FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Tarea numérica MA2601 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Nombre: Francisco Almeida Díaz

Rut: 20.237.680-0

Profesor: Javier Ramírez Ganga

Sección: 7

Introducción:

Este trabajo tiene como objetivo principal implementar el cálculo de Edos a través de los distintos métodos numéricos pedidos. Sin embargo, estas edos no serán calculadas solo porque sí, sino que representan un modelo, el cual describe ciertas cualidades que presenta el fenómeno del niño, las cuales serán implementadas a través de Python.

Además de esto será necesario ser capaz de interpretar de manera satisfactoria los gráficos, de tal manera de que la información que nos entregan sea congruente con la realidad tratada de representar.

Antes de empezar a relatar el trabajo realizado es necesario tener en consideración las siguientes explicaciones respecto a los códigos implementados en Python:

1)Las variables Te y Hw que se necesitan en el trabajo, acá se llamarán "y" y "w" para efectos prácticos de ejecución.

2) El valor de delta t pedido en cada parte es calculado a través de "N" que representa la cantidad de subintervalos que requiere el eje x para el cálculo de los gráficos.

Este es calculado a través de la idea de que, si tenemos 240 meses a considerar en el eje x y tenemos un delta uno, por ejemplo, esto indica que necesitaremos 240 subintervalos para nuestro cometido, de la misma manera para delta t igual a 0,1 es divido el resultado anterior por 10 y así sucesivamente se calculan los demás valores.

3) Los scripts a entregar serán para solo un "N" dado, esto debido a que no se supo implementar en el mismo script un grafico que representara la función para varios valores de "N", pero de todas formas en el informe son graficados, solamente que quedan en distintos gráficos.

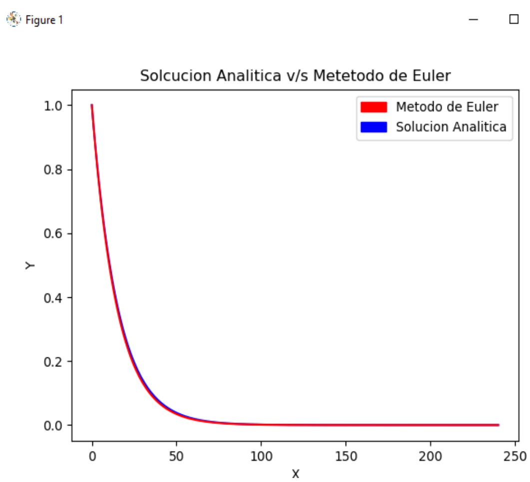
Además, como los scripts funcionas para cualquier valor de "N" dado no creemos que presente mayor problema.

4) Tanto el vector "y" como el w en un principio son programados solamente con 0 para que luego del cálculo del algoritmo este se vaya llenando con los resultados dados.

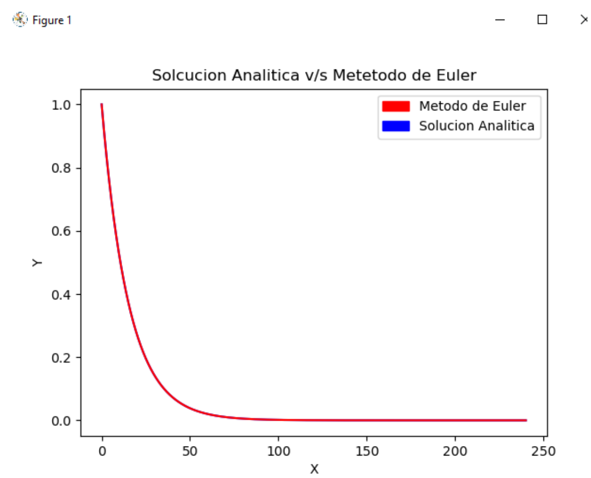
5) En todos los gráficos calculados en Python, el eje Y representa a la anomalía de temperatura en la superficie del océano pacifico medido en grados Celsius y el eje x representa el paso del tiempo medido en meses.

6) “h” representa el largo que tiene cada subintervalo.
7)En cada programa el eje x va desde los 0 meses hasta los 240, ósea 20 años.
<u>Explicación:</u>
A continuación, se empezará con la explicación de cada parte del trabajo como es pedido.

<u>Parte A)</u> Para efectos prácticos y no ser redundante en el análisis tomaré dos casos solamente para cada algoritmo empleado, se usará N = 2400 y N = 48000, debido a que para todo valor de N pedido en este caso los gráficos se parecen mucho, de esta manera podremos notar una leve diferencia entre la exactitud con la que se calculan las ecuaciones diferenciales.
A continuación, presentamos los gráficos resultantes:



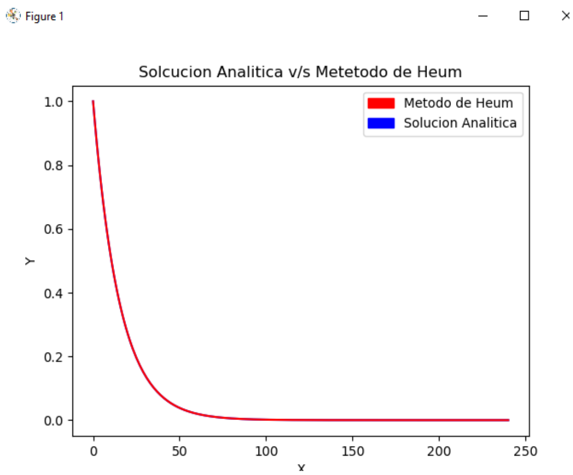
Método de Euler para N= 240



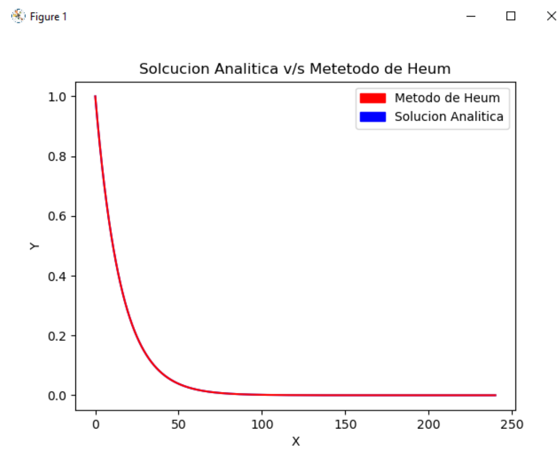
Método de Euler para N=48000

Si nos fijamos bien, en los gráficos, podremos desprender que a medida que nuestro delta t disminuye y que por ende el N aumenta, nuestros cálculos para este caso que es el método de Euler, la función que nos entrega será cada vez mas exacta y se acercará cada vez más a la real (solución analítica), veremos que esta tendencia la encontraremos a lo largo de todo el trabajo.

Ahora veamos los gráficos para el método de Heum (También para los mismos valores de N= 240, 48000):



Método de Heum para N =240



Método de Heum para N = 48000

De acá podemos percibir que para un N = 240 ya las dos curvas se superponen, esto nos indica tal como sale en el apunte de Axel Osses, el método de Heum es mucho mas preciso en comparación al de Euler.

Ahora bien, para ir concluyendo esta parte, como habíamos dicho, el eje y corresponde a la variación de la anomalía de la temperatura de la parte este de la superficie del océano pacífico, y que como se ve en los gráficos esta disminuye de manera exponencial (la solución analítica es una exponencial), de tal forma que al acercarnos a los 50 meses(4 años aproximadamente) esta tiende a cero.

<u>Parte B)</u> Para esta parte nos piden calcular el mismo modelo uno, pero ahora la ecuación es presenta un retardo de delta = 5.

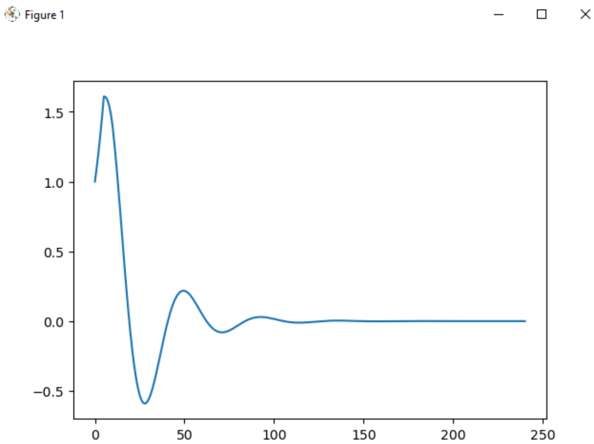
En este caso el programa es muy parecido al ya visto anteriormente, a excepción de que tenemos que definir obviamente la variable delta, pero con la precaución de que esta quede bien definida dentro de los diferentes valores de N. Para este propósito la que se ocupa finalmente en algoritmo (Euler y Heum) es delta = delta/h donde h es el tamaño que tiene cada subintervalo. También es pertinente mencionar que la condición inicial queda establecida para 5 valores distintos de y, lo cual es establecido a través de un “for” implementado en el programa.

Aparte de esto definimos otro eje “y” pero este quedará vacío y en definitiva no se utilizará, su utilidad erradica en que para cuando definimos la Edo a utilizar quede bien especificado que existe una variable con retardo.

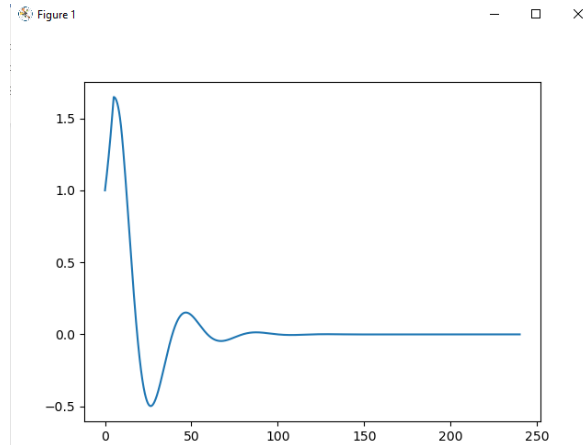
La última diferencia que se puede mencionar en esta parte es que el mismo algoritmo a utilizar, este obviamente tiene que quedar definido como una Edo de retardo. Es por eso por lo que para su cálculo se implementa el delta ya mencionado.

Los gráficos a mostrar tendrán los mismos valores de N que para el caso A, y reiteramos que para no caer en la redundancia no analizaremos más que solo esos dos.

Los gráficos son los siguientes:



Método de Euler para N = 240



Método de Euler para N = 48000

Y para Heum es:

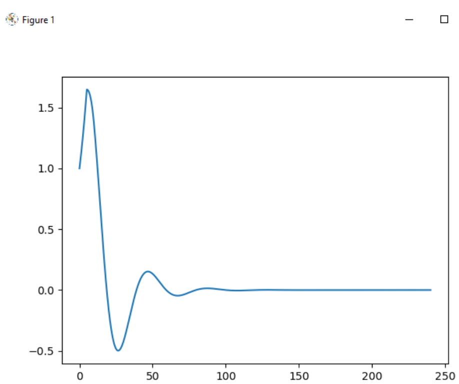
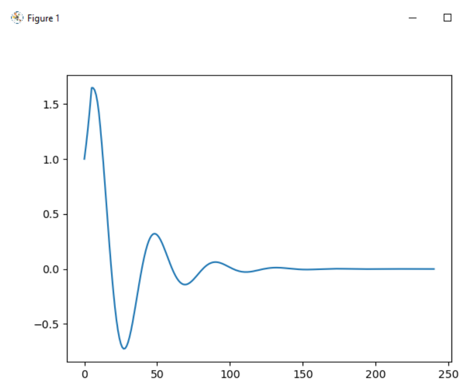


Tabla 1Metodo de Heum para N = 48000



Método de Heum para N = 240

Tanto para el método de Heum como para el de Euler podemos notar que presentan el mismo comportamiento, para valores mas pequeños de N como en es este caso mostrado es N = 240 ocurre que la función se comporta de manera un poco más “suelta”, esto debido a que como se puede apreciar para estos casos de N presenta un poco mas de oscilaciones que para valores mas grandes de N (N = 48000).

Esto se puede apreciar con mayor claridad para el método de Heum que para el de Euler.

El hecho de que la Edo presente un retardo hace que difiera en gran parte a la vista en la parte A, provoca que existan oscilaciones de temperatura, variando entre lo positivo y lo negativo, cosa que no pasa para un delta igual a cero.

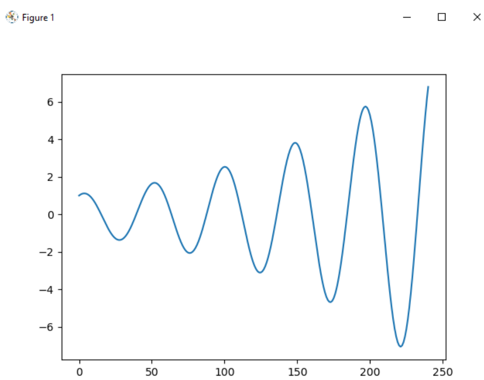
Parte C): Para este ítem nos piden programar el modelo 2, para esto es necesario introducir un vector de la misma naturaleza de Y, ósea en un principio estará definido solamente con ceros, para después ser llenado a medida que el código se ejecuta, este será llamado w. Este nuevo eje al igual que “y” llevará su condición inicial, -1 y 1 será respectivamente.

Representa a la anomalía de la temperatura en los últimos 300 metros cerca de la superficie del océano pacifico ecuatorial en su parte Oeste, pero este no será graficado debido a que no lo piden en el enunciado, pero será muy útil para que, mas adelante podamos comentar al comportamiento de los gráficos.

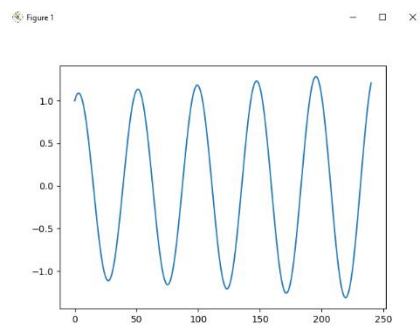
Aparte de esta diferencia, las funciones a considerar evidentemente tendrán la variable w entre sus elementos.

De esta manera método de Euler y d Runge Kutta de orden 4 queda implementado tanto parar “y” como para “w”.

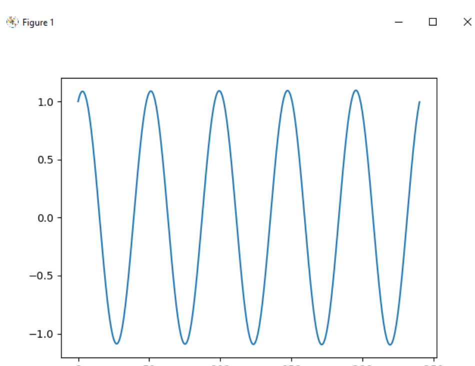
A continuación, mostraremos los gráficos. Debido a que estos presentan mayor variación para los distintos valores de N, mostraremos para N= 240,2400 y 48000.



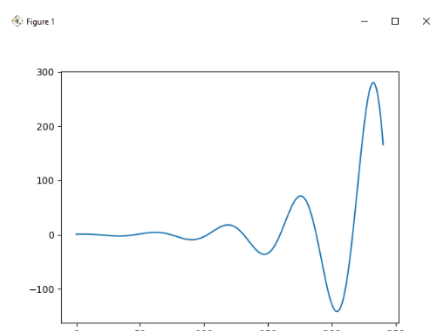
Método de Euler N = 240



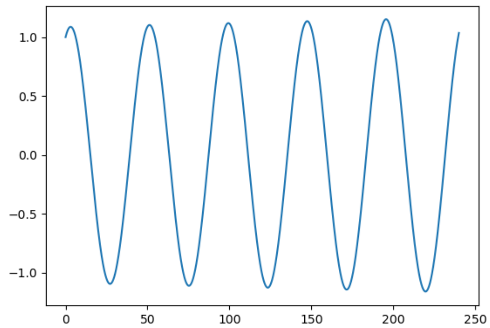
Método de Euler N = 24000



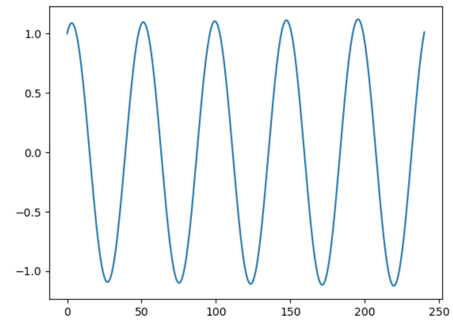
Método de Euler, N = 48000



Método de RK4; N= 240



Método RK4, N=24000



Método de RK4, N = 48000

Dado los gráficos entregados podemos considerar varias cosas de ellos.

Partiendo por lo mas técnico, la diferencia para N = 240 entre los gráficos de Euler y RK4 da para pensar que el método de Euler podría ser eventualmente más “exacto” que el de RK4 pero rápidamente esto se desmorona debido a que para 24000 el gráfico de RK4 presenta mayor estabilidad en los periodos que presenta , esto debido a que se “escapa” menos que el grafico de Euler , aunque bueno para N = 48000 esto ya no ocurre , pero esto está dentro del tipo de cosas que tiene que pasar , esto porque nos encontramos frente a intervalos suficientes como para considerar que el error global tiende a cero.

Ahora bien, entrando más a la interpretación del mismo gráfico, nos remitiremos solo a analizar el para N = 48000, esto debido a que es una representación más fidedigna de la que podría la solución analítica de la EDO.

El hecho de que ahora contemos con Hw dentro del cálculo de Te, podría responder al comportamiento del gráfico, esto si lo comparamos con el de A por ejemplo el cual decaía, en este caso, oscila.

Debido a esto podemos concluir que de cierta manera este sistema modela de mejor manera el escenario real en que Te se comporta, ya que Te interactúa con su ambiente, que en este caso es w.

Parte D:

d) $y' = Ry + \mathcal{H}_2 \frac{C_E}{C_W} w$ ①

$H' = -\mathcal{R}w - \alpha y$ ②

Francisco Alucido
20.237.680-0
Sec-7

①

Para efectos de cálculo $\frac{C_E}{C_W} = N$ y $Te(t) = y(t) \wedge Hw(t) = w(t)$ como bien se especifica en el informe.

De ① despejamos w sin derivar y con derivar la ecuación misma, de esta manera queda:

$$\boxed{\frac{y' - Ry}{\mathcal{H}_2 N} = w} \qquad \boxed{\frac{y'' - Ry'}{\mathcal{H}_2 N} = w'}$$

ahora reemplazamos en ② el w' quedando ~~[illegible]~~

$$\frac{y'' - Ry'}{\mathcal{H}_2 N} = -(\mathcal{R}w + \alpha y)$$ y hacemos lo mismo para w.

$$\frac{Ry' - y''}{\mathcal{H}_2 N} = \mathcal{R}\left(\frac{y' - Ry}{\mathcal{H}_2 N}\right) + \alpha y \iff Ry' - y'' = \mathcal{R}y' - \mathcal{R}Ry + \alpha \mathcal{H}_2 N y$$

$$= Ry' - y'' - \mathcal{R}y' + \mathcal{R}Ry - \alpha \mathcal{H}_2 N y = 0$$

$$y'' - Ry' + \mathcal{R}y' - \mathcal{R}Ry + \alpha \mathcal{H}_2 N y = 0$$

$$y'' + y'(-R + \mathcal{R}) + y(-\mathcal{R}R + \alpha \mathcal{H}_2 N) = 0$$

$$\boxed{y'' + y(\mathcal{R} - R) + y\left(\alpha \mathcal{H}_2 \frac{C_E}{C_W} - \mathcal{R}R\right) = 0}$$

El resultado mostrado anteriormente puede ser interpretado como un movimiento armónico amortiguado, que es de la forma: ②

$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ del cual se pueden establecer las siguientes relaciones:

$$2\gamma = (r - R) \wedge \omega_0^2 = \alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - Rr$$

$$\gamma = \frac{(r-R)}{2} \wedge \omega_0 = \sqrt{\alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - Rr}$$

con lo cual podemos establecer que el ω buscado es:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$= \sqrt{\alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - Rr - \frac{(r-R)^2}{4}} = \sqrt{\alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - \left(\frac{4Rr + r^2 \mp 2Rr + R^2}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - \left(\frac{R^2 + 2Rr + r^2}{4}\right)} = \sqrt{\alpha \gamma_2 \frac{C_E}{C_W} - \frac{(R+r)^2}{4}}$$

De esta manera, dada la fórmula $P = 2\pi/\omega$ nos queda un P de:

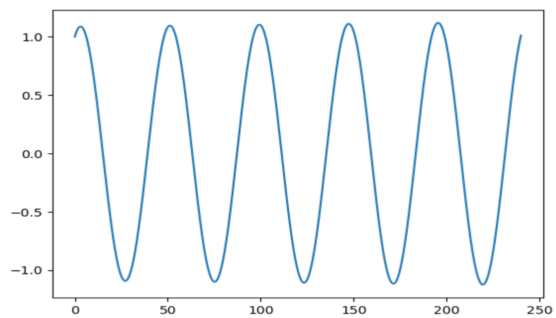
$$\boxed{P = 2\pi \left(\frac{C_E}{C_W} \alpha \gamma_2 - \frac{(R-r)^2}{4}\right)^{-1/2}}$$

Reemplazando con los datos que da el enunciado queda

$$P = 2\pi \left(0{,}27 \cdot 0{,}612 \cdot 0{,}164 - \left(\frac{0{,}1 - 0{,}1}{4}\right)\right)^{-1/2}$$

$$P = 2\pi \, (0{,}02709)^{-1/2}$$

$$P = 38{,}168$$



x=2.90323 y=1.09508

x=50.8065 y=1.09508

x=98.7097 y=1.09508

x=147.145 y=1.10843

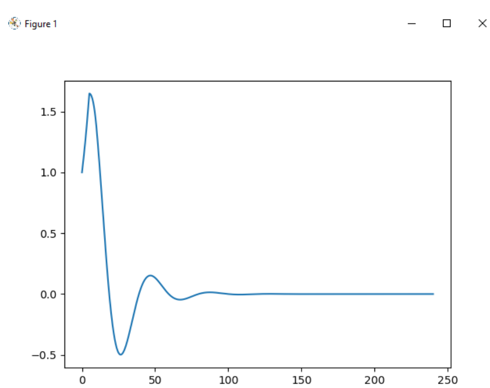
x=194.516 y=1.10843

Método RK4 para modelo 2

Por causa de los datos recogidos para el grafico de RK4 podemos establecer que el periodo medio establecido de manera experimental da aproximadamente 48 meses, este cálculo es la simple resta entre dos máximos consecutivos, a parte de eso se hizo para cada uno de estos intervalos para verificarnos que todos dieran algo parecido, lo cual resulto siendo cierto.

Ahora bien, el cálculo teórico presentado anteriormente nos da un resultado de 38,168 meses lo cual difiere en 10 meses aproximadamente en comparación a nuestro resultado teórico.

Antes de sacar conclusiones de esta parte podemos hacer este ejercicio con los gráficos de la parte B de la tarea, debido a que también presentan oscilaciones, aunque estas son cada vez menores a través que pasan los meses, de todas maneras, podemos resaltar dos puntos de la siguiente curva.



x=5.03226 y=1.64468

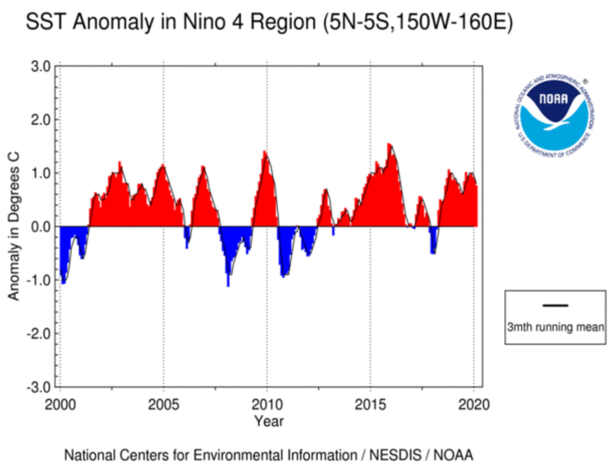
x=46.0161 y=0.149859

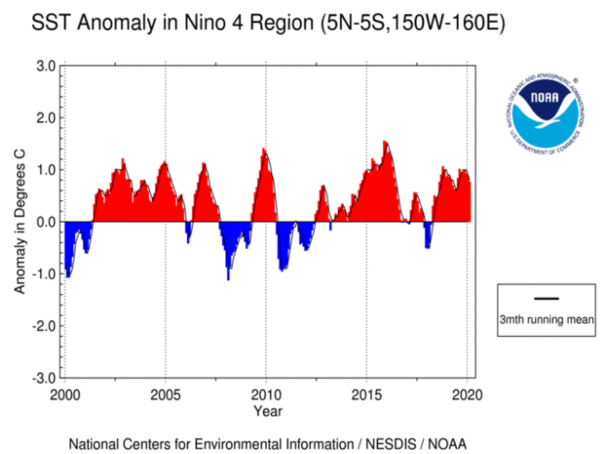
De esto podemos desprender que el periodo establecido en este caso es de 40 meses aproximadamente lo cual estaría mas cercano al valor teórico mostrado.

De esto entonces, desprendemos de que para el modelo 2 los valores difieren en 10 meses aproximadamente, esto podría estar dado a, que al agregar Hw, el valor que entrega Se te comporta de una manera un tanto diferente.

Argumento similar podríamos dar para el modelo 1 con retardo, que gracias a que Te no tiene factores externos interviniendo en él, por llamarlo de alguna manera, este se acerca al valor teórico establecido.

E) A continuación presentaremos gráficos del comportamiendo de la anomalia en grados celcius producida por el fenómeno del niño.





Como podemos observar estos gráficos no se parecen mucho a los analizados anteriormente, esto es debido a que solamente tomamos dos variable a considerar.

Los graficos presentados ahora son los datos concretos obtenidos al medir la temperatura a lo largo de los años, a parte de eso tenemos que considerar la forma en que nosotros calculamos , si bien quiere acercarse a la realidad no es una buena representacion de ella , esto se debe a que hay muchas otras variables a considerar para implentar un modelo mejor, entre estas podemos nombrar la presion atmosferica, los vientos marinos, cambio climatico , entre otras.

Es por esto que lo que el trabajo que nos estan pidiendo hacer de cierta manera es bueno, debido a que poco a poco , a lo largo que pasen los años en la facultad , la herramienta matematica que nosotros tengamos será cada vez mas cercana a representar la realidad y la naturaleza que nos rodea.

Para ir concluyendo esta parte, el fenómeno del niño causa problemas mayotitariamente en la región costera del Pacífico de América del Sur, provocando intensas lluvias, por lo general causan grandes inundaciones.

Conclusión:

De partida creemos que los puntos que se consideraron en este trabajo se cumplieron satisfactoriamente , tanto en la elaboracion de las funciones como en la interpretacion de los gráficos.

Ahora bien, para ir finalizando podemos decir que la herramienta matematica que utilizamos en este caso es muy util para ,no solo determiar en este caso la temperatura de la superficie del mar sino que para multiples eventos que nos afectan cotidianamente como los son los relacionados con la física por ejempl, no obstante los que hemos utilizado en esta ocacion son un tanto de "juguete " si es que los podriamos llamar así, debido a que para representar una situacion 100% real necesitamos ocupar otro tipos de herramientas matematicas, como a su vez otro tipo de variables dentro del sistema de ecuaciones.

Bibliografía:

1) Apunte de Axel Osses de EDO
2) https://www.ncdc.noaa.gov/teleconnections/enso/indicators/sst/
3) Wikipedia