Práctica 6 - Lógica de primer orden

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas para los siguientes lenguajes, en donde f es un símbolo unario y g es binario:

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

$g_I(n, m) = n^2 - n$, $c_I = d_I = 0$.

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados. Cuando sea posible determinar si el enunciado es verdadero o falso en la interpretación correspondiente.

a. $\forall x \forall y (P(x, y) \to \exists z((Q(z) \land P(x, z)) \land P(z, y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

b. $\forall x (Q(x) \to \exists y (R(y) \land P(y, x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x, y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un hombre libre.

c. $\forall x \forall y ((Q(x) \land Q(y)) \to P(f(x, y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x, y) = x + y$.

Ejercicio 3. Usando como lenguaje el que contiene únicamente la igualdad, escribir enunciados que expresen:

a. Existen al menos dos elementos.

b. Existen exactamente dos elementos.

c. Existen a lo sumo dos elementos.

Agregando al lenguaje un símbolo de predicado unario P, escribir:

d. Existen a lo sumo dos elementos y al menos uno que cumplen la propiedad P.

e. Si existe un elemento que cumple la propiedad P, es único.

f. Existe un elemento que cumple la propiedad P y es único.

Ejercicio 4. Considerar un lenguaje con igualdad y un símbolo de función unario f. Escribir una fórmula φ que cumpla $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es inyectiva pero no sobreyectiva. ¿Es φ satisfacible? ¿Es satisfacible por una estructura finita?

Ejercicio 5. * Sea P un símbolo de relación unario y sea f un símbolo de función binario. Para cada una de las fórmulas $\forall x \forall y\ f(x, y) = x$, $\exists x \forall y\ f(x, y) = y$, $\exists x (P(x) \land \forall y\ P(f(x, y)))$ hallar una estructura que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

Ejercicio 6. Decimos que un elemento e del universo de una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{I}$ es *distinguible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{I} \models \varphi(x)[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

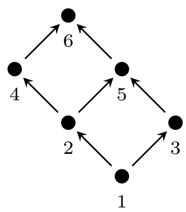
Dar un ejemplo de un lenguaje sin constantes y una estructura de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la estructura dada sea distinguible.

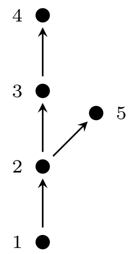
Ejercicio 7. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +) \qquad \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot)$$

donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales. Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones.

Ejercicio 8. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,

a) 

b) 

Obaservación: Estos esquemas se conocen como "Diagramas de Hasse" y la relación que describen es la menor relación reflexiva y transitiva que contiene a los pares explicitados en el diagrama. Por ejemplo, en a), se tienen los pares $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 6)$ entre otros aunque no estén explícitamente en el esquema.

Ejercicio 9. Probar que si el universo de una interpretación es finito con $n + 1$ elementos, y tiene la propiedad que n elementos del universo son distinguibles, entonces todos los elementos son distinguibles.

Ejercicio 10. Dada una interpretación $\mathcal{I}$ con universo A, decimos que una relación $R \subseteq A^n$ es *expresable* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con n variables libres tal que para toda valuacín v cumpla $\mathcal{I} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[v]$ sii $(v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R$. Demostrar que las siguientes relaciones son expresables.

a. $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, *, = \rangle$ con $*$ el producto de naturales.
   $R_1 = \{(n, m) : n \text{ divide a } m\}$.
   $P_1 = \{n : n \text{ es primo}\}$.

b. $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, +, =, 0, 1 \rangle$ con $+$ la suma de naturales.
   $R_2 = \{(n, m) : n < m\}$.

c. $\mathcal{I}_3 = \langle L, \circ, = \rangle$ con L el conjunto de todas las listas, $\circ$ la concatenación de listas.
   $R_3 = \{(a, b) : a \text{ es sublista de } b\}$.

Ejercicio 11. Decimos que una clase de $\mathcal{L}$-estructuras K es *definible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una sentencia φ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ y valuación v cumpla $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ sii $\mathcal{I} \in \mathsf{K}$. Demostrar que las siguientes clases de $\mathcal{L}$-estructuras son definibles con su respectivo lenguaje.

a. $\mathcal{L}_0 = \{=\}$. $\mathsf{K}_0 = \emptyset$.

b. $\mathcal{L}_1 = \{=\}$. $\mathsf{K}_1 = \{$todas las interpretaciones$\}$.

c. $\mathcal{L}_2 = \{P, =\}$ con P predicado binario. $\mathsf{K}_2 = \{\mathcal{I} : P^{\mathcal{I}}$ es reflexivo y transitivo$\}$.

d. $\mathcal{L}_3 = \{f, g, =\}$ con f, g funciones unarias. $\mathsf{K}_3 = \{\mathcal{I} : \operatorname{Im} f^{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{Im} g^{\mathcal{I}}\}$.

*Este ejercicio puede ser entregado, de manera opcional, como se resolvería en un examen, a modo de práctica para el parcial.