Ejercicio 4-67. Cálculo de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Caos determinista (Atractor de Lorenz)

Francisco Javier Fernández Caro

3 de marzo de 2024

1. Planteamiento del problema.

Las ecuaciones diferenciales acopladas para el atractor de Lorenz son:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz$$

Donde σ,r y b son constantes positivas con valores: $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$. Recordamos que las ecuaciones diferenciales están escritas en un sistema de unidades arbitrarias.

El ejercicio nos pide resolver numéricamente este sistema de ecuaciones acopladas para el intervalo $t = [0, 30]$ con unas condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0)=(1,1,20.000261) y después para las condiciones iniciales (x_0, y_0, z_0)=(1,1,20.000262)

2. Método de resolución

Para ello vamos a utilizar el método de Runge-Kutta para resolver ecuaciones diferenciales con una subrutina ofrecida por el profesor llamada 'rk4-r8', que trabaja en doble precisión, ya que es conveniente para éste problema. Para el primer apartado en nuestro programa definimos todas las variables y constantes añadiendo una matriz donde guardaremos nuestros datos para más tarde utilizarlos en el apartado c). Una vez hemos definido el valor de nuestras variables en las condiciones iniciales propuestas por el problema, creamos una subrutina dentro del mismo programa llamada 'derivs' que nos permite hacer el cálculo de las derivadas temporales de cada una de nuestras variables. Ya terminada ésta subrutina, podemos llamarla para calcular las derivadas temporales y una vez calculadas llamar a la subrutina 'rk4-r8' para hacer el cálculo de las ecuaciones diferenciales para cada uno de los pasos que realiza nuestro programa. Para cada paso realizado, vamos escribiendo en un fichero los resultados y a su vez los escribimos en una matriz que usaremos más adelante.

Repetimos el procedimiento con la condición inicial de cambiada, escribiendo en otro fichero los datos para graficar más tarde y en otra segunda matriz que usaremos junto a la primera.

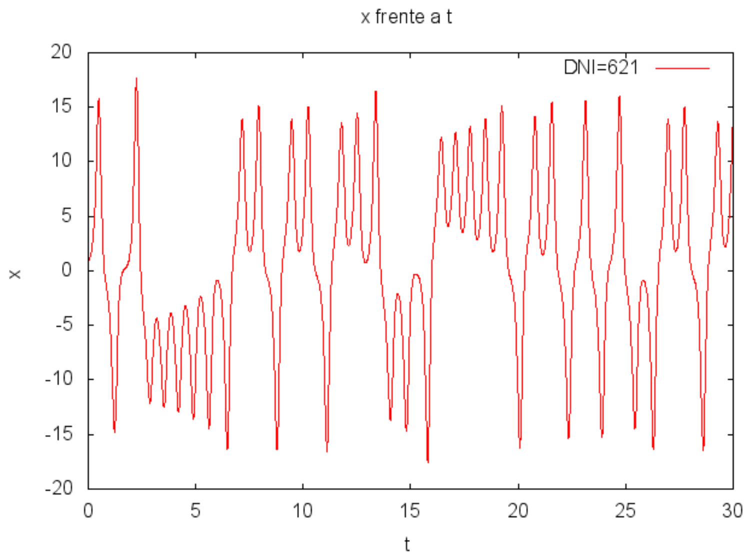
Con ésto ya tendríamos todos los datos necesarios para contestar y graficar las cuestiones que nos plantea el ejercicio, teniendo en cuenta que las matrices nos van a permitir realizar el cálculo de la distancia entre las dos trayectorias que se nos pide en el apartado c), siendo el cálculo para cada paso:

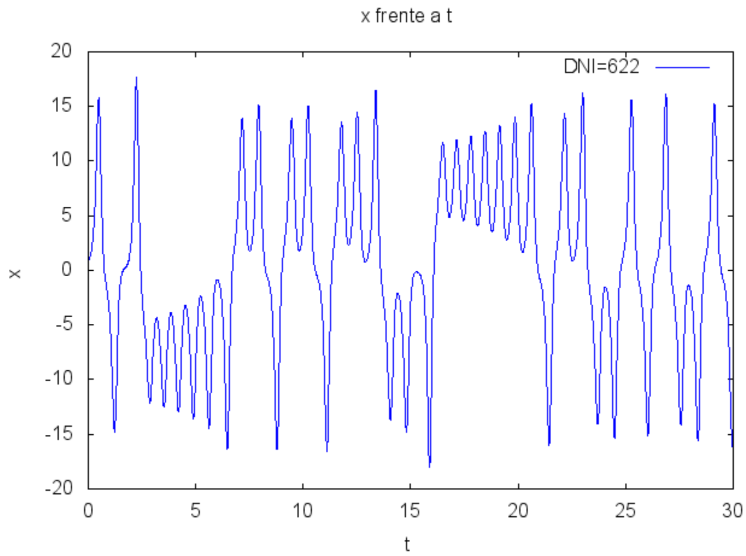
$$|R| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

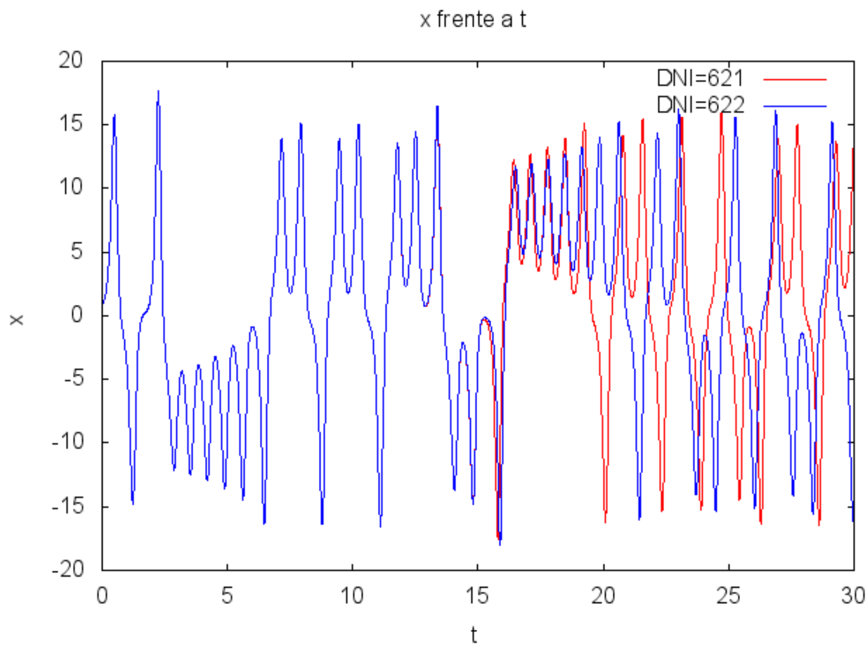
Siendo x_1, y_1, z_1 las coordenadas para nuestras primeras condiciones iniciales y x_2, y_2, z_2 las coordenadas para nuestras segundas condiciones iniciales.

3. Resultados

Una vez obtenidos los datos, nos disponemos a representar las gráficas que nos pide el ejercicio empezando por el apartado a)

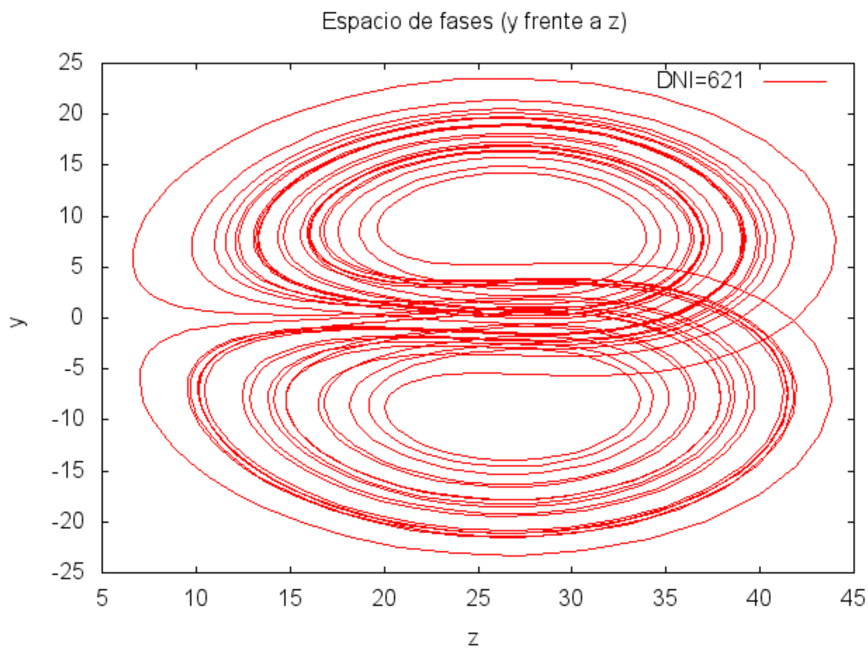


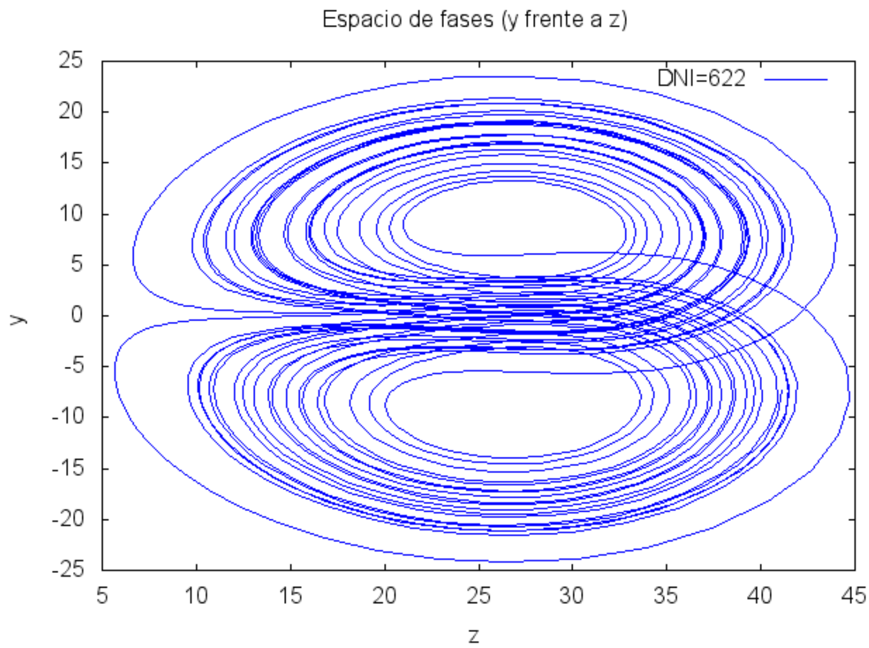


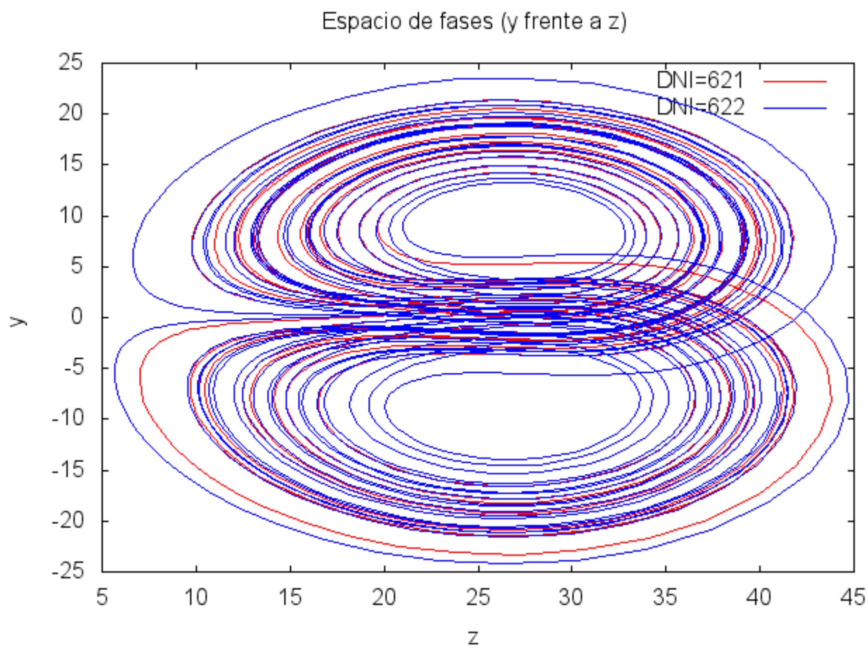


Como podemos observar al graficar las dos funciones $x(t)$ observamos que empiezan a diferir poco a poco a partir de $t > 15$.

Para el apartado b) graficaremos del mismo modo el espacio de fases, es decir, y frente a z.





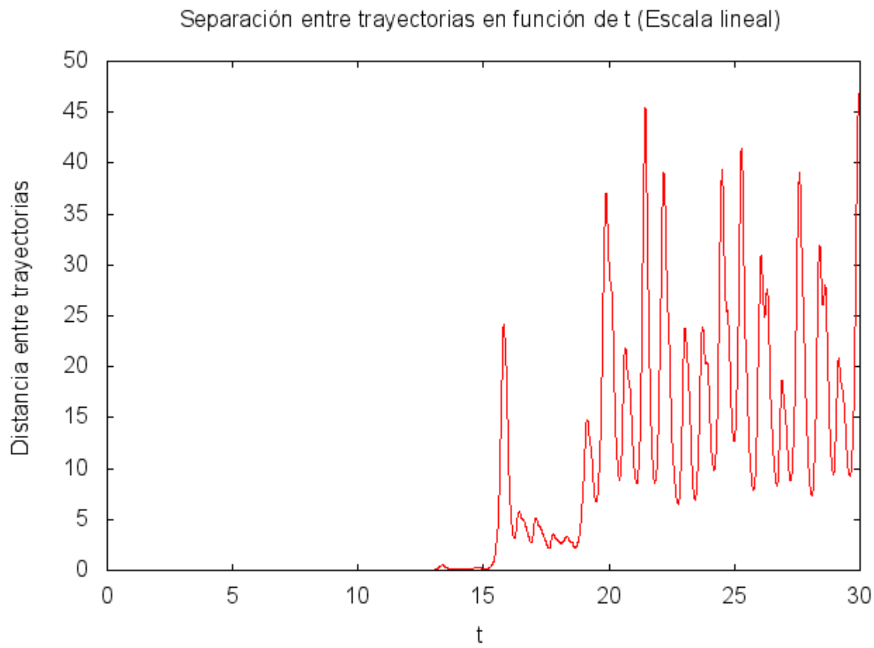


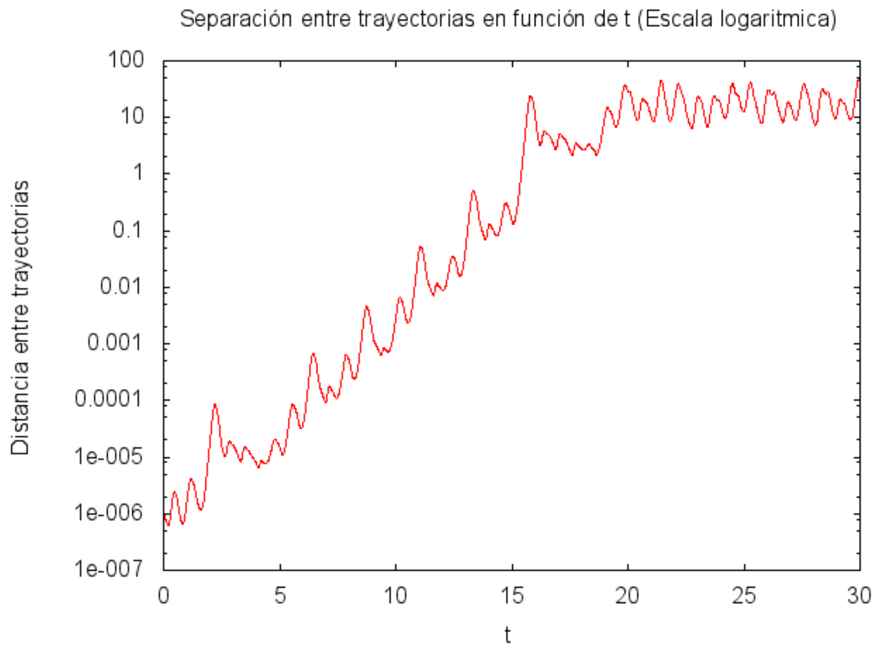
Vemos que también difieren aunque las condiciones iniciales no tengan un cambio tan significativo.

Por último, se nos pide representar la separación entre las 2 trayectorias tanto en escala lineal como en escala logaritmica. Para ello hemos calculado la distancia entre una trayectoria y otra con la fórmula ya comentada antes:

$$|R| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Y la hemos representado en función del tiempo:





4. Conclusión

Como podemos observar, es un sistema caótico en el que pequeños cambios en las condiciones iniciales nos llevan a resultados totalmente distintos conforme el sistema evoluciona en el tiempo, lo vemos representado en todas las gráficas, sobre todo con la separación entre las trayectorias en función de t en escala logarítmica para la distancia, donde vemos que a partir de $t > 15$ las dos trayectorias empiezan a diferir de manera muy significativa.