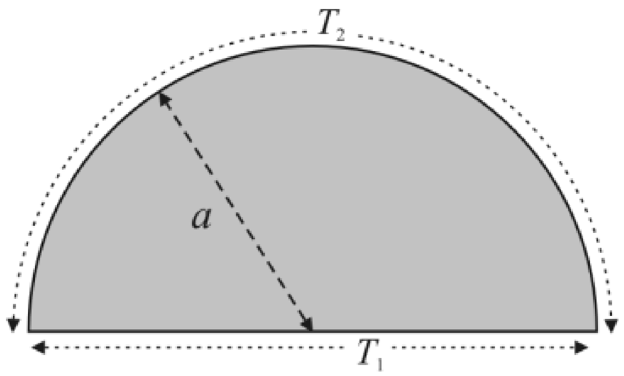
Ejercicio 6-24. Distribución del calor en una placa semicircular fijada a 100ºC en el borde curvo y a 0ºC en su borde plano.

Francisco Javier Fernández Caro

7 de abril de 2024

1. Planteamiento del problema.

Tenemos una placa semicircular de radio a = 10 cm se mantiene a una temperatura T_1 en el lado recto, mientras que su contorno curvo se mantiene a una temperatura T_2. Para nuestro caso en concreto, al tener la segunda cifra del DNI par, usaremos los valores: $T_1 = 0$ºC y $T_2 = 100$ºC. Siendo T_1 y T_2:



Queremos obtener las curvas isotermas en el dominio de la placa. Para ello, nos disponemos a resolver la ecuación de difusión de calor fijando nuestras condiciones iniciales para $T_1 = 0$ºC y $T_2 = 100$ºC.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

Nos interesa la solución del estado estacionario, cuando $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, la ecuación que se tiene que resolver es la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Además, dada la geometría del problema, se ha escrito en coordenadas polares:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 \theta} = 0$$

2. Método de resolución

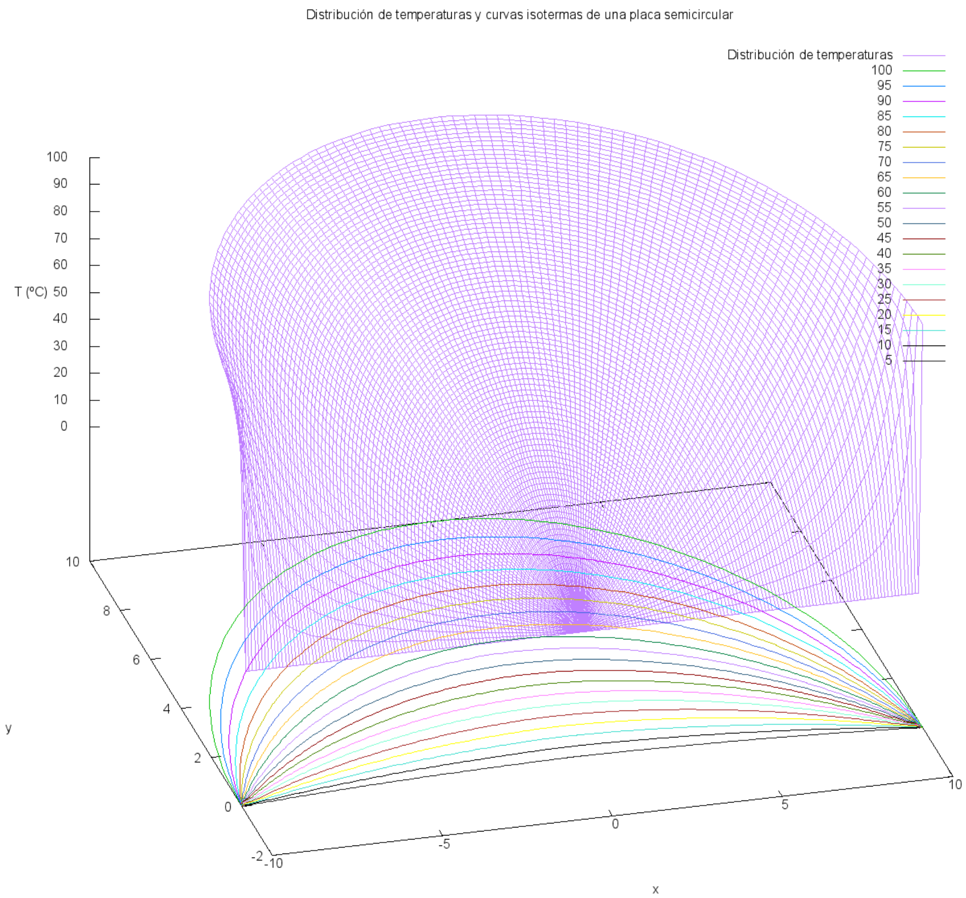
Para resolver el problema computacionalmente he discretizado la ecuación de Laplace anteriormente escrita con el método de diferencias finitas centradas, despejando la expresión para el valor de la solución para cada instante con la siguiente expresión:

$$u(i,j) = \frac{h_r^2 h_\theta^2 r^2}{2(h_r^2 + h_\theta^2 r^2)}(u(i+1,j)(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}) + u(i-1,j)(\frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}) + \frac{u(i,j+1) + u(i,j-1)}{r^2 h_\theta^2})$$

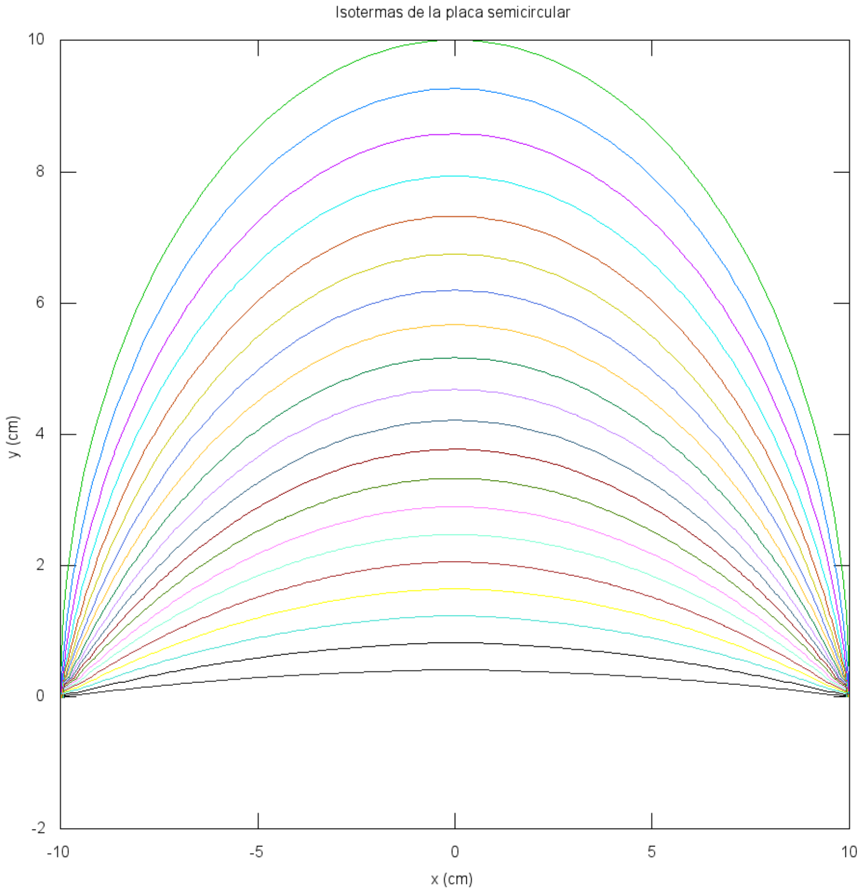
Resolvermos dicha ecuación por el método de Gauss-Seidel en un bucle en nuestro programa '.f' y escribimos los datos en un archivo '.dat' para poder representar éstas curvas con gnuplot.

3. Resultados

Una vez resuelta nuestra ecuación diferencial parcial obtenemos las representaciones de su superficie y sus curvas isotermas. Tenemos en cuenta que no estamos trabajando en SI, por lo que la temperatura se expresará en ºC y la distancia en los ejes x e y se expresará en cm.



Siendo las temperaturas indicadas en las leyendas de la representación de la superficie morada en la figura anterior.



4. Conclusiones

Como podemos observar, obtenemos soluciones que se ajustan muy bien a la teoría conocida sobre la ecuación de difusión del calor. Vemos que en los bordes se mantienen fijadas nuestras condiciones de contorno y obtenemos la distribución de calor a lo largo de toda la placa dados nuestros valores en los bordes, obteniendo unas isotermas que se acercan poco a poco y de manera suave a los valores determinados en las regiones límite de la placa.