

Resolución en lógica de primer orden

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

Forma clausal

- ▶ Es una forma normal conjuntiva, en notación de conjuntos.
- ▶ Análogo a la forma clausal del marco proposicional.
- ▶ Pero requiere tener en cuenta los **cuantificadores**.
- ▶ El pasaje a forma clausal consiste en seis pasos de conversión.
 1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación).
 2. Pasar a **forma normal negada**.
 3. Pasar a **forma normal prenexa** (opcional).
 4. Pasar a **forma normal de Skolem**.
 5. Pasar matriz a **forma normal conjuntiva**.
 6. **Distribuir** cuantificadores universales.

Forma normal negada

El conjunto de fórmulas en **forma normal negada** (FNN) se define inductivamente como:

1. Para cada fórmula atómica A , A y $\neg A$ están en FNN.
2. Si $A, B \in \text{FNN}$, entonces $(A \vee B), (A \wedge B) \in \text{FNN}$.
3. Si $A \in \text{FNN}$, entonces $\forall x.A, \exists x.A \in \text{FNN}$.

Ejemplos

- ▶ $\neg \exists x.((P(x) \vee \exists y.R(x, y)) \supset (\exists z.R(x, z) \vee P(a)))$ no está en FNN.
- ▶ $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x, y)) \wedge (\forall z.\neg R(x, z) \wedge \neg P(a)))$ está en FNN.

Forma normal negada

Toda fórmula es lógicamente equivalente a otra en FNN.

Dem.

Por inducción estructural usando:

$$\neg(A \wedge B) \iff \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \iff \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg\neg A \iff A$$

$$\neg\forall x.A \iff \exists x.\neg A$$

$$\neg\exists x.A \iff \forall x.\neg A$$

Ejemplos

- ▶ $\neg\exists x.(\neg(P(x) \vee \exists y.R(x, y)) \vee (\exists z.R(x, z) \vee P(a)))$ se transforma en
- ▶ $\forall x.((P(x) \vee \exists y.R(x, y)) \wedge (\forall z.\neg R(x, z) \wedge \neg P(a)))$

Forma normal prenexa

Fórmula de la forma $Q_1x_1 \dots Q_nx_n.B$, $n \geq 0$, donde

- ▶ B sin cuantificadores (llamada **matriz**)
- ▶ x_1, \dots, x_n son variables
- ▶ $Q_i \in \{\forall, \exists\}$

Forma prenexa

Toda fórmula A es lógicamente equivalente a una fórmula B en forma prenexa.

Demostración

Por inducción estructural usando (las fórmulas se asumen rectificadas):

$$\begin{array}{ll} (\forall x.A) \wedge B \iff \forall x.(A \wedge B) & (\forall x.A) \vee B \iff \forall x.(A \vee B) \\ (A \wedge \forall x.B) \iff \forall x.(A \wedge B) & (A \vee \forall x.B) \iff \forall x.(A \vee B) \\ (\exists x.A) \wedge B \iff \exists x.(A \wedge B) & (\exists x.A) \vee B \iff \exists x.(A \vee B) \\ (A \wedge \exists x.B) \iff \exists x.(A \wedge B) & (A \vee \exists x.B) \iff \exists x.(A \vee B) \end{array}$$

- **Nota:** Con estas equivalencias basta, si asumimos que A está en FNN.

Ejemplo

1. $\forall x. \neg P(x) \wedge (\exists y. Q(y) \vee \forall z. P(z))$
2. $\forall x. \neg P(x) \wedge (\exists y. (Q(y) \vee \forall z. P(z)))$
3. $\exists y. (\forall x. \neg P(x) \wedge (Q(y) \vee \forall z. P(z)))$
4. $\exists y. (\forall x. \neg P(x) \wedge \forall z. (Q(y) \vee P(z)))$
5. $\exists y. \forall z. (\forall x. \neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$
6. $\exists y. \forall z. \forall x. (\neg P(x) \wedge (Q(y) \vee P(z)))$

Forma normal de Skolem

- ▶ Hasta ahora tenemos una fórmula que:
 1. está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$,
 2. si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (**forma normal negada**),
 3. (opcionalmente) si tiene cuantificadores, se encuentran todos en el prefijo (**forma normal prenexa**).
- ▶ El proceso de pasar una fórmula a forma normal de Skolem se llama **skolemización**.
- ▶ El objetivo de la **skolemización** es
 1. eliminar los cuantificadores existenciales
 2. **sin** alterar la **satisfactibilidad**.

Eliminación de cuantificadores existenciales

- ▶ ¿Cómo eliminamos los \exists sin cambiar la satisfactibilidad?
- ▶ Introducimos “testigos” para los mismos.
 - ▶ Todo cuantificador existencial se instancia en una constante o función de skolem.
 - ▶ Ejemplo: $\exists x.P(x)$ se skolemiza a $P(c)$ donde c es una nueva constante que se agrega al lenguaje de primer orden.
 - ▶ Estas funciones y constantes se suelen conocer como **parámetros**.

¿Cómo se altera el significado de la fórmula?

Prop.

Si A' es el resultado de skolemizar A , entonces A es satisfactible sii A' es satisfactible.

- ▶ Consecuencia: La skolemización preserva **insatisfactibilidad**.
- ▶ Esto es suficiente para poder aplicar el método de resolución, tal como veremos.

¿Preservación de validez?

- ▶ ¿Podremos eliminar los cuantificadores existenciales, usando Skolemización, **sin** alterar la **validez**?
- ▶ Esto es mucho más fuerte que preservar **satisfactibilidad**...
- ▶ Respuesta: **No**.
- ▶ Ejemplo: $\exists x.(P(a) \supset P(x))$ es válida pero $P(a) \supset P(b)$ no lo es.
- ▶ Tal como se mencionó, la skolemización sí preserva **satisfactibilidad** y ello es suficiente para el método de resolución.

Skolemización

Cada ocurrencia de una subfórmula

$$\exists x.B$$

en A se reemplaza por

$$B\{x \leftarrow f(x_1, \dots, x_n)\}$$

donde

- ▶ $\bullet\{\bullet \leftarrow \bullet\}$ es la operación usual de sustitución (sustituir todas las ocurrencias libres de una variable en una expresión - fórmula o término - por otra expresión).
- ▶ Si $\exists x.B$ forma parte de una fórmula mayor, decimos que x **depende** de las variables libres de B , y sólo de ellas (por ejemplo, en $\forall z.\forall y.\exists x.P(y, x)$ la x sólo depende de y).
- ▶ f es un símbolo de función nuevo y las x_1, \dots, x_n son las variables de las que depende x en B .

Definición de forma normal de Skolem (1/2)

- ▶ Sea A una sentencia rectificada en FNN.
 - ▶ No es necesario que esté en forma prenexa.
- ▶ Una **forma normal de Skolem de A** (escrito $\mathbf{SK}(A)$) es una fórmula sin existenciales que se obtiene recursivamente como sigue.
- ▶ Sea A' cualquier subfórmula de A .
 - ▶ Si A' es una fórmula atómica o su negación, $\mathbf{SK}(A') = A'$.
 - ▶ Si A' es de la forma $(B \star C)$ con $\star \in \{\vee, \wedge\}$, entonces $\mathbf{SK}(A') = (\mathbf{SK}(B) \star \mathbf{SK}(C))$.
 - ▶ Si A' es de la forma $\forall x.B$, entonces $\mathbf{SK}(A') = \forall x.\mathbf{SK}(B)$.
 - ▶ *Sigue en siguiente diapositiva.*

Definición de forma normal de Skolem (2/2)

- ▶ Si A' es de la forma $\exists x.B$ y $\{x, y_1, \dots, y_m\}$ son las variables libres de B ¹, entonces
 1. Si $m > 0$, crear un nuevo **símbolo de función de Skolem**, f_x de aridad m y definir

$$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow f_x(y_1, \dots, y_m)\})$$

2. Si $m = 0$, crear una nueva **constante de Skolem** c_x y

$$\mathbf{SK}(A') = \mathbf{SK}(B\{x \leftarrow c_x\})$$

Nota: dado que A está rectificada, cada f_x y c_x es única.

¹Notar que se ligan en A dado que A es sentencia

Ejemplos

Considere la fórmula

$$\forall x. \left(P(a) \vee \exists y. (Q(y) \wedge \forall z. (P(y, z) \vee \exists u. Q(x, u))) \right) \vee \exists w. Q(w)$$

La forma normal de Skolem es:

$$\forall x. (P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge \forall z. (P(g(x), z) \vee Q(x, f(x))))) \vee Q(c)$$

Ejemplos

- Considere la sentencia:

$$\forall x. \exists y. \exists z. R(x, y, z)$$

1. Alternativa 1 (rojo, azul)

1.1 $\forall x. \exists y. \exists z. R(x, y, z)$

1.2 $\forall x. \exists z. R(x, f(x), z)$

1.3 $\forall x. R(x, f(x), g(x))$

2. Alternativa 2 (azul, rojo)

2.1 $\forall x. \exists y. \exists z. R(x, y, z)$

2.2 $\forall x. \exists y. R(x, y, h(x, y))$

2.3 $\forall x. R(x, k(x), h(x, k(x)))$

3. La skolemización no es determinística.

- Es mejor skolemizar de afuera hacia adentro.

Forma clausal

Hasta ahora tenemos una fórmula que:

1. está escrita en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall$;
2. si tiene negaciones, solamente se aplican a átomos (**forma normal negada**);
3. si tiene cuantificadores, son universales (**forma normal de Skolem**);
4. si está en **forma normal prenexa** y tiene cuantificadores, éstos se encuentran todos en el prefijo.

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. B$$

Forma clausal

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. B$$

1. Pasar B (la **matriz**) a **forma normal conjuntiva** B' como si fuera una fórmula proposicional arrojando

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. B'$$

2. Distribuir los cuantificadores sobre cada conjunción usando la fórmula válida $\forall x. (A \wedge B) \iff \forall x. A \wedge \forall x. B$ arrojando una conjunción de **cláusulas**

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. C_1 \wedge \dots \wedge \forall x_1 \dots \forall x_n. C_m$$

donde cada C_i es una disyunción de literales

3. Se simplifica escribiendo $\{C_1, \dots, C_m\}$.

Ejemplo

$$\forall x. \forall z. (P(a) \vee (Q(g(x)) \wedge (P(g(x), z) \vee Q(x, f(x))))) \vee Q(c)$$

1. Pasamos la matriz a forma normal conjuntiva

$$\forall x. \forall z. ([P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)] \wedge [P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)])$$

2. Distribuimos los cuantificadores

$$\forall x. \forall z. [P(a) \vee Q(g(x)) \vee Q(c)] \wedge \forall x. \forall z. [P(a) \vee P(g(x), z) \vee Q(x, f(x)) \vee Q(c)]$$

3. Pasamos a notación de conjuntos

$$\left\{ \{P(a), Q(g(x)), Q(c)\}, \right. \\ \left. \{P(a), P(g(x), z), Q(x, f(x)), Q(c)\} \right\}$$

Forma clausal - Resumen

1. Escribir la fórmula en términos de $\wedge, \vee, \neg, \forall, \exists$ (i.e. eliminar implicación)
2. Pasar a **forma normal negada**
3. Pasar a **forma normal prenexa**
4. Pasar a **forma normal de Skolem** (puede hacerse antes de 3)
5. Pasar la matriz a **forma normal conjuntiva**
6. **Distribuir** cuantificadores universales

Nota: todos los pasos preservan **validez lógica**, salvo la skolemización (que preserva la **satisfactibilidad**).

Resolución en lógica proposicional

Consideremos la siguiente fórmula:

$$(\forall x.P(x)) \wedge \neg P(a)$$

- ▶ Es satisfactible? NO.
- ▶ Su forma clausal es

$$\{\{P(x)\}, \{\neg P(a)\}\}$$

- ▶ ¿Podemos aplicar la regla de resolución?

$$\frac{\{A_1, \dots, A_m, Q\} \quad \{B_1, \dots, B_n, \neg Q\}}{\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}}$$

- ▶ No. $P(x)$ y $P(a)$ no son idénticos, son ... unificables.

Ahora sí, la Regla de resolución

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \dots, \neg D_j, C_1, \dots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \dots, B_k, D_1, \dots, D_j\}$.

- ▶ Asumimos que las cláusulas $\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \dots, \neg D_j, C_1, \dots, C_n\}$ no tienen variables en común; en caso contrario se renombran las variables.
- ▶ Observar que $\sigma(B_1) = \dots = \sigma(B_k) = \sigma(D_1) = \dots = \sigma(D_j)$.
- ▶ La cláusula $\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})$ se llama **resolvente** (de $\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \dots, \neg D_j, C_1, \dots, C_n\}$).

Método de resolución

- ▶ Las siguientes nociones son análogas al caso proposicional.
 - ▶ Cláusula vacía
 - ▶ Paso de resolución
 - ▶ Refutación
- ▶ Al igual que en el caso proposicional contamos con el siguiente resultado.

Teorema de Herbrand-Skolem-Gödel

Cada paso de resolución preserva **satisfactibilidad**.

Ejemplo

Supongamos que dado A , obtenemos $\neg A$, lo convertimos a forma clausal y nos queda: $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$ donde

- ▶ $C_1 = \forall z_1. \forall x. (\neg P(z_1, a) \vee \neg P(z_1, x) \vee \neg P(x, z_1))$
- ▶ $C_2 = \forall z_2. (P(z_2, f(z_2)) \vee P(z_2, a))$
- ▶ $C_3 = \forall z_3. (P(f(z_3), z_3) \vee P(z_3, a))$

Abreviado (sin cuantificadores + notación de conjuntos):

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\}, \\ \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\}, \\ \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\} \end{array} \right\}$$

Ejemplo

$$C_1 = \{\neg P(z_1, a), \neg P(z_1, x), \neg P(x, z_1)\},$$

$$C_2 = \{P(z_2, f(z_2)), P(z_2, a)\},$$

$$C_3 = \{P(f(z_3), z_3), P(z_3, a)\}.$$

1. De C_1 y C_2 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_2 \leftarrow a\}$:

$$C_4 = \{P(a, f(a))\}$$

2. De C_1 y C_3 con $\{z_1 \leftarrow a, x \leftarrow a, z_3 \leftarrow a\}$:

$$C_5 = \{P(f(a), a)\}$$

3. De C_1 y C_5 con $\{z_1 \leftarrow f(a), x \leftarrow a\}$:

$$C_6 = \{\neg P(a, f(a))\}$$

4. De C_4 y C_6 : \square

Otro ejemplo

- ▶ Consideremos las siguientes fórmulas:
 - ▶ $F_1 : \forall x. \forall y. (P(x, y) \supset P(y, x))$
 - ▶ $F_2 : \forall x. \forall y. \forall z. ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \supset P(x, z))$
 - ▶ $F_3 : \forall x. \exists y. P(x, y)$
- ▶ Establecen que P es simétrica, transitiva y total

Apelar al método de resolución para probar que P es reflexiva

- ▶ Tenemos que probar

$$F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x. P(x, x)$$

- ▶ Para ello, basta con probar que

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x. P(x, x))$$

es **insatisfactible**.

Notar que $\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x. P(x, x))$ es equivalente a $F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge \neg \forall x. P(x, x)$.

Otro ejemplo (cont.)

Pasamos la siguiente fórmula a forma clausal.

$$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \supset \forall x.P(x, x))$$

► Donde

- $F_1 : \forall x.\forall y.(P(x, y) \supset P(y, x))$
- $F_2 : \forall x.\forall y.\forall z.((P(x, y) \wedge P(y, z)) \supset P(x, z))$
- $F_3 : \forall x.\exists y.P(x, y)$

► Sus formas clausales son:

- $C_1 : \{\neg P(x, y), P(y, x)\}$
- $C_2 : \{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\}$
- $C_3 : \{P(x, f(x))\}$

► Finalmente, nos queda hallar una refutación a partir del conjunto de cláusulas

$$\{C_1, C_2, C_3, \{\neg P(a, a)\}\}$$

Otro ejemplo (cont.)

$$C_1 = \{\neg P(x, y), P(y, x)\},$$

$$C_2 = \{\neg P(x, y), \neg P(y, z), P(x, z)\},$$

$$C_3 = \{P(x, f(x))\},$$

$$C_4 = \{\neg P(a, a)\}.$$

1. De C_2 y C_4 con $\{x \leftarrow a, z \leftarrow a\}$:

$$C_5 = \{\neg P(a, y), \neg P(y, a)\}$$

2. De C_3 y C_5 con $\{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$:

$$C_6 = \{\neg P(f(a), a)\}$$

3. De C_1 y C_6 con $\{x \leftarrow a, y \leftarrow f(a)\}$:

$$C_7 = \{\neg P(a, f(a))\}$$

4. De C_3 y C_7 con $\{x \leftarrow a\}$: \square

Diferencias con proposicional

1. En proposicional

$$\frac{\{Q, A_1, \dots, A_m\} \quad \{\neg Q, B_1, \dots, B_n\}}{\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}}$$

2. En primer orden

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \dots, \neg D_j, C_1, \dots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \dots, B_k, D_1, \dots, D_j\}$.

Regla de resolución binaria

$$\frac{\{B, A_1, \dots, A_m\} \quad \{\neg D, C_1, \dots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B, D\}$.

- ▶ Es **incompleta**.
- ▶ Ejemplo: intentar refutar $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$

Regla de resolución binaria

- Se puede recuperar la completitud incorporando una regla adicional: **factorización**.

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\}}{\sigma(\{B_1, A_1, \dots, A_m\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \dots, B_k\}$.

- En el ejemplo anterior
 1. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}\}$
 2. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}\}$ (fact.)
 3. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}\}$ (fact.)
 4. $\{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(v), \neg P(w)\}, \{P(z)\}, \{\neg P(u)\}, \square\}$
(resolución (binaria))