

Cálculo Lambda I

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

10 de Abril de 2018

Objetivo de la clase

$(\lambda x: \text{Bool}. \lambda y: \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. y (y x)) ((\lambda z: \text{Bool}. \text{true}) \text{false}) (\lambda w: \text{Bool}. w)$

¿Qué significa esto? ¿Significa algo? ¿Es válido? ¿Es un valor? ¿Cómo nos damos cuenta?

Mapa del tema

■ Sintaxis	M, σ
■ Reglas de Tipado	$\Gamma \vdash M : \sigma$
■ Valores	V
■ Reglas de Evaluación	$M \rightarrow M'$

Sintaxis

Ejercicio: ¿cuáles son expresiones sintácticamente válidas? Dibujar el árbol sintáctico y marcar las ocurrencias libres de variables.

- 1 $\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}.x \text{ true}$
- 2 $(\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Nat}.x \text{ true})(\lambda y : \text{Bool}.x)$
- 3 $\lambda x : \text{Nat}$
- 4 $\lambda x. x$
- 5 $\text{if } x \text{ then } y \text{ else } \lambda z : \text{Bool}.z$
- 6 $x (\lambda y : \text{Bool}.y)$
- 7 true false
- 8 $\text{succ}(M)$
- 9 succ true
- 10 $\text{if succ(true) then } \lambda x : \text{Bool}.x$

Chequeo de tipos

Ejercicio: demostrar (o explicar por qué no es posible) los siguientes juicios de tipado:

1 $\emptyset \vdash (\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y) \text{ false} : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$

2 $\{x : \text{Bool}\} \vdash \text{succ}(0) : \text{Nat}$

3 $\emptyset \vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } z : \text{Bool}$

4 $\{x : \text{Bool}\} \vdash \text{if } x \text{ then } x \text{ else } 0 : \text{Nat}$

5 ¿Existen Γ y σ tal que $\Gamma \vdash xx : \sigma$?

Valores

Ejercicio: ¿cuáles de estos términos son valores?

1 if *true* then $(\lambda x : \text{Bool}. x)$ else $(\lambda x : \text{Bool}. \text{false})$

2 $\lambda x : \text{Bool}. \text{false}$

3 $(\lambda x : \text{Bool}. x) \text{ false}$

4 $\text{succ}(0)$

5 $\text{succ}(\text{succ}(0))$

6 $\text{succ}(\text{pred}(0))$

7 $\text{succ}(x)$

8 $\lambda x : \text{Bool}. (\lambda y : \text{Bool}. x) \text{ false}$

9 $\lambda x : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. x \text{ true}$

Semántica Operacional

Ejercicio: ¿cuál es el resultado de evaluar las siguientes expresiones? ¿El resultado es siempre un valor?

1 $(\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool}. \text{if } x \text{ then true else } y) \text{ false}$

2 $(\lambda x : \text{Bool}. \lambda y : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}. y (y \ x)) ((\lambda z : \text{Bool}. \text{true}) \text{ false}) (\lambda w : \text{Bool}. w)$

Simplificando la escritura

Podemos definir macros para expresiones que vayamos a utilizar con frecuencia.
Por ejemplo:

- $Id_{Bool} \stackrel{def}{=} \lambda x: Bool. x$
- $and \stackrel{def}{=} \lambda x: Bool. \lambda y: Bool. \text{if } x \text{ then } y \text{ else } false$

Cambiando reglas semánticas

Al agregar la siguiente regla para las abstracciones:

$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x: \tau. M \rightarrow \lambda x: \tau. M'} E - ABS$$

Ejercicio

- 1 Repensar el conjunto de valores para respetar esta modificación, pensar por ejemplo si $(\lambda x: \text{Bool}. \text{Id}_{\text{Bool}} \text{ true})$ es o no un valor. ¿Y $(\lambda x: \text{Bool}. x)$?
- 2 ¿Qué reglas deberían modificarse para no perder el determinismo?
- 3 Utilizando la nueva regla y los valores definidos, reducir la expresión:
 $(\lambda z: \text{Bool}. (\lambda x: \text{Nat} \rightarrow \text{Nat}. y \ 23) (\lambda x: \text{Nat}. 0))$
 ¿Qué se puede concluir entonces? ¿Es seguro o no agregar esta regla?

Cambiando reglas semánticas

Ejercicio: considerar el cálculo **sin** la regla $\text{pred}(0) \rightarrow 0$ y evaluar:

- 1 $(\lambda x : \text{Nat}. \text{iszero}(\text{pred}(\text{succ}(x)))) 0$
- 2 $(\lambda x : \text{Nat}. \text{succ}(\text{pred}(\text{pred}(\text{succ}(x))))) 0$
- 3 $\text{pred}(\text{succ}(x))$

¿Habrán términos que nunca lleguen a una forma normal?... Clase que viene.

Continuará...

¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿? ¿?

($\lambda x : \text{Clase. fin } x$) (Cálculo Lambda I)

Machete: Tipos y Términos

Las **expresiones de tipos** (o simplemente **tipos**) son

$$\sigma ::= \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid \sigma \rightarrow \rho$$

Sea \mathcal{X} un conjunto infinito enumerable de variables y $x \in \mathcal{X}$. Los **términos** están dados por

$$\begin{aligned}
 M &::= x \\
 &\mid \text{true} \\
 &\mid \text{false} \\
 &\mid \text{if } M \text{ then } M \text{ else } M \\
 &\mid \lambda x : \sigma. M \\
 &\mid M M \\
 &\mid 0 \\
 &\mid \text{succ}(M) \\
 &\mid \text{pred}(M) \\
 &\mid \text{iszero}(M)
 \end{aligned}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{Bool}} \text{ (T-TRUE)}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{Bool}} \text{ (T-FALSE)}$$

$$\frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma} \text{ (T-VAR)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma \vdash P : \sigma \quad \Gamma \vdash Q : \sigma}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } P \text{ else } Q : \sigma} \text{ (T-IF)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma. M : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (T-ABS)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \text{ (T-APP)}$$

Machete: Axiomas y reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \text{Nat}} \text{(T-ZERO)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{succ}(M) : \text{Nat}} \text{(T-SUCC)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{pred}(M) : \text{Nat}} \text{(T-PRED)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma \vdash \text{iszero}(M) : \text{Bool}} \text{(T-ISZERO)}$$

Machete: Semántica operacional

$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \underline{n}$
 donde \underline{n} abrevia $\text{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{M_1 M_2 \rightarrow M'_1 M_2} \text{ (E-APP1 o } \mu \text{)}$$

$$\frac{M_2 \rightarrow M'_2}{V_1 M_2 \rightarrow V_1 M'_2} \text{ (E-APP2 o } \nu \text{)}$$

$$\frac{}{(\lambda x : \sigma. M) V \rightarrow M\{x \leftarrow V\}} \text{ (E-APPABS o } \beta \text{)}$$

Machete: Semántica operacional

$V ::= \text{true} \mid \text{false} \mid \lambda x : \sigma. M \mid \underline{n}$
 donde \underline{n} abrevia $\text{succ}^n(0)$.

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{}{\text{if } \text{true} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_2} \text{ (E-IFTRUE)}$$

$$\frac{}{\text{if } \text{false} \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow M_3} \text{ (E-IFFALSE)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3 \rightarrow \text{if } M'_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3} \text{ (E-IF)}$$

Machete: Semántica operacional

Reglas de Evaluación en un paso

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{succ}(M_1) \rightarrow \text{succ}(M'_1)} \text{ (E-SUCC)}$$

$$\frac{}{\text{pred}(0) \rightarrow 0} \text{ (E-PREDZERO)}$$

$$\frac{}{\text{pred}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \underline{n}} \text{ (E-PREDSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{pred}(M_1) \rightarrow \text{pred}(M'_1)} \text{ (E-PRED)}$$

$$\frac{}{\text{iszero}(0) \rightarrow \text{true}} \text{ (E-ISZEROZERO)}$$

$$\frac{}{\text{iszero}(\text{succ}(\underline{n})) \rightarrow \text{false}} \text{ (E-ISZEROSUCC)}$$

$$\frac{M_1 \rightarrow M'_1}{\text{iszero}(M_1) \rightarrow \text{iszero}(M'_1)} \text{ (E-ISZERO)}$$