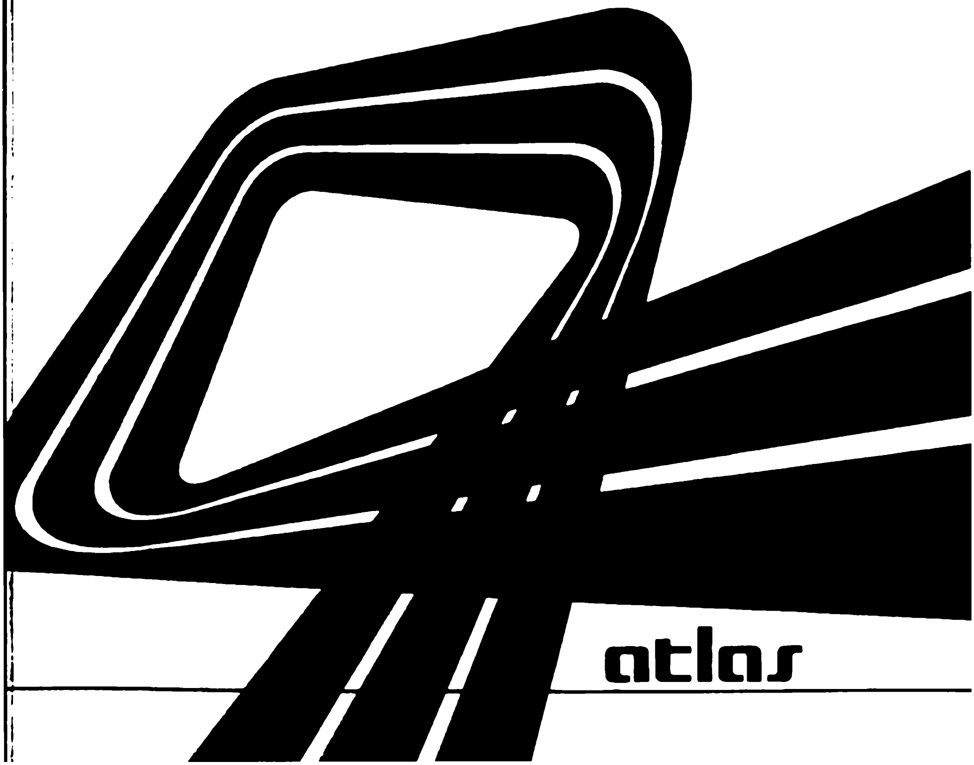
JACOB DAGHLIAN

LÓGICA e ÁLGEBRA de BOOLE



atlas

JACOB DAGHLIAN

LÓGICA E ÁLGEBRA DE BOOLE

4ª Edição

SÃO PAULO
EDITORA ATLAS S.A. - 2008

1. ed. 1986; 2. ed. 1988; 3. ed. 1990;
4. ed. 1995; 12. reimpressão 2008

Capa: Paulo Ferreira Leite
Composição: Style Up

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Daghlian, Jacob, 1936 -

Lógica e álgebra de Boole/Jacob Daghlian. - 4. ed. - 12. reimpr. - São Paulo : Atlas, 2008.

Bibliografia.

ISBN 978-85-224-1256-3

1. Álgebra booleana 2. Lógica simbólica e matemática I. Título.

95-0876 CDD-511.324

Índice para catálogo sistemático:

1. Álgebra booleana 511.324

Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto nº 1.825, de 20 de dezembro de 1907.

Impresso no Brasil/*Printed in Brazil*

Editora Atlas S.A.
Rua Conselheiro Nébias, 1384 (Campos Elísios)
01203-904 São Paulo (SP)
Tel.: (0_ _11) 3357-9144 (PABX)
www.EditoraAtlas.com.br

Agradecimentos

Antonio Ângelo Fratoni
(Desenhos do Capítulo 14)

Vânia Linda Domingues
(Datilografia do Capítulo 14)

A

Carlos Alberto Garcia Calioli (in memoriam)
e Rubener da Silva Freitas
Mestres e amigos cujo entusiasmo e
incentivo me conduziram ao Magistério.

Pela ajuda de dois sábios: meus pais, Leon e Hripsimé
Pelo incentivo de minha esposa: Hulda
Pela carinhosa presença de meus filhos: Leon e Ricardo
Pelos meus irmãos: Carlos, Luiz e Celi
Pela oportunidade de realizar este trabalho
Elevo o pensamento em gratidão a DEUS.

Sumário

Prefácio

Os últimos 10 anos vêm presenciando um aumento sem precedentes da aplicação da Matemática, particularmente da Álgebra, no entendimento e solução dos problemas das Ciências da Computação. Estruturas algébricas, cada vez mais, estão sendo empregadas na modelagem e controle de circuitos eletrônicos e de sistemas de informações. A Álgebra aplicada à computação vem sendo paulatinamente introduzida nos currículos das escolas de 2º e 3º graus sob formas diversas.

É, pois, com grande satisfação que apresentamos ao leitor este dedicado trabalho do colega Jacob Daghlian. Trata-se de um livro que surgiu como fruto do intenso trabalho de pesquisas bibliográficas e das experiências do magistério vivenciadas pelo autor no ensino de disciplinas cujos conteúdos abrangem este texto.

É sabido que os estudantes são mais hábeis quando conhecem a causa pela qual aprendem uma técnica particular e tendem a perder o interesse se os métodos matemáticos são apresentados de maneira puramente abstrata, sem aplicações práticas. Consciente, o autor adota a estratégia de ensinar, através de exemplos, utilizando o instrumental lógico para o entendimento e a modelagem de sistemas reais. O uso de ilustrações familiares como meio de exposição, por certo, oferecerá base para generalizações e o próprio conhecimento e desenvolvimento da Lógica pelo leitor.

Devemos deixar claro que não desaprovamos a abordagem orientada exclusivamente para o conhecimento da Matemática Pura. Porém, entendemos que, quando o trabalho básico inicial estiver bem assentado, o aluno terá estímulo para aprofundar os indispensáveis conhecimentos teóricos da Matemática Pura.

Com esses objetivos o autor produziu um livro-texto claro e compreensível destinado aos cursos introdutórios de Álgebra Aplicada à Computação que certamente dará os fundamentos para que os leitores caminhem com segurança nos estudos, investigações e pesquisas nessa área do conhecimento humano.

Congratulamo-nos com o Prof. Jacob Daghlian e com a Editora Atlas pela publicação, augurando a continuação de empreendimentos desta natureza.

São Paulo, abril de 1986

PROF. GILBERTO DE ANDRADE MARTINS

Apresentação

O presente texto originou-se das notas de aula do curso que ministramos há alguns anos aos alunos do curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Fundação Santo André. Ao redigi-lo, como primeira razão, moveu-nos o interesse de entregar aos nossos alunos um texto que contivesse os pontos principais de nosso curso e que superasse a necessidade, nesta primeira parte dos estudos, de livros estrangeiros de difícil e cara obtenção. Outro aspecto importante que nos levou a este trabalho e nos mantém motivados no seu aprimoramento é a apresentação de um sistema algébrico que representou importante passo no desenvolvimento da eletrônica, computação, pneumática e outras aplicações que envolvem até a Pesquisa Operacional. Sua presença é marcante nos estudos de automatização, levando a simplificações com sensíveis reduções de custo, tendo dado origem a métodos que representam grande economia de tempo em projetos com os quais possa relacionar-se.

Nada apresentamos de original e, em alguns casos, incorremos na linguagem característica de queridos mestres como o foi Alcides Boscolo, de saudosa memória, e ainda o é Edgard de Alencar Filho, não deixando de mencionar a marcante influência de alguns textos citados na bibliografia.

Agradecemos o apoio dos colegas, bem como as críticas recebidas, sendo os erros e imprecisões de nossa inteira responsabilidade. Em particular, agradecemos ao Prof. José Otávio Moreira Campos o incentivo e empenho para a concretização deste trabalho.

Finalizando, prestamos nossa homenagem aos professores que desde o Jardim da Infância participaram de nossa formação, dedicando-lhes este livro e, para evitar omissões, citando as diferentes escolas que cursamos:

Jardim da Infância e Primário

Academia de Comércio "Horácio Berlinck" – Jaú – SP

Ginásio

Ginásio Estadual de Jaú – Jaú – SP
Colégio São Norberto – Jaú – SP
Colégio Dante Alighieri – São Paulo – SP

Científico

Escola Preparatória de Cadetes do Exército – São Paulo – SP
Escola Preparatória de Cadetes do Exército – Porto Alegre – RS

Superior

Academia Militar das Agulhas Negras – Resende – RJ
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Fundação Santo André – Santo André – SP
Organização Santamarense de Educação e Cultura – OSEC – São Paulo – SP (Especialização)
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC – São Paulo – SP (Pós-Graduação)
Instituto Metodista de Ensino Superior – IMS – São Bernardo do Campo – SP (Mestrado em Administração)

São Paulo, 1995

JACOB DAGHLIAN

1
Sistemas Dicotômicos

1.1 INTRODUÇÃO

O mundo em que vivemos apresenta situações com dois estados apenas, que mutuamente se excluem, algumas das quais tabelamos a seguir:

1	0
Sim	Não
Dia	Noite
Preto	Branco
Ligado	Desligado

Há situações como morno e tépido, diferentes tonalidades de vermelho etc. que não se apresentam como estritamente dicotômicas, ou seja, com dois estados excludentes bem definidos.

A Lógica começou a desenvolver-se com Aristóteles (384-322 a.C.) e os antigos filósofos gregos passaram a usar em suas discussões sentenças enunciadas nas formas afirmativa e negativa, resultando assim grande simplificação e clareza, com efeito de grande valia em toda a Matemática. Por volta de 1666, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) usou em vários trabalhos o que chamou *calculus ratiotinator*, ou *logica mathematica* ou *logística*. Estas idéias nunca foram teorizadas por Leibniz, porém seus escritos trazem a idéia da Lógica Matemática.

No século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783) introduziu a representação gráfica das relações entre sentenças ou proposições, mais tarde ampliada por John Venn (1834-1923), E. W. Veitch em 1952 e M. Karnaugh em 1953. Em 1847, Augustus DeMorgan (1806-1871) publicou um tratado *Formal logic* envolvendo-se em discussão pública com o filósofo escocês William Hamilton (que nada tinha a ver com o matemático William Rowan Hamilton), conhecido por sua aversão à Matemática, o qual, entre outras coisas escreveu: "A Matemática congela e embota a mente; um excessivo estudo da Matemática incapacita a mente para as energias que a filosofia e a vida requerem." George Boole (1815-1864), ligado pela amizade a DeMorgan, interessou-se pelo debate entre o filósofo e o matemático, escrevendo *The mathematical analysis of logic* (1848) em defesa de seu amigo; mais tarde publicou um livro sobre Álgebra de Boole, chamado *An investigation of the laws of thought* (1854) e em 1859 escreveu *Treatise on differential equations* no qual discutiu o método simbólico geral. O trabalho de George Boole foi ampliado por Lewis Carrol (1896), Whitehead (1898), Huntington (1904 e 1933), Sheffer (1913) e outros. Este período de desenvolvimento da Lógica culminou com a publicação do *Principia mathematica* por Alfred North-Whitehead (1861--1947) e Bertrand Russell (1872-1970), que representou grande ajuda para completar o programa sugerido por Leibniz, que visava dar uma base lógica para toda a Matemática.

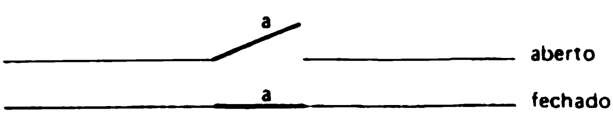
A Álgebra de Boole, embora existindo há mais de cem anos, não teve qualquer utilização prática até 1937, quando foi feita a primeira aplicação à análise de circuitos de relés por A. Nakashima, que não foi bem-sucedido, pois, ao invés de desenvolver a teoria já existente, tentou desenvolver a Álgebra Booleana por conceitos próprios. Em 1938 Claude E. Shannon mostrou, em sua tese de mestrado no Departamento de Engenharia Elétrica do MIT (Massachusetts Institute of Technology), a aplicação da Álgebra de Boole na análise de circuitos de relés, usando-a com rara elegância, o que serviu de base para o desenvolvimento da teoria dos interruptores.

O assunto deste curso, ainda que elementar, visa mostrar as aplicações da Álgebra de Boole ou Álgebra Lógica não só no processamento automático de dados (computação), como também na automatização da produção industrial, mediante a utilização desta teoria aplicada aos fluidos.

1.2 INTERRUPTORES

Chamamos *interruptor* ao dispositivo ligado a um ponto de um circuito elétrico, que pode assumir um dos dois estados: *fechado* (1) ou *aberto* (0). Quando fechado, o interruptor permite que a corrente passe através do ponto, enquanto aberto nenhuma corrente pode passar pelo ponto.

Representação:



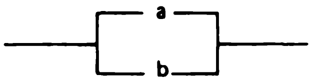
Por conveniência, representaremos os interruptores da seguinte maneira:

——————— a ———————

Neste caso, somente conheceremos o estado do interruptor se tivermos a indicação de que a = 1 ou a = 0. Conhecendo-se o estado de um interruptor *a*, poderemos denotar também por *a* qualquer outro interruptor que apresente o mesmo estado de *a*, isto é, *aberto quando* a *está aberto* e *fechado quando* a *está fechado.*

Um interruptor *aberto quando* a *está fechado* e *fechado quando* a *está aberto* chama-se *complemento* (inverso ou negação) de *a*, e denota-se por *a'*.

Sejam *a* e *b* dois interruptores ligados em *paralelo*. Numa ligação em paralelo, só passará corrente se *pelo menos um* dos interruptores estiver fechado, isto é, apresentar o estado 1. Denotaremos a ligação de dois interruptores *a* e *b* em paralelo por a + b. Então:



——————— a + b ———————

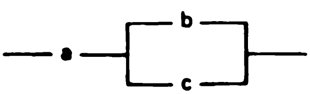
Sejam *a* e *b* dois interruptores ligados em *série*. Numa ligação em série só passará corrente se ambos os interruptores estiverem fechados, isto é, se a = b = 1. Denotaremos a ligação de dois interruptores *a* e *b* em série por a · b ou simplesmente ab. Então:

———— a ———— b ————　　　　——————— a · b ———————

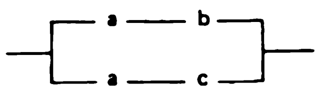
Assim, considerando os estados possíveis de serem assumidos pelos interruptores nas ligações em série e em paralelo, podemos notar que:

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$a + a' = 1$	$a \cdot a' = 0$
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$

Todas estas equações podem ser verificadas desenhando-se o circuito apropriado. As ligações de:



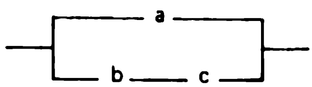
e



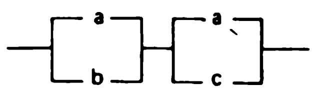
são $a \cdot (b + c)$ e $(a \cdot b) + (a \cdot c)$, respectivamente. Os circuitos estão ambos abertos se $a = 0$ ou $b = c = 0$, e estão ambos fechados se $a = 1$ e ($b = 1$ ou $c = 1$); logo, suas ligações são iguais. Então:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

As ligações de:



e



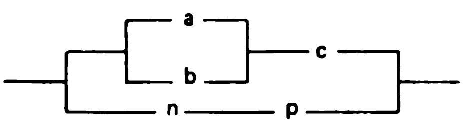
são $a + (b \cdot c)$ e $(a + b) \cdot (a + c)$, respectivamente. Os circuitos estão ambos abertos se $a = 0$ e ($b = 0$ ou $c = 0$), e ambos fechados se $a = 1$ ou $b = c = 1$; logo, suas ligações são iguais. Então:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

Vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo:

Determinar a ligação do seguinte circuito:



Solução:

$(a + b) \cdot c + (n \cdot p)$.

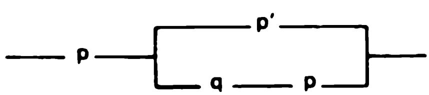
2º Exemplo:

Desenhar os circuitos cujas ligações são:

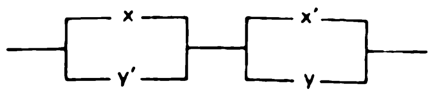
a) $p \cdot (p' + q \cdot p)$
b) $(x + y') \cdot (x' + y)$.

Solução:

a)



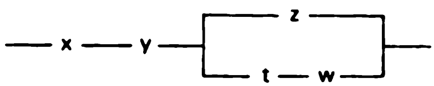
b)



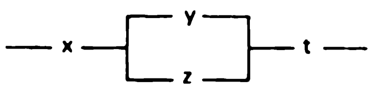
EXERCÍCIOS

1. Dar as expressões algébricas dos circuitos desenhados:

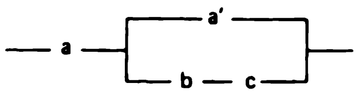
a)



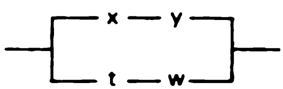
b)



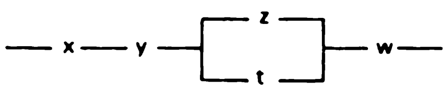
c)



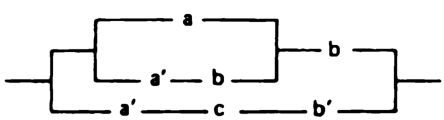
d)



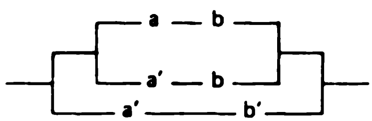
e)



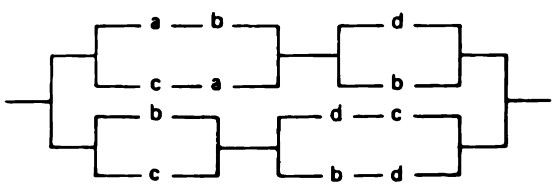
f)



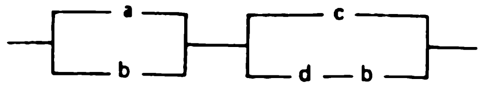
g)



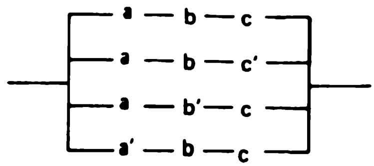
h)



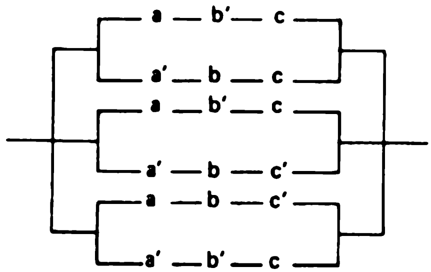
i)



j)



l)



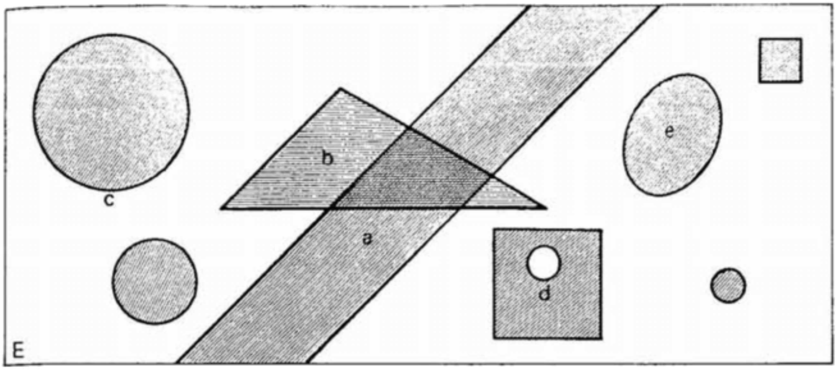
2. Desenhar os circuitos cujas ligações são dadas pelas expressões:

a) $p \cdot (q + r)$
b) $m + (p' \cdot q' \cdot r')$
c) $m + n + p + q$
d) $(x \cdot y) + (x' \cdot z)$
e) $(x' \cdot y) + (x \cdot y')$
f) $(p + q) \cdot (p' + q')$
g) $(p + q) \cdot (p + q' + r')$
h) $(a + b \cdot c) \cdot (a' \cdot b' + c') + a' \cdot b' \cdot c'$
i) $p \cdot [q' \cdot (s + r) + r \cdot s] + (q + p') \cdot (r \cdot s' + s)$

> *Atenção:* O leitor não deve passar às páginas seguintes sem que se sinta perfeitamente capaz e desembaraçado nos dois tipos de exercícios das seqüências acima. Tente de novo, marcando o tempo e os erros cometidos.

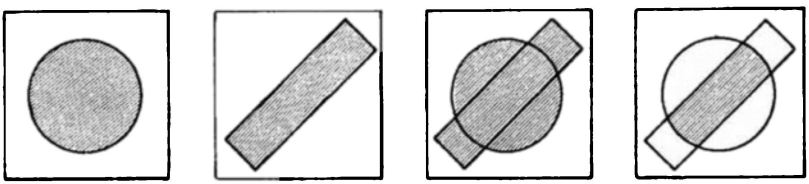
1.3 CONJUNTOS

Sejam a, b, c, ... conjuntos de pontos tomados num espaço E dado. Na figura abaixo, o retângulo é o nosso espaço E e as figuras internas são os conjuntos.



Denotaremos por a + b o conjunto de todos os pontos que pertencem só ao conjunto a ou só ao conjunto b ou a ambos. Dizemos que *a + b* é a *união* de *a* com *b*.

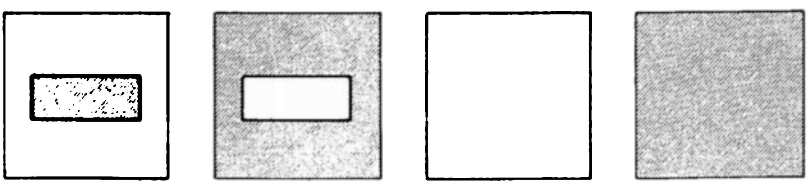
O conjunto de pontos comuns a ambos, isto é que pertencem a *a* e *b*, será denotado por *a · b*. Dizemos que *a · b* é a *intersecção* de *a* e *b*, que pode ser denotada também por *ab*.



a | b | a + b | a · b

Seja *a'* o conjunto de todos os pontos do espaço considerado que não pertencem a *a*. Dizemos que *a'* é o *complemento* de *a*.

Chamaremos *conjunto vazio* e o denotaremos por 0 o conjunto que não contém pontos; denotaremos por 1 o conjunto de todos os pontos, que é o *conjunto universo*.



a | a' | 0 | 1

Para dois conjuntos quaisquer *a* e *b* do universo 1 valem as igualdades:

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
$a + a' = 1$	$a \cdot a' = 0$
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$

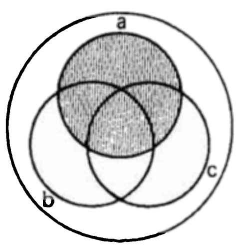
Podemos verificar sua validade construindo os diagramas apropriados, por exemplo, pelos círculos de Euler ou diagramas de Venn. Outros resultados podem ser obtidos para três conjuntos quaisquer *a, b* e *c.*

1º Exemplo:

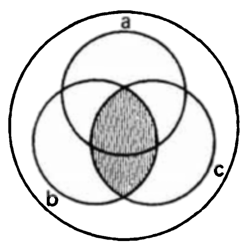
Mostrar mediante diagramas apropriados que:

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

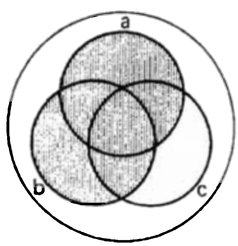
Solução:



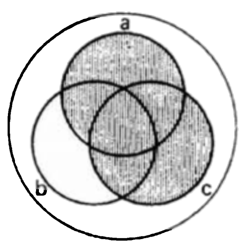
a



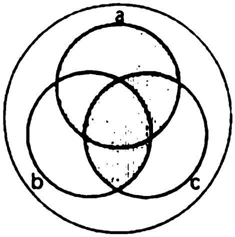
$b \cdot c$



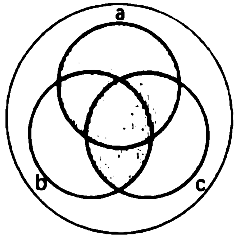
$a + b$



$a + c$



a + (b · c)

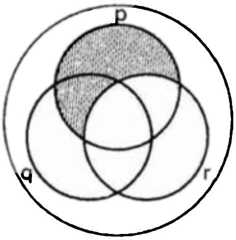


(a + b) · (a + c)

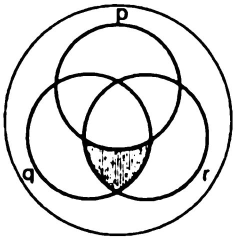
2º Exemplo:

Ilustrar pelos círculos de Euler a expressão pr' + p'qr.

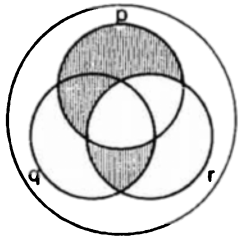
Solução:



pr'



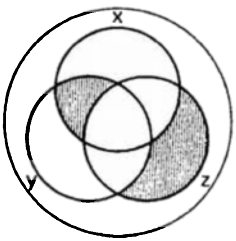
p'qr



pr' + p'qr

3º Exemplo:

Dar a expressão da região hachurada no diagrama:



Solução:

x · y · z' + x' · y' · z

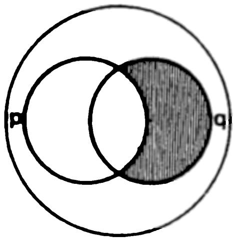
EXERCÍCIOS

1. Desenhar os diagramas de Euler-Venn para mostrar:

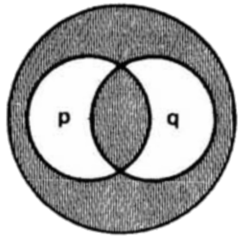
   a) $p + q'$
   b) $p \cdot q'$
   c) $p \cdot q' + p' \cdot q$
   d) $(p + q) \cdot r$
   e) $(p' + q') \cdot r$
   f) $(p + q) \cdot r$

2. Dar as expressões correspondentes aos conjuntos hachurados:

a)



b)



3. Usando círculos de Euler, mostrar que:

   a) $(p + q)' = p' \cdot q'$
   b) $p + (p' \cdot q) = p + q$
   c) $(p')' = p$

1.4 PROPOSIÇÕES

Chamamos *conceito primitivo* aquele conceito que aceitamos sem definição. Enquadraremos neste caso o conceito de *proposição* e, portanto, não o definiremos. Entretanto, nada impede que conheçamos suas qualidades, lembrando que *proposição* é uma sentença declarativa, afirmativa e que deve exprimir um pensamento de sentido completo, podendo ser escrita na *forma simbólica* ou na *linguagem usual.* Então, são proposições:

a) $\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = 1$

b) $\sqrt{3} < \pi$

c) O México fica na América do Norte.

Dizemos que o *valor lógico* de uma proposição é a *verdade* (1) se a proposição é verdadeira; é a *falsidade* (0) se a proposição é falsa. Por exemplo:

a) O Japão fica na África.
b) O Brasil ganhou a Copa do Mundo de 1970 no México.

O valor lógico da proposição (a) é a falsidade (0), e da proposição (b) é a verdade (1).

As proposições podem ser *simples* ou *compostas*. *Proposição simples* é a que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Indicaremos tais proposições por letras minúsculas de nosso alfabeto, da seguinte forma:

p: Carlos é careca.
q: É dos carecas que elas gostam mais.
r: O número 16 é quadrado perfeito.
s: $\log_2 1 = 0$.

A *proposição composta* é formada por duas ou mais proposições relacionadas pelos conectivos "e", "ou" e "se... então" (ou "implica"). Serão indicadas por letras maiúsculas P, Q, R. Exemplo:

Sejam p = $1 + 2 = 3$, q = 2 ± 1 duas proposições (no caso, ambas de valor 1). Podemos formar as proposições compostas:

P = $p \cdot q$: $1 + 2 = 3$ e $2 \neq 1$
Q = $p + q$: $1 + 2 = 3$ ou $2 \neq 1$
R = $p \longrightarrow q$: $1 + 2 = 3$ implica $2 \neq 1$

Observações:

a) Quando for conveniente indicar que uma proposição composta P é formada pelas proposições simples p, q, r, ..., escreve-se: P (p, q, r, ...).
b) As proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas.
c) As proposições compostas são também chamadas *fórmulas proposicionais*.

Indicaremos o *valor lógico* de uma proposição simples p, por V(p). Assim, se p é verdadeira, V(p) = 1 e se p é falsa, V(p) = 0. No caso de uma proposição composta P, indica-se por V(p). Nas proposições abaixo:

p: O sol é verde.	V(p) = 0.
q: Um hexágono tem 9 diagonais.	V(q) = 1.
r: 2 é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$.	V(r) = 0.

1.4.1 Princípios fundamentais da lógica matemática

a) *Princípio da Não-contradição:*

Uma proposição não pode ser simultaneamente "verdadeira e falsa".

b) *Princípio do Terceiro Excluído:*

Toda proposição ou é só verdadeira ou só falsa, nunca ocorrendo um terceiro caso.

De acordo com esses princípios, podemos afirmar que: *toda proposição admite um e um só dos valores 1,0.*

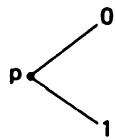
Chamam-se *conectivos lógicos* palavras ou expressões que se usam para formar novas proposições, a partir de proposições dadas. Damos abaixo algumas proposições compostas por diferentes conectivos (grifados):

P: O número 4 é quadrado perfeito *e* o número 3 é ímpar.
Q: O triângulo ABC é retângulo *ou* isósceles.
R: *Se* João estuda, *então* sabe a matéria.

1.4.2 Tabela-verdade

Pelo Princípio do Terceiro Excluído, toda proposição tem $V(p) = 1$ ou $V(p) = 0$.

p
0
1

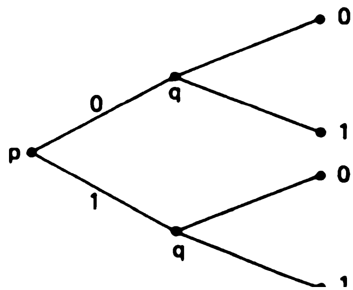


Nas composições, o valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado. Usaremos como meio auxiliar na construção das tabelas-verdade o "diagrama da árvore", que se vê ao lado das tabelas. Na situação atual, os números que aparecem na primeira coluna têm apenas a finalidade de indicar o número de linhas para cada exemplo apresentado.

Para as proposições compostas, veremos que o número das componentes simples determina o número de linhas das tabelas-verdade. Exemplos:

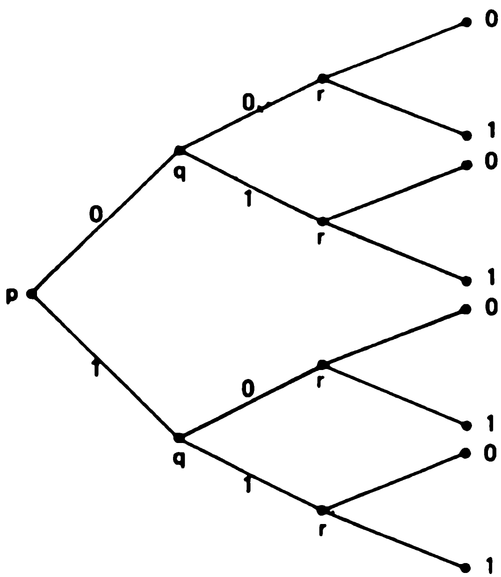
a) P(p,q)

	p	q
1	0	0
2	0	1
3	1	0
4	1	1



b) P(p,q,r)

	p	q	r
1	0	0	0
2	0	0	1
3	0	1	0
4	0	1	1
5	1	0	0
6	1	0	1
7	1	1	0
8	1	1	1



Apresentaremos, sem demonstrar, o seguinte teorema:

Teorema: O *número de linhas de uma tabela-verdade* é dado por 2^n, onde *n* é o número de proposições componentes.

Exemplos:

a) Dada p, n = 1 e a tabela-verdade terá $2^1 = 2$ linhas.
b) Dada P(p,q), n = 2 e a tabela-verdade terá $2^2 = 4$ linhas.
c) Dada P(p,q,r), n = 3 e a tabela-verdade terá $2^3 = 8$ linhas.

EXERCÍCIOS

1. Determinar o valor lógico (1 ou 0) de cada uma das seguintes proposições:

a) O número 11 é primo.	V(a) =
b) $\text{sen}^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ = 1$.	V(b) =
c) O hexaedro regular tem 8 arestas.	V(c) =
d) $\sec^2 32^\circ = 1 + \text{tg}^2 32^\circ$.	V(d) =
e) $\log_a a = 1$.	V(e) =

f) $\log_a 1 = 0$. V(f) =

g) $\operatorname{sen}^2 30^o + \cos^2 30^o = 2$. V(g) =

h) $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} = 1$. V(h) =

i) $\log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3$. V(i) =

j) Todo número divisível por 5 termina em 0. V(j) =

l) O par $\{x, x\}$ é igual a $\{x\}$. V(l) =

m) O par ordenado $(x, x) = (x)$. V(m) =

n) $\{\theta\} = \theta$. V(n) =

o) $\cos(-x) = \cos x$. V(o) =

p) $-2 < 0$. V(p) =

2. Escrever cinco proposições de valor lógico igual a 1.

3. Escrever cinco proposições falsas.

2
Operações Lógicas sobre Proposições

Estudaremos as operações do cálculo proposicional também chamadas *operações lógicas.*

2.1 NEGAÇÃO (')

Seja p uma proposição. Denotaremos a proposição composta pelo modificador *NÃO* por p' e lê-se: "não p". Então, V(p') = 0 (falsidade) quando V(p) = 1 (verdade) e V(p') = 1 (verdade) quando V(p) = 0 (falsidade).

O valor lógico da negação de uma proposição p é definido pela tabela-verdade:

p	p'
0	1
1	0

que nos dá: 1' = 0, 0' = 1. Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) p: 1 + 4 = 5 (1)
p': 1 + 4 ≠ 5 (0)
V(p') = 0

b) q: João é estudante. (0)
q': João não é estudante. (1)
V(q') = 1

Outras maneiras de exprimir uma negação:

Não é verdade que João é estudante.
É falso que João é estudante.

2.2 CONJUNÇÃO (.)

A *conjunção* de duas proposições p e q é uma proposição verdadeira quando $V(p) = V(q) = 1$, e falsa nos demais casos, isto é, só é verdadeira quando ambas as componentes forem verdadeiras. Chamamos $p \cdot q$ a conjunção de p e q e lê-se: "p e q".

O valor lógico da conjunção de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

p	q	p · q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) p: $\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{2}{2}$ (1)
q: $\cos 0^{\circ} = 1$ (1)
$V(p \cdot q) = 1$

b) r: $\log_2 2 = 1$ (1)
s: $2^{0} = 2$ (0)
$V(r \cdot s) = 0$

2.3 DISJUNÇÃO INCLUSIVA OU SOMA LÓGICA (+)

A *disjunção* de duas proposições p e q é uma proposição falsa quando $V(p) = V(q) = 0$ e verdadeira nos demais casos, ou seja, quando pelo menos uma das componentes é verdadeira. Chamamos este conectivo *disjunção inclusiva* ou *soma lógica;* denotaremos a disjunção de p e q por $p + q$, e lê-se: "p ou q".

O valor lógico da disjunção inclusiva de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

p	q	p + q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) p: $\pi = 3$ (0)
   q: $9 - 3 = 6$ (1)
   $V(p + q) = 1$

b) p: $\sqrt{2} < 1$ (0)
   q: $2 < \sqrt{2}$ (0)
   $V(p + q) = 0$

2.4 DISJUNÇÃO EXCLUSIVA ($\oplus$)

A palavra *ou* tem dois sentidos; no caso anterior, temos a *disjunção inclusiva*, que exemplificamos a seguir:

P: João é estudante *ou* mecânico,

indicando que "pelo menos uma das proposições"

p: João é estudante
q: João é mecânico

é verdadeira, podendo ambas ser verdadeiras:

João é estudante *e* mecânico.

Por outro lado, temos o caso em que isto não ocorre; é *disjunção exclusiva*, definida a seguir.

A *disjunção exclusiva* de duas proposições p e q é uma proposição verdadeira somente quando $V(p) \neq V(q)$ e falsa quando $V(p) = V(q)$, ou seja, quando p e q são ambas falsas ou ambas verdadeiras. Denotaremos a disjunção exclusiva de p e q por $p \oplus q$, e lê-se: "p ou q, mas não ambas".

O valor lógico da disjunção exclusiva é definido pela tabela-verdade:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) $p: \pi < 3$ (0)
$q: 3 > 2$ (1)
$V(p \oplus q) = 1$

b) $p: \pi < 3$ (0)
$q: \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} < 1$ (0)
$V(p \oplus q) = 0$

2.5 CONDICIONAL ($\longrightarrow$)

O *condicional* de duas proposições p e q é uma proposição falsa quando $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, sendo verdadeira nos demais casos. Representa-se o condicional de p e q por $p \longrightarrow q$ e lê-se: "se p então q". A proposição p é chamada *antecedente* e a proposição q é o *conseqüente* do condicional.

O valor lógico do condicional de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

p	q	$p \longrightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) $p: \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ (1)
$q: \operatorname{sen} 0^{\circ} = 0$ (1)
$V(p \rightarrow q) = 1$

b) p: $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1)

q: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 0$ (0)

$V(p \longrightarrow q) = 0$

2.6 BICONDICIONAL ($\longleftrightarrow$)

O *bicondicional* de duas proposições p e q é uma proposição verdadeira quando $V(p) = V(q)$ e falsa quando $V(p) \neq V(q)$. Denotaremos o bicondicional de p e q por $p \longleftrightarrow q$ e lê-se: "p se e somente se q". Convém notar que o bicondicional não é uma operação original, mas dupla aplicação do conectivo ($\longrightarrow$).

O valor lógico do bicondicional de duas proposições é definido pela tabela-verdade:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Então, dadas as proposições abaixo, vem:

a) p: $\sqrt{2}$ é um número irracional (1)
q: $\sqrt{2} > 1$ (1)
$V(p \longleftrightarrow q) = 1$

b) p: $\sqrt{3} \in Z$ (0)
q: $\sqrt{3} > 1$ (1)
$V(p \longleftrightarrow q) = 0$

Daremos de maneira breve a ordem de precedência a ser observada entre as operações estudadas, que é a seguinte:

a) $'$
b) $\cdot$ e $+$
c) $\longrightarrow$
d) $\longleftrightarrow$.

Esta ordem de precedência entre os conectivos tem a finalidade de permitir a identificação da forma da proposição composta, conforme mostramos a seguir:

Assim, $p \longleftrightarrow q \longrightarrow r$ é da forma bicondicional; a proposição $p + q' \longrightarrow q \cdot r$ é da forma condicional, ao passo que, $p + (q' \longrightarrow q \cdot r)$ é composta por disjunção. Portanto, a correta colocação de parênteses, quando for o caso, é de extrema importância.

EXERCÍCIOS

1. Sejam as proposições p: João joga futebol e q: João joga tênis. Escrever na linguagem usual as seguintes proposições:

   a) $p + q$
   b) $p \cdot q$
   c) $p \cdot q'$
   d) $p' \cdot q'$
   e) $(p')'$
   f) $(p' \cdot q')'$

2. Dadas as proposições p: Maria é bonita e q: Maria é elegante, escrever na linguagem simbólica as seguintes proposições:

   a) Maria é bonita e elegante.
   b) Maria é bonita, mas não é elegante.
   c) Não é verdade que Maria não é bonita ou elegante.
   d) Maria não é bonita nem elegante.
   e) Maria é bonita ou não é bonita e elegante.
   f) É falso que Maria não é bonita ou que não é elegante.

3. Classificar as proposições compostas abaixo, como conjunção, disjunção, condicional, bicondicional ou negação.

   a), $(p \cdot q')'$
   b) $p + (q \cdot r')$
   c) $p \cdot (q \longrightarrow r)$
   d) $p \cdot q \longrightarrow r'$
   e) $(p \cdot q')' + (r + s)$
   f) $(p + q') \longleftrightarrow (r \cdot s)$
   g) $[p \longrightarrow (q \cdot r)] \cdot s$
   h) $[p \longrightarrow (q \cdot r)]'$
   i) $[p + (q \cdot r)]' \longrightarrow s'$
   j) $(p \longleftrightarrow q) \longrightarrow r'$

4. Determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

   a) $3 + 2 = 7$ e $5 + 5 = 10$.
   b) $\text{sen}\,\pi = 0$ e $\cos\pi = 0$.

c) $3 > 2$ ou $\operatorname{sen} 90^{\circ} > \operatorname{tg} 45^{\circ}$.
d) se $|-1| < 0$ então $\operatorname{sen} 90^{\circ} = 1$.
e) $3 > 1 \longrightarrow 3^{0} = 3$.
f) $\pi > 4 \longrightarrow 3 > \sqrt{5}$.
g) $\operatorname{tg} \pi = 1$ se e somente se $\operatorname{sen} \pi = 0$.
h) Não é verdade que 12 é um número ímpar.
i) $(1 + 1 = 2 \longleftrightarrow 4 + 3 = 5)'$.
j) $(\operatorname{sen} 0^{\circ} = 0$ ou $\cos 0^{\circ} = 1)'$.

5. Sabendo que $V(p) = 1$ e $V(q) = 0$, determinar o valor lógico de cada uma das proposições:

a) $p \cdot q'$
b) $p + q'$
c) $p' \cdot q$
d) $p' \cdot q'$
e) $p' + q'$
f) $p \cdot (p' + q)$

6. Determinar $V(p)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(q) = 0$ e $V(p \cdot q) = 0$.
b) $V(q) = 0$ e $V(p + q) = 0$.
c) $V(q) = 0$ e $V(p \longrightarrow q) = 0$.
d) $V(q) = 0$ e $V(p \longrightarrow q) = 1$.
e) $V(q) = 1$ e $V(p \longleftrightarrow q) = 0$.
f) $V(q) = 0$ e $V(p \longleftrightarrow q) = 1$.

7. Determinar $V(p)$ e $V(q)$ em cada um dos seguintes casos, sabendo que:

a) $V(p \longrightarrow q) = 1$ e $V(p \cdot q) = 0$.
b) $V(p \longrightarrow q) = 1$ e $V(p + q) = 0$.
c) $V(p \longleftrightarrow q) = 1$ e $V(p \cdot q) = 1$.
d) $V(p \longleftrightarrow q) = 0$ e $V(p' + q) = 1$.

8. Para que valores lógicos de p e q se tem $V(p \cdot q) = V(p \longrightarrow q)$?

9. Se $V(p) = V(q) = 1$ e $V(r) = V(s) = 0$, determinar os valores lógicos das seguintes proposições:

a) $p' + r$
b) $[r + (p \longrightarrow s)]$
c) $[p' + (r \cdot s)']$
d) $[q \longleftrightarrow (p' \cdot s)]'$
e) $(p \longleftrightarrow q) + (q \longrightarrow p')$
f) $(p \longleftrightarrow q) \cdot (r' \longrightarrow s)$

g) $\{[q' \cdot (p \cdot s')]'\}'$

h) $p' + [q \cdot (r \longrightarrow s')]$

i) $(p' + r) \longrightarrow (q \longrightarrow s)$

j) $[p' + (q \cdot s)]' + (r \longrightarrow s')$

l) $q' \cdot [(r' + s) \longleftrightarrow (p \longrightarrow q')]$

m) $[p \longrightarrow (q \longrightarrow r)]' \longrightarrow s$

10. Determinar os valores lógicos das proposições abaixo, justificando os casos em que os dados forem insuficientes:

a) $p' \longrightarrow (q + r')$, sabendo que $V(r) = 0$.

b) $(p \longleftrightarrow q) + (q \longrightarrow p')$, sabendo que $V(q) = 0$.

c) $p \cdot [q' \longrightarrow (r \cdot s)]$, sabendo que $V(p) = 0$.

d) $p \longrightarrow (q \cdot s)$, sabendo que $V(p) = 1$.

e) $(p' + r) \longrightarrow (q \longrightarrow s)$, sabendo que $V(q) = 0$.

f) $(p \longrightarrow r) \cdot s$, sabendo que $V(r) = 1$.

g) $p \longrightarrow (r + s)$, sabendo que $V(r) = 1$.

h) $(p \cdot q) \longleftrightarrow r$, sabendo que $V(q) = 1$.

i) $[(p \longrightarrow q) \cdot p] \longrightarrow p'$, sabendo que $V(p) = 0$.

j) $p \longrightarrow (q' \cdot r)$, sabendo que $V(q) = 0$ e $V(r) = 1$.

3
Construção da Tabela-verdade

Para se construir a tabela-verdade de uma proposição composta dada, procede-se da seguinte maneira:

a) determina-se o número de linhas da tabela-verdade que se quer construir;
b) observa-se a precedência entre os conectivos, isto é, determina-se a forma das proposições que ocorrem no problema;
c) aplicam-se as definições das operações lógicas que o problema exigir.

Vejamos alguns exemplos:

1º Exemplo:

Construir a tabela-verdade da proposição: $P(p,q) = (p \cdot q')'$.

Solução:

p	q	q'	$p \cdot q'$	$(p \cdot q')'$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Considerando as linhas da tabela-verdade, temos:

$$P(00) = 1$$
$$P(01) = 1$$
$$P(10) = 0$$
$$P(11) = 1$$

e, para todas as linhas da tabela-verdade, vem:

$$P(00,01,10,11) = 1101.$$

O conjunto $V = \{00,01,10,11\}$ é o conjunto de todos os valores possíveis de serem assumidos pelas proposições componentes de $P(p,q)$ e, considerando que a cada elemento de V corresponde um e somente um dos valores de $\{0,1\}$, diremos que

$$P(p,q) : V \longrightarrow \{0,1\},$$

ou seja, a tabela-verdade de $P(p,q)$ é uma aplicação de V em $\{0,1\}$. O mesmo se dá com proposições compostas por um número maior de proposições componentes.

2º Exemplo:

Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p,q) = (p \cdot q)' + (q \longleftrightarrow p)'.$$

Solução:

p	q	$p \cdot q$	$(p \cdot q)'$	$q \longleftrightarrow p$	$(q \longleftrightarrow p)'$	$(p \cdot q)' + (q \longleftrightarrow p)'$
0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0

Procedendo de maneira análoga ao exemplo anterior, temos:

$P(00) = 1$
$P(01) = 1$
$P(10) = 1$
$P(11) = 0$, ou $P(00,01,10,11) = 1110$.

Então, determinar $P(00,01,10,11)$ consiste em construir a tabela-verdade para a proposição dada e responder na forma indicada nos exemplos dados.

Há outros métodos para construção de tabelas-verdade, porém nos restringiremos ao método utilizado nos exemplos dados.

3º Exemplo:

Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p,q,r) = p + r' \longrightarrow q \cdot r'.$$

Solução:

p	q	r	r'	$p + r'$	$q \cdot r'$	$p + r' \longrightarrow q \cdot r'$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0

No caso de três proposições componentes, temos:

$P(000) = 0 \qquad P(100) = 0$
$P(001) = 1 \qquad P(101) = 0$
$P(010) = 1 \qquad P(110) = 1$
$P(011) = 1 \qquad P(111) = 0,$ ou
$P(000,001,010,011,100,101,110,111) = 01110010.$

Fazendo $V = \{000,001,010,011,100,101,110,111\}$, ou seja, V é o conjunto de todos os valores possíveis de serem assumidos pelas proposições componentes de $P(p,q,r)$, mediante raciocínio análogo ao caso de $P(p,q)$, temos:

$$P(p,q,r): V \longrightarrow \{0,1\}.$$

Então, a tabela-verdade de $P(p,q,r)$ é uma aplicação de V em $\{0,1\}$.

4º Exemplo:

Construir a tabela-verdade da proposição:

$$P(p,q,r) = (p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow r) \longrightarrow (p \longrightarrow r).$$

Solução:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	$(p \to q) \cdot (q \to r)$	$(p \to q) \cdot (q \to r) \to (p \to r)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Neste caso, temos:

$$P(000) = P(001) = P(010) = P(011) = P(100) = P(101) = P(110) = P(111) = 1,$$

ou $$P(000,001,010,011,100,101,110,111) = 11111111.$$

Quando o valor lógico de uma proposição composta for sempre a *verdade (1),* quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições componentes, temos uma *tautologia.* Quando o valor lógico de uma proposição composta for sempre a *falsidade (0),* temos uma *contradição.* E, finalmente, quando na tabela-verdade de uma proposição composta ocorrem os valores 0 e 1, temos uma *contingência* ou *indeterminação.*

EXERCÍCIOS

1. Construir as tabelas-verdade das proposições seguintes:

a) $(p \cdot q')'$
b) $(p \longrightarrow q')'$
c) $p \cdot q \longrightarrow p + q$
d) $p' \longrightarrow (q \longrightarrow p)$
e) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow p \cdot q$
f) $q \longleftrightarrow q' \cdot p$
g) $(p \longleftrightarrow q') \longrightarrow q + p$
h) $(p \longleftrightarrow q') \longrightarrow p' \cdot q$
i) $p' \cdot r \longrightarrow q + r$
j) $p \longrightarrow r \longleftrightarrow q + r'$
l) $p \longrightarrow (p \longrightarrow r') \longleftrightarrow q + r$
m) $(p + q \longrightarrow r) + (p' \longleftrightarrow q + r')$

2. Determinar P(00,01,10,11) em cada um dos seguintes casos:

a) $P(p,q) = (p' \longleftrightarrow q)'$
b) $P(p,q) = p' + q \longrightarrow p$
c) $P(p,q) = (p + q) \cdot (p \cdot q)'$
d) $P(p,q) = (p \cdot q') + (p' \cdot q)$
e) $P(p,q) = ((p + q) \cdot (p' + q'))'$

3. Determinar P(000,001,010,011,100,101,110,111) em cada um dos seguintes casos:

a) $P(p,q,r) = p \cdot r' \longrightarrow q'$
b) $P(p,q,r) = p \cdot q' \longleftrightarrow (p + r')'$
c) $P(p,q,r) = (p + q')' \cdot (p' + r)$

4. Determinar P(101) em cada um dos seguintes casos:

a) $P(p,q,r) = p' + (q \cdot r')$
b) $P(p,q,r) = (p + r') \cdot (q + r')$
c) $P(p,q,r) = (r \cdot (p + q')) \cdot (r' + (p \cdot q))'$
d) $P(p,q,r) = (p + (q \longrightarrow r')) \cdot (p' + r \longleftrightarrow q')$

5. Sabendo que $V(p) = V(r) = 1$ e $V(q) = V(s) = 0$, determinar o valor lógico de cada uma das proposições:

a) $p \cdot q \longleftrightarrow r \cdot s'$
b) $(p' \longrightarrow q) \longrightarrow (s \longrightarrow r)$
c) $p \longrightarrow q' \longleftrightarrow (p + r) \cdot s$
d) $(p \cdot q) \cdot (r \cdot s) \longrightarrow p + s$

6. Sabendo que os valores lógicos das proposições p, q, r e s são, respectivamente, 1, 1, 0 e 0, determinar o valor lógico de cada uma das proposições:

a) $p \longrightarrow q \longleftrightarrow q \longrightarrow p$
b) $((p + s) \cdot (s + r))'$
c) $(r \longrightarrow p) \longrightarrow (p \longrightarrow r)$
d) $(p \longrightarrow r) \longrightarrow (p' \longrightarrow r')$

7. Dizer quais as proposições que satisfazem às tabelas-verdade abaixo:

a)

p	q	?
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

b)

p	q	?
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

c)

p	q	?
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

A: $p + q$
B: $p \cdot q$
C: $p \longrightarrow q$
D: $q \longrightarrow p$
E: nenhuma delas.

A: $p + q'$
B: $p \longrightarrow q$
C: $p' \longrightarrow q$
D: $p' \cdot q$
E: nenhuma delas.

A: $p \longrightarrow q$
B: $q \longrightarrow p$
C: $p \longleftrightarrow q$
D: $p' \longleftrightarrow q'$
E: nenhuma delas.

8. Determinar as proposições compostas por conjunção que satisfazem a cada uma das tabelas-verdade indicadas.

$\cdot$						
p	q	A	B	C	D	E
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1

9. Determinar as proposições compostas por disjunção que satisfazem a cada uma das tabelas-verdade indicadas.

$+$						
p	q	A	B	C	D	E
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1

10. Determinar as proposições compostas por condicional que satisfazem a cada uma das tabelas-verdade indicadas.

$\longrightarrow$						
p	q	A	B	C	D	E
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1

11. Determinar quais das seguintes proposições são tautologias, contradições ou contingências:

a) $p \longrightarrow (p' \longrightarrow q)$
b) $p' + q \longrightarrow (p \longrightarrow q)$
c) $p \longrightarrow (q \longrightarrow (q \longrightarrow p))$
d) $((p \longrightarrow q) \longleftrightarrow q) \longrightarrow p$
e) $p + q' \longrightarrow (p \longrightarrow q')$
f) $p' + q' \longrightarrow (p \longrightarrow q)$
g) $p \longrightarrow (p + q) + r$
h) $p \cdot q \longrightarrow (p \longleftrightarrow q + r)$
i) $(q \longrightarrow p) \longrightarrow (p \longrightarrow q)$

4
Relações de Implicação e de Equivalência

O estudo das relações de implicação e de equivalência, de grande importância na Lógica, será feito de maneira suscinta, como convém ao nosso estudo. Antes, porém, definiremos alguns conceitos introdutórios.

4.1 DEFINIÇÕES

a) Duas proposições são ditas *independentes* quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem as quatro alternativas.

Exemplo:

p	q
0	0
0	1
1	0
1	1

b) Dizemos que duas proposições são *dependentes* quando, em suas tabelas-verdade, uma ou mais alternativas não ocorrem.

Exemplo:

p	q	$q \longrightarrow p$
$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$
$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$
$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$

Não ocorre a alternativa 10 entre p e $q \longrightarrow p$.

Neste caso, dizemos que existe uma *relação* entre as proposições p e $q \longrightarrow p$. Examinaremos as *relações simples* (quando uma alternativa não ocorre) e as *relações duplas* (quando duas alternativas não ocorrem).

4.2 RELAÇÃO DE IMPLICAÇÃO

Diz-se que uma proposição p *implica* uma proposição q quando, em suas tabelas-verdade, *não ocorre 10* (nessa ordem!).

Notação: $p \Longrightarrow q$.

Observação importante:

Não confundir os símbolos $\longrightarrow$ e $\Longrightarrow$, pois, enquanto o primeiro representa uma operação entre proposições dando origem a uma nova proposição, o segundo indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

Exemplo: Verificar se $p \Longrightarrow q \longrightarrow p$.

Solução:

p	q	$q \longrightarrow p$
$\boxed{0}$	0	$\boxed{1}$
$\boxed{0}$	1	$\boxed{0}$
$\boxed{1}$	0	$\boxed{1}$
$\boxed{1}$	1	$\boxed{1}$

Comparando as tabelas-verdade p e $q \longrightarrow p$, verificamos que *não ocorre 10* (nessa ordem!) numa mesma linha. Portanto: $p \Longrightarrow q \longrightarrow p$.

4.3 RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA

Diz-se que uma proposição p é *equivalente* a uma proposição q quando, em suas tabelas-verdade, *não ocorrem 10 nem 01.*

Notação: $p \Longleftrightarrow q$.

Observação importante:

Vale para os símbolos $\longleftrightarrow$ e $\Longleftrightarrow$ a mesma observação feita para $\longrightarrow$ e $\Longrightarrow$.

Exemplo: Verificar se $p \cdot q \Longleftrightarrow (p' + q')'$.

Solução:

p	q	$p \cdot q$	p'	q'	$p' + q'$	$(p' + q')'$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	0	0	0	1

Comparando as tabelas-verdade de $p \cdot q$ e $(p' + q')'$, verificamos que *não ocorre 10 nem 01* numa mesma linha. Portanto, $p \cdot q \Longleftrightarrow (p' + q')'$.

De maneira prática, *verifica-se que duas proposições dadas são equivalentes quando suas tabelas-verdade forem iguais.*

4.4 EQUIVALÊNCIAS NOTÁVEIS

Dupla negação: $(p')' \Longleftrightarrow p$.

p	p'	$(p')'$
0	1	0
1	0	1

Leis idempotentes:

a) $p + p \Longleftrightarrow p$.
b) $p \cdot p \Longleftrightarrow p$.

p	$p + p$	$p \cdot p$
0	0	0
1	1	1

Leis comutativas:

a) $p + q \Longleftrightarrow q + p$.
b) $p \cdot q \Longleftrightarrow q \cdot p$.

a)

p	q	p + q	q + p
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Leis associativas:

a) $p + (q + r) \Longleftrightarrow (p + q) + r$.
b) $p \cdot (q \cdot r) \Longleftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$.

a)

p	q	r	q + r	p + (q + r)	p + q	(p + q) + r
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Leis de De Morgan:

a) $(p \cdot q)' \Longleftrightarrow p' + q'$.
b) $(p + q)' \Longleftrightarrow p' \cdot q'$.

a)

p	q	p′	q′	p′ + q′	p · q	(p · q)′
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

b) Verificar como exercício.

Leis distributivas:

a) $p \cdot (q + r) \Longleftrightarrow (p \cdot q) + (p \cdot r)$.
b) $p + (q \cdot r) \Longleftrightarrow (p + q) \cdot (p + r)$.

a)

p	q	r	$q + r$	$p \cdot (q + r)$	$p \cdot q$	$p \cdot r$	$(p \cdot q) + (p \cdot r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

b) Verificar como exercício.

Bicondicional: $p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow (p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p)$.

p	q	$p \longleftrightarrow q$	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Condicionais:

a) $p \longrightarrow q$.
b) $q' \longrightarrow p'$ (contrapositivo).
c) $q \longrightarrow p$ (recíproca do condicional)
d) $p' \longrightarrow q'$ (recíproca do contrapositivo).

p	q	p'	q'	$p \longrightarrow q$	$q' \longrightarrow p'$	$q \longrightarrow p$	$p' \longrightarrow q'$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Destas tabelas tiramos as seguintes *equivalências notáveis:*

$$(p \longrightarrow q) \Longleftrightarrow (q' \longrightarrow p')$$
$$(q \longrightarrow p) \Longleftrightarrow (p' \longrightarrow q').$$

4.5 PROPRIEDADES

a) A condição necessária e suficiente para que $p \Longrightarrow q$ é que o condicional $p \longrightarrow q$ seja uma tautologia.

Demonstração:

A – A condição é necessária: $(p \Longrightarrow q) \longrightarrow (p \xrightarrow{T} q)$.

Se $p \Longrightarrow q$, não ocorre 10, logo o condicional $p \longrightarrow q$ é uma tautologia.

B – A condição é suficiente: $(p \xrightarrow{T} q) \longrightarrow (p \Longrightarrow q)$.

Se $p \xrightarrow{T} q$, não ocorre em sua tabela-verdade a alternativa 10; logo, $p \Longrightarrow q$. c.q.d.

b) A condição necessária e suficiente para que $p \Longleftrightarrow q$ é que $p \longleftrightarrow q$ seja uma tautologia.

Demonstração análoga à anterior.

EXERCÍCIOS

1. Dizer se entre as seguintes proposições ~~há~~ implicação ou equivalência quando tomadas aos pares.

   a) p'
   b) $q \longrightarrow p'$
   c) $p \longrightarrow q$
   d) $q' + p$
   e) $p \cdot q$

2. Mostrar que:

   a) $q \Longrightarrow p \longrightarrow q$
   b) $q \not\Longrightarrow p \cdot q \longleftrightarrow p$
   c) $p \longleftrightarrow q'$ não implica $p' \longrightarrow q'$
   d) p não implica $p \cdot q$
   e) $p + q \not\Longrightarrow p$

3. Verificar mediante tabelas-verdade as seguintes equivalências:

a) $((p + r)')' \Longleftrightarrow p + r$
b) $((p \cdot q')')' \Longleftrightarrow p \cdot q'$
c) $r' \cdot r' \Longleftrightarrow r'$
d) $p \cdot q' + p \cdot q' \Longleftrightarrow p \cdot q'$
e) $(p' + q)' \Longleftrightarrow (q + p')'$
f) $p + q' \cdot r \Longleftrightarrow q' \cdot r + p$
g) $p \cdot (q + p) \Longleftrightarrow p$
h) $p + (p \cdot q) \Longleftrightarrow p$
i) $p \longleftrightarrow p \cdot q \Longleftrightarrow p \longrightarrow q$
j) $q \longleftrightarrow p + q \Longleftrightarrow p \longrightarrow q$
l) $(p \longrightarrow q) \cdot (p \longrightarrow r) \Longleftrightarrow p \longrightarrow q \cdot r$
m) $(p \longrightarrow q) + (p \longrightarrow r) \Longleftrightarrow p \longrightarrow q + r$
n) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r \Longleftrightarrow p \cdot r' \longrightarrow q'$

4. Dadas as proposições abaixo, escrever as proposições equivalentes usando as equivalências notáveis indicadas.

a) Dupla negação:
$((p + q)')'$
$((p' \cdot q')')'$
$p \cdot q$

b) Leis idempotentes:
$p' + q'$
$(p \longrightarrow q) + (p \longrightarrow q)$
$((p \longrightarrow q)' \cdot (p \longrightarrow q)')'$

c) Leis comutativas:
$(p' \cdot q) + r$
$(s \cdot r) \cdot (p \longrightarrow s)'$
$(p \longrightarrow s) \cdot (p + r)$

d) Leis de De Morgan:
$(p' + q')'$
$((p + q) \cdot (r \longrightarrow s)')$
$(p \longrightarrow q) \cdot r'$

e) Leis associativas:
$r + (p' + q')$
$p \cdot ((r \longrightarrow s) \cdot (s + r))$
$((p + q) \cdot (p \longrightarrow r)) \cdot (p + s)$

f) Leis distributivas:
$s' \cdot (p' + q)$
$p + ((q \cdot r)' \cdot (r \longrightarrow s))$

g) Contrapositivo:

$p' \longrightarrow (q \cdot r)'$

$(p + q) \longrightarrow r'$

$(p \longrightarrow q) \longrightarrow (r \longrightarrow s)'$

h) Condicional:

$p' \longrightarrow (q \cdot r)'$

$p + (q \longrightarrow r)$

$(p' + q)'$

i) Bicondicional:

$((p' \longrightarrow q') \cdot (q' \longrightarrow p'))$

$((p \cdot q) \longrightarrow r') \cdot (r' \longrightarrow (p \cdot q))$

$(p \longleftrightarrow q')$

5
Argumento Válido

5.1 DEFINIÇÃO

Chama-se *argumento válido* toda seqüência de proposições $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$, $n \in N$, na qual sempre que as *premissas* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são verdadeiras a *conclusão* p_{n+1} também é verdade e tal que a conjunção das n primeiras implica a última, isto é:

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \Longrightarrow p_{n+1},$$

Então, para testar a validade de um argumento, procede-se da seguinte maneira:

a) constrói-se a tabela-verdade de $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$;
b) constrói-se a tabela-verdade de p_{n+1};
c) comparam-se as tabelas: se na mesma linha ocorrer 10 (nesta ordem!), não há implicação ($\not\Longrightarrow$) e o argumento é *falho*; se na mesma linha não ocorrer 10, haverá implicação ($\Longrightarrow$) e o argumento é válido.

Observação.

A seqüência das proposições pode apresentar-se nas seguintes formas:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore\ p_{n+1} \end{array} \qquad \text{ou} \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, p_{n+1}.$$

1º Exemplo:

Testar a validade do argumento: $p \longrightarrow q$, q , p

Solução:

Temos: $p_1 : p \longrightarrow q$
$p_2 : q$
$p_3 : p$

Devemos verificar se nas condições da definição, $p_1 \cdot p_2 \Longrightarrow p_3$, isto é:

$$(p \longrightarrow q) \cdot q \Longrightarrow p?$$

Procedendo conforme o critério já estabelecido, temos:

p	q	$(p \rightarrow q)$	q	$(p \rightarrow q) \cdot q$	p
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Na 2ª linha, as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa.
Na 4ª linha, as premissas e a conclusão são verdadeiras.
A 2ª linha contradiz a definição de validade: sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira. Ocorre 10. Portanto, $(p \rightarrow q) . q \not\Longrightarrow p$ e o argumento é *falho*.

O leitor deve ter notado na tabela a repetição da coluna correspondente à última proposição da seqüência p, para evitar que, na verificação da ocorrência ou não, numa mesma linha, dos valores 10, não se incorra em erro, verificando a implicação:

$$p \Longrightarrow (p \longrightarrow q) \cdot q$$

em vez de verificar:

$$(p \longrightarrow q) \cdot q \Longrightarrow p$$

que seria a forma correta.

2º Exemplo:

Testar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} p + q \\ p' \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

Solução:

Devemos verificar se nas condições da definição:

$$(p + q) \cdot p' \Longrightarrow q \cdot$$

Construindo as tabelas-verdade correspondentes, temos:

p	q	p'	$p+q$	$(p+q)\cdot p'$	q
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1

Neste argumento, somente a 2ª linha tem ambas as premissas verdadeiras. Como a conclusão é também verdadeira, não ocorre 10. Portanto, $(p+q) \cdot p' \Longrightarrow q$ e o argumento é *válido*.

5.2 REGRAS DE INFERÊNCIA

As regras de inferência são argumentos válidos (simples).

União (U):

$\dfrac{p \cdot q}{p \cdot q}$. É a implicação: $p \cdot q \Longrightarrow p \cdot q$.

Modus Ponens (MP):

$\dfrac{p \longrightarrow q,\ p}{q}$. É a implicação: $(p \longrightarrow q) \cdot p \Longrightarrow q$.

Modus Tollens (MT):

$$\frac{p \longrightarrow q\,,\; q'}{p'}. \text{ É a implicação: } (p \longrightarrow q) \cdot q' \Longrightarrow p'.$$

Adição (A):

$$\frac{p}{p + q}. \text{ É a implicação: } p \Longrightarrow p + q.$$

Simplificação (S):

$$\frac{p \cdot q}{p}. \text{ É a implicação: } p \cdot q \Longrightarrow p.$$

Silogismo Hipotético (SH):

$$\frac{p \longrightarrow q,\; q \longrightarrow r}{p \longrightarrow r}. \text{ É a implicação: } (p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow r) \Longrightarrow p \longrightarrow r.$$

Silogismo Disjuntivo (SD):

$$\frac{p + q,\; p'}{q}. \text{ É a implicação: } (p + q) \cdot p' \Longrightarrow q.$$

Regras do Bicondicional (BIC):

a) $$\frac{p \longrightarrow q,\; q \longrightarrow p}{p \longleftrightarrow q}. \text{ É a implicação: } (p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p) \Longrightarrow p \longleftrightarrow q.$$

b) $$\frac{p \longleftrightarrow q}{(p \longrightarrow q) \cdot (q \longrightarrow p)}. \text{ É a implicação: } p \longleftrightarrow q \Longrightarrow (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p).$$

Dilema Construtivo (DC):

$$\frac{p \longrightarrow q,\; r \longrightarrow s,\; p + r}{q + s}. \text{ É a implicação: } (p \longrightarrow q) \cdot (r \longrightarrow s) \cdot (p + r) \Rightarrow$$
$$\Longrightarrow q + s.$$

Dilema Destrutivo (DD):

$$\frac{p \longrightarrow q,\; r \longrightarrow s,\; q' + s'}{p' + r'}. \text{ É a implicação: } (p \longrightarrow q) \cdot (r \longrightarrow s) \cdot$$
$$\cdot (q' + s') \Longrightarrow p' + r'$$

Dupla Negação (DN):

$$\frac{(p')'}{p} \text{ ou } \frac{p}{(p')'}. \text{ É a implicação: } (p')' \Longrightarrow p \text{ ou } p \Longrightarrow (p')'.$$

Regra da Absorção (RA):

$$\frac{p \longrightarrow q}{p \longrightarrow (p \cdot q)}. \text{ É a implicação: } p \longrightarrow q \Longrightarrow p \longrightarrow (p \cdot q).$$

Simplificação Disjuntiva (S_+):

$$\frac{p + r,\ p + r'}{p}. \text{ É a implicação: } (p + r) \cdot (p + r') \Longrightarrow p.$$

EXERCÍCIOS

1. Testar a validade dos seguintes argumentos:

a) $p \longrightarrow q'$
$p + q'$
q
____
p'

b) $t \longrightarrow r,\ r',\ t + s,\ s$

2. Dados os conjuntos de valores lógicos:

(A)	(B)	(C)	(D)
1	0	1	1
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	0

qual deles torna o seguinte argumento válido?

p	q	premissa	premissa	conclusão
0	0	?	1	1
0	1	?	0	1
1	0	?	1	1
1	1	?	0	0

3. Dado o argumento:

p	q	premissa	premissa	conclusão
0	0	0	0	?
0	1	1	1	?
1	0	1	1	?
1	1	1	0	?

qual dos conjuntos de valores lógicos abaixo torna esse argumento válido?

(A)	(B)	(C)	(D)
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

4. Mediante o uso de tabelas-verdade, testar a validade dos argumentos:

a) $$\begin{array}{l} q \longrightarrow p' \\ \underline{(p')'} \\ q \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} p \longrightarrow q' \\ \underline{p + q} \\ p \longleftrightarrow q' \end{array}$$

c) $$\begin{array}{l} r' \longrightarrow p' \\ \underline{(p' + q)'} \\ q' \end{array}$$

d) $a \longrightarrow (b + c)$, $b \longrightarrow a'$, a'.

e) $(p + q)'$, $q \longrightarrow r$, $p + (p \longrightarrow q)$, $q + r$

f) $p \longrightarrow q'$, $q \longrightarrow r'$, $p + r'$, $q' + r'$

5. Dar os nomes de cada um dos seguintes argumentos:

a) $$\begin{array}{l} (c + d)' \longrightarrow e \\ \underline{(c + d)'} \\ e \end{array}$$

b) $f \longrightarrow (b + d)$
$$\frac{(b + d)'}{f'}$$

c) $(p \cdot q') + (q \cdot r')$
$$\frac{(p \cdot q')'}{q \cdot r'}$$

d) $$\frac{d \cdot (a + b')}{a + b'}$$

e) $r' \longrightarrow s'$
$$\frac{(s')'}{r}$$

f) $(a \cdot b)'$
$$\frac{c \longrightarrow a}{(a \cdot b)' \cdot (c \longrightarrow a)}$$

g) $$\frac{b \longrightarrow c}{(b \longrightarrow c) + d'}$$

h) $a \longrightarrow b'$
$$\frac{b' \longrightarrow c}{a \longrightarrow c}$$

i) $(a \cdot b) + c'$
$$\frac{(a \cdot b) + c}{a \cdot b}$$

j) $a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$
$$\frac{a}{b \longrightarrow c}$$

l) $(a \longrightarrow c) + (d + e)$
$$\frac{(d + e)'}{a \longrightarrow c}$$

m) $r \longrightarrow (p + q)'$
$$\frac{((p + q)')'}{r'}$$

n) $$\frac{a \cdot c'}{c'}$$

o) $(a' \longrightarrow b') + c$
$(a' \longrightarrow b')'$
$\overline{}$
c

p) $s' \longrightarrow (t \cdot r)$
$(t \cdot r)'$
$\overline{}$
s

6. Completar cada um dos seguintes argumentos válidos:

a) $(r \cdot p) \longrightarrow q'$
$(q')'$
$\overline{}$
?

b) $a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$
?
$\overline{}$
a'

c) $(a \cdot b') + (b \cdot c')$
?
$\overline{}$
$a \cdot b'$

d) $(a' \longrightarrow b')' + c$
c'
$\overline{}$
?

e) $a \longrightarrow (b \cdot c)$
?
$\overline{}$
$a \longrightarrow d'$

6

Técnicas Dedutivas

6.1 PROVA DIRETA

Diz-se que uma proposição q é *formalmente dedutível* (conseqüência) de certas proposições dadas (premissas) quando e somente quando for possível formar uma seqüência de proposições $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ de tal modo que:

a) p_n é exatamente q;

b) para qualquer valor de i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), p_i ou é uma das premissas ou constitui a conclusão de um argumento válido formado a partir das proposições que a precedem na seqüência.

Escreve-se:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ \hline \therefore p_n(q) \end{array} \qquad \text{ou} \quad p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1} \vdash p_n(q).$$

A proposição q no caso de ser formalmente dedutível chama-se *teorema* e a seqüência formada chama-se *prova* ou *demonstração* do teorema.

 Vejamos alguns exemplos:

1º Exemplo:

Provar s' dadas as premissas:

1. t
2. $t \longrightarrow q'$
3. $q' \longrightarrow s'$

Demonstração:

1. t	premissa
2. $t \longrightarrow q'$	premissa
3. $q' \longrightarrow s'$	premissa
4. q'	Modus Ponens, 1 e 2
5. s'	Modus Ponens, 3 e 4
	c.q.d.

Justificação da passagem 4:

$\dfrac{t \longrightarrow q',\ t}{q'}$, ou seja, $(t \longrightarrow q') \cdot t \Longrightarrow q'$, conforme se pode verificar pela lista das regras de inferência.

2º Exemplo:

Provar $r + s'$ dadas as premissas:

1. $s \cdot q$
2. $t \longrightarrow q'$
3. $t' \longrightarrow r$.

Demonstração:

1. $s \cdot q$	premissa
2. $t \longrightarrow q'$	premissa
3. $t' \longrightarrow r$	premissa
4. q	s,1
5. $(q')'$	DN,4
6. t'	MT,2 e 5
7. r	MP, 3 e 6
8. $r + s'$	A, 7
	c.q.d.

Justificação das passagens:

4. $\dfrac{s \cdot q}{q}$, ou seja, $s \cdot q \Longrightarrow q$

5. $\dfrac{q}{(q')'}$, ou seja, $q \Longrightarrow (q')'$

6. $\dfrac{t \longrightarrow q',\ (q')'}{t'}$, ou seja, $(t \longrightarrow q') \cdot (q')' \Longrightarrow t'$.

7. $\dfrac{t' \cdot r,\ t'}{r}$, ou seja, $(t' \longrightarrow r) \cdot t' \Longrightarrow r$.

8. $\dfrac{r}{r + s'}$, ou seja, $r \Longrightarrow r + s'$.

Na indicação das regras de inferência utilizadas na demonstração de um teorema, MP 3 e 6 significam que a regra Modus Ponens foi aplicada entre as proposições de nºs 3 e 6 da seqüência, o mesmo ocorrendo com as demais abreviações.

Observações:

a) Qualquer tautologia pode ser incluída na seqüência após qualquer proposição já colocada.

De fato, seja α uma proposição qualquer já escrita na seqüência e β uma tautologia. É claro que o argumento $\dfrac{\alpha}{\therefore \beta}$ é válido, pois:

α		β
.		1
.		1
.		.
.	não ocorre 10	.
.		.
.		1

b) Se α for uma proposição já colocada na seqüência e β for outra sentença tal que $\beta \Longrightarrow \alpha$, então, seguindo-se a α pode-se colocar β.

De fato, sendo $\beta \Longrightarrow \alpha$, temos: $\beta \longleftrightarrow \alpha$. Logo, $\beta \Longleftrightarrow \alpha$ pode entrar na seqüência por ser uma tautologia. Mas, $\dfrac{\beta \longleftrightarrow \alpha}{\therefore \alpha - \beta}$. Logo, $\alpha - \beta$ pode ser incluída na seqüência. E, finalmente, pode-se escrever β pela regra do Modus Ponens.

3º Exemplo:

Provar $x = 0$ dadas as seguintes premissas:

1. $x \neq 0$, então, $x = y$
2. $x = y$, então, $x = z$
3. $x \neq z$

Inicialmente, por razões de conveniência, passemos as proposições dadas para a forma simbólica. Nosso problema reduzir-se-á ao seguinte:

Provar *a* dadas as premissas:

1. $a' \longrightarrow b$
2. $b \longrightarrow c$
3. c'

Demonstração:

1. $a' \longrightarrow b$	p
2. $b \longrightarrow c$	p
3. c'	p
4. b'	MT, 2 e 3
5. $(a')'$	MT, 1 e 4
6. a	DN, 5
	c.q.d.

4º **Exemplo:**

Provar *a* dadas as premissas:

1. $a' \longrightarrow c$
2. $c \longrightarrow m'$
3. $m + r$
4. r'

Demonstração:

1. $a' \longrightarrow c$	p
2. $c \longrightarrow m'$	p
3. $m + r$	p
4. r'	p
5. m	SD, 3 e 4
6. $(m')'$	DN, 5
7. c'	MT, 2 e 6
8. $(a')'$	MT, 1 e 7
9. a	DN, 8
	c.q.d.

6.2 PROVA CONDICIONAL

Seja provar $\alpha \longrightarrow \beta$ dadas as premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$. Fazendo a conjunção das premissas igual a P, trata-se de mostrar que é *válido* o argumento $P \vdash$ $\vdash \alpha \longrightarrow \beta$, isto é: $\dfrac{P}{\therefore \alpha \longrightarrow \beta}$. Trata-se de validar esse argumento. Ocorrendo a validade, temos: $P \Longrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ ou $P \xrightarrow{\tau} (\alpha \rightarrow \beta)$. A letra grega τ sobre o símbolo do condicional indica tratar-se de uma tautologia.

Princípio da Exportação

Para mostrar este princípio utilizaremos a equivalência notável: $p \longrightarrow q \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow p' + q$. Então, temos:

$P \xrightarrow{\tau} (\alpha \longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow P' + (\alpha \longrightarrow \beta) \Longleftrightarrow P' + (\alpha' + \beta) \Longleftrightarrow (P' +$ $+ \alpha') + \beta \Longleftrightarrow (P \cdot \alpha)' + \beta \Longleftrightarrow (P \cdot \alpha) \longrightarrow \beta$. Portanto, se $P \cdot \alpha \longrightarrow \beta$ for tautologia, isto é, se $P \cdot \alpha \Longrightarrow \beta$, ou seja, se for possível deduzir β de $P \cdot \alpha$, também será uma tautologia a proposição equivalente e, portanto, $P \Longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta)$ é dedutível de P. Dessas considerações, segue-se a *técnica da prova condicional:* para demonstrar a *validade* do argumento cuja conclusão tem *forma condicional* $\alpha \longrightarrow \beta$, introduz-se α como *premissa provisória* (indicada por pp) e deduz-se β.

1º Exemplo:

Provar $r \longrightarrow p'$ dadas as premissas:

1. $p \longrightarrow q$
2. $r \longrightarrow q'$

Demonstração:

1. $p \longrightarrow q$	p
2. $r \longrightarrow q'$	p
3. r	pp
4. q'	MP, 2 e 3
5. p'	MT, 1 e 4
6. $r \longrightarrow p'$	Prova Condicional de 3 a 5
	c.q.d.

2º Exemplo:

Provar $c \longrightarrow d'$ dadas as premissas:

1. $b \longrightarrow c'$
2. $(d \,.\, b')'$

Demonstração:

1. $b \longrightarrow c'$	p
2. $(d \cdot b')'$	p
3. c	pp

4. $(c')'$	DN, 3
5. b'	MT, 1 e 4
6. $d' + (b')'$	De Morgan, 2
7. d'	SD, 5 e 6
8. $c \longrightarrow d'$	PC, 3 a 7
	c.q.d.

3º Exemplo:

Provar $a \longrightarrow b$ dadas as premissas:

1. $a + j \longrightarrow g$
2. $j \longrightarrow (g' \cdot h')$
3. $j + b$

Demonstração:

1. $a + j \longrightarrow g$	p
2. $j \longrightarrow (g' \cdot h')$	p
3. $j + b$	p
4. a	pp
5. $a + j$	A, 4
6. g	MP, 1 e 5
7. $j \longrightarrow (g + h)'$	Equivalência, 2
8. $g + h$	A, 6
9. $[(g + h)']'$	DN, 8
10. j'	MT, 7 e 9
11. b	SD, 3 e 10
12. $a \longrightarrow b$	PC, 4 a 11
	c.q.d.

6.3 PROVA BICONDICIONAL

A prova de um argumento cuja conclusão é uma proposição da forma bicondicional $\alpha \longrightarrow \beta$ é semelhante à prova condicional, com a diferença de que é feita em duas partes distintas. Então, dada uma proposição $\alpha \longleftrightarrow \beta$, primeiro prova-se $\alpha \longrightarrow \beta$ e, a seguir, prova-se $\beta \longrightarrow \alpha$, concluindo-se pela validade do argumento.

Exemplo:

Provar $a \longleftrightarrow v$ dadas as premissas:

1. $t \longrightarrow a$
2. $v \longrightarrow t$
3. $a \longrightarrow m$
4. $v + m'$

Demonstração:

1.	$t \longrightarrow a$	p
2.	$v \longrightarrow t$	p
3.	$a \longrightarrow m$	p
4.	$v + m'$	p

5a.	a	pp
6a.	m	MP, 3 e 5a
7a.	v	SD, 4 e 7a
8a.	$a \longrightarrow v$	PC, 5a, 7a

5b.	v	pp-
6b.	t	MP, 2 e 5b
7b.	a	MP, 1 e 6b
8b.	$v \longrightarrow a$	PC, 5b, 7b

9.	$(a \longrightarrow v) \cdot (v \longrightarrow a)$	U, 8a, 8b
10.	$a \longleftrightarrow v$	Equivalência, 9
		c.q.d.

6.4 PROVA INDIRETA OU POR REDUÇÃO AO ABSURDO

Observemos, inicialmente, que de uma contradição pode-se deduzir qualquer proposição. De fato, seja a contradição $p \cdot p'$ e α uma proposição qualquer. Temos:

p	p'	p · p'
0	1	0
1	0	0

1.	$p \cdot p'$	p
2.	p	S, 1
3.	p'	S, 1
4.	$p + \alpha$	A, 2
5.	α	SD, 3 e 4

$$\therefore \frac{p \cdot p'}{\alpha}$$

Seja agora provar α a partir das premissas $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, seqüência essa que chamaremos P.

Consideremos as premissas P e α' e procuremos deduzir α a partir delas, isto é, vejamos se $P \cdot \alpha' \vdash \alpha$. A proposição α é formalmente dedutível de $P \cdot \alpha'$ se $P \cdot \alpha' \Longrightarrow \alpha$, isto é, $P \cdot \alpha' \xrightarrow{\tau} \alpha$. Mas:

$$P \cdot \alpha' \xrightarrow{\tau} \alpha \Longleftrightarrow P \xrightarrow{\tau} (\alpha' \longrightarrow \alpha) \text{ (Princípio da Exportação)}$$

Ora, essa última proposição constitui uma tautologia se ocorrer a seguinte implicação:

$$P \Longrightarrow (\alpha' \longrightarrow \alpha), \text{ isto é, } P \vdash \alpha' \longrightarrow \alpha$$

$$\alpha' \longrightarrow \alpha \Longleftrightarrow (\alpha')' + \alpha \Longleftrightarrow \alpha + \alpha \Longleftrightarrow \alpha \therefore$$

$$\therefore P \vdash \alpha \quad \text{e} \quad P \cdot \alpha' \vdash \alpha$$

Então, para mostrar a validade de um argumento por prova ou demonstração indireta, introduz-se a *negação da conclusão* como *premissa provisória* e deduz-se uma *contradição* (por exemplo: $q \cdot q'$).

1º Exemplo:

Provar r dadas as premissas:

1. $p' \longrightarrow r$
2. $r' \longrightarrow q$
3. $(p \cdot q)'$

Demonstração:

1.	$p' \longrightarrow r$	p
2.	$r' \longrightarrow q$	p
3.	$(p \cdot q)'$	p
4.	r'	pp
5.	q	MP, 2 e 4
6.	$p' + q'$	De Morgan, 3
7.	$(q')'$	DN, 5
8.	p'	SD, 6 e 7
9.	r	MP, 1 e 8
10.	$r \cdot r'$	U, 4 e 9
11.	r	Prova indireta de 4 a 10

c.q.d.

Observação:

Da mesma forma como encontramos a contradição $r \cdot r'$ para provar r, poderemos encontrar a contradição $q \cdot q'$ para provar p', como veremos no exemplo a seguir. Isto é, a contradição procurada pode envolver ou não a mesma letra da proposição a ser provada.

2º Exemplo:

Provar p' dadas as premissas:

1. $q' + r$
2. $p \longrightarrow r'$
3. q

Demonstração:

1. $q' + r$	p
2. $p \longrightarrow r'$	p
3. q	p
4. $(p')'$	pp
5. p	DN, 4
6. r'	MP, 2 e 5
7. q'	SD, 1 e 6
8. $q \cdot q'$	U, 3 e 7
9. p'	PI, 4 a 8
	c.q.d.

6.5 PROVA INDIRETA DA FORMA CONDICIONAL

Para provar a validade de um argumento cuja conclusão é da forma condicional $(p \longrightarrow q)$ mediante a demonstração indireta, usamos $(p \longrightarrow q)'$ como premissa provisória (pp), a seguir $(p' + q)$ por equivalência e $(p \cdot q')$, ..., seguindo-se daí: p, q'. Na prática, começamos pela *hipótese* (H) e pela *negação da tese* (T) como premissas provisórias:

$$\text{Provar:} \quad \overset{H}{p} \longrightarrow \overset{T}{q}$$

$$P \left\{ \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n. \end{array} \right.$$

$n+1.\ (p \longrightarrow q)'$	pp
$n+2.\ (p' + q)'$	Equivalência, $(n+1)$
$n+3.\ p \cdot q'$	De Morgan, $(n+2)$
$n+4.\ p$	S, $(n+3)$
$n+5.\ q'$	S, $(n+3)$

Exemplo:

Provar $r \longrightarrow q'$ dadas as premissas:

1. $r' + s'$
2. $q \longrightarrow s$

Demonstração:

1. $r' + s'$	p
2. $q \longrightarrow s$	p
3. r	pp
4. $(q')'$	pp
5. $(r')'$	DN, 3
6. s'	SD, 1 e 5
7. q'	MT, 6 e 2
8. q	DN, 4
9. $q \cdot q'$	U, 8 e 7
10. $r \longrightarrow q'$	PI, 3 a 9

c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. Provar t' dadas as premissas:

   1. $p \longrightarrow s$
   2. $p \cdot q$
   3. $s \cdot r \longrightarrow t'$
   4. $q \longrightarrow r$

2. Provar s dadas as premissas:

   1. $t \longrightarrow r$
   2. r'
   3. $t + s$

3. Provar $t \cdot s$ dadas as premissas:

   1. $e \longrightarrow s$
   2. $t' \longrightarrow j'$
   3. $e \cdot j$

4. Provar s dadas as premissas:

1. $p \longrightarrow q \cdot r$
2. p
3. $t \longrightarrow q'$
4. $t + s$

5. Provar $r + s'$ dadas as premissas:

1. $s \cdot q$
2. $t \longrightarrow q'$
3. $t' \longrightarrow r$

6. Provar $x + y = 5$ dadas as premissas:

1. $3x + y = 11 \longleftrightarrow 3x = 9$
2. $(3x = 9 \longrightarrow 3x + y = 11) \longleftrightarrow y = 2$
3. $y \neq 2$ ou $x + y = 5$

Utilizando a *demonstração condicional:*

7. Provar $a \longrightarrow h$ dadas as premissas:

1. $a + f \longrightarrow g$
2. $j \longrightarrow g' \cdot h'$
3. j

8. Provar $t + s' \longrightarrow r$ dadas as premissas:

1. $r' \longrightarrow q$
2. t'
3. $s' \longrightarrow q'$

9. Provar $q' \longrightarrow t$ dadas as premissas:

1. $s \longrightarrow r$
2. $s + p$
3. $p \longrightarrow q$
4. $r \longrightarrow t$

Utilizando a *demonstração indireta:*

10. Provar $y = 2 \longrightarrow x = y$ dadas as premissas:

1. $x \neq y \longrightarrow x > y$ ou $y > x$
2. $y \neq 2$ ou $x = 2$
3. $x > y$ ou $y > x \longrightarrow x \neq 2$

11. Provar t' dadas as premissas:

1. $t \longrightarrow s'$
2. $f \longrightarrow t'$
3. $s + f$

12. Provar $e' + m$ dadas as premissas:

1. $s + r$
2. $s \longrightarrow e'$
3. $r \longrightarrow m$

13. Provar $(t + s)'$ dadas as premissas:

1. $r' + b'$
2. $t + s \longrightarrow r$
3. $b + s'$
4. t'

Utilizando a *demonstração indireta do condicional:*

14. Provar $p \longrightarrow q$ dadas as premissas:

1. $(p \longrightarrow q) + r$
2. $s + t \longrightarrow r'$
3. $s + (t \cdot u)$

15. Provar $p \longrightarrow q$ dadas as premissas:

1. $p \longrightarrow q + r$
2. r'

16. Provar $p \longrightarrow s$ dadas as premissas:

1. $(p \longrightarrow q) + (r \cdot s)$
2. q'

Utilizando um *método dedutivo de sua escolha:*

17. Provar $p \longrightarrow q'$ dadas as premissas:

1. $p \cdot q \longrightarrow r' + s'$
2. $r \cdot s$

18. Provar $p' \longrightarrow r'$ dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $r' + q'$

19. Provar s' dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $s \longrightarrow p'$
3. $(q + r)'$

20. Provar s' dadas as premissas:

1. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (r \cdot s \longrightarrow t)$
2. $p \longrightarrow q \cdot r$
3. r

21. Provar $2x = 12 \longrightarrow y = 4$ dadas as premissas:

1. $2x + 3y = 24$
2. $(x = 6 \longrightarrow y = 4)$ ou $2x = 12$
3. $(2x = 12 \longrightarrow x = 6)$ ou $2x + 3y \neq 24$
4. $x \neq 6$

22. Verificar, mediante as regras de inferência, a validade dos seguintes argumentos:

a) $(s \cdot e)', e' \longrightarrow g, s \longrightarrow g$
b) $s \longrightarrow p, p \longrightarrow (w + j), s \cdot w', j$
c) $a \longrightarrow u, u' + (b \cdot j'), b \longrightarrow a, (j' \cdot a')' + b, j \longleftrightarrow a'$

23. Nas demonstrações abaixo, justificar as passagens indicadas.

a)	1. $p \longrightarrow q$	p
	2. $r' \longrightarrow q'$	p
	3. $(p' + s')'$	p
	4. $p \cdot s$	
	5. p	
	6. q	
	7. r	
	8. s	
	9. $r \cdot s$	
		c.q.d.
b)	1. $j \longrightarrow e'$	p
	2. $(e' \cdot s')'$	p
	3. j	p
	5. e	
	6. s	

c) 1. $a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$ p
2. $(c \cdot d) \longrightarrow e$ p
3. $f \longrightarrow (b \cdot d)$ p
4. $(f' + a')'$ p
5. $f \cdot a$
6. f
7. $b \cdot d$
8. a
9. $b \longrightarrow c$
10. b
11. c
12. d
13. $c \cdot d$
14. e

c.q.d.

d) 1. $(p \cdot q') + (q \cdot r')$ p
2. $p \longrightarrow s$ p
3. $s' + t$ p
4. t' p
5. s'
6. p'
7. $p' + q$
8. $(p' \cdot q')'$
9. $q \cdot r'$
10. q

c.q.d.

e) 1. $(b \cdot c)' \longrightarrow a'$ p
2. $a \longrightarrow (b' \cdot d)$ p
3. a pp
4. $b' \cdot d$
5. b'
6. $b \cdot c$
7. b
8. a'

c.q.d.

f) 1. $(a' \longrightarrow b')' + c$ p
2. $d \cdot a + d \cdot b'$ p
3. $c \longrightarrow (d \longrightarrow b)$ p
4. $d \cdot (a + b')$
5. $a + b'$
6. $a' \longrightarrow b'$
7. c
8. $d \longrightarrow b$

9. d
10. b
11. a

c.q.d.

g)
1. $b' \longrightarrow a'$ p
2. $b \longrightarrow (c + d)$ p
3. $a \cdot c'$ pp
4. a
5. b
6. $c + d$
7. c'
8. d
9. $(a \cdot c') \longrightarrow d$

c.q.d.

h)
1. $r \longrightarrow (p + q)'$ p
2. $s \longrightarrow p$ p
3. $(s \longrightarrow r')'$ pp
4. $(s' + r')'$
5. $s \cdot r$
6. s
7. p
8. r
9. $(p + q)'$
10. $p' \cdot q'$
11. p'
12. $s \longrightarrow r'$

c.q.d.

i)
1. $a \longrightarrow (b \longrightarrow c)$ p
2. $(a \cdot d) + (a \cdot e)$ p
3. $(b' + d)'$ pp
4. $a \cdot (d + e)$
5. a
6. $b \longrightarrow c$
7. $b \cdot d'$
8. b
9. c
10. $d + e$
11. d'
12. e
13. $c \cdot e$
14. $(b' + d)' \longrightarrow (c \cdot e)$

c.q.d.

7
Fluxogramas

O fluxograma constitui um método alternativo para as tabelas-verdade na verificação da validade de um argumento, no qual se ilustra o raciocínio utilizado.

Neste método, para verificação da validade de um argumento ou prova de um teorema, procede-se da seguinte maneira:

1. consideram-se as premissas verdadeiras;

2. aplicam-se as definições dos conectivos lógicos para determinar o valor lógico da conclusão que deverá ser a *verdade (1)*, para que o argumento seja válido ou o teorema provado;

   Caso ocorram situações em que não se possa determinar o valor lógico da conclusão, ou em que 0 = 1 (contradição), o argumento é *falho*.

O teste de validade de argumentos ou prova de teoremas mediante o uso do fluxograma pode ser feito pelo método direto ou indireto, obedecendo às particularidades de cada uma das técnicas dedutivas já estudadas.

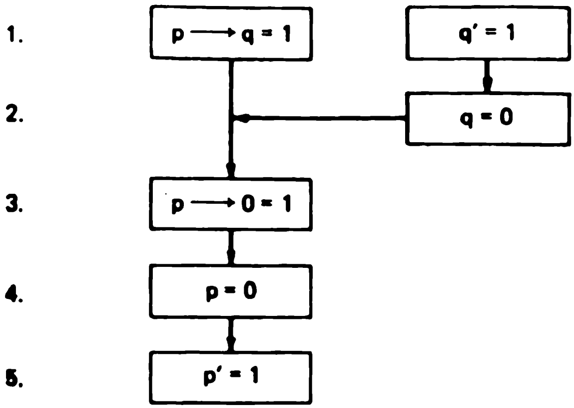
Vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo:

Provar p' dadas as premissas:

1. $p \longrightarrow q$
2. q'

Solução:



Justificação:

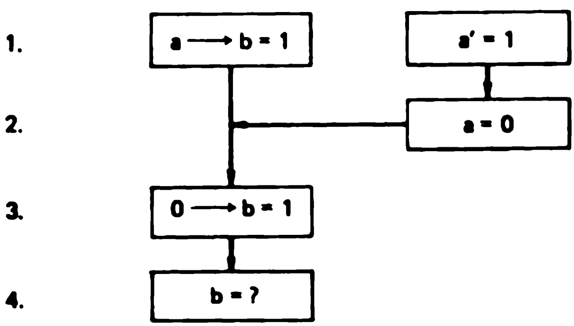
1. Consideramos as premissas verdadeiras fazendo $p \longrightarrow q = 1$ e $q' = 1$.
2. Como $q' = 1$, pela negação temos: $q = 0$.
3. Levando $q = 0$ em $p \longrightarrow q = 1$, temos: $p \longrightarrow 0 = 1$.
4. Pela definição de condicional $p \longrightarrow 0 = 1$ se e somente se $p = 0$.
5. Como $p = 0$, temos $p' = 1$, o que mostra ser válido o argumento, pois premissas verdadeiras conduzem a uma conclusão verdadeira.

2º Exemplo:

Testar a validade do argumento:

$$a \longrightarrow b,\ a',\ b'$$

Solução:



Justificação:

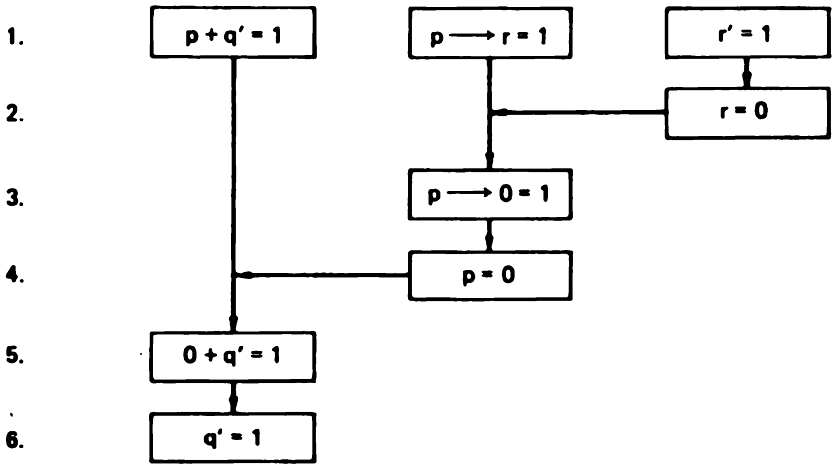
1. Consideremos as premissas verdadeiras fazendo $a \longrightarrow b = 1$ e $a' = 1$.
2. Como $a' = 1$, pela negação, $a = 0$.
3. Levando $a = 0$ em $a \longrightarrow b = 1$, temos: $0 \quad b = 1$.
4. Não podemos concluir se b é verdadeira ou falsa, pois, pela definição de condicional, $0 \longrightarrow 1 = 1$ e $0 \longrightarrow 0 = 1$. Se b pode ser verdadeira ou falsa, então a conclusão b' pode também ser verdadeira ou falsa e, portanto, o argumento é falho.

3º Exemplo:

Provar q' dadas as premissas:

1. $p + q'$
2. $p \longrightarrow r$
3. r'

Solução:



Justificação:

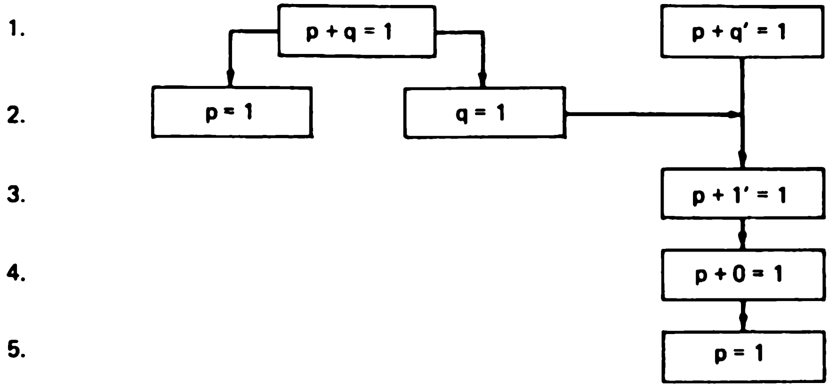
1. Consideremos as premissas verdadeiras, fazendo $p + q' = 1$, $p \longrightarrow r = 1$ e $r' = 1$.
2. Como $r' = 1$, por negação temos: $r = 0$.
3. Levando $r = 0$ em $p \longrightarrow r = 1$, temos: $p \longrightarrow 0 = 1$.
4. Pela definição de condicional $p \longrightarrow 0 = 1$ se e somente se $p = 0$.
5. Fazendo $p = 0$ na premissa $p + q' = 1$, temos: $0 + q' = 1$.
6. Pela definição de disjunção $0 + q' = 1$ somente se $q' = 1$. Portanto, o argumento é válido.

4º Exemplo:

Testar a validade do argumento:

$$p + q,\ p + q',\ p$$

Solução:



Justificação:

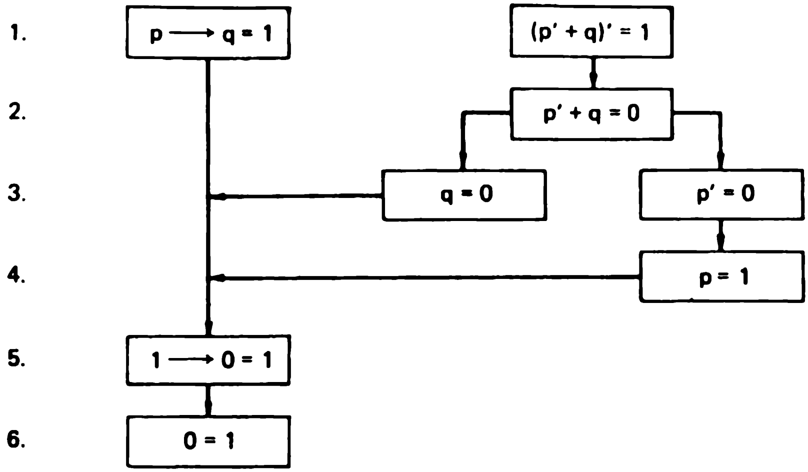
1. Consideremos as premissas verdadeiras, fazendo $p + q = 1$ e $p + q' = 1$.
2. Pela definição de disjunção, se $p + q = 1$, então $p = 1$ ou $q = 1$. Se $p =$ $= 1$, o argumento é válido, pois premissas verdadeiras levam a uma conclusão verdadeira.
3. Se $q = 1$, substituindo na premissa $p + q' = 1$, temos: $p + 1' = 1$.
4. Pela negação, temos: $p + 0 = 1$.
5. Pela definição de disjunção, $p + 0 = 1$ somente se $p = 1$. Portanto, o argumento é válido, pois premissas verdadeiras levam a uma conclusão verdadeira.

5º Exemplo:

Testar a validade do argumento:

$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \underline{(p' + q)'} \\ \therefore p \end{array}$$

Solução:



Justificação:

1. Consideremos as premissas verdadeiras fazendo $p \longrightarrow q = 1$ e $(p' + q)' = 1$.
2. Pela negação, $p' + q = 0$.
3. Pela definição de disjunção, se $p' + q = 0$, então $p' = 0$ e $q = 0$.
4. Como $p' = 0$, pela negação temos: $p = 1$.
5. Levando $p = 1$ e $q = 0$ na premissa $p \longrightarrow q = 1$, temos: $1 \longrightarrow 0 = 1$.
6. Pela definição de condicional $1 \longrightarrow 0 = 0$. Considerando as premissas verdadeiras, chegamos a uma contradição. Portanto, o argumento é falho.

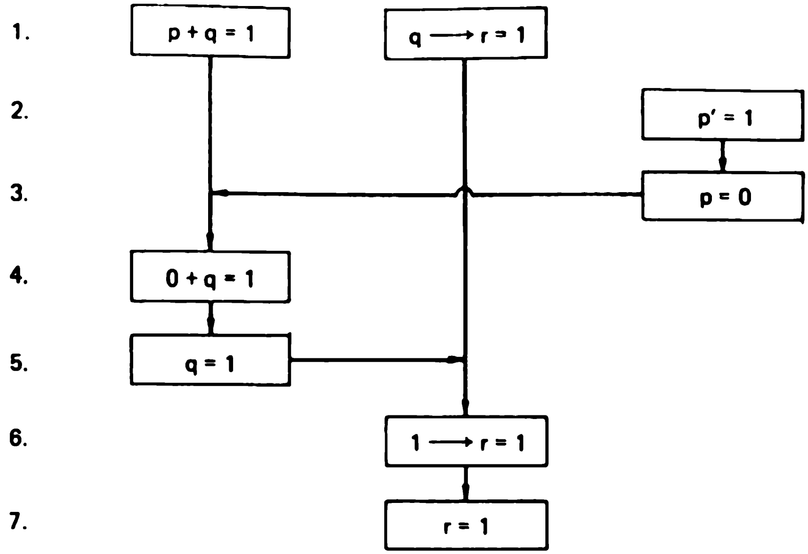
6º Exemplo:

Provar $p' \longrightarrow r$ dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $q \longrightarrow r$

Solução:

Como a conclusão é da forma condicional, consideramos o antecedente p' verdadeiro e procuraremos mostrar que o conseqüente r é verdadeiro.



Justificação:

1. Consideremos as premissas verdadeiras fazendo $p + q = 1$ e $q \longrightarrow r = 1$.
2. Consideremos verdadeiro o antecedente da conclusão (premissa provisória), fazendo $p' = 1$.
3. Como $p' = 1$, pela negação, temos: $p = 0$.
4. Levando $p = 0$ na premissa $p + q = 1$, temos $0 + q = 1$.
5. Pela definição de disjunção, $0 + q = 1$ somente se $q = 1$.
6. Substituindo $q = 1$ em $q \longrightarrow r = 1$, temos: $1 \longrightarrow r = 1$.
7. Pela definição de condicional, $1 \longrightarrow r = 1$ somente se $r = 1$. Portanto, a conclusão é verdadeira, pois $p' = 1$ leva a $r = 1$ e $1 \longrightarrow 1 = 1$. Não consideramos a possibilidade de a premissa provisória p' ser falsa, pois, se $p' = 0$, a conclusão $p' \longrightarrow r$ seria verdadeira, isto é, $0 \longrightarrow r = 1$.

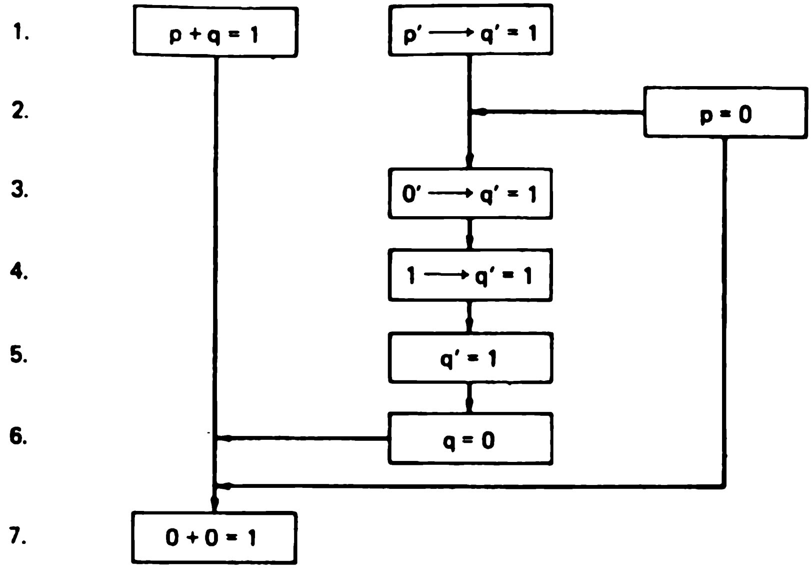
7º Exemplo:

Provar p dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $p' \longrightarrow q'$

Solução:

Usemos o método indireto.



Justificação:

1. Consideremos as premissas verdadeiras fazendo $p + q = 1$ e $p' \longrightarrow q' = 1$.
2. Consideremos a conclusão falsa (negação da conclusão) fazendo $p = 0$.
3. Levando $p = 0$ em $p' \longrightarrow q' = 1$, temos: $0' \longrightarrow q' = 1$.
4. Pela negação, temos: $1 \longrightarrow q' = 1$.
5. Pela definição de condicional $1 \longrightarrow q' = 1$ somente se $q' = 1$.
6. Pela negação, $q = 0$.
7. Fazendo $p = 0$ e $q = 0$ em $p + q = 1$, temos: $0 + 0 = 1$.
   Usando a premissa provisória $p = 0$, chegamos à contradição $0 + 0 = 1$. Portanto, $p = 0$ é eliminada, ficando a outra possibilidade $p = 1$ como solução.

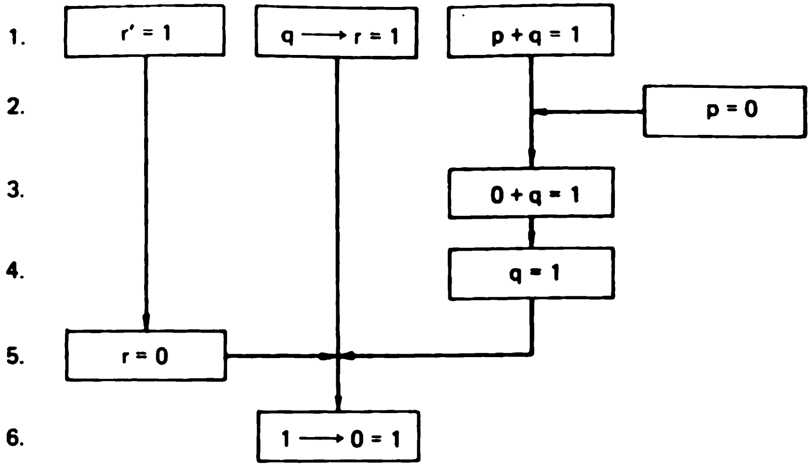
8º Exemplo:

Provar p dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $q \longrightarrow r$
3. r'

Solução:

Usemos o método indireto.



Justificação:

1. Consideremos as premissas verdadeiras fazendo $p + q = 1$, $q \longrightarrow r = 1$ e $r' = 1$.
2. Consideremos a conclusão falsa, fazendo $p = 0$.
3. Fazendo $p = 0$ em $p + q = 1$, temos: $0 + q = 1$.
4. Pela definição de disjunção $0 + q = 1$ somente se $q = 1$.
5. Pela negação, $r = 0$.
6. Substituindo $q = 1$ e $r = 0$ em $q \longrightarrow r = 1$, temos: $1 \longrightarrow 0 = 1$.
   Usando a premissa provisória $p = 0$, chegamos à contradição $1 \longrightarrow 0 = 1$.
   Portanto, $p = 0$ é eliminada ficando a outra possibilidade $p = 1$ como solução.

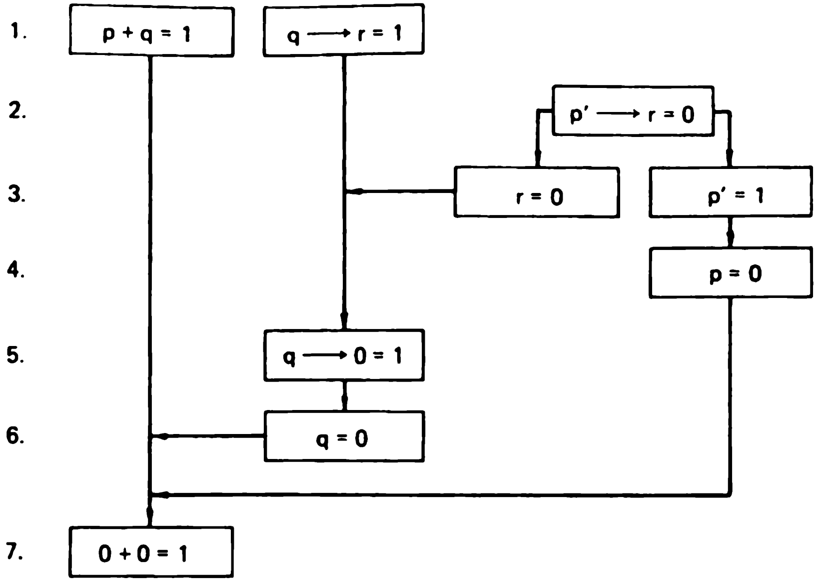
9º Exemplo:

Provar $p' \longrightarrow r$ dadas as premissas:

1. $p + q$
2. $q \longrightarrow r$

Solução:

Usemos o método indireto.



Justificação:

1. Consideremos as premissas verdadeiras.
2. Consideremos a conclusão falsa (negação da conclusão).
3. Pela definição de condicional $p' \longrightarrow r = 0$ somente se $p' = 1$ e $r = 0$.
4. Pela negação, temos: $p = 0$.
5. Fazendo $r = 0$ em $q \longrightarrow r = 1$, temos: $q \longrightarrow 0 = 1$.
6. Pela definição de condicional $q \longrightarrow 0 = 1$ somente se $q = 0$.
7. Substituindo $p = 0$ e $q = 0$ em $p + q = 1$, temos: $0 + 0 = 1$.
   Usando a premissa provisória $p' \longrightarrow r = 0$, chegamos a uma contradição $0 + 0 = 1$. Portanto, $p' \longrightarrow r = 0$ é eliminada, ficando a outra possibilidade $p' \longrightarrow r = 1$ como solução.

EXERCÍCIOS

1. Testar a validade dos argumentos abaixo, mediante o uso de fluxogramas.

   a) $q \longrightarrow p', (p')', q'$
   b) $p \longrightarrow q', p \cdot q, q$
   c) $p' + q, q \longrightarrow r', p'$
   d) $a \longrightarrow b, (c' + b)', c' \longrightarrow a'$
   e) $p + r', p \longrightarrow q, q \longrightarrow r, s', r'$

f) $(p \longrightarrow q) + r', r' \longrightarrow s, s' + q, q$

g) $1 + x = 1 \longrightarrow x = 0$

$$\frac{x \neq 0 \text{ ou } 2x = 0}{2x \neq 0 \longrightarrow 1 + x \neq 1}$$

2. Mostre através do fluxograma, usando os métodos direto e indireto, que o argumento abaixo tem premissas contraditórias.

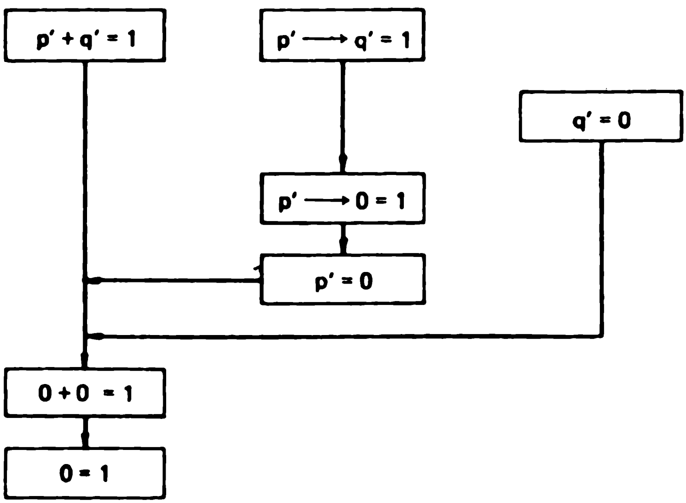
$$\begin{array}{c} p \longrightarrow q \\ \underline{(p' + q)'} \\ p \end{array}$$

3. Mostre através do fluxograma, usando os métodos direto e indireto, que o argumento abaixo não contém informações suficientes para deduzir a conclusão.

$$p' \longrightarrow q, (q + r')', p \cdot s$$

4. Dados os argumentos abaixo, a qual deles corresponde o fluxograma?

a) $\begin{array}{c} p' + q' \\ \underline{p' \longrightarrow q'} \\ q' \end{array}$ b) $\begin{array}{c} p' + q' \\ \underline{p' \longrightarrow q'} \\ q \end{array}$ c) $\begin{array}{c} p' + q' \\ \underline{p' \longrightarrow q'} \\ q' \longrightarrow p' \end{array}$ d) nenhum deles.



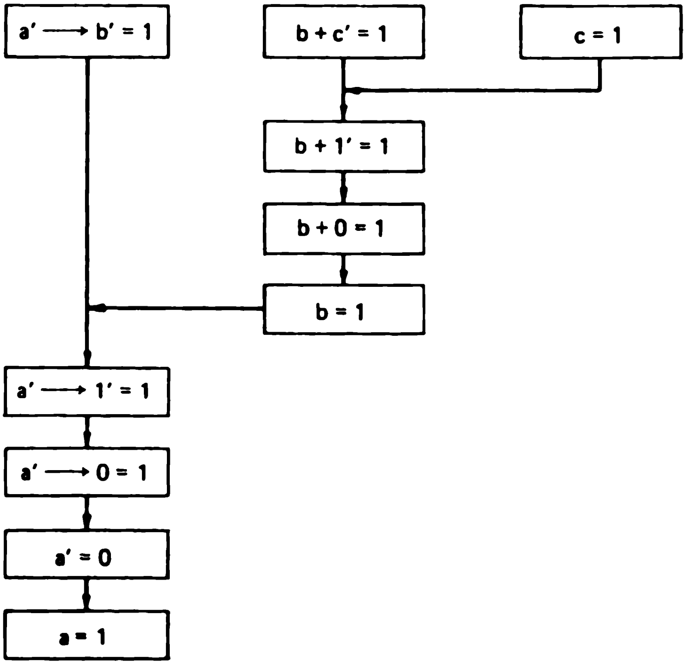
5. A qual dos argumentos abaixo corresponde o fluxograma?

a) $a' \longrightarrow b'$
$b + c'$
$\dfrac{c}{a \cdot c'}$

b) $a' \longrightarrow b'$
$b + c'$
$\dfrac{c}{a}$

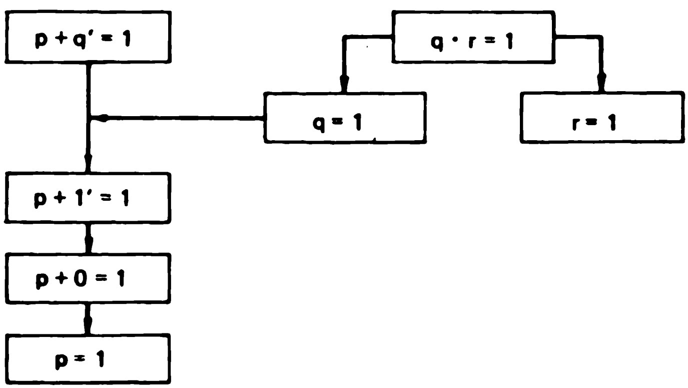
c) $a' \longrightarrow b'$
$b + c'$
$\dfrac{c}{a'}$

d) nenhum deles.

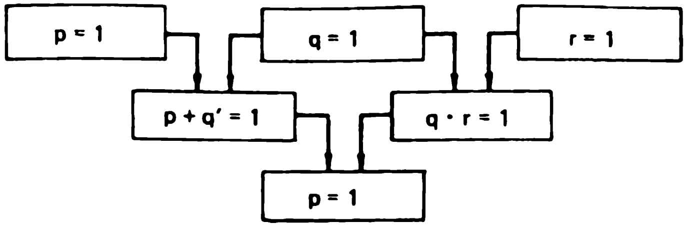


6. Qual fluxograma corresponde ao argumento: $p + q'$, $q \cdot r$, p?

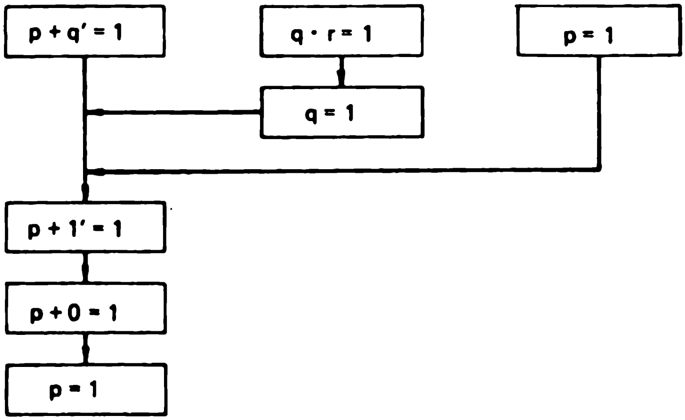
a)



b)



c)



d) nenhum deles.

8
Quantificadores

8.1 SENTENÇA ABERTA

Sejam as proposições:

$p: 3 + 5 \leqslant 11, \; V(p) = 1$
$q: x + 5 \leqslant 11, \; V(q) = ?$

A proposição p, como podemos ver, é verdadeira, ao passo que nada podemos afirmar sobre o valor lógico na proposição q $\cdot$ V(q), que somente será conhecido quando x for identificado. Neste caso, dizemos que a proposição q é uma *sentença aberta* ou *função proposicional.* Nas sentenças abertas, os símbolos x, y, X e outros são chamados *variáveis.*

Chamamos *conjunto universo* (da variável) ao conjunto das possibilidades lógicas que podem substituir a variável na sentença. Denotaremos este conjunto por U. Cada elemento de U chama-se *valor da variável.* U às vezes é tacitamente imposto pelo contexto, mas pode também ser escolhido pelo agente de estudo em questão.

1º Exemplo:

Seja a sentença aberta: $x + 5 \leqslant 11$.

Podemos impor que o conjunto universo da variável seja **N** ou **Z** ou **Q** ou **R** ou o conjunto $U = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

2º Exemplo:

Seja a sentença aberta: O planeta "X" é o maior planeta do Sistema Solar. O conjunto universo da variável X é, pelo contexto, dado pelo conjunto dos planetas conhecidos do Sistema Solar.

$U_{(X)}$ = {Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno Plutão}.

CONJUNTO-VERDADE (da sentença) é o conjunto dos valores da variável para os quais a sentença é verdadeira. Denotaremos este conjunto por V.

$$V = \{x \in U \mid V(p(x)) = 1\}.$$

onde p(x) é uma sentença aberta na variável x.

1º Exemplo:

Dada a sentença aberta $x + 5 \leq 11$, $x \in \mathbf{R}$, determinar seu conjunto-verdade.

Solução:

$$V = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 6\}.$$

2º Exemplo:

O conjunto-verdade da sentença aberta: O planeta "X" é o maior planeta do Sistema Solar é:

V = {Júpiter}

3º Exemplo:

Determinar o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas:

a) $x + 11 = 21$, $U = \mathbf{N}$
b) $2x - 5 \leq 13$, $U = \mathbf{Z}$.

Soluções:

a) $V = \{10\}$
b) $V = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, \ldots, 6, 7, 8, 9\}$.

8.2 QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Usaremos o símbolo "$\forall$", chamado *quantificador universal*, para exprimir o fato de que "para todo x em um dado conjunto, a proposição P(x) é verdadeira". Uma proposição do tipo "Para todo x, P(x)" é simbolicamente representada por $\forall x, P(x)$.

A proposição "Todo inteiro é racional" pode-se escrever:

1. $\forall x, x \in Z \longrightarrow x \in Q$.
2. Para todo x, se $x \in Z$, então $x \in Q$.
3. Para todo x, se $x \in Z$, então $x \in Q$.
4. Para cada x, se $x \in Z$, então $x \in Q$.
5. $\forall x\ (x \in Z \longrightarrow x \in Q)$
6. Qualquer que seja x, $x \in Z \longrightarrow x \in Q$.

1º Exemplo:

Escrever de maneira simbólica a proposição: os números do conjunto A são todos os reais.

Solução:

R(x): x é real

$\forall x(x \in A \longleftrightarrow x \in R)$

$A(x) = R(x)$

2º Exemplo:

Simbolizar a proposição: Para todo x, se x é real, então $x \in Q$.

Solução:

Q(x): $x \in Q$

R(x): x é real

$\forall x\ (R(x) \longrightarrow Q(x))$.

3º Exemplo:

$\forall x\ (x^2 \geqslant 0 \longleftrightarrow x \in R)$

8.3 QUANTIFICADOR EXISTENCIAL

No caso de proposições que envolvem expressões do tipo "Existe", "Há pelo menos um", "Para ao menos um" e "Algum", usaremos o símbolo "$\exists$", chamado *quantificador existencial*, para exprimir o fato de que para um ou mais elementos de um dado conjunto a proposição P(x) é verdadeira. Uma proposição do tipo "Existe um x tal que P(x)" pode ser escrita simbolicamente: $\exists x, P(x)$.

As seguintes proposições têm o mesmo significado:

$\exists x, x \in N$.

Existe um x tal que $x \in N$.

Algum número é natural.

Existe pelo menos um número natural.

1º Exemplo:

Escrever de maneira simbólica a proposição: Existe x tal que $x^2 + 1 = 2x$.

Solução:

$P(x): x^2 + 1 = 2x$
$\exists x, P(x).$

2º Exemplo:

Simbolizar a proposição: Existe $x \in Q$ tal que $0 < x < 1$.

Solução:

$P(x): 0 < x < 1, x \in Q$
$\exists x, x \in Q, P(x).$

Os quantificadores podem aparecer juntos ou não, conforme mostramos nos exemplos abaixo.

1º Exemplo:

Para todo x e para todo y, $x + y = y + x$ é representada simbolicamente por: $\forall x \forall y\ (x + y = y + x)$.

2º Exemplo:

Para todo x, existe um y tal que $x < y$, representa-se por:

$\forall x \exists y, (x < y)$

3º Exemplo:

Existe um x tal que para todo y, $x + y = 0$, representa-se simbolicamente por: $\exists x \forall y, (x + y = 0)$.

4º Exemplo:

Existe um x e existe um y tal que x^y é irracional, escreve-se: $\exists x \exists y, (x^y \in I)$.

5º Exemplo:

Para todo x, se x é par, então existe um y tal que $x = 2y$, é representada simbolicamente por: $\forall x\ (x \text{ é par} \longrightarrow \exists y, x = 2y)$.

8.4 VALORES LÓGICOS DE SENTENÇAS QUANTIFICADAS

A sentença $\forall x, P(x)$ é *verdadeira* se e somente se o conjunto-verdade de $P(x)$ e o conjunto universo forem iguais, isto é, $U = V$ e, *falsa* quando $U \neq V$.

A tabela a seguir nos dará alguns exemplos do que acabamos de definir.

$\forall x, P(x)$	U	V	$V(\forall x, P(x))$
$\forall x, x = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$	1
$\forall x, x = 0$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	0
$\forall x, x^2 - x + 1$	R	R	1
$\forall x, 2x^2 + 3x + 1 = 0$	N	0	0
$\forall x, 2x^2 + 3x + 1 = 0$	Z_-	$\{-1\}$	0

A sentença $\exists x, P(x)$ é *verdadeira* se e somente se o conjunto-verdade de $P(x)$ é não-vazio, ou seja, $V \neq \emptyset$ e *falsa* quando $V = \emptyset$.

Vejamos alguns exemplos através da tabela abaixo:

$\exists x, P(x)$	U	V	$V(\exists x, P(x))$
$\exists x, x = 0$	$\{0\}$	$\{0\}$	1
$\exists x, x = 0$	$\{0,1\}$	$\{0\}$	1
$\exists x, x^2 - x + 1$	R	R	1
$\exists x, 2x^2 + 3x + 1 = 0$	N	0	0
$\exists x, 2x^2 + 3x + 1 = 0$	Z_-	-1	1

8.5 NEGAÇÃO DE SENTENÇAS QUANTIFICADAS

Seja a sentença aberta $P(x)$ e $U = \{a, b, c, d, \ldots\}$ o conjunto universo da variável x. Então,

$$\forall x, P(x) \Longleftrightarrow P(a) \cdot P(b) \cdot P(c) \cdot P(d) \cdot \ldots$$

e sua negação é dada por:

$$(\forall x, P(x))' \Longleftrightarrow (P(a) \cdot P(b) \cdot P(c) \cdot P(d) \cdot \ldots)'.$$

Pela lei de DeMorgan,

$$\begin{aligned}(\forall x, P(x))' &\Longleftrightarrow (P(a))' + (P(b))' + (P(c))' + (P(d))' + \ldots \\ &\Longleftrightarrow \forall x, (P(x))'.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{(\forall x, P(x))' \Longleftrightarrow \exists x, (P(x))'}$$

Vejamos agora a que equivale a negação da sentença $\exists x, P(x)$.

Temos:

$$\exists x, P(x) \Longleftrightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + \ldots$$

e sua negação é dada por:

$$(\exists x, P(x))' \Longleftrightarrow (P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + \ldots)'.$$

Pela lei de DeMorgan,

$$\begin{aligned} (\exists x, P(x))' &\Longleftrightarrow (P(a))' \cdot (P(b))' \cdot (P(c))' \cdot (P(d))' \cdot \ldots \\ &\Longleftrightarrow \forall x, (P(x))'. \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{(\exists x, P(x))' \Longleftrightarrow \forall x, (P(x))'}$$

Vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo:

Negar a sentença: Alguns alunos são estudiosos.

Solução:

$\exists$: alguns
x: alunos
P(x): alunos são estudiosos

Então:

Existem alunos estudiosos.

$\exists x, P(x)$.

E a negação desta sentença equivale a:

$$(\exists x, P(x))' \Longleftrightarrow \forall x, (P(x))'$$

ou seja,

Todos os alunos não são estudiosos.

2º Exemplo:

Negar a sentença: Todos os pescadores são mentirosos.

Solução:

$(\forall x, P(x))' \Longleftrightarrow \exists x, (P(x))'$

Existe pescador que não é mentiroso.

3º Exemplo:

Negar a sentença: $\forall x, x - 1 \geqslant 5$.

Solução:

$(\forall x, x - 1 \geqslant 5)' \Longleftrightarrow \exists x, x - 1 < 5$

4º Exemplo:

Negar a sentença: $\exists x, x^2 = 1 \longrightarrow x \neq 0$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(\exists x, x^2 = 1 \longrightarrow x \neq 0)' & \Longleftrightarrow \forall x, (x^2 = 1 \longrightarrow x \neq 0)' \\
& \Longleftrightarrow \forall x, ((x^2 = 1)' + (x \neq 0))' \\
& \Longleftrightarrow \forall x, ((x^2 = 1)')' \cdot (x \neq 0)' \\
& \Longleftrightarrow \forall x, (x^2 = 1) \cdot (x = 0).
\end{aligned}
$$

Observação: Neste exemplo usamos a equivalência notável: $p \longrightarrow q \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow p' + q$.

5º Exemplo:

Negar a sentença: $((\forall x, \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1) \cdot (\exists x, 2x \text{ é ímpar}))$.

Solução:

$((\forall x, \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1) \cdot (\exists x, 2x \text{ é ímpar}))' \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (\forall x, \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1)' + (\exists x, 2x \text{ é ímpar})'$
$\Longleftrightarrow (\exists x, \text{sen}^2 x + \cos^2 x \neq 1) + (\forall x, 2x \text{ é par})$.

6º Exemplo:

Negar a sentença: $\forall x \, \exists y, x + y = 11$.

Solução:

$(\forall x \, \exists y, x + y = 11)' \Longleftrightarrow \exists x \, \forall y, x + y \neq 11$

7º Exemplo:

Negar a sentença: $\exists x \, \forall y, ((x = 0) + (y + 1 \leqslant 7))$

Solução:

$$(\exists x\ \forall y, ((x = 0) + (y + 1 \leqslant 7)))' \iff$$
$$\iff \forall x\ \exists y, ((x = 0)' \cdot (y + 1 \leqslant 7)')$$
$$\iff \forall x\ \exists y, ((x \neq 0) \cdot (y + 1 > 7)).$$

EXERCÍCIOS

1. Determinar o conjunto-verdade das seguintes sentenças abertas:

   a) $x + 11 = 21$, $U = N$.
   b) $2x - 5 \leqslant 13$, $U = Z$.
   c) $x^2 - 7x + 12 = 0$, $U = N$.
   d) $x^2 - 1 = 0$, $U = N$.
   e) $x^2 - 4x + 3 \leqslant 0$, $U = Z$.
   f) $15x^2 + 2x - 8 = 0$, $U = R$.
   g) $5x^2 + 19x + 12 = 0$, $U = R$.

2. Escrever simbolicamente as sentenças:

   a) $1 < 2$, então existe x tal que $x \leqslant 2$.
   b) Todo triângulo é um polígono.
   c) Existe x tal que x é primo e x é par.
   d) Existe x e existe y tais que $x^2 = y$.
   e) Para todo x, se $x \in N$, então $x \in Z$.
   f) Todo polígono regular convexo é inscritível.

3. Dadas as sentenças abertas $p(x) : 15x^2 + 2x - 8 = 0$ e $q(x) : 5x^2 + 19x + 12 = 0$, com $U = R$, determinar os valores lógicos de $p + q$ e $p \cdot q$.

4. Determinar o valor lógico de cada uma das sentenças:

   a) $\forall x, |x| = x$, $U = R$.
   b) $\exists x, x + 3 = 10$, $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   c) $\forall x, x^2 + 3x + 2 = 0$, $U = R$.
   d) $\exists x, 4x - 3 = 1 - 2x$, $U = R$.
   e) $\exists x, 2x^2 + x = 15$, $U = \{1, 2, 3, 4\}$.
   f) $(\forall x, x^2 + x = 6)'$, $U = \{1, 2, 3\}$.
   g) $(\exists x, x^2 + 3x = 1)'$, $U = \{1, 2, 3\}$.

5. Negar as seguintes sentenças:

   a) Todos os homens são maus.
   b) Existe pescador que não é mentiroso.
   c) $\exists x \in R, x^2 + 5 = 2x$.
   d) Existe y tal que para todo x, $x + y \geqslant 7$.
   e) Para todo x, existe y tal que $x + y < 3$.

9

Introdução à Álgebra de Boole

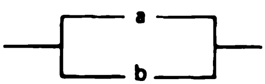
9.1 OPERADOR BINÁRIO

Iniciaremos nosso estudo recordando alguns conceitos primitivos de especial interesse que são: a *noção de conjunto, elemento de um conjunto* e a *relação de pertinência*. Assim, dado um conjunto A = {1,2,3}, dizemos que 1, 2 e 3 são *elementos* de A e, em conseqüência, *pertencem* ao conjunto A. Neste caso podemos escrever: $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$, que se lê: "1 pertence ao conjunto A", etc. Caso tenhamos um elemento 4 que *não* pertence ao conjunto A, denotamos o fato escrevendo $4 \notin A$, que se lê: "4 *não* pertence ao conjunto A".

Chama-se *operador binário* ou *operação binária* ($\bullet$) a lei pela qual todo par ordenado de elementos (x, y) leva um terceiro elemento z. *Notação:* $x \bullet y = z$. Os sinais aritméticos +, −, ·, ÷ são exemplos de operadores binários.

9.2 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

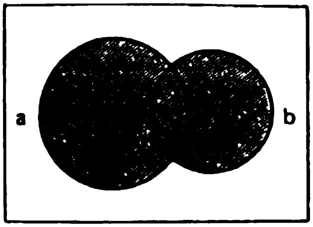
P1. Seja X um conjunto. Dizemos que X *é fechado* em relação a $\bullet$ se $x \bullet y \in X$, $\forall x, y \in X$. Por exemplo, considerando o conjunto C_1 de todos os interruptores, se $a, b \in C_1$, então, $a + b \in C_1$ e $a \cdot b \in C_1$, isto é, $a + b$ e $a \cdot b$ são também interruptores e pertencem a C_1.



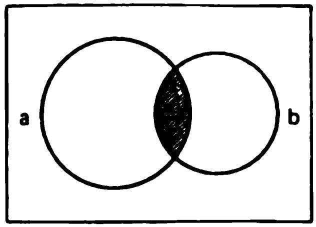
a + b

a · b

Chamando C_2 o conjunto de todos os conjuntos de pontos, se $a, b \in C_2$, então $a + b \in C_2$ e $a \cdot b \in C_2$, isto é, a união e a interseção de a com b são também conjuntos e, conseqüentemente, pertencem a C_2.



$a + b$



$a \cdot b$

Se tomarmos o conjunto C_3 de todas as proposições, e se $a, b \in C_3$, então, $a + b \in C_3$ e $a \cdot b \in C_3$, isto é, dadas as proposições:

a: João estuda.
b: João trabalha.

Temos as seguintes proposições (compostas):

a + b: João estuda *ou* trabalha.
a · b: João estuda *e* trabalha.

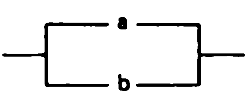
Ou, mediante as tabelas-verdade:

a	b	a + b	a · b
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

P2. O operador • é *comutativo* se $x \bullet y = y \bullet x, \forall x, y \in x$.

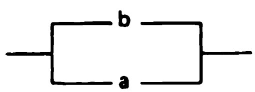
1º Exemplo:

Se $a, b \in C_1$, então, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, isto é:

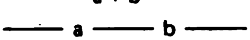


$a + b$

=



$b + a$



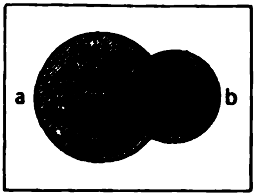
$a \cdot b$

=

$b \cdot a$

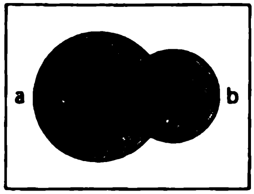
2º Exemplo:

Se $a, b \in C_2$, então, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$, isto é:

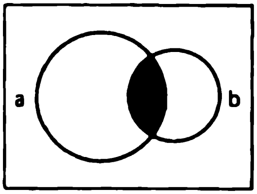


a + b

=

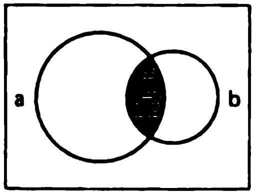


b + a



a · b

=



b · a

3º Exemplo:

Se $a, b \in C_3$, então, $a + b = b + a$ e $a \cdot b = b \cdot a$.

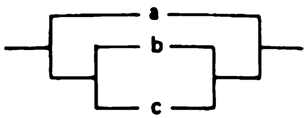
Podemos verificar esta propriedade mediante as tabelas-verdade.

a	b	$a + b$	$b + a$	$a \cdot b$	$b \cdot a$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

P3. Dizemos que o operador $*$ é *associativo* se $x * (y * z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in X$.

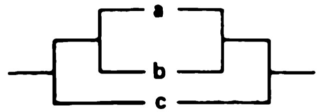
1º Exemplo:

Se $a, b, c \in C_1$, então, $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ isto é:

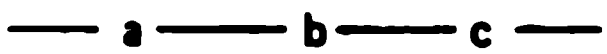


$a + (b + c)$

=



$(a + b) + c$



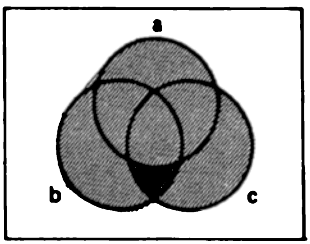
$a \cdot (b \cdot c)$

=

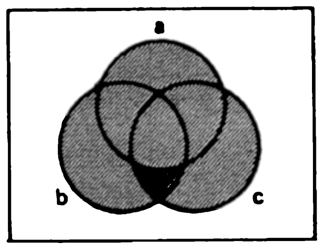
$(a \cdot b) \cdot c$

2º Exemplo:

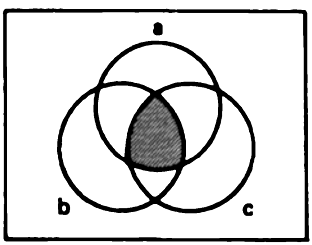
Se a, b, c $\in C_2$, então, $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, isto é:



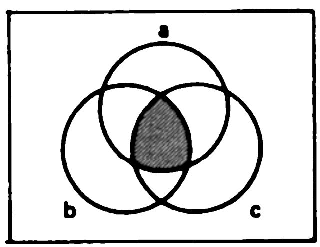
$a + (b + c)$



$(a + b) + c$



$a \cdot (b \cdot c)$



$(a \cdot b) \cdot c$

3º Exemplo:

Se a, b, c $\in C_3$, então, $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, isto é:

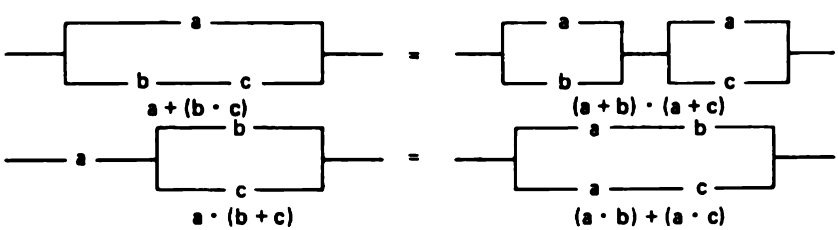
a	b	c	b + c	a + (b + c)	a + b	(a + b) + c
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

a	b	c	b · c	a · (b · c)	a · b	(a · b) · c
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

P4. Um operador $\bullet$ *é distributivo* sobre $\square$ se $x \bullet (y \square z) = (x \bullet y) \square (x \bullet z)$, $\forall x, y, z \in X$.

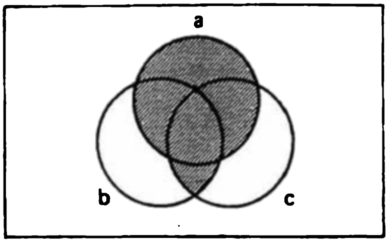
1º Exemplo:

Se $a, b, c \in C_1$, então, $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ e $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$, isto é:



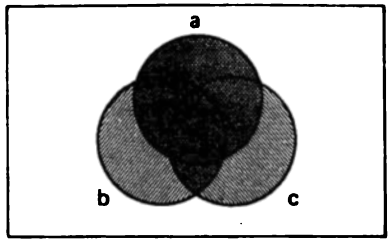
2º Exemplo:

Se a, b, c $\in C_1$, então, a + (b · c) = (a + b) · (a + c) e a · (b + c) = (a · b) + + (a · c), isto é:

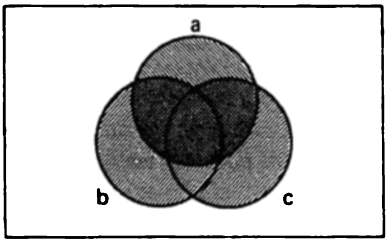


a + (b · c)

=

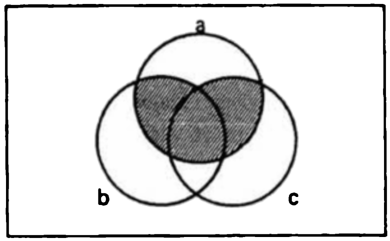


(a + b) · (a + c)



a · (b + c)

=



(a · b) + (a · c)

3º Exemplo:

Se a, b, c $\in C_3$, então, a + (b · c) = (a + b) · (a + c) e a · (b + c) = (a · b) + + (a · c), isto é, construindo-se as tabelas-verdade correspondentes a cada caso, teremos:

a	b	c	b · c	a + (b · c)	a + b	a + c	(a + b) · (a + c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

 portanto, a + (b · c) = (a + b) · (a + c), pois, suas tabelas-verdade são iguais.

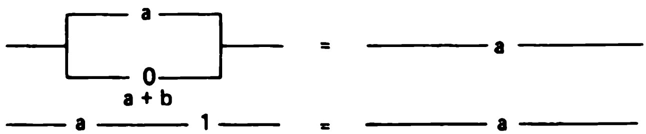
Analogamente,

a	b	c	b + c	a · (b + c)	a · b	a · c	(a · b) + (a · c)
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

P5. Um elemento *e*, é um *elemento neutro* para a operação $*$ se, e somente se, $x * e = e * x = x, \forall x \in x$.

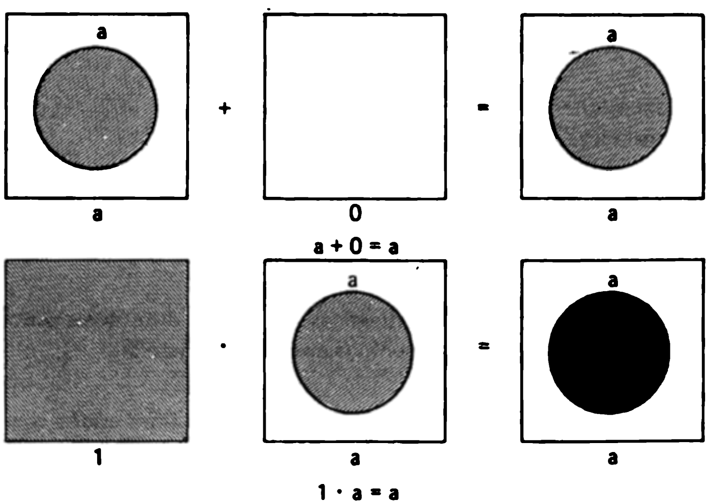
1º Exemplo:

Seja $a \in C_1$, então, $a + 0 = 0 + a = a$ e $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in C_1$.



2º Exemplo:

Dado $a \in C_2$, então, $a + 0 = 0 + a = a$ e $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in C_2$.



3º Exemplo:

Dado $a \in C_3$, então, $a * e = e * a = a, \forall a \in C_3$.

Para $* = +$, temos que a disjunção inclusiva ou soma lógica é falsa, somente quando ambas as proposições consideradas forem falsas. Então, dada uma proposição *a* e V(a) = 1, vem:

$$a + 0 = a, \forall a.$$

Para $* = \cdot$, temos que a conjunção é verdadeira, somente quando as proposições componentes forem verdadeiras; logo, dada uma proposição *a* e V(a) = = 1, vem:

$$a \cdot 1 = a, \forall a.$$

EXERCÍCIOS

1. Seja o conjunto $C = \{T, \perp, O\}$. Definamos dois operadores binários $*$ e $\square$ pelas tabelas abaixo. Para ler a primeira tabela, por exemplo, $a * b$, tomamos a interseção da linha correspondente a *a* e coluna correspondente a *b*, onde *a* e *b* podem ser quaisquer destes símbolos. Então: $O * \perp = T$ e $O \square \perp = 1$.

*	T	⊥	O
T	T	O	⊥
⊥	O	⊥	T
O	⊥	T	O

□	T	⊥	O
T	T	⊥	O
⊥	T	⊥	O
O	T	⊥	O

a) O operador $*$ é comutativo? é associativo?
b) O operador $\square$ é comutativo? é associativo?
c) Os operadores $*$ e $\square$ são distributivos um em relação ao outro?

2. Dados os operadores aritméticos $+, -, \cdot$ e $\div$, dizer quais dentre eles são operadores binários no conjunto **Z** de todos os inteiros.

3. Considerando os operadores aritméticos $+, -, \cdot$ e $\div$, dizer quais dentre eles são operadores binários no conjunto **N** dos números naturais.

4. Seja $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ onde $a, b \in \mathbf{R}$. O operador $*$ é fechado? é comutativo? é associativo? $*$ é distributivo em relação a $\boxtimes$? $\boxtimes$ é distributivo em relação a $*$? $*$ admite elemento neutro?

5. Dados os operadores $\bullet$ e $\square$ distributivos um sobre o outro, reduzir ou desenvolver as expressões a seguir de modo a apresentá-las sob forma diferente.

a) $a \bullet (b \square c)$.
b) $a \square (a \square b)$.
c) $a \bullet (a \square b)$.
d) $a \square (b \bullet (c \square d))$.
e) $(b \square a) \bullet (b \square b)$.
f) $(a \bullet b) \square (a \bullet c)$.

9.3 SISTEMAS ALGÉBRICOS

Antes de estudarmos a definição de uma Álgebra de Boole vejamos o que é um *sistema algébrico* ou uma *álgebra abstrata* também chamada simplesmente de *álgebra*.

Chamamos *álgebra abstrata* ou *sistema algébrico* a um conjunto não vazio munido de um ou mais operadores binários sobre ele definidos. Denotando por A o conjunto e por $\bullet$ e $\square$ os operadores definidos sobre A, podemos ter:

$$(A, \bullet) \quad \text{ou} \quad (A, \square)$$

que são álgebras com um operador ou uma operação, e

$$(A, \bullet, \square)$$

que é uma álgebra com dois operadores ou duas operações.

Uma álgebra pode satisfazer a alguma, a todas ou a nenhuma das propriedades dos operadores, assumindo nomes particulares para os diferentes casos, como: semigrupo, monóide, grupo, anel, corpo, espaço vetorial, conforme as propriedades satisfeitas pelo operador ou operadores definidos sobre um conjunto considerado. Não trataremos destes casos em nosso curso, para o qual têm especial interesse os sistemas algébricos chamados Álgebras de Boole, que definiremos a seguir.

Dizemos que o sistema algébrico $(B, +, \cdot)$ é uma *Álgebra de Boole* quando e somente quando $\forall$ a, b, c $\in$ B, valem os axiomas:

A1. $a + b \in B$.
A2. $a \cdot b \in B$.
A3. $a + b = b + a$.
A4. $a \cdot b = b \cdot a$.
A5. $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

A6. $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

A7. $\exists\, 0 \in B$ tal que para cada $a \in B$, $a + 0 = 0 + a = a$.

A8. $\exists\, 1 \in B$ tal que para cada $a \in B$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A9. Para cada $a \in B$, $\exists\, a' \in B$ tal que $a + a' = 1$ e $a \cdot a' = 0$.

No axioma 9, o elemento *a'* chama-se *complemento* de *a*.

Uma Álgebra de Boole é dita *degenerada* quando os elementos neutros para as operações + e · são iguais, isto é: $0 = 1$. Consideraremos apenas álgebras não degeneradas, isto é, Álgebras de Boole nas quais $0 \neq 1$. Vejamos alguns exemplos.

1º Exemplo:

$B_2 = \{0,1\}$ é uma Álgebra de Boole cujos operadores são definidos pelas tabelas a seguir:

·	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Esta álgebra é conhecida como *álgebra dos interruptores* ou *álgebra da comutação*, e é a mais útil entre as Álgebras de Boole. É o fundamento matemático da análise e projeto dos circuitos de interruptores ou de comutação que compõem os sistemas digitais. B_2 é o exemplo mais simples de Álgebra de Boole não degenerada.

2º Exemplo:

$B_4 = \{0, a, b, 1\}$ é uma Álgebra de Boole com quatro elementos descrita pelas tabelas:

·	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

Teorema 1 — (Princípio da Dualidade): Todo resultado dedutível dos axiomas de uma Álgebra de Boole permanece válido se nele trocarmos + por · e 0 por 1, e vice-versa.

Prova

Pela simetria da definição de uma Álgebra de Boole entre os operadores + e ·, e os elementos 0 e 1, tanto os operadores como 0 e 1 podem ser intercambiados conduzindo a outros resultados também verdadeiros.

c.q.d.

1º Exemplo:

Dualizar a expressão: $x \cdot y' + x' \cdot y \cdot z + y \cdot z'$.

Solução:

Como a expressão não apresenta os valores 0 e 1, basta trocar os sinais · por + e + por ·; temos:

$$(x + y') \cdot (x' + y + z) \cdot (y + z')$$

que é o *dual* da expressão dada.

Obs.: — 1. Não houve qualquer modificação nas letras complementadas, ou seja, onde aparecem x', y', z', continuam sendo x', y', z'.

2. A dualidade tem grande semelhança com as leis de DeMorgan que veremos adiante, diferindo apenas pela observação 1.

2º Exemplo:

Dar o dual da expressão: $x' + y = 0$

Solução:

Trocando na expressão dada + por · e 0 por 1, vem:

$$x' \cdot y = 1$$

que é o resultado procurado.

Teorema 2 — $a + a = a$, $a \cdot a = a$, $\forall a \in B$.

Prova

$$\begin{aligned}
a + a &= (a + a) \cdot 1 && \text{........ A8}\\
&= (a + a) \cdot (a + a') && \text{........ A9}\\
&= a + (a \cdot a') && \text{........ A5}\\
&= a + 0 && \text{........ A9}\\
&= a && \text{........ A7}\\
&\therefore\ a + a = a.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
a \cdot a &= a \cdot a + 0 && \text{.........A7}\\
&= (a \cdot a) + (a \cdot a') && \text{.........A9}\\
&= a \cdot (a + a') && \text{.........A6}\\
&= a \cdot 1 && \text{.........A9}\\
&= a\\
\therefore\ & a \cdot a = a && \text{c.q.d.}
\end{aligned}$$

Teorema 3 — $a + 1 = 1$, $a \cdot 0 = 0, \forall a \in B$.

Prova

$$\begin{aligned}
a + 1 &= (a + 1) \cdot 1 && \text{.........A8}\\
&= (a + 1) \cdot (a + a') && \text{.........A9}\\
&= a + (1 \cdot a') && \text{.........A5}\\
&= a + a' && \text{.........A8}\\
&= 1 && \text{.........A9}\\
\therefore\ & a + 1 = 1
\end{aligned}$$

Pelo Princípio da Dualidade, temos:

$a \cdot 0 = 0$ c.q.d.

Teorema 4 — (Lei da Absorção): $a + (a \cdot b) = a$, $a \cdot (a + b) = a$.

Prova

$$\begin{aligned}
a + (a \cdot b) &= (a \cdot 1) + (a \cdot b) && \text{.........A8}\\
&= a \cdot (1 + b) && \text{.........A6}\\
&= a \cdot (b + 1) && \text{.........A3}\\
&= a \cdot 1 && \text{.....Teor. 3}\\
&= a && \text{.........A8}\\
\therefore\ & a + (a \cdot b) = a
\end{aligned}$$

e, pela dualidade, temos:

$a \cdot (a + b) = a$ c.q.d.

Teorema 5 — $a + (a' \cdot b) = a + b$.

Prova

$$\begin{aligned}
a + (a' \cdot b) &= (a + a') \cdot (a + b) && \text{.........A5}\\
&= 1 \cdot (a + b) && \text{.........A9}\\
&= a + b && \text{.........A8}\\
\therefore\ & a + (a' \cdot b) = a + b
\end{aligned}$$

c.q.d.

Teorema 6 — Os operadores + e · são associativos.

Prova

$$
\begin{aligned}
(a+b)+c &= ((a+b)+c)\cdot(a+a') && \text{........ A8,9}\\
&= (((a+b)+c)\cdot a)+(((a+b)+c)\cdot a') && \text{........ A6}\\
&= (a\cdot((a+b)+c))+(a'\cdot((a+b)+c)) && \text{........ A4}\\
&= ((a\cdot(a+b))+(a\cdot c))+((a'\cdot(a+b))+(a'\cdot c)) && \text{........ A6}\\
&= (a+(a\cdot c))+(((a'\cdot a)+(a'\cdot b))+(a'\cdot c)) && \text{... Teor. 4,A6}\\
&= a+((0+(a'\cdot b))+(a'\cdot c)) && \text{.. Teor. 4,A4,9}\\
&= a+((a'\cdot b)+(a'\cdot c)) && \text{........ A3,7}\\
&= a+(a'\cdot(b+c)) && \text{........ A6}\\
&= a+(b+c) && \text{...... Teor. 5}\\
\therefore\ & (a+b)+c = a+(b+c).
\end{aligned}
$$

Pelo Princípio da Dualidade, temos:

$$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$$

c.q.d.

Expressões como $(a + b) + c$ e $(a \cdot b) \cdot c$ podem ser escritas sem parênteses, e expressões tais como $(a' + b) \cdot (c + d + e)$ podem ser desenvolvidas como na Álgebra usual; $a \cdot b$ pode ser escrita ab e o operador $\cdot$ tem precedência sobre $+$, de modo que $a + (b \cdot c)$ pode ser escrita $a + b \cdot c$ ou $a + bc$.

Teorema 7 — O complemento de cada elemento de uma Álgebra de Boole é único.

Prova

Suponhamos que a' e x sejam complementos de a. Então:

$$a + x = 1$$

e

$$a \cdot x = 0.$$

$$
\begin{aligned}
\text{Logo: } x &= x(a+a')\\
&= ax + a'x\\
&= 0 + a'x\\
&= a'a + a'x\\
&= a'(a+x)\\
&= a'\cdot 1\\
&= a'.
\end{aligned}
$$

c.q.d.

Corolário — Qualquer Álgebra de Boole não degenerada tem um número par de elementos.

Teorema 8 — $(a')' = a$.

Prova

a' é o complemento de a, então: $a + a' = 1$ e $a \cdot a' = 0$. Mas estas equações apenas mostram que a é o complemento de a', isto é: $a = (a')'$.

Pelo teorema 7, existe um único complemento, portanto:

$$(a')' = a.$$

c.q.d.

Teorema 9 — $ab + ab' = a$.

Prova

$$\begin{aligned} ab + ab' &= a(b + b') \\ &= a \cdot 1 \\ &= a \\ \therefore\ & ab + ab' = a. \end{aligned}$$

c.q.d.

Teorema 10 - $0' = 1$ e $1' = 0$.

Prova

$0 + 1 = 1$ A3,7

$0 \cdot 1 = 0$ A4,8

Logo: $0' = 1$ A9

e $1' = 0$ ......Teor. 1

c.q.d.

Teorema 11 - (De Morgan): $(a \cdot b)' = a' + b'$ e $(a + b)' = a' \cdot b'$.

Prova

$$\begin{aligned} (a' + b') + (a \cdot b)' &= (a' + b' + a) \cdot (a' + b' + b) \\ &= (1 + b') \cdot (1 + a') \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \\ (a' + b') \cdot (a \cdot b) &= a' \cdot a \cdot b + b' \cdot a \cdot b = 0. \end{aligned}$$

Então, $(a' + b')$ é o complemento de $(a \cdot b)$, isto é:

$$(a \cdot b)' = a' + b'$$

e

$$(a + b)' = a' \cdot b'.$$

c.q.d.

Teorema 12 - $ab + a'c + bc = ab + a'c$.

Prova

$$\begin{aligned} ab + a'c + bc &= ab + a'c + bc\,(a + a') \\ &= ab + a'c + abc + a'bc \\ &= ab\,(1 + c) + a'c(1 + b) \\ &= ab + a'c. \\ \therefore ab + a'c + bc &= ab + a'c. \end{aligned}$$

c.q.d.

Teorema 13 - $(a + b)\,(a' + c)\,(b + c) = ac + a'b$.

Prova

$$\begin{aligned} (a+b)\,(a'+c)\,(b+c) &= (aa' + ac + a'b + bc)\,(b + c) \\ &= 0 + abc + a'bb + bbc + acc + a'bc + bcc \\ &= abc + a'b + bc + ac + a'bc + bc \\ &= abc + a'b + bc + ac + a'bc \\ &= ac\,(1 + b) + a'b(1 + c) + bc \\ &= ac + a'b + bc \\ &= ac + a'b \\ \therefore (a + b)\,(a' + c)\,(b + c) &= ac + a'b. \end{aligned}$$

c.q.d.

Teorema 14 - $(a + b)\,(a' + c) = ac + a'b$.

Prova

$$\begin{aligned} (a + b)\,(a' + c) &= aa' + ac + a'b + bc \\ &= ac + a'b + bc \\ &= ac + a'b + bc\,(a + a') \\ &= ac + a'b + abc + a'bc \\ &= a'b\,(1 + c) + ac\,(1 + b) \\ &= a'b + ac \\ \therefore (a + b)\,(a' + c) &= ac + a'b. \end{aligned}$$

c.q.d.

Esses teoremas têm sua grande aplicação na simplificação de expressões booleanas e circuitos de interruptores, conforme veremos nos exemplos a seguir:

1º Exemplo:

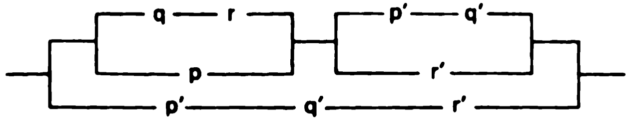
Simplificar $(a + b)\,(a + b' + c')$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(a + b)(a + b' + c') &= aa + ab' + ac' + ab + bb' + bc' \\
&= a + ab' + ac' + ab + 0 + bc' \\
&= a + bc'
\end{aligned}
$$

2º Exemplo:

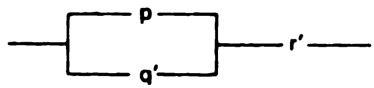
Simplificar o circuito:



Solução:

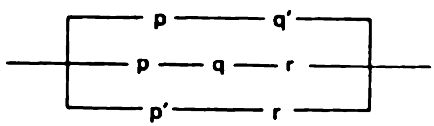
$$
\begin{aligned}
(p + qr)(p'q' + r') + p'q'r' &= pr' + p'q'r' \\
&= (p + p'q')r' \\
&= (p + q')r'
\end{aligned}
$$

e o circuito simplificado será:



3º Exemplo:

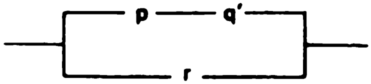
Simplificar o circuito:



Solução:

$$
\begin{aligned}
pq' + pqr + p'r &= p(q' + qr) + p'r \\
&= p(q' + r) + p'r \\
&= pq' + pr + p'r \\
&= pq' + (p + p')r \\
&= pq' + 1r \\
&= pq' + r
\end{aligned}
$$

Desenhando o circuito da expressão simplificada, vem:



4º Exemplo:

Determinar o complemento de $pq' + p'q$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
(pq' + p'q)' &= (pq')' \cdot (p'q)' \\
&= (p' + (q')') \cdot ((p')' + q') \\
&= (p' + q) \cdot (p + q') \\
&= p'p + p'q' + pq + qq' \\
&= pq + p'q'
\end{aligned}
$$

Teorema 15 - Se uma Álgebra de Boole contém pelo menos dois elementos distintos, então $0 \neq 1$.

Prova

Suponhamos que existe uma Álgebra de Boole com pelo menos dois elementos distintos, para a qual $0 = 1$. Seja *a* um elemento tal que $a \neq 0$. Como, por hipótese, tal elemento existe, então todos os outros elementos são iguais a 0. Logo, $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, o que é uma contradição. Portanto, $0 \neq 1$. c.q.d.

Sejam *a* e *b* elementos de uma Álgebra de Boole. Dizemos que *a é menor ou igual a b* ($a \leq b$) se e somente se $a + b = b$.

Teorema 16 - $\leq$ é uma ordem parcial.

Prova

Pelo teorema 2, $a + a = a$. Logo, $a \leq a$.

Se $a \leq b$, então $a + b = b$; se $b \leq a$, então $a + b = b + a = a$. Portanto, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$. Finalmente, suponhamos que $a \leq b$ e $b \leq c$. Então $a + b = b$ e $b + c = c$. Logo, $a + c = a + (b + c) = (a + b) + c = b + c = c$. Portanto, $a \leq c$.

c.q.d.

Teorema 17 - Sejam a, b e c elementos de uma Álgebra de Boole. Então, a ordem parcial $\leq$ tem as seguintes propriedades:

1. Se $a \leqslant b$ e $a \leqslant c$, então $a \leqslant bc$.
2. Se $a \leqslant b$, então $a \leqslant b + c, \forall c$.
3. Se $a \leqslant b$, então $ac \leqslant b, \forall c$.
4. $a \leqslant b$ se e somente se $b' \leqslant a'$.

Prova

1. $a + b = b$ e $a + c = c$. Logo, $a + bc = (a + b)(a + c) = bc$.
2. Se $a + b = b$, então, $a + (b + c) = (a + b) + c = b + c$.
3. Pelas leis da absorção, $ac + a = a$, ou $ac \leqslant a$. O resultado se obtém pela transitividade.
4. Suponhamos $a \leqslant b$. Então, $a + b = b$ e, portanto, $b' = (a + b)'$. Logo, $b' + a' = (a + b)' + a' = ((a + b)a)' = a'$, pelas leis da absorção. A recíproca decorre do teorema 8, onde temos: $(a')' = a$. c.q.d.

EXERCÍCIOS

1. Simplificar as expressões a seguir, justificando cada passagem:

   a) $(a \cdot b) + (a \cdot b')$
   b) $(p \cdot q) + (p \cdot (q' \cdot r))$
   c) $(b \cdot (a \cdot c)) + (a \cdot (b \cdot c'))$
   d) $p + ((p' \cdot (p + q)) + (q \cdot r))$
   e) $(x + (y \cdot z)) \cdot (x + (y' \cdot z))$

2. Simplificar:

   a) $ab + ac + abc + ab'c'$
   b) $f + g + h + f'g'h'$
   c) $(p + q + r) \cdot (p + q + s)$
   d) $x' + xy' + xyz + xy'z'$
   e) $(a + b')(b + c')(c + d')(d + a')$
   f) $(a + b)(b + c)(c + a)$

3. Desenvolver as expressões a seguir tanto quanto possível:

   a) $p + qr$
   b) $p + qrs$
   c) $pq + rs$
   d) $(a + (b'c)' \cdot d \cdot e')'$

4. Provar que $ab' + a'b + ac' + a'c = ab' + bc' + ca'$.

5. Usando o teorema de De Morgan, provar que:

a) $(abc)' = a' + b' + c'$
b) $(a + b + c)' = a' \cdot b' \cdot c'$

Verificar esses resultados com os círculos de Euler.

6. Simplificar:

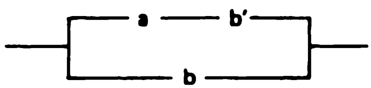
a) $(a + b)' \cdot (b + c)'$
b) $((p + q)' + r' + q)'$
c) $a \cdot (ab + c)'$
d) $((s + t')' + (s + u')' + v)'$

7. Determinar o complemento das expressões:

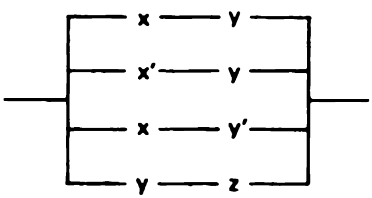
a) $a((b' \cdot c)' + d(e' + f)')$
b) $a + (b + (c'd + e))$
c) $ab + cd + ef$
d) $(a + b)\ (c + d)\ (e + f)$
e) $a(b'c(b'(a + a'c)) + bc')$

8. Nos circuitos a seguir, determinar a ligação, simplificar e desenhar o circuito resultante.

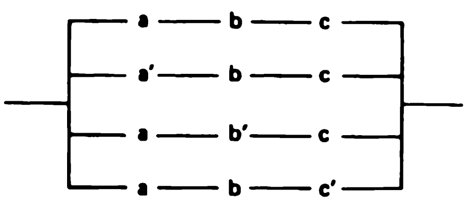
a)

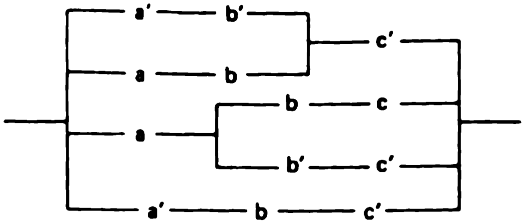


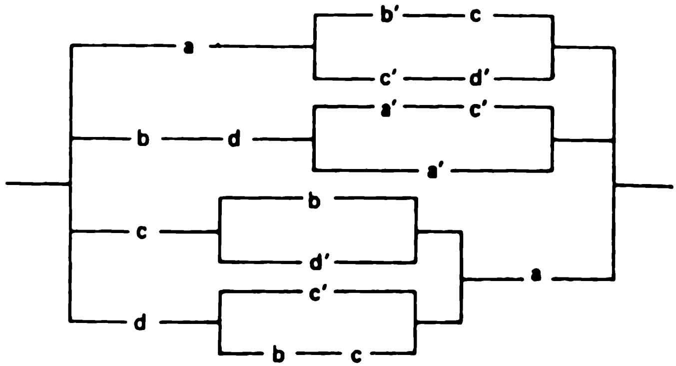
b)



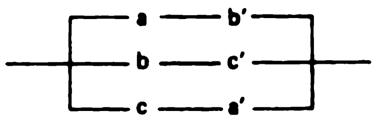
c)

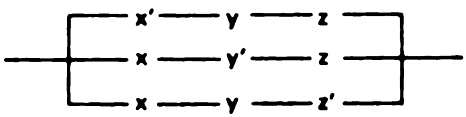


d) 

e) 

9. Determinar o circuito complementar de:

a) 

b) 

10. Provar que para quaisquer elementos a e b de uma Álgebra de Boole, $a \leq b$ se, e somente se, $ab' = 0$.

11. Provar que para quaisquer elementos a e b de uma Álgebra de Boole, $a \leq b$ se, e somente se, $b + a' = 1$.

12. Mostrar que nenhuma Álgebra de Boole tem três elementos.

13. Mostrar que nenhuma Álgebra de Boole finita com mais de um elemento tem um número ímpar de elementos.

10
Funções Booleanas

Seja B uma Álgebra de Boole e, sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis tais que seus valores pertencem a B. Chama-se *função booleana de n variáveis* a uma aplicação f de B^n em B satisfazendo as seguintes regras:

1. Se para quaisquer valores de $x_1, \ldots, x_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = a$, $a \in B$, então f é uma função booleana. É a *função constante*.
2. Se para quaisquer valores de $x_1, \ldots, x_n$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ para algum i ($i = 1, \ldots, n$), então f é uma função booleana. É a *função projeção*.
3. Se f é uma função booleana, então g definida por $g(x_1, \ldots, x_n) = (f(x_1, \ldots, x_n))'$ para todos $x_1, \ldots, x_n$ é uma função booleana.
4. Se f e g são funções booleanas, então h e k, definidas por
   $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)$ e
   $k(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, \ldots, x_n)$ para todos os $x_1, \ldots, x_n$ são funções booleanas.
5. Qualquer função construída por um número finito de aplicações das regras anteriores e somente tal função é booleana.

Então, uma função booleana é qualquer função que pode ser construída a partir das funções constantes e projeção mediante um número finito das operações ', + e $\cdot$. Para uma função de uma variável, a função projeção é a *função identidade* $f(x) = x$. Antes de nos adiantarmos neste assunto, definamos o que se entende por constante e variável booleanas.

Chama-se *constante* (booleana) em B a qualquer elemento de uma Álgebra de Boole B. Chama-se *variável* (booleana) em B ao símbolo que pode representar qualquer dos elementos de uma Álgebra de Boole B.

1º Exemplo: $f(x) = x + x'a$

2º Exemplo: $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

3º Exemplo: $f(x, y, z) = axy'z + yz' + a + xy$

As expressões desses exemplos são funções booleanas, onde as variáveis x, y e z percorrem uma Álgebra de Boole e *a* é um elemento dessa álgebra.

Por causa das relações existentes entre as operações, uma função booleana pode assumir muitas formas.

4º Exemplo: Dadas $f(x, y) = x'y'$ e $g(x, y) = (x + y)'$, sabemos pelas leis de De Morgan, que f e g são a mesma função, isto é, elas assumem o mesmo valor para valores idênticos das variáveis.

Para melhor determinar se duas expressões representam a mesma função booleana, torna-se desejável a existência de uma *forma padrão* ou *canônica* na qual as expressões podem ser transformadas. Desenvolveremos tal forma no teorema a seguir.

Teorema — Se f é uma função booleana de uma variável, então, para todos os valores de x, $f(x) = f(1)x + f(0)x'$.

Prova

Examinemos as possíveis formas de f.

1º Caso:

f é uma função constante, $f(x) = a$.

$f(1)x + f(0)x' = ax + ax' = a(x + x') = a1 = a = f(x)$.

2º Caso:

f é a função identidade, $f(x) = x$.

$f(1)x + f(0)x' = 1x + 0x' = x + 0 = x = f(x)$.

3º Caso:

Suponhamos que o teorema vale para f e seja

$g(x) = (f(x))'$.

$$\begin{aligned} g(x) = (f(x))' &= (f(1)x + f(0)x')' \\ &= (f(1)x)'\,(f(0)x')' \\ &= ((f(1))' + x')\,(f(0))' + x) \\ &= (f(1))'\,(f(0))' + f(1))'x + f(0))'x' + xx' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (f(1))'(f(0))'(1) + (f(1))'x + (f(0))'x' \\
&= (f(1))'(f(0))'x + (f(1))'x + (f(1))'(f(0))'x' \\
&= (f(1))'(f(0))'x + (f(1))'x + (f(1))'(f(0))'x' \\
&+ (f(0))'x' \\
&= (f(1))'x + (f(0))'x' \qquad\qquad \text{(absorção)} \\
&= g(1)x + g(0)x'.
\end{aligned}
$$

4º Caso:

Suponhamos que o teorema vale para f e g, e seja $h(x) = f(x) + g(x)$.

$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(x) + g(x) \\
&= f(1)x + f(0)x' + g(1)x + g(0)x' \\
&= (f(1) + g(1))x + (f(0) + g(0))x' \\
&= h(1)x + h(0)x'.
\end{aligned}
$$

5º Caso:

Suponhamos que o teorema vale para f e g, e seja $k(x) = f(x)g(x)$.

$$
\begin{aligned}
k(x) &= f(x)g(x) \\
&= (f(1)x + f(0)x')\,(g(1)x + g(0)x') \\
&= f(1)g(1)xx + f(1)g(0)xx' + f(0)g(1)x'x + f(0)g(0)x'x' \\
&= f(1)g(1)x + f(0)g(0)x' \\
&= k(1)x + k(0)x'.
\end{aligned}
$$

Estabelecemos, então, uma *forma canônica* para uma função booleana de uma variável. Podemos mostrar, de modo semelhante, que, se f é uma função booleana de duas variáveis, então, para todos os valores de x e y, temos:

$$f(x, y) = f(1,1)xy + f(1, 0)xy' + f(0, 1)x'y + f(0, 0)x'y'.$$

Em geral, se f é uma função booleana de n variáveis, então, para todos os valores de $x_1, \ldots, x_n$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

onde α_i assume os valores 0 e 1, e $x_i^{\alpha_i}$ é interpretado como x_i ou x_i' conforme α_i tem valor 1 ou 0.

Exemplos: Seja B uma Álgebra de Boole com quatro elementos 0, a, a' e 1.

Construamos as formas canônicas para as funções:

a) $f(x) = x + x'a$
b) $f(x, y) = x'y + xy' + y'$.

Solução:

a) $f(1) = 1$ e $f(0) = a$, de modo que a forma canônica para f é
$f(1)x + f(0)x' = 1x + ax'$.

Valores de $f(x) = x + x'a$

x	f(x)
0	a
a	a
a'	1
1	1

b) $g(1,1) = 0$ e $g(1,0) = g(0,1) = g(0,0) = 1$, de modo que a forma canônica para g é $g(x,y) = 0xy + 1xy' + 1x'y + 1x'y'$.

Valores de $g(x,y) = x'y + xy' + y'$

x \ y	0	a	a'	1
0	1	1	1	1
a	1	a'	1	a'
a'	1	1	a	a
1	1	a'	a	0

Note-se que em ambas as funções, a forma canônica reduz-se facilmente à forma original.

A forma canônica que discutimos é conhecida como *uma soma de produtos* ou *forma normal disjuntiva* (FND). Existe também *um produto de somas* ou *forma normal conjuntiva* (FNC). Cada termo de uma FND é, às vezes, chamado *minterm* (m) e os fatores de uma FNC são chamados *maxterm* (M).

EXERCÍCIOS

1. Suponhamos que f é uma função booleana de uma variável sobre uma Álgebra de Boole de 4 elementos, $f(0) = a'$ e $f(1) = a$. Determinar uma expressão para f.

2. Escrever a forma canônica geral para uma função booleana de três variáveis.

3. Determinar a forma canônica para cada uma das seguintes funções:

   a) $f(x) = xx'$.
   b) $f(x,y) = xy' + ax' + by$, onde *a* e *b* são elementos fixos distintos de uma Álgebra de Boole.
   c) $f(x,y,z) = x(y + az') + (x' + z)\ (ax + y' + z)$.

4. Suponhamos que B é uma Álgebra de Boole sobre o conjunto $\{0, a, a', b, b', c, c', 1\}$, e seja f uma função booleana tal que $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(1,0,0) = a$, $f(0,1,0) = 0$, $f(0,1,1) = 1$, $f(1,0,1) = f(1,1,0) = c'$, e $f(1,1,1) = b$. Determinar $f(a',c,b)$.

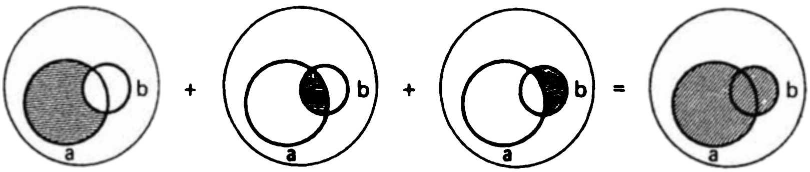
11

Representação das Funções Booleanas

11.1 DIAGRAMAS DE VENN OU CÍRCULOS DE EULER

Seja representar as funções:

a) $y = f(a,b) = ab' + ab + a'b$

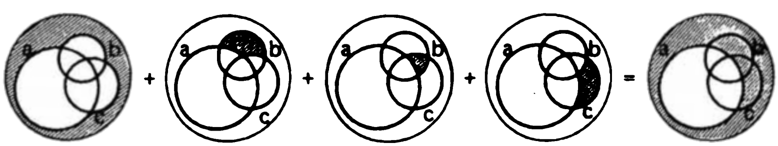


ab' $\quad$ ab $\quad$ $a'b$ $\quad$ $y = ab' + ab + a'b = a + b$

Verificação Algébrica:

$$
\begin{aligned}
y &= ab' + ab + a'b \\
&= a(b + b') + a'b \\
&= a \cdot 1 + a'b \\
&= a + a'b \\
&= a + b
\end{aligned}
$$

b) $y = a'b'c' + a'bc' + a'bc + a'b'c$

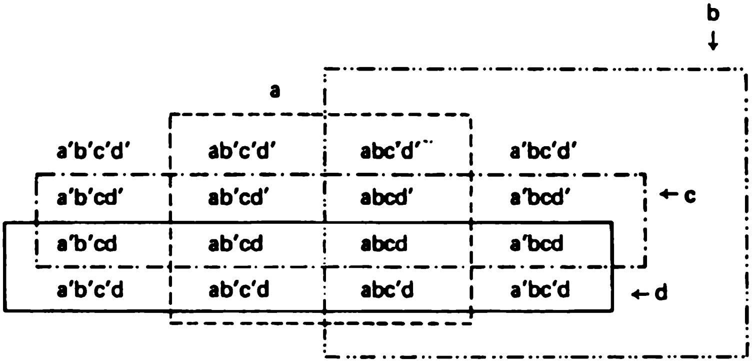


$a'b'c'$ $\quad$ $a'bc'$ $\quad$ $a'bc$ $\quad$ $a'b'c$ $\quad$ a'

Verificação Algébrica:

$$\begin{aligned} y &= a'b'c' + a'bc' + a'bc + a'b'c \\ &= a'b(c + c') + a'b'(c + c') \\ &= a'b + a'b' \\ &= a'(b + b') \\ &= a' \end{aligned}$$

Para mais de três variáveis, torna-se muito difícil representar as interseções formadas pelos respectivos círculos de Euler. Neste caso, utiliza-se a disposição mostrada a seguir para quatro variáveis: a, b, c, d.



11.2 TABELAS-VERDADE

Construamos a tabela-verdade da função:

$$f(a,b) = a + a'b'$$

a	b	a'	b'	a'b'	f	
0	0	1	1	1	1	← a'b'
0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	0	1	← ab'
1	1	0	0	0	1	← ab

Nosso problema consiste em determinar a função booleana f dada sua tabela-verdade.

Exemplo: Determinar a função booleana f representada pela tabela-verdade:

a	b	c	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	← a'b'c
0	1	0	0	
0	1	1	1	← a'bc
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	← abc

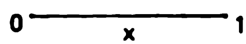
Solução:

Fazendo a variável não complementada igual a 1 e a variável complementada igual a 0, pelos valores de a,b e c correspondentes a f = 1 em cada linha da tabela, vemos que os termos da função procurada são a'b'c, a'bc e abc. Logo, temos a função:

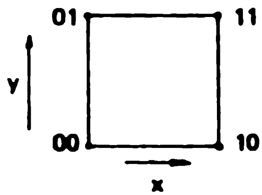
$$f(a,b,c) = a'b'c + a'bc + abc.$$

11.3 REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA

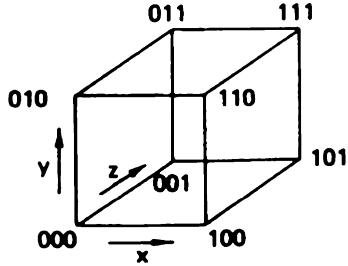
a) Função de uma variável



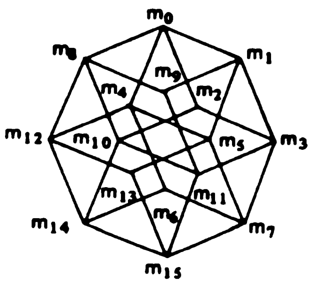
b) Função de duas variáveis



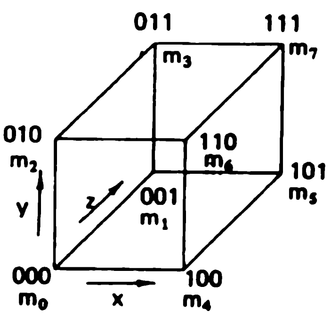
c) Função de três variáveis



d) Função de quatro variáveis



De modo geral, representamos as possíveis combinações das n variáveis como pontos do *n-espaço*, e o conjunto de todos os 2^n pontos formam os *vértices de um n-cubo*, ou um *hipercubo booleano*. Para representar geometricamente as funções booleanas, ou seja, no n-cubo, atribuímos a cada vértice do n-cubo o minterm de n variáveis correspondente. Então, no caso do 3-cubo, temos:

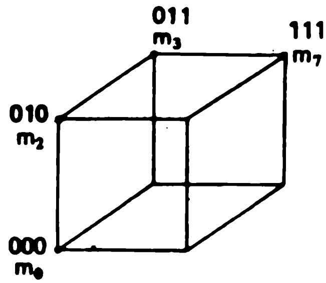


m_i	vértice
m_0	000
m_1	001
m_2	010
m_3	011
m_4	100
m_5	101
m_6	110
m_7	111

A representação geométrica de uma função de n variáveis é o conjunto dos vértices do n-cubo correspondentes aos minterms da função.

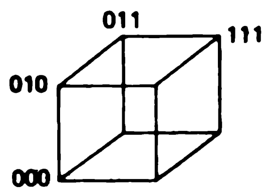
Exemplo: Representar geometricamente a função $f(a,b,c) = \Sigma m(0,2,3,7)$.

Solução:



Observação:

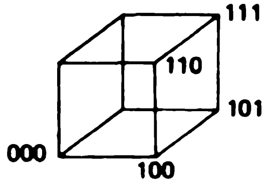
1. Cada um dos vértices correspondentes aos minterms da função é dito 0-cubo dessa função.
2. Dois 0-cubos de uma função formam um 1-cubo quando diferem entre si por somente um valor da variável como, por exemplo, 000 e 010, 010 e 011, 011 e 111.



3. Quatro 0-cubos formam um 2-cubo da função.

Dizemos que um p-cubo ($p < n$) é um *subcubo* de um n-cubo, quando todos os seus vértices pertencem ao conjunto dos vértices desse n-cubo, ou seja, o p-cubo está *contido* ou *coberto* pelo n-cubo.

Exemplo: Na representação a seguir:



O 0-cubo 100 está coberto pelos 1-cubos 100 e 101, 100 e 110, 100 e 000, e pelo 2-cubo 100, 101, 110, e 111. Definimos a *distância* entre dois pontos de um n-cubo como o número de valores das variáveis em que diferem as representações binárias dos dois pontos. Assim, dados os pontos 101 e 011 de um 3-cubo, a distância entre eles é d = 2, pois diferem entre si em duas posições. Indicamos o fato escrevendo: d(3,5) = 2, onde 3 e 5 são os valores decimais desses pontos encontrados nos minterms m_3 e m_5.

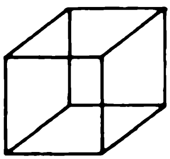
Vejamos agora alguns exemplos de representação geométrica das funções booleanas.

1º Exemplo:

Dar a representação geométrica do circuito ——x —— y'—— z —— .

Solução:

$f(x,y,z) = xy'z$



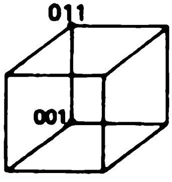
$$\begin{array}{ccc} x & y' & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2º Exemplo:

Representar geometricamente o circuito ——— x'——— z ——— .

Solução:

$f(x,z) = x'z = x'yz + x'y'z$



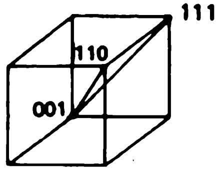
$$\begin{array}{ccccccc} x' & y & z & + & x' & y' & z \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3º Exemplo:

Representar geometricamente a função $f(x,y,z) = xy + x'y'z$.

Solução:

$$f(x,y,z) = xy + x'y'z$$
$$= xyz + xyz' + x'y'z$$



$$\begin{array}{ccccc} xyz & + & xyz' & + & x'y'z \\ \downarrow\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow\downarrow \\ 111 & & 110 & & 001 \end{array}$$

EXERCÍCIOS

1. Representar geometricamente as funções:

   a) $f(x,y,z) = x'(y'z' + yz)$

   b) $f(x,y,z) = y(x + z)$

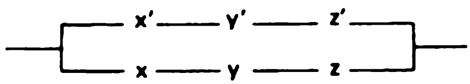
   c) $f(x,y,z) = x'y' + xyz'$

   d) $f(x,y,z) = y(x + z) + x'y'z'$

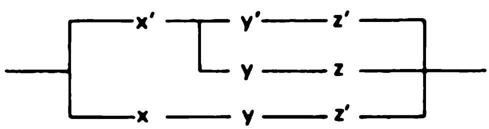
   e) $f(x,y,z) = y'$

2. Dar a representação geométrica dos circuitos:

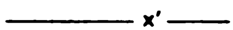
a)



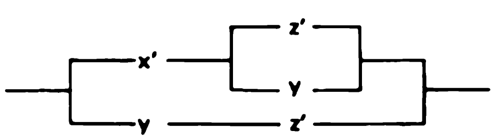
b)



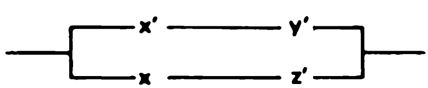
c)



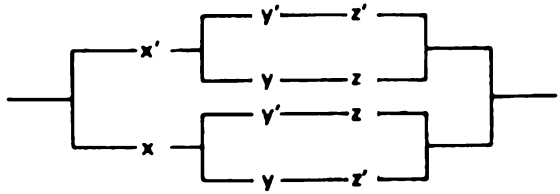
d)



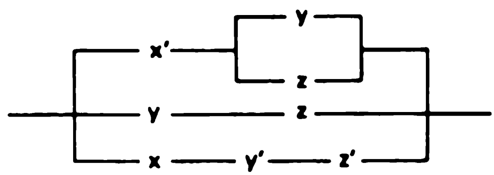
e)



f)



g)

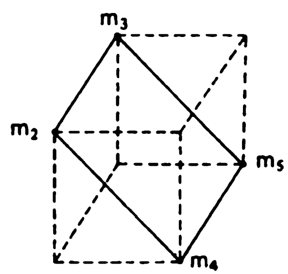


3. Determinar as seguintes distâncias em n-cubo:

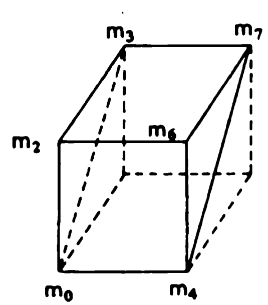
a) d(7,13)
b) d(2,7)
c) d(7,15)
d) d(3,11)
e) d(9,14)

4. Determinar a função booleana representada geometricamente por:

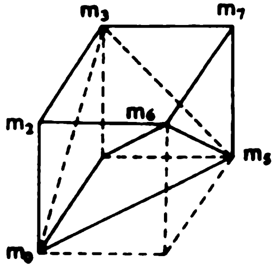
a)



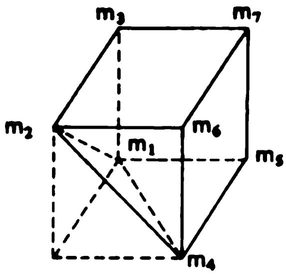
b)



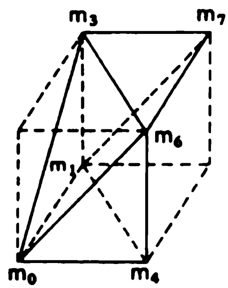
c)



d)



e)



12
Formas Normais

12.1 FORMA NORMAL a n VARIÁVEIS

Dizemos que uma função booleana está na *forma normal a n variáveis* quando envolve todas essas variáveis ou seus complementos.

1º Exemplo: a + b' é normal em *a* e *b*.

2º Exemplo: a · b' é normal em *a* e *b*.

3º Exemplo: a + ab é normal em *a* e *b*.

4º Exemplo: a + b + c'd'e' é normal em *a,b,c,d* e *e*.

5º Exemplo: ab'c'de é normal em *a,b,c,d* e *e*.

12.2 FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Uma função booleana está na *forma normal disjuntiva* quando em todos os seus termos aparecem todas as variáveis envolvidas ou seus complementos.

1º Exemplo:

A função booleana x = ab' + a(ab) + a'b' *está* na forma normal disjuntiva.

2º Exemplo:

A função booleana y = abc' + ab'c + a'b'c' *está* na forma normal disjuntiva.

3º Exemplo:

A função booleana z = abcd + a'bc'd' + a'b'c'd' *está* na forma normal disjuntiva.

4º Exemplo:

A função $abc' + ab'c + ab'$ *não está* na forma normal disjuntiva, pois, no terceiro termo, falta a variável *c* ou seu complemento.

5º Exemplo:

As funções abaixo *não estão* na forma normal disjuntiva:

$$x = ab + bc + ac$$
$$y = abc + abd + acd$$
$$z = abc + ac$$
$$w = a'b'c' + bc'$$
$$t = (a + b' + c') \cdot (a' + b + c),$$

pois todas as variáveis não se encontram em todos os termos.

TRANSFORMAÇÃO DE UMA FUNÇÃO DISJUNTIVA QUALQUER EM FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Seja a função

$$y = a'b'd + abc' + ab'cd$$

a qual não está na forma normal disjuntiva porque no primeiro termo falta a variável *c* e no segundo termo falta a variável *d*. Como

$$c + c' = d + d' = 1,$$

podemos escrever:

$$y = (a'b'd)\,(c + c') + (abc')\,(d + d') + ab'cd$$

Logo,

$$y = a'b'cd + a'b'c'd + abc'd + abc'd' + ab'cd$$

está na forma normal disjuntiva.

INVERSA DE UMA FUNÇÃO NA FORMA NORMAL DISJUNTIVA

Seja a função

$$z = a'b'c + a'bc + abc$$

na forma normal disjuntiva. Queremos determinar sua inversa z' e, para isto, lançaremos mão de um meio conhecido, ou seja, a tabela-verdade. Construamos, então, as tabelas-verdade de z e z'. Feito isto, procedemos conforme vimos no capítulo anterior.

a	b	c	z	z'	
0	0	0	0	1	← a'b'c'
0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	← a'bc'
0	1	1	1	0	
1	0	0	0	1	← ab'c'
1	0	1	0	1	← ab'c
1	1	0	0	1	← abc'
1	1	1	1	0	

$$z' = a'b'c' + a'bc' + ab'c' + ab'c + abc'$$

A função inversa de z pode, também, ser obtida diretamente da coluna de z, da seguinte maneira:

a	b	c	z	
0	0	0	0	← a'b'c'
0	0	1	1	
0	1	0	0	← a'bc'
0	1	1	1	
1	0	0	0	← ab'c'
1	0	1	0	← ab'c
1	1	0	0	← abc'
1	1	1	1	

Portanto:

$$z' = a'b'c' + a'bc' + ab'c' + ab'c + abc'$$

12.3 FORMA NORMAL CONJUNTIVA

Dizemos que uma função booleana está na *forma normal conjuntiva* quando em todos os fatores aparecem todas as variáveis envolvidas ou seus complementos.

1º Exemplo:

$y = (a + b + c')\,(a' + b' + c')\,(a' + b' + c)$ *está* na forma normal conjuntiva.

2º E nplo:

= (a' + b) (a + b' + c) *não está* na forma normal conjuntiva porque no pri-
r ɔ fator falta a variável *c*.

TR SFORMAÇÃO DA FORMA NORMAL DISJUNTIVA EM FORMA NO AL CONJUNTIVA MEDIANTE A TABELA-VERDADE

ˌeja transformar a função

$$y = a'b + ab$$

da na normal disjuntiva para a forma normal conjuntiva. Procede-se da seguin- te ˌ ˌeira:

a) Constrói-se a tabela-verdade de y:

a	b	a'	a'b	ab	y	
0	0	1	0	0	0	←
0	1	1	1	0	1	
1	0	0	0	0	0	←
1	1	0	0	1	1	

b) Determina-se y':

$$y' = a'b + ab'$$

c) Inverte-se y', para obter-se y, pelo Teorema de De Morgan:

$$\begin{aligned} (y')' &= (a'b' + ab')' \\ &= (a'b')' \cdot (ab')' \\ &= (a + b) \cdot (a' + b) \end{aligned}$$

Portanto:

$y = (a + b) \cdot (a' + b)$ está na forma normal conjuntiva.

12.4 FUNÇÕES NA FORMA BINÁRIA

Seja a função

$$y = c'd' + cd$$

que desejamos escrever na forma binária. Como toda variável não complementada corresponde ao valor 1 e as complementadas correspondem a 0, tal função pode ser escrita da seguinte maneira:

$$y(c,d) = \Sigma(00,11),$$

e diz-se que a função está na *forma binária*.

Exemplo: Dada a tabela-verdade da função y, escrevê-la na forma binária.

Solução:

a	b	c	y	
0	0	0	0	
0	0	1	1	← a'b'c
0	1	0	1	← a'bc'
0	1	1	0	
1	0	0	1	← ab'c'
1	0	1	0	
1	1	0	1	← abc'
1	1	1	0	

$y = a'b'c + a'bc' + ab'c' + abc'$, então: $y = 001 + 010 + 100 + 110$ o que nos dá: $y(a,b,c) = (001,010,100,110)$.

Chama-se *índice* de um termo, dado na forma binária, o número de valores 1 contidos nesse termo. Assim, por exemplo, os termos 1010, 1101, 1000 e 1111 têm, respectivamente, índices 2,3,1 e 4.

12.5 FUNÇÕES NA FORMA DECIMAL

Seja representar na forma decimal a função dada na tabela-verdade:

nº	a	b	f	
0	0	0	0	
1	0	1	0	
2	1	0	1	←
3	1	1	1	←

Nessa tabela, temos:

nº decimal	nº binário
0	00
1	01
2	10
3	11

Então, os valores decimais que correspondem a f = 1 são 2 e 3. Podemos escrever:

$$f(a,b) = \Sigma(2,3).$$

Procedendo de maneira análoga nas funções dadas pelas tabelas a seguir, temos:

nº	a	b	c	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

$f(a,b,c) = \Sigma(1,3,6)$

nº	a	b	c	d	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

$f(a,b,c,d) = \Sigma(1,4,6,7,10,12).$

EXERCÍCIOS

1. Representar mediante círculos de Euler a função:

$$y = abc' + a'bc' + abc + a'bc.$$

2. Indicar mediante uma tabela-verdade, a função:

$$y = ad.$$

3. Representar sobre uma tabela-verdade, a função:

$$y = ab'cd' + ad.$$

4. Usando a tabela-verdade, dar a função $y = a + d$ sob a forma normal disjuntiva.

5. Passar para a forma normal disjuntiva as funções:

   a) $y = a + bc'$
   b) $y = d$
   c) $x = a(d'(b + c) + b'(c'd + a'b'c))$
   d) $y = ad + cd$

6. Dar as funções do exercício 5 na forma binária.

7. Dar as funções do exercício 5 na forma decimal.

8. Determinar, mediante a tabela-verdade, a inversa da função booleana:

$$y = abc' + a'b'c' + a'bc + ab'c.$$

9. Transformar para a forma normal conjuntiva as seguintes funções booleanas:

   a) $y = a + c$
   b) $x = (a + b') \cdot (a' + b)$
   c) $z = (a + b + c) \cdot (a' + c') \cdot (a + b')$
   d) $x = (a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + d)$

10. Representar mediante círculos de Euler as funções:

    a) $y(a,b,c) = \Sigma(2,3,5,6,7)$
    b) $x(a,b,c) = \Sigma(000,001,011,111)$

11. Exprimir sob forma binária as funções:

    a) $x = ab + bc$
    b) $y = a'b + bc + ac'$
    c) $z = ab'c + bc + ab'$

d) $w = ab'c + bc + ab$
e) $t = ab'cd + abc' + a'bd$
f) $y = a' + b + c' + d$

12. Exprimir sob a forma decimal as funções do exercício 11.

13. Construir as tabelas-verdade relativas às funções:

a) $x(a,b) = \Sigma(2,3)$
b) $y(a,b,c) = \Sigma(000,010,110)$
c) $y(a,b,c) = \Sigma(001,011,111)$
d) $y(a,b,c) = \Sigma(0,3,5)$
e) $z(a,b,c,d) = \Sigma(0010,0101,0110,1011)$
f) $z(a,b,c,d) = \Sigma(0,3,5,7,11)$.

13

Minimização de Funções

Minimizar ou *simplificar uma função booleana* é a operação mediante a qual se reduz ao mínimo o número de seus termos, resultando em economia do circuito a ela correspondente. Os métodos de aplicação mais freqüentes na minimização de uma função ou expressão booleana são:

1. Método Algébrico;
2. Método do Mapa de Karnaugh;
3. Método de Quine-McKluskey.

Vejamos como se procede em cada um deles.

13.1 MÉTODO ALGÉBRICO

Este método já foi estudado como aplicação dos teoremas da Álgebra de Boole; daremos apenas um exemplo, como lembrete, para possibilitar comparações futuras com os demais.

Seja minimizar a função

$$y = a((b' + c')(b' + c)) + ab + (a' + b')(b + c').$$

Solução:

$$\begin{aligned} y &= a((b + c')(b' + c)) + ab + (a' + b')(b + c') \\ &= a(bb' + bc + b'c' + cc') + ab + (a'b + a'c' + b'b + b'c') \\ &= abc + ab'c' + ab + a'b + a'c' + b'c' \\ &= ab + b'c' + a'b + a'c' \\ &= (a + a')b + b'c' + a'c' \end{aligned}$$

$$= b + b'c' + a'c'$$
$$= b + c' + a'c'$$
$$= b + c'\,(1 + a')$$
$$= b + c'$$

13.2 MÉTODO DO MAPA DE KARNAUGH

O mapa de Karnaugh é uma forma modificada de tabela-verdade e nos permite representar graficamente uma função booleana e, se for o caso, simplificá-la.

MAPA A UMA VARIÁVEL

No caso de uma variável, o mapa é formado por duas celas que correspondem a cada um dos valores 0 e 1 que podem se atribuídos à variável.

	0	1
a		

Esta tabela pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

	0	1
a	0	1

ou

	0	1
a	a'	a

conforme usemos os valores atribuídos à variável ou à própria variável na forma complementada ou não. Atribuiremos sempre o valor 1 à variável não complementada e o valor 0 à variável complementada.

MAPA A DUAS VARIÁVEIS

É formado por quatro celas que correspondem às combinações binárias que podem ocorrer com estas variáveis. Os termos da função a ser representada devem ser escritos em ordem alfabética e, em todos os mapas de Karnaugh, a ordem em que entrarão as variáveis deve vir claramente anotada na parte superior esquerda.

Representação binária

b \ a	0	1
0	00	10
1	01	11

Representação literal

b \ a	0	1
0	a'b'	ab'
1	a'b	ab

Representação decimal

b \ a	0	1
0	0	2
1	1	3

MAPA A TRÊS VARIÁVEIS

bc \ a	0	1
00	000	100
01	001	101
11	011	111
10	010	110

bc \ a	0	1
00	a'b'c'	ab'c'
01	a'b'c	ab'c
11	a'bc	abc
10	a'bc'	abc'

bc \ a	0	1
00	0	1
01	2	3
11	6	7
10	4	5

MAPA A QUATRO VARIÁVEIS

cd \ ab	00	01	11	10
00	0000	0100	1100	1000
01	0001	0101	1101	1001
11	0011	0111	1111	1011
10	0010	0110	1110	1010

cd \ ab	00	01	11	10
00	a'b'c'd'	a'bc'd'	abc'd'	ab'c'd'
01	a'b'c'd	a'bc'd	abc'd	ab'c'd
11	a'b'cd	a'bcd	abcd	ab'cd
10	a'b'cd'	a'bcd'	abcd'	ab'cd'

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

MAPA A CINCO VARIÁVEIS

e

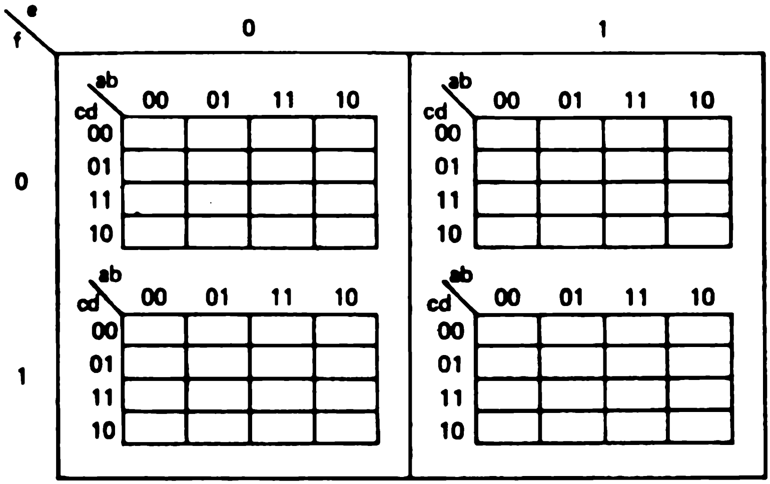
0

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

1

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

MAPA A SEIS VARIÁVEIS



Como se pode notar, a partir de seis variáveis o processo de representação torna-se complicado e difícil e não atende ao caráter prático da Álgebra de Boole. Posteriormente, estudaremos outro método que supera esta dificuldade.

REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO NA FORMA CANÔNICA MEDIANTE O MAPA DE KARNAUGH

Representemos, mediante o mapa de Karnaugh, a seguinte função na forma normal disjuntiva:

$$y = abc' + ab'c' + abc + a'b'c.$$

Trata-se de uma função a três variáveis e o mapa a ser utilizado é:

bc \ a	0	1
00		
01		
11		
10		

Para representar a função através do mapa, colocamos o valor 1 nas celas correspondentes a cada termo da função deixando as demais vazias. Assim:

bc \ a	0	1
00		1
01	1	
11		1
10		1

$$y = abc' + ab'c' + abc + a'b'c$$

REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO QUALQUER

Representar a função

$$y = a'b'cd + ab'd + abc' + ac'd',$$

a quatro variáveis que não está na forma normal disjuntiva, e em três de seus termos falta uma variável. Usando o teorema expresso por $ab + ab' = a$, temos:

$$\begin{aligned} y &= a'b'cd + ab'cd + ab'c'd + abc'd + abc'd' + abc'd' + ab'c'd' \\ &= a'b'cd + ab'cd + ab'c'd + abc'd + abc'd' + ab'c'd' \end{aligned}$$

e, construindo o mapa correspondente, vem:

cd \ ab	001	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1			1
10				

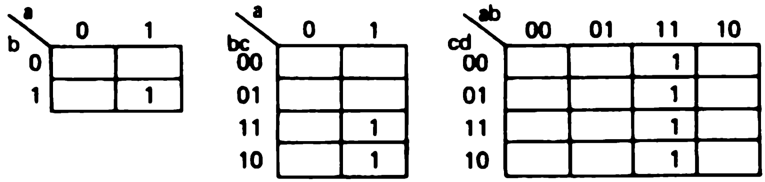
a'b'cd

$$y = a'b'cd + ab'cd + ab'c'd + abc'd + abc'd' + ab'c'd'$$

Note-se que no caso de funções como $y = a'bcd' + ab$ deve-se considerar todas as possibilidades de aplicação do teorema $ab + ab' = a$, ficando o mapa correspondente como se vê a seguir:

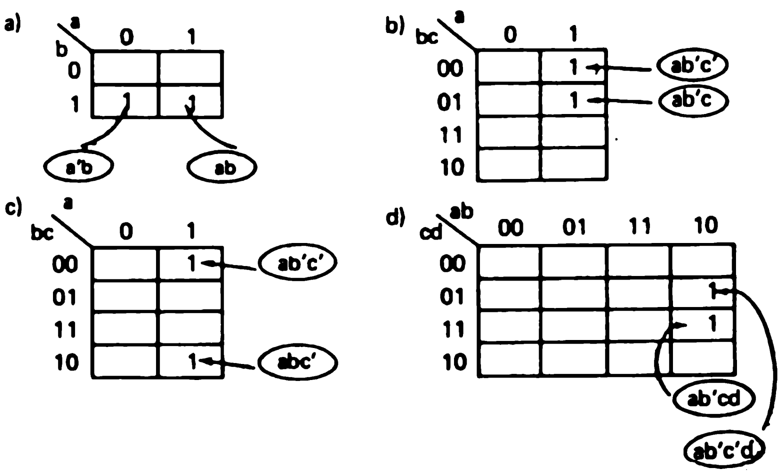
cd \ ab	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10		1	1	

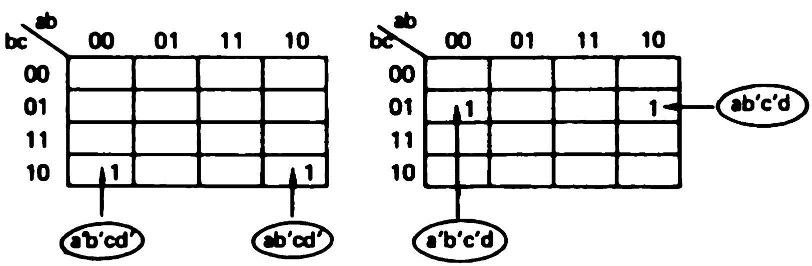
Na representação de uma função mediante o mapa de Karnaugh deve-se buscar a forma mais simples de representação, considerando-se que uma função a duas variáveis pode ser representada em mapas para maior número de variáveis. Assim, a função y = ab tem as seguintes representações:



Duas celas que diferem em apenas uma variável são ditas *adjacentes* e podem ser combinadas pelo teorema ab + ab′ = a. Num mapa de Karnaugh podemos ter celas adjacentes sem que tenham lados comuns.

Exemplos:





SIMPLIFICAÇÃO DE FUNÇÕES MEDIANTE O MAPA DE KARNAUGH

Dada uma função representada em um mapa de Karnaugh, se encontrarmos termos em celas adjacentes, podemos fazer uma simplificação. No mapa que representa a função

$$y = a'bc'd' + abc'd + a'b'cd + a'bcd + ab'cd',$$

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01			1	
11	1	1		
10				1

a'cd

podemos efetuar uma simplificação, substituindo a'b'cd + a'bcd por a'cd. A operação é indicada agrupando-se os dois termos conforme mostra o mapa retroapresentado. Quando os termos a simplificar encontram-se em celas nos extremos do mapa, indicamos conforme segue:

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01	1			1
11				
10		1		

b'c'd

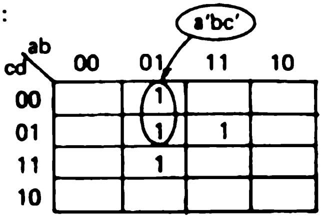
a'bd'

No mapa da função

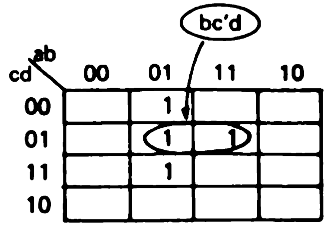
$$y = a'bc'd' + a'bc'd + a'bcd + abc'd$$

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	
11		1		
10				

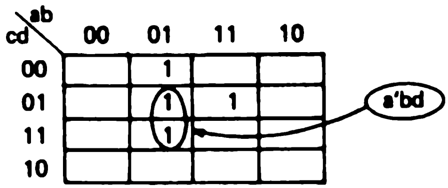
temos:



$y = a'b'c' + abc'd + a'bcd$

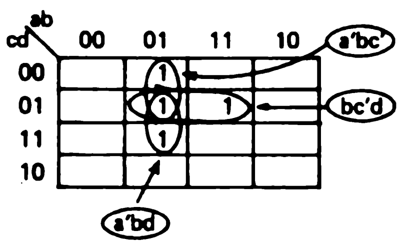


$y = bc'd + a'bc'd' + a'bcd$



$y = a'bd + a'bc'd' + abc'd$

Transportando estas representações para um único mapa, obtemos:



$y = a'bc' + a'bd + bc'd$

que é a função simplificada. Para simplificar ao máximo uma função torna-se necessário incluir o mesmo termo em diversos agrupamentos. Vejamos agora o caso em que as celas são adjacentes duas a duas.

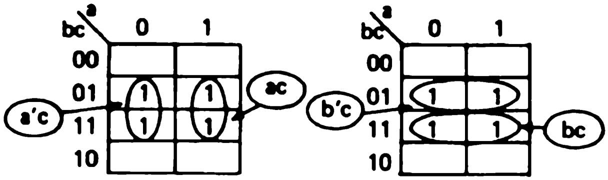
Seja simplificar a função

$$y = a'b'c + a'bc + ab'c + abc.$$

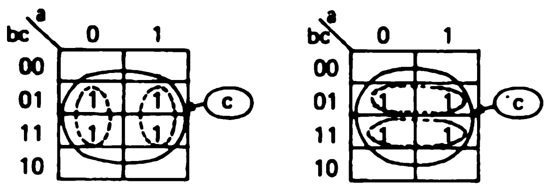
 O mapa correspondente é:

bc \ a	0	1
00		
01	1	1
11	1	1
10		

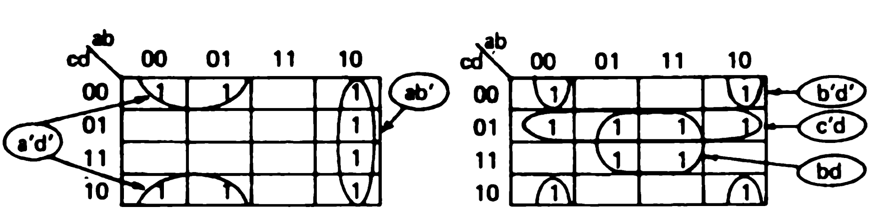
e, temos duas maneiras diferentes para simplificar a mesma função, ou seja:



Considerando que as celas adjacentes no caso de ac e a'c diferem na variável *a* e no caso de bc e b'c diferem na variável *b*, podemos agrupá-las da maneira mostrada a seguir, ou seja:



Outros casos de simplificação:



y = ab' + a'd' y = bd + b'd' + c'd

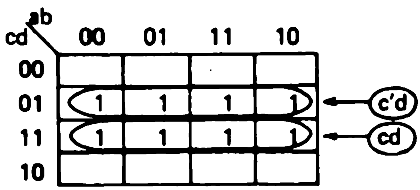
Vejamos agora em que as celas são adjacentes quatro a quatro.

Seja o mapa de Karnaugh que representa a função

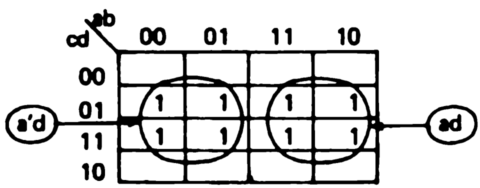
$$y = a'b'c'd + a'b'cd + a'bc'd + a'bcd + abc'd + abcd + ab'c'd + ab'cd.$$

cd \ ab	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11	1	1	1	1
10				

Temos:



$$y = cd + c'd = d$$



$$y = ad + a'd = d$$

13.3 MÉTODO DE QUINE-McCLUSKEY

Este método aplica-se exclusivamente a funções booleanas na forma normal disjuntiva e notação binária. Supera as limitações do mapa de Karnaugh, que pode ser aplicado a funções com mais de seis variáveis e apresenta um procedimento que permite a utilização de computadores. Consiste na aplicação sucessiva do teorema expresso por ab + ab' = a, a termos que diferem entre si apenas por um dígito binário. Para utilização deste método, procede-se da seguinte maneira:

a) Classificam-se e agrupam-se os termos da função de acordo com seus índices.
b) Comparam-se todos os termos de um dado grupo com cada termo do grupo seguinte, ou seja, de índice imediatamente superior, mediante a utilização do teorema ab + ab' = a. Aplica-se sucessivamente esse teorema comparando cada termo do grupo de índice i com todos os termos do grupo de índice i + 1 até esgotarem-se as possibilidades. O termo resultante consiste na representação fixa original com o dígito diferente substituído por um traço. Marca-se com (✓) todos os termos comparados com ao menos outro termo.
c) Após tabular os termos comparados, procede-se novamente conforme o exposto no item *b* até esgotarem-se as possibilidades. Os termos que ficarem sem a marca (✓) formam o conjunto dos *termos irredutíveis.*

1º Exemplo:

Determinar os termos irredutíveis da função

$$f(x,y,z) = x'y'z + xy'z' + x'yz' + x'yz + xy'z + xyz.$$

Solução:

$$f(x,y,z) = \Sigma(001,100,010,011,101,111)$$

	x	y	z	
1	0	0	1	✓
2	0	1	0	✓
4	1	0	0	✓
3	0	1	1	✓
5	1	0	1	✓
7	1	1	1	✓

	x	y	z	
1,3	0	–	1	✓
1,5	–	0	1	✓
2,3	0	1	–	→ x'y
4,5	1	0	–	→ xy'
3,7	–	1	1	✓
5,7	1	–	1	✓

	x	y	z	
1,3,5,7	–	–	1	→ z
1,5,3,7	–	–	1	

Como 1,3,5,7 e 1,5,3,7 representam um mesmo termo, não será necessário repeti-lo e a função simplificada é dada por:

$$f = xy' + x'y + z.$$

2º Exemplo:

Minimizar a função:

$$y = a'b'cde + ab'cde' + a'b'c'de' + ab'c'd'e' + ab'c'de' + a'bcd'e + abcd'e' + a'bcde + a' + a'bcd'e' + a'b'cd'e'.$$

Solução:

Por conveniência de notação, podemos escrever a função dada na forma binária ou decimal. Temos:

$$y(a,b,c,d,e) = \Sigma(00111,10110,00010,10000,10010,01101,11100,01111,01100,00100) \text{ e}$$

$$y(a,b,c,d,e) = \Sigma(7,22,2,16,18,13,28,15,12,4).$$

	a	b	c	d	e
2	0	0	0	1	0
4	0	0	1	0	0
16	1	0	0	0	0
12	0	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0
7	0	0	1	1	1
13	0	1	1	0	1
22	1	0	1	1	0
28	1	1	1	0	0
15	0	1	1	1	1

	a	b	c	d	e	
2,18	–	0	0	1	0	→ b'c'de'
4,12	0	–	1	0	0	
16,18	1	0	0	–	0	
12,28	–	1	1	0	0	
18,22	1	0	–	1	0	
7,15	0	–	1	1	1	
13,15	0	1	1	–	1	

e a função simplificada é:

$$y = b'c'de' + a'cd'e' + bcd'e' + ab'de' + a'cde + a'bce.$$

3º Exemplo:

Minimizar a função:

$$y = a'bc'd' + abc'd' + a'b'c'd + a'bc'd + a'bcd' + abcd'.$$

Solução:

y(a,b,c,d) = Σ(0100,1100,0001,0101,0110,1110) e
y(a,b,c,d) = Σ(4,12,1,5,6,14)

	a	b	c	d
1	0	0	0	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
12	1	1	0	0
6	0	1	1	0
14	1	1	1	0

	a	b	c	d
1,5	0	-	0	1
4,5	0	1	0	-
4,12	-	1	0	0
4,6	0	1	-	0
6,14	-	1	1	0

	a	b	c	d
4,12,6,14	-	1	-	0

y = bd' + a'c'd + a'bc' + a'bd'.

Embora a função esteja simplificada, não está minimizada, pois, apesar de serem seus termos irredutíveis, não são *termos irredutíveis indispensáveis.* Para identificar tais termos, usamos o *crivo dos termos irredutíveis.*

	1	4	5	6	12	14
bd'		●		●	●	●
a'c'd	●		●			
a'bc'		●	●			
a'bd'		●		●		

Neste crivo aparece na horizontal a notação decimal correspondente aos termos e na vertical os termos da função simplificada. O fato de cada termo da função simplificada ser parte dos termos representados na forma decimal é indicado por um ponto na interseção das linhas e colunas correspondentes do crivo. As colunas em que a cada número decimal corresponde apenas um único termo, identifica um termo irredutível e indispensável. Assim, bd' e a'c'd são termos irredutíveis indispensáveis; os demais são *termos supérfluos*. Então, a função minimizada resulta:

y = bd' + a'c'd.

EXERCÍCIOS

1. Determinar a função representada no mapa:

e = 0

cd \ ab	00	01	11	10
00		1		
01	1			
11		1	1	
10			1	

e = 1

cd \ ab	00	01	11	10
00	1			
01		1		1
11			1	
10				

2. Representar as seguintes funções no mapa de Karnaugh:

   a) y(a,b,c) = ab + b'c + a'b' + ab' + bc'
   b) y(a,b,c,d) = abd + ab'c + bc'd + bcd'
   c) y(a,b,c,d) = Σ(0001,0101,1111,1010,1001)
   d) y(a,b,c,d) = Σ(2,4,5,6,7,11,14)
   e) y = (a + b) (b' + c + d)
   f) y = abc(a' + c' + d')

3. Simplificar mediante o mapa de Karnaugh as funções do exercício 2.

4. Simplificar pelo método de Quine-McCluskey as seguintes funções:

   a) y = a'b + bc' + a'c' + b'd + a'bc' + a'b'c
   b) y = abc + a'bc' + ab' + a'c + a'b
   c) y = abc + ab'c + ac + bc + ad + b'd
   d) y(a,b,c) = Σ(0,1,2,4,7)
   e) y(a,b,c,d) = Σ(0,1,3,5,7,9,11,15)
   f) y(a,b,c,d) = Σ(0,2,4,6,7,8,9,10,11,13)
   g) y = a + b + c + d + abc + a'b'd' + abcd

5. Desenhar os circuitos relativos às funções dadas no exercício 4 e às funções minimizadas.

Correspondência entre números decimais e binários

Nº Decimal	Nº Binário	Nº Decimal	Nº Binário
0	0	48	110000
1	1	49	110001
2	10	50	110010
3	11	51	110011
4	100	52	110100
5	101	53	110101
6	110	54	110110
7	111	55	110111
8	1000	56	111000
9	1001	57	111001
10	1010	58	111010
11	1011	59	111011
12	1100	60	111100
13	1101	61	111101
14	1110	62	111110
15	1111	63	111111
16	10000		
17	10001		
18	10010		
19	10011		
20	10100		
21	10101		
22	10110		
23	10111		
24	11000		
25	11001		
26	11010		
27	11011		
28	11100		
29	11101		
30	11110		
31	11111		
32	100000		
33	100001		
34	100010		
35	100011		
36	100100		
37	100101		
38	100110		
39	100111		
40	101000		
41	101001		
42	101010		
43	101011		
44	101100		
45	101101		
46	101110		
47	101111		

14
Portas Lógicas

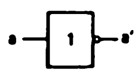
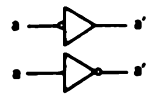
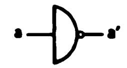
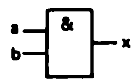
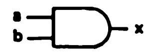
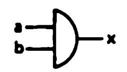
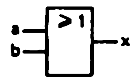
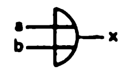
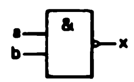
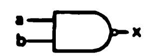
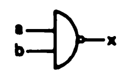
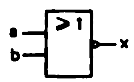
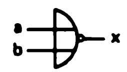
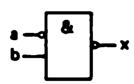
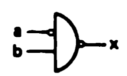
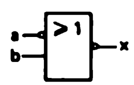
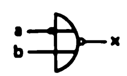
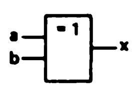
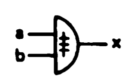
Até agora estudamos as funções booleanas descritas algebricamente. Nos circuitos lógicos, costuma-se indicar tais funções graficamente de modo a torná-las mais simples.

A representação gráfica das funções booleanas é feita mediante símbolos padronizados por normas internacionais chamados *blocos* ou *portas lógicas*.

As portas lógicas são as bases dos circuitos lógicos e têm por finalidade combinar as diferentes grandezas booleanas de modo a realizar determinada função. Cada porta lógica pode ter diferentes linhas de entrada, porém, somente uma linha de saída, conforme veremos.

No decorrer do nosso estudo, trabalharemos com as normas americanas MIL-STD-806B (MILITARY STANDARD) de uso muito freqüente na prática; citaremos as normas da CEI (COMISSION ÉLECTROTECHNIQUE INTERNACIONALE) reconhecidos internacionalmente e as normas alemãs DIN 40700 (DEUTSCHE INDUSTRIE NORM).

Daremos, a seguir, uma tabela com os circuitos, tabelas-verdade que os definem, portas lógicas segundo as normas citadas e funções booleanas correspondentes que interessarão ao nosso estudo.

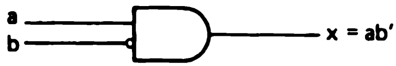
CIRCUITO	TABELA-VERDADE	CEI	MIL	DIN	FUNÇÃO BOOLEANA
INVERSOR (NEGAÇÃO)	a x 0 1 1 0				x = a'
E (AND)	a b x 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1				x = a · b
OU (OR)	a b x 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1				x = a + b
NE (NAND)	a b x 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0				x = (a · b)'
NOU (NOR)	a b x 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0				x = (a + b)'
NE c/uma saída invertida	a b x 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1				x = (a'b)'
NOU c/uma saída invertida	a b x 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0				x = (a' + b)'
OU Exclusivo	a b x 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0				x = ab' + a'b x = a⊕b

Vejamos a resolução de alguns exemplos:

1º Exemplo:

Representar mediante portas lógicas a função x =ab'

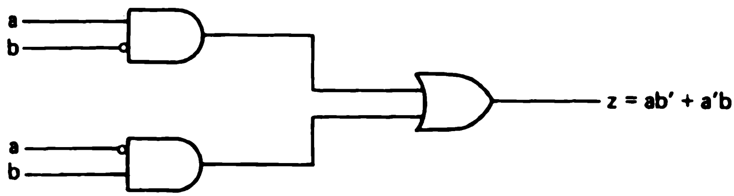
Solução:



2º Exemplo:

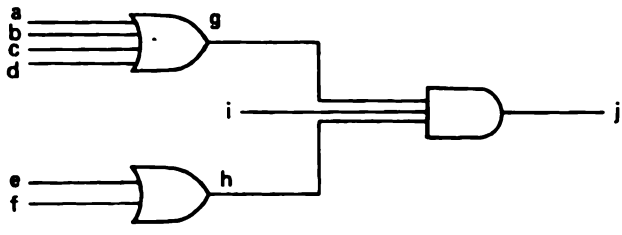
Dar o circuito lógico correspondente à função z = ab' + a'b

Solução:



3º Exemplo:

Determinar a função correspondente ao circuito lógico:



Solução:

j = (a + b + c + d) · (h · i) = g · (h · i)

4º Exemplo:

Representar a função definida pela tabela verdade como circuito lógico:

a	b	c	x
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Solução:

A tabela verdade define a função:

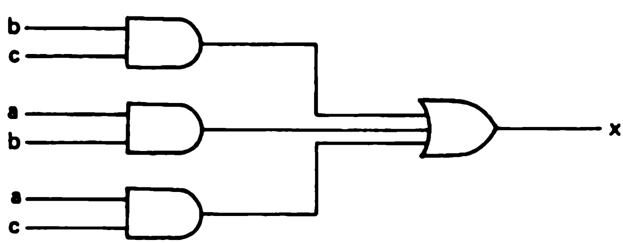
$$x = a'bc + ab'c + abc' + abc$$

Simplifiquemos a função:

$$\begin{aligned} x &= a'bc + a\,(b'c + bc' + bc) \\ &= a'bc + a\,((b' + b)\,c + bc') \\ &= a'bc + a\,(c + bc') \\ &= a'bc + a\,(c + b) \\ &= a'bc + ac + ab \\ &= (a'c + a)\,b + ac \\ &= (c + a)\,b + ac \\ &= bc + ab + ac \end{aligned}$$

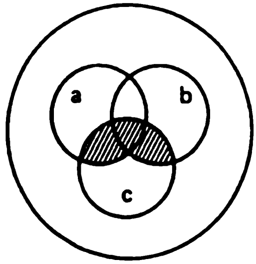
Então, $x = bc + ab + ac$.

E o circuito lógico correspondente será:



5º Exemplo:

Dar o circuito lógico correspondente à área hachurada nos círculos de Euler:



Solução:

A função correspondente à área hachurada é:

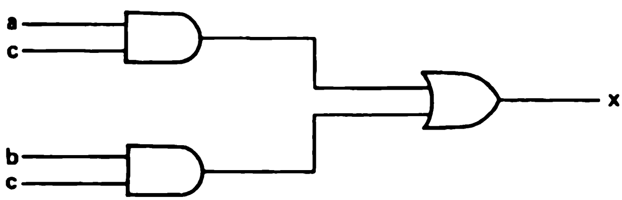
$$x = ab'c + a'bc + abc$$

Simplificando, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= a\,(b'c + bc) + a'bc \\ &= ac + a'bc \\ &= (a + a'b) \cdot c \\ &= (a + b) \cdot c \\ &= ac + bc \end{aligned}$$

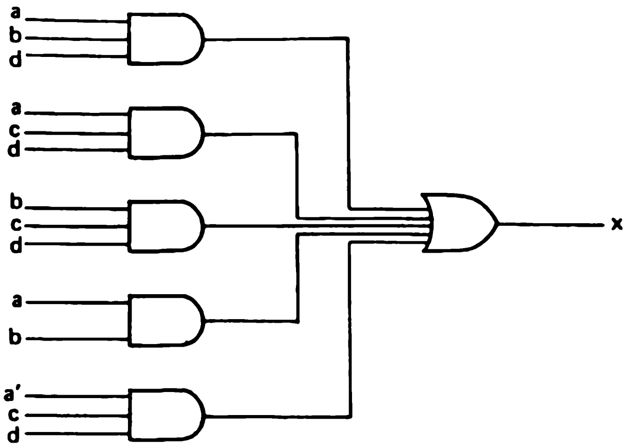
Portanto, $x = ac + bc$

E o circuito lógico procurado é:



6º Exemplo:

Simplificar o circuito lógico mediante utilização do mapa de Karnaugh.



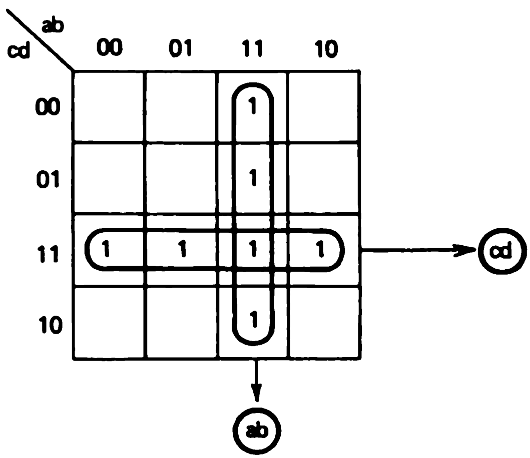
Solução:

O circuito lógico dado corresponde à função:

$x = abd + acd + bcd + ab + a'cd$, a quatro variáveis e que não está na forma normal disjuntiva, faltando uma variável em quatro de seus termos e duas variáveis em um de seus termos. Usando o teorema expresso por $ab + ab' = a$, temos:

$$x = abcd + abc'd + abcd + ab'cd + abcd + a'bcd + abcd + abc'd + a'bcd + a'b'cd$$

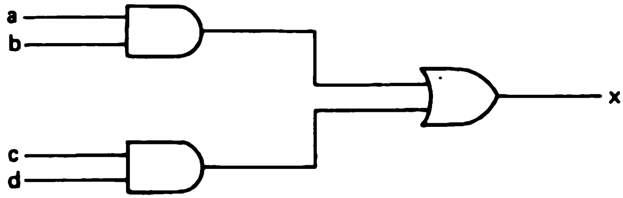
que, representada no mapa de Karnaugh, nos dá:



donde tiramos a função simplificada:

$$x = ab + cd$$

e desenhamos o circuito lógico pedido:



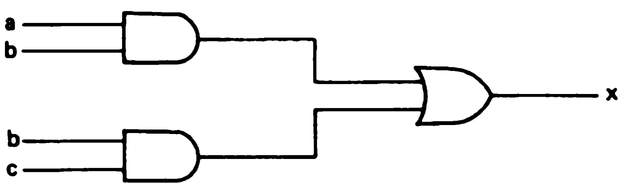
Exercícios:

1. Representar mediante portas lógicas as funções:

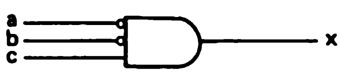
a) $\ell = m \cdot n + p$
b) $z = (a \cdot b) + (c \cdot d)$
c) $x = (a + b) \cdot (c + d)$
d) $y = a'bc + ab'c'$
e) $x = a + b + c$
f) $y = a' + b$

2. Determinar as funções correspondentes aos circuitos lógicos:

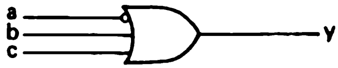
a)



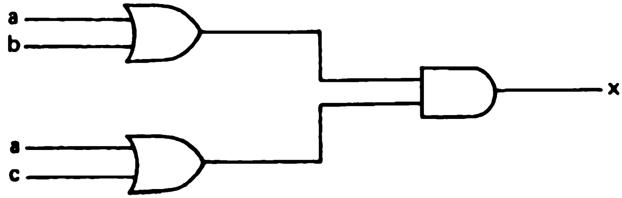
b)



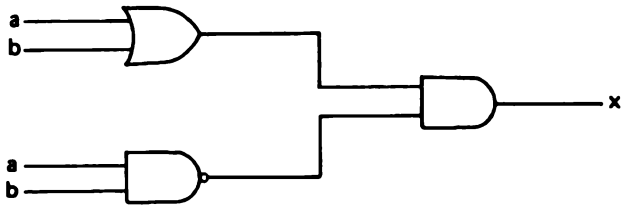
c)



d)

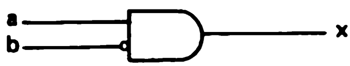


e)

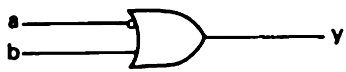


3. Dar as tabelas-verdade correspondentes a cada circuito lógico.

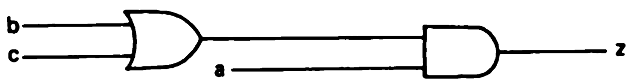
a)



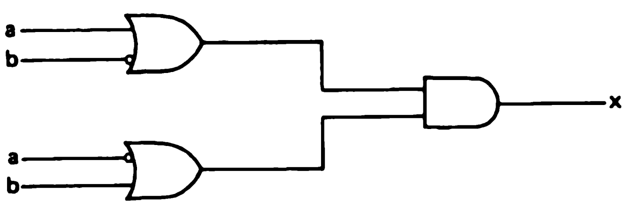
b)



c)



d)



4. Desenhar os circuitos correspondentes (simplificados) às tabelas-verdade:

a)

a	b	c	x
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

b)

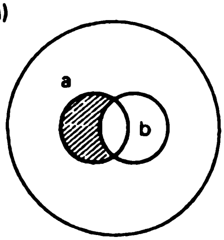
a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

c)

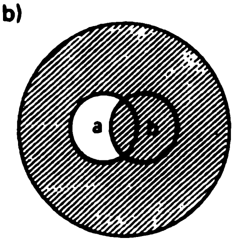
a	b	c	z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

5. Desenhar os circuitos lógicos correspondentes aos círculos de Euler.

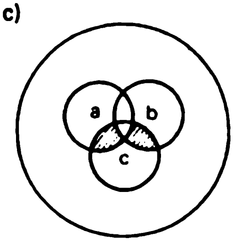
a)



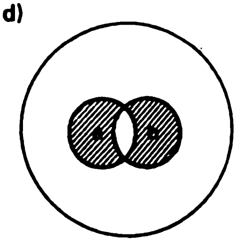
b)



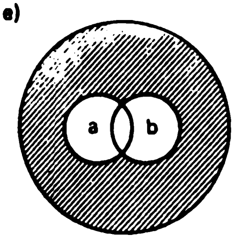
c)



d)

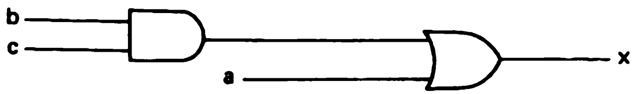


e)

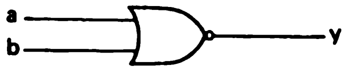


6. Desenhar os círculos de Euler correspondentes aos circuitos lógicos:

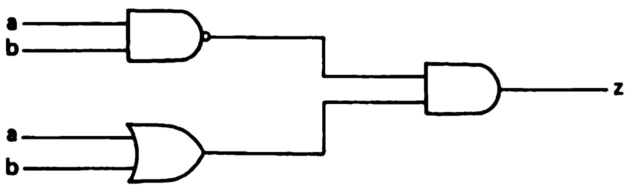
a)



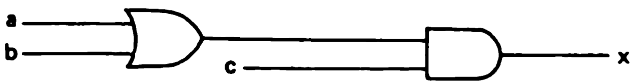
b)



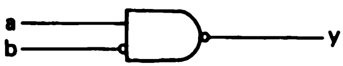
c)



d)

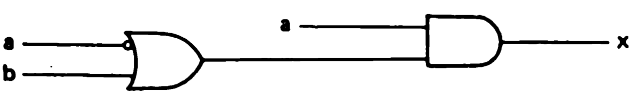


e)

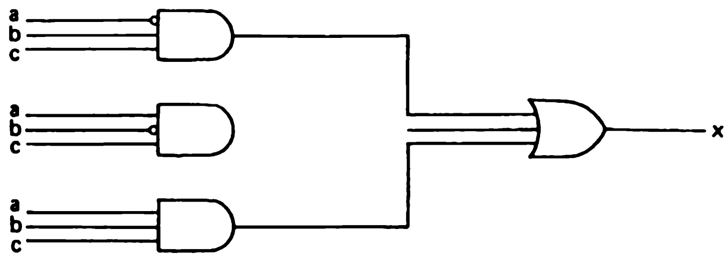


7. Simplificar, usando os teoremas da Álgebra de Boole, os circuitos lógicos:

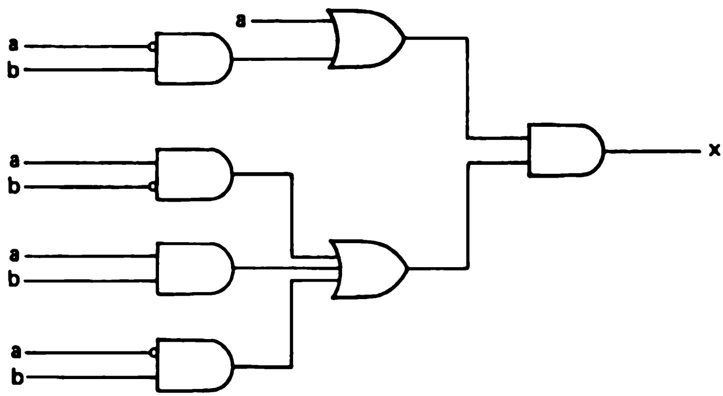
a)



b)

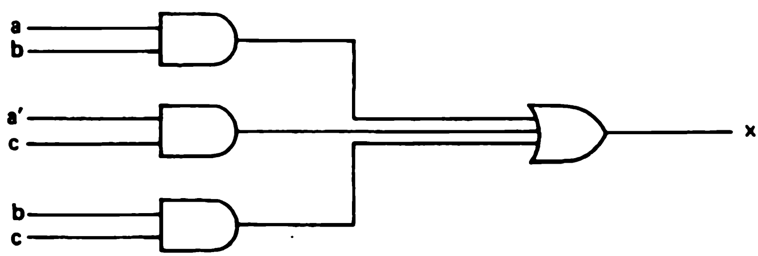


c)

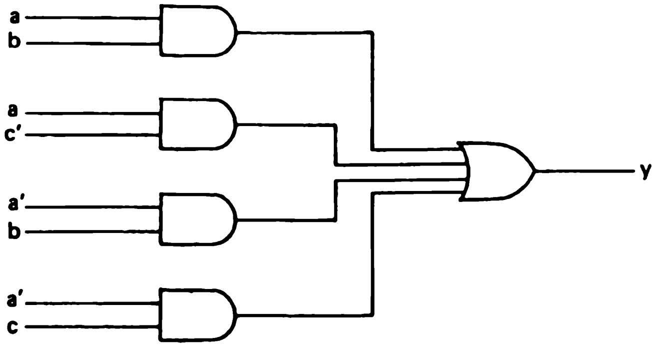


8. Simplificar os circuitos lógicos mediante utilização do mapa de Karnaugh.

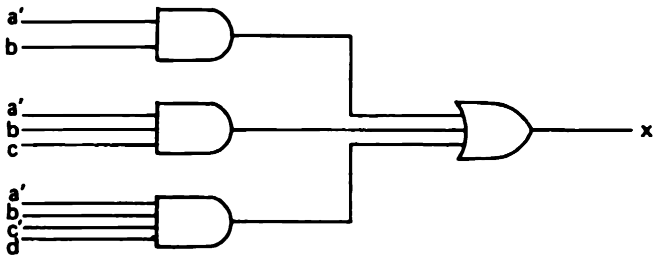
a)



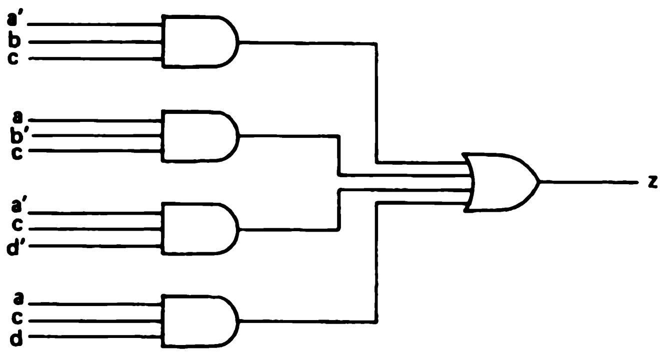
b)



c)



d)



Bibliografia

ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação à lógica matemática.* São Paulo, Nobel, 1976.

A.I.D.E.P. *Algèbre de Boole (Utilisation pour la simplification des circuits logiques)* – Cours Programé – DUNOD, 1971.

BITTINGER, Marvin L. *Logic and proof.* Addison-Wesley, 1982.

BOSCOLO, Alcides. *Notas de aula FFCLSA.* Santo André, 1971.

BOUWENS, A. J. *Digital instrument course.* (Part 1). N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Test and measuring department. Eindhoven, The Netherlands.

BUDDEN, F. J. *An introduction to algebraic structures.* Longman, 1975.

BUKSTEIN, Edward. *Practice problems in number systems.* Logic, and Boolean Algebra. Howard W. Sams & Co., 1982.

CALABRESE, Giuseppe. *L'Algebra di Boole.* Milano, Delfino, 1973.

CASTRUCCI, Benedito. *Introdução à lógica matemática.* São Paulo, Nobel, 1975.

CIANFLONE, Franco. *L'Algebra di Boole e i circuiti logici.* Milano, Etas Libri SPA, 1978.

ENNES, Harold E. *Boolean algebra for computer logic.* Howard W. Sams &Co., 1978.

FAURE, R., DENIS-PAPPIN, M. & *KAUFMANN, A. Cours de calcul booléien appliqué.* Paris, Albin Michel, 1970.

FINE, Nathan J. *An introduction to modern mathematics.* George Allen and Unwin, 1967.

FLEGG, H. Graham. *Boolean algebra and its applications.* Blackie: London and Glasgow, 1964.

HILL, Frederik J. & PETERSON, Gerald R. *Introduction to switching theory and logical design.* John Wiley & Sons, 1974.

HOERNES, Gerhard E. & HEILWEIL, Melvin F. *Introducción al algebra de Boole y a los dispositivos lógicos* (Autoenseñanza Programada). Madrid, Paraninfo, 1976.

HOHN, Franz E. *Applied boolean algebra*. Macmillan, 1966.

KOHAVI, Zvi. *Switching and finite automata theory*. New Delhy, McGraw-Hill, 1978.

KORFHAGE, Robert R. *Logic and algòrithms*. John Wiley & Sons, 1966.

LARNEY, Violet Hachemeister. *Abstract algebra;* a first course. Prindle, Weber & Schmidt, 1975.

LEE, Samuel C. *Modern switching theory and digital design*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1978.

MANGE, Daniel. *Analyse et synthèse des systèmes logiques*. St. Saphorin, Editions Georgi, 1978.

McCLUSKEY, E. J. *Introduction to the theory of switching circuits*. New York, McGraw-Hill, 1965.

MUROGA, S. *Logic design and switching theory*. New York, John Wiley & Sons, 1979.

PINZÓN, Álvaro. *Conjuntos y estructuras*. Harper & Row, 1973.

RUSSI, Gonzalo Zubieta. *Manual de lógica para estudiantes de matemáticas*. México, Trillas, 1977.

ROETHEL, Louis F. *Logic, sets and numbers*. Wadsworth Publishing, 1978.

SOUTH, G. F. *Booleàn algebra and its uses*. Van Nostrand Reinhold, 1974.

WHITESITT, J. Eldon. *Boolean algebra and its applications*. Addison Wesley, 1961.

LÓGICA E ÁLGEBRA DE BOOLE

Diferentemente de textos convencionais, este livro adota a estratégia de ensinar através de exemplos, com a utilização de um instrumental lógico que facilita o entendimento e a modelagem de sistemas reais. O uso de ilustrações como meio de exposição proporciona, neste texto, bases seguras para generalizações e para o próprio conhecimento e desenvolvimento da lógica pelo leitor.

A introdução à Lógica e Álgebra de Boole visa mostrar um exemplo de modelo matemático de inúmeras e importantes aplicações em diferentes ramos da atividade humana como eletrônica, computação e outros.

O livro resultou de intensa pesquisa e da experiência de magistério do autor. Por isso, sua forma agradável de apresentar o conteúdo programático: em vez de uma abordagem orientada para o conhecimento da Matemática pura, abstrata, o autor optou pela apresentação de um sistema algébrico que representou importante passo no desenvolvimento da eletrônica, computação, pneumática e outras aplicações que envolvem até a Pesquisa Operacional.

NOTA SOBRE O AUTOR

Jacob Daghlian é licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Fundação Santo André, onde lecionou Álgebra. Foi professor de Álgebra Booleana na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Prof. Carlos Pasquale". É reitor da Universidade Metodista de São Paulo (UMESP) e possui larga vivência industrial que lhe permitiu avaliar a importância da matéria ora apresentada.

APLICAÇÃO

Livro-texto para as disciplinas LÓGICA MATEMÁTICA e INTRODUÇÃO À LÓGICA dos cursos de Matemática (bacharelado) e Tecnologia de Processamento de Dados. Texto complementar para a disciplina CIRCUITOS LÓGICOS E ORGANIZAÇÃO DE COMPUTADORES do curso de Ciências da Computação.

publicação atlas

www.EditoraAtlas.com.br

9 788522 412563

LÓGICA E ÁLGEBRA DE BOOLE Daghlian