aspectos (notar que algunos de ellos se solapan):
 - Coherencia en la información redundante: Hay que chequear que distintos campos que proveen la misma información no se contradigan entre sí.
 - Restricciones del TAD: Hay que chequear que se vean reflejadas en la estructura de representación. Por ejemplo, en conjunto en rango el TAD indica que no se puede crear un conjunto con el límite inferior del rango mayor al límite superior. Entonces en el invariante hay que pedir que $e.lower \leq e.upper$.
 - Decisiones de diseño: Hay que chequear las restricciones a la estructura de representación que no provengan de un chequeo de coherencia o de restricciones especificadas en el TAD. Por ejemplo, si decidimos implementar conjunto con una secuencia sin repetidos, entonces en el invariante debemos chequear que la secuencia, efectivamente, no tenga repetidos. La necesidad de hacer este chequeo no puede deducirse del TAD, y tampoco tiene que ver con un chequeo de coherencia de información redundante.

2. Banda

Considerar la siguiente especificación de un grupo de música. Los músicos y sus instrumentos se identifican por su nombre el cual es un STRING.

TAD BANDA

observadores básicos

Músicos	: Banda	\longrightarrow Conj(Músico)	
#DrogaEnSangre	: Banda $b \times$ Músico m	\longrightarrow nat	$\{m \in \text{Músicos}(b)\}$
InstrumentosDeMúsico	: Banda $b \times$ Músico m	\longrightarrow Conj(Instrumento)	$\{m \in \text{Músicos}(b)\}$
LoRompió?	: Banda $b \times$ Músico m	\longrightarrow Bool	
	\times Instrumento i		$\{m \in \text{Músicos}(b) \wedge i \in \text{InstrumentosDeMúsico}(b, m)\}$

generadores

Iniciar	:	\longrightarrow Banda	
Drogarse	: Banda $b \times$ Músico m	\longrightarrow Banda	$\{m \in \text{Músicos}(b)\}$
AgregarMúsico	: Banda \times Músico \times	\longrightarrow Banda	$\{m \notin \text{Músicos}(b)\}$
	Conj(Instrumento)		
RomperInstrumento	: Banda $b \times$ Músico m	\longrightarrow Banda	
	\times Instrumento i		$\{m \in \text{Músicos}(b) \wedge i \in \text{InstrumentosDeMúsico}(b, m) \wedge \#DrogaEnSangre(b, m) \geq 9\}$

otras operaciones

Lesionados	: Banda	\longrightarrow conj(Músico)	
DameLesionados	: Conj(Músico) $cm \times$	\longrightarrow Conj(Músico)	$\{\neg vacia(cm)\}$
rompioSusInstr	: Músico m	$\times \longrightarrow$ Bool	$\{ci \subseteq \text{InstrumentosDeMúsico}(m, b)\}$
	Conj(Instrumento) ci		
	\times Banda b		

axiomas $\forall b: \text{Banda} \forall m, m': \text{Músico} \forall i: \text{Instrumento}$

Músicos(NuevaBanda)	$\equiv \emptyset$
Músicos(AgregarMúsico(b, m))	$\equiv \text{Ag}(m, \text{Músicos}(b))$
Músicos(Drogarse(b, m))	$\equiv \text{Músicos}(b)$
Músicos(RomperInstrumento(b, m, i))	$\equiv \text{Músicos}(b)$
#DrogaEnSangre(m, Drogarse(b, m'))	\equiv if $m = m'$ then 1 + #DrogaEnSangre(b, m) else #DrogaEnSangre(b, m) fi
#DrogaEnSangre(m, AgregarMúsico(b, m'))	\equiv if $m = m'$ then 3 else #DrogaEnSangre(b, m) fi
#DrogaEnSangre(m, RomperInstrumento(b, m', i))	\equiv #DrogaEnSangre(m, b)
InstrumentosDeMúsico(m, AgregarMúsico(b, m', ci))	\equiv if $m = m'$ then ci else $\text{InstMúsico}(m, b)$ fi
InstrumentosDeMúsico(m, Drogarse(b, m'))	$\equiv \text{InstrumentosDeMúsico}(m, b)$
InstrumentosDeMúsico(m, RomperInstrumento(b, m', i))	$\equiv \text{InstrumentosDeMúsico}(m, b)$
LoRompió?(m, i, AgregarMúsico(b, m', ci))	\equiv if $m = m'$ then False else LoRompió?(m, i, b) fi
LoRompió?(m, i, Drogarse(b, m'))	$\equiv \text{LoRompió?}(m, b)$
LoRompió?(m, i, RomperInstr(b, m', i'))	$\equiv (m = m' \wedge i = i') \vee \text{LoRompió?}(m, i, b)$
Lesionados(b)	$\equiv \text{DameLesionados}(\text{Músicos}(b), b)$
DameLesionados(cm, b)	\equiv if $\text{rompioSusIntr}(\text{DameUno}(cm), \text{InstrumentosDeMúsico}(\text{DameUno}(cm), b), b)$ then Ag(DameUno(cm), DameLesionados(cm)) else DameLesionados(SinUno(cm)) fi

rompioSusInstr(m, ci, b)

≡ **if** vacio(ci) **then**
 True
else
 if LoRompio?(DameUno(ci), m, b) **then**
 rompioSusInstr(m, SinUno(ci), b)
 else
 False
fi

Fin TAD

Se decidió utilizar la siguiente estructura para representar el TAD.

Banda **se representa con** estr, donde

estr es tupla \langle *músicos*: conj(músico),
 InstrumentosDeMúsico: dicc(músico, conj(instrumento))
 InstrRotosDeMúsico: dicc(músico, conj(instrumento))
 #DrogaEnSangre: dicc(músico, nat) \rangle

- *músicos* contiene a los músicos de la banda.
- *lesionados* contiene a los músicos que rompieron todos sus instrumentos.
- *InstrumentosDeMúsico* contiene para cada músico los instrumento que trajo a la banda.
- *InstrRotosDeMúsico* contiene para cada músico, cuáles de sus instrumentos rompió.
- *#DrogaEnSangre* contiene para cada músico su nivel de droga en sangre.

- a) Escribir en castellano el invariante de representación.
- b) Escribir formalmente el invariante de representación.
- c) Escribir formalmente la función de abstracción.

2.1. Invariante de representación en castellano

1. El conjunto de *músicos* es igual a:
 - Las claves del diccionario *#DrogaEnSangre*.
 - Las claves del diccionario *InstrumentosDeMúsico* son un subconjunto del conjunto *Músicos*.
 - Las claves del diccionario *InstrumentosRotosDeMúsicos* son un subconjunto del conjunto *Músicos*.

(coherencia de la información redundante los tres. Decisión de diseño los últimos dos: podrían ser un subconjunto.)
2. El conjunto de *lesionados* es un subconjunto de *músicos* (coherencia de la información redundante)
3. Para cada músico, su significado en *InstrumentosRotosDeMúsicos* está incluido en su significado de *InstrumentosDeMúsico*. (restricción del tad: el conjunto de instrumentos rotos se crea a partir de los instrumentos de los músicos)
4. El *#DrogaEnSangre* de todos los músicos en *músicos* es mayor o igual a 3. (restricción del tad)
5. El *#DrogaEnSangre* de todos los músicos en *InstrumentosRotosDeMúsicos* es mayor o igual a 9. (restricción del tad)
6. Los músicos lesionados tienen todos sus instrumentos rotos y nivel de droga en sangre mayor o igual a 9. (coherencia de la información redundante)

2.2. Invariante de representación

Rep : estr \longrightarrow boolean

Rep(*e*) \equiv true \iff

(1)

$e.musicos = Claves(e.\#DrogaEnSangre) \wedge e.musicos = Claves(e.InstrumentosDeMúsico) \wedge e.musicos = Claves(e.InstrRotosDeMúsico)$

\wedge_L

(2)

$(\forall m : Música) m \in e.músicos \Rightarrow_L obtener(m, e.\#InstrRotosDeMúsicos) \subseteq obtener(m, e.\#InstrumentosDeMúsico)$

\wedge

(4 y 5)

$(\forall m : Música) m \in e.músicos \Rightarrow_L obtener(m, e.\#DrogaEnSangre) \geq 3$
 $\wedge obtener(m, e.\#InstrRotosDeMúsico) \geq 9$

\wedge

(6)

$(\forall m : Música) m \in e.lesionados \Rightarrow_L obtener(m, e.\#DrogaEnSangre) \geq 9$
 $\wedge obtener(m, e.InstrRotosDeMúsico) = obtener(m, e.InstrumentosDeMúsico)$

significados : Dicc($c \times s$) $d \times Conj(c)$ $c \longrightarrow Conj(s)$ $\{c \subseteq Claves(d)\}$

significados(*d*, *c*) \equiv **if** vacío(*c*) **then** vacío **else** Ag(obtener(DameUno(*c*), *d*), significados(*d*, SinUno(*c*))) **fi**

2.3. Función de abstracción

Abs(*e*) $=_{obs}$ *c* : *Castillo* |

músicos(*b*) = *e.músicos* \wedge_L

$(\forall m : Música) m \in músicos(b) \Rightarrow_L$

InstrumentosDeMúsico(*b*, *m*) = obtener(*m*, *e.InstrumentosDeMúsico*) \wedge

#DrogaEnSangre(*b*, *m*) = obtener(*m*, *e.#DrogaEnSangre*) \wedge_L

$(\forall i : Instrumento) i \in InstrumentosDeMúsico(b, m) \Rightarrow_L$

LoRompíó(*b*, *m*, *i*) = *i* \in obtener(*m*, *e.InstrRotosDeMúsico*)

3. Piratas y Ninjas

1erParcial 1erCuatrimestre 2015

La siguiente especificación modela un castillo donde conviven piratas y ninjas. Con frecuencia arriban al castillo nuevos piratas y ninjas, que nunca mueren ni se van. Por supuesto, cada tanto surgen peleas, que por tradición ancestral son siempre entre un pirata y un ninja. Los piratas y los ninjas se identifican con naturales unívocos: no hay dos piratas, ni dos ninjas, ni un pirata y un ninja que se identifiquen con el mismo número.

TAD CASTILLO

observadores básicos

piratas	: castillo	\longrightarrow conj(nat)	
ninjas	: castillo	\longrightarrow conj(nat)	
cantPeleas	: castillo $c \times$ nat $p \times$ nat n	\longrightarrow nat	$\{p \in \text{piratas}(c) \wedge n \in \text{ninjas}(c)\}$

generadores

crear	:	\longrightarrow castillo	
llegaPirata	: castillo $c \times$ nat p	\longrightarrow castillo	$\{p \notin (\text{piratas}(c) \cup \text{ninjas}(c))\}$
llegaNinja	: castillo $c \times$ nat n	\longrightarrow castillo	$\{n \notin (\text{piratas}(c) \cup \text{ninjas}(c))\}$
pelean	: castillo $c \times$ nat $p \times$ nat n	\longrightarrow castillo	$\{p \in \text{piratas}(c) \wedge n \in \text{ninjas}(c)\}$

axiomas

piratas(crear)	$\equiv \emptyset$	ninjas(crear)	$\equiv \emptyset$
piratas(llegaPirata(c, p))	$\equiv \text{Ag}(p, \text{piratas}(c))$	ninjas(llegaPirata(c, p))	$\equiv \text{ninjas}(c)$
piratas(llegaNinja(c, n))	$\equiv \text{piratas}(c)$	ninjas(llegaNinja(c, n))	$\equiv \text{Ag}(n, \text{ninjas}(c))$
piratas(pelean(c, p, n))	$\equiv \text{piratas}(c)$	ninjas(pelean(c, p, n))	$\equiv \text{ninjas}(c)$

cantPeleas(llegaPirata(c, p'), p, n)	\equiv if $p = p'$ then 0 else cantPeleas(c, p, n) fi
cantPeleas(llegaNinja(c, n'), p, n)	\equiv if $n = n'$ then 0 else cantPeleas(c, p, n) fi
cantPeleas(pelean(c, p', n'), p, n)	\equiv if $p = p' \wedge n = n'$ then 1 else 0 fi + cantPeleas(c, p, n)

Fin TAD

Para representar el TAD CASTILLO se decidió utilizar la siguiente estructura:

castillo **se representa con** estr, donde

estr es tupla \langle *piratas*: conj(nat),
ninjas: conj(nat),
rivalesQueTuvo: dicc(nat, conj(nat)),
historialPeleas: secu(tupla $\langle p : \text{nat}, n : \text{nat} \rangle$) \rangle

donde *piratas* y *ninjas* representan los conjuntos de identificadores de piratas y ninjas, respectivamente, *rivalesQueTuvo* asocia a cada peleador (tanto piratas como ninjas, ya que todos los identificadores son distintos) con el conjunto de todos los rivales contra los que peleó al menos una vez, e *historialPeleas* tiene la secuencia de parejas $\langle \text{pirata}, \text{ninja} \rangle$ que se entreveraron en una pelea, en el orden en que éstas sucedieron.

- Escribir en castellano el invariante de representación.
- Escribir formalmente el invariante de representación.
- Escribir formalmente la función de abstracción.

3.1. Invariante de representación

$$\text{Rep}(e) = 1 \wedge 2 \wedge_L 3 \wedge_L 4 \wedge 5 \wedge_L 6 \wedge 7$$

1) No hay Piratas que sean Ninjas (y viceversa):

$$e.\text{piratas} \cap e.\text{ninjas} = \emptyset$$

2) Todas las claves de $e.\text{RivalesQueTuvo}$ son piratas o ninjas (y viceversa):

$$\text{claves}(e.\text{RivalesQueTuvo}) = e.\text{piratas} \cup e.\text{ninjas}$$

3) Los rivales de un pirata son ninjas y viceversa:

$$(\forall p : \text{Nat})(p \in e.\text{piratas} \Rightarrow_L \text{obtener}(p, e.\text{RivalesQueTuvo}) \subseteq e.\text{ninjas}) \wedge$$

$$(\forall n : \text{Nat})(n \in e.\text{ninjas} \Rightarrow_L \text{obtener}(n, e.\text{RivalesQueTuvo}) \subseteq e.\text{piratas})$$

Nota: Sé que n y p están definidos en $e.\text{RivalesQueTuvo}$ por cláusula 2).

4) Reciprocidad de rivales en $e.\text{RivalesQueTuvo}$:

$$(\forall i : \text{Nat})(\text{def?}(i, e.\text{RivalesQueTuvo}) \Rightarrow_L$$

$$(\forall j : \text{Nat})(j \in \text{obtener}(i, e.\text{RivalesQueTuvo}) \Rightarrow_L i \in \text{obtener}(j, e.\text{RivalesQueTuvo))))$$

Nota: Sé que m está definido en $e.\text{RivalesQueTuvo}$ por cláusula 2) y 3).

5) Tuplas válidas en $e.\text{HistorialPeleas}$: un pirata y un ninja :

$$(\forall t : \langle \text{Nat}, \text{Nat} \rangle)(\text{esta?}(t, e.\text{HistorialPeleas}) \Rightarrow t.p \in e.\text{piratas} \wedge t.n \in e.\text{ninjas})$$

6) Las peleas de $e.\text{HistorialPeleas}$ figuran correctamente en $e.\text{RivalesQueTuvo}$:

$$(\forall t : \langle \text{Nat}, \text{Nat} \rangle)(\text{esta?}(t, e.\text{HistorialPeleas}) \Rightarrow$$

$$t.p \in \text{obtener}(n, e.\text{RivalesQueTuvo}) \wedge t.n \in \text{obtener}(p, e.\text{RivalesQueTuvo)))$$

Nota: Sé que $t.p$ y $t.n$ están definidos en $e.\text{RivalesQueTuvo}$ por 2) y 5).

7) Para cada luchador, los rivales que figuran en $e.\text{RivalesQueTuvo}$ deben tener su pelea correspondiente en $e.\text{HistorialPeleas}$ (básicamente la vuelta de 6):

$$(\forall n : \text{Nat})(n \in e.\text{ninjas} \Rightarrow_L$$

$$(\forall p : \text{Nat})(p \in \text{obtener}(n, e.\text{RivalesQueTuvo}) \Rightarrow$$

$$(\exists t : \langle \text{Nat}, \text{Nat} \rangle)(\pi_1(t) == p \wedge \pi_2(t) == n \wedge \text{esta?}(t, e.\text{HistorialPeleas}))))$$

Nota: Sé que n está definido en $e.\text{RivalesQueTuvo}$ por cláusula 2).

3.2. Función de Abstracción

$$\text{Abs}(e): \text{estr } e \rightarrow \text{Castillo } c \{ \text{Rep}(e) \}$$

$$\text{Abs}(e) \equiv c : \text{Castillo} \mid$$

$$\text{piratas}(c) = e.\text{piratas} \wedge$$

$$\text{ninjas}(c) = e.\text{ninjas} \wedge_L$$

$$(\forall n, p : \text{Nat})(n \in e.\text{ninjas} \wedge p \in e.\text{piratas} \Rightarrow_L$$

$$\text{cantPeleas}(c, p, n) = \text{contarPeleas}(e.\text{HistorialPeleas}, p, n))$$

$$\text{contarPeleas}: \text{secu}(\langle \text{Nat}, \text{Nat} \rangle) \times \text{Nat } p \times \text{Nat } n \rightarrow \text{nat}$$

$$\text{contarPeleas}(s, p, n) \equiv \text{if}(\text{vacía?}(s)) \text{ then } 0 \text{ else}$$

$$(\text{if}(\pi_1(\text{prim}(s)) == p \wedge \pi_2(\text{prim}(s)) == n) \text{ then } 1 \text{ else } 0) + \text{contarPeleas}(\text{fin}(s), p, n)$$

Errores Comunes:

- Comerse cláusula 7 y sólo hacer 6 (o vice versa)
- Poner \wedge_L en lugar de \Rightarrow_L
- Comerse cláusula 4: la rivalidad debe ser simétrica