Ejercicio 3-31. Cálculo y representación del patrón de difracción de un haz de luz por apertura circular mediante la aproximación de Fraunhofer

Francisco Javier Fernández Caro

27 de febrero de 2024

1. Planteamiento del problema.

En este ejercicio vamos a resolver la integral dada por la aproximación de Fraunhofer (normalizada al valor de la intensidad en el centro, $I_0 = \mathrm{I}(\theta = 0)$) varía con el ángulo de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \frac{1}{(\pi R^2)^2} \left| \int_0^{\mathrm{R}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho\theta\cos(\phi)} \, \rho d\rho \, d\phi \right|^2$$

La función compleja que deberemos integrar originalmente se expresa como:

$$f(\rho, \theta, \phi) = e^{-ik\rho\theta\cos(\phi)} \cdot \rho$$

Usaremos la identidad de Euler $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ para simplificar:

$$f(\rho, \theta, \phi) = e^{-ik\rho\theta\cos(\phi)} \cdot \rho = cos(k\rho\theta \cdot cos(\phi)) - i \cdot sin(k\rho\theta \cdot cos(\phi))$$

La parte real $\mathrm{Re}(f)$ se expresa como:

$$\mathrm{Re}(f) = \rho \cdot cos(k\rho\theta \cdot cos(\phi))$$

La parte imaginaria $\mathrm{Im}(f)$ se expresa como:

$$\mathrm{Im}(f) = -\rho \cdot sin(k\rho\theta \cdot cos(\phi))$$

Haremos las integrales de cada una de las partes por separado.

Una vez resueltas, sabemos que el módulo al cuadrado de un complejo es la suma de los cuadrados de la parte imaginaria y la real. Podremos de ésta manera expresar la intensidad respecto al ángulo θ.

2. Método de resolución

Para ello vamos a utilizar el método Simpson, con una subrutina creada por mí para trabajar en doble precisión llamada "simpson.f". Hemos utilizado un número de puntos alto y par (500) en ambas integrales, ya que es una función difícil de graficar con cambios significativos para cada paso si es demasiado grande.

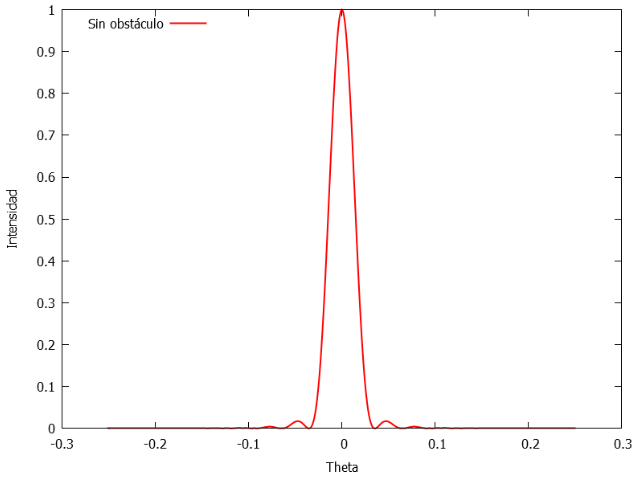
He utilizado la técnica de integración múltiple en la que definimos funciones de una variable para poder utilizar la subrutina Simpson unidimensional tal y como hemos visto en clase, utilizando la función 'common' para pasar los valores de nuestras variables de una función a otra con un nombre diferente de la variable de nuestra función original.

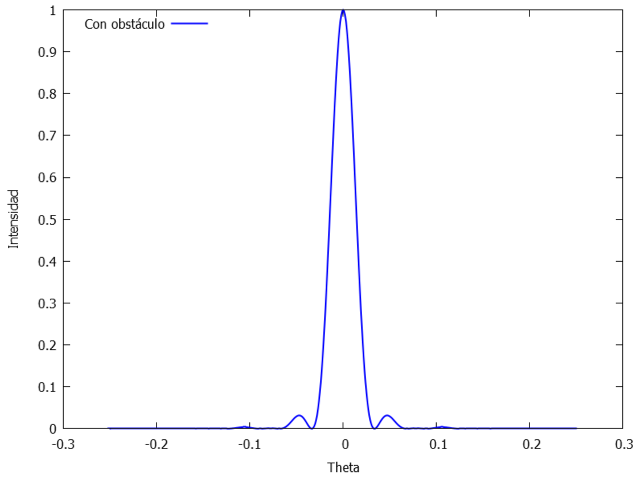
Podría haberlo hecho todo en un mismo documento '.f' pero me pareció más cómodo correr el mismo programa que en el apartado a) para el apartado b) simplemente cambiando los límites de integración para la integral de ρ.

3. Resultados

Una vez el programa ha calculado los valores de la parte real e imaginaria y su módulo al cuadrado, hemos realizado un bucle que recorre el intervalo: $\theta = [-0{,}25, 0{,}25]$ calculando la intensidad para cada punto (también hemos utilizado n=500).

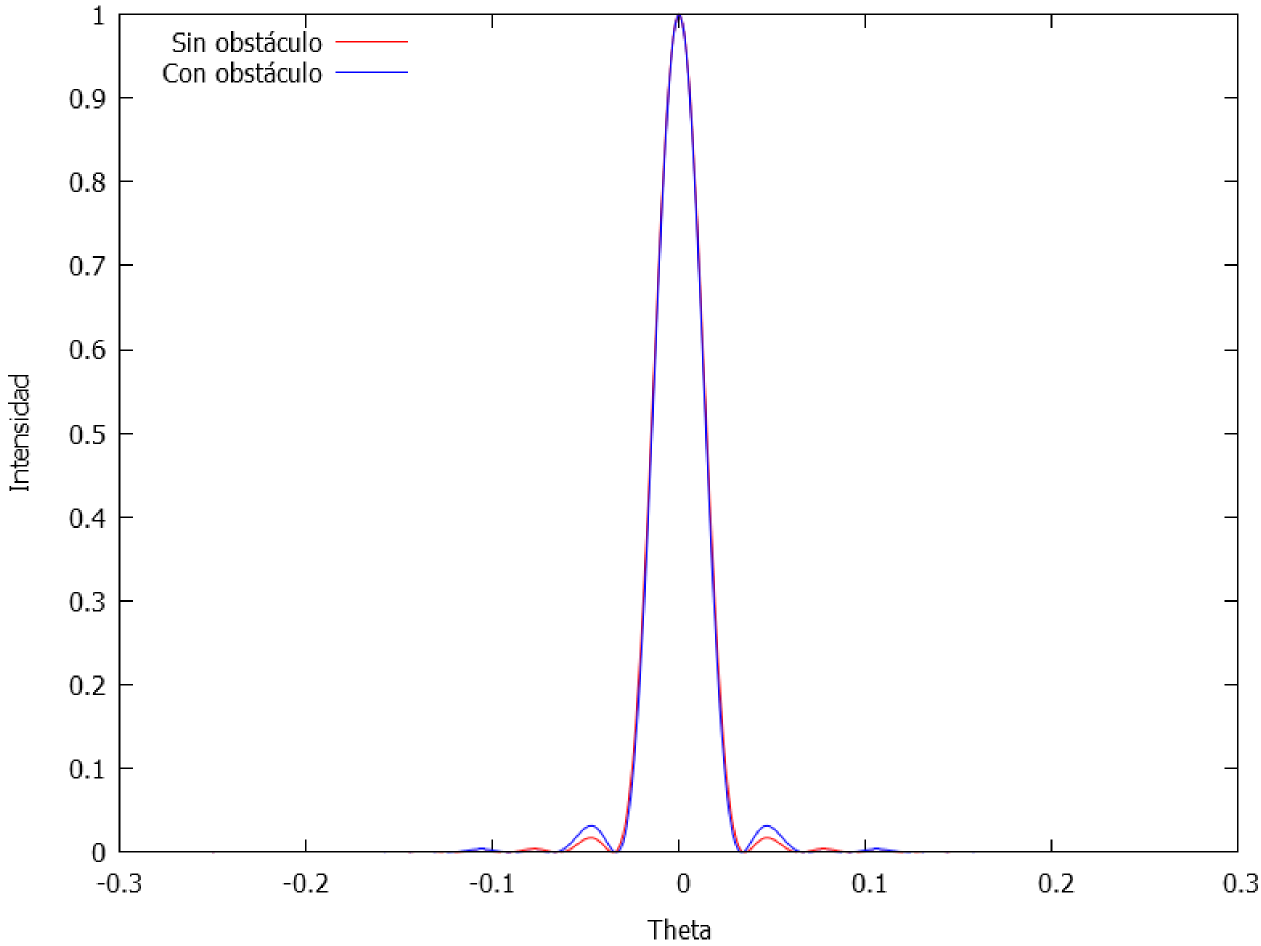
Para el apartado a) y b) obtenemos las siguientes gráficas:





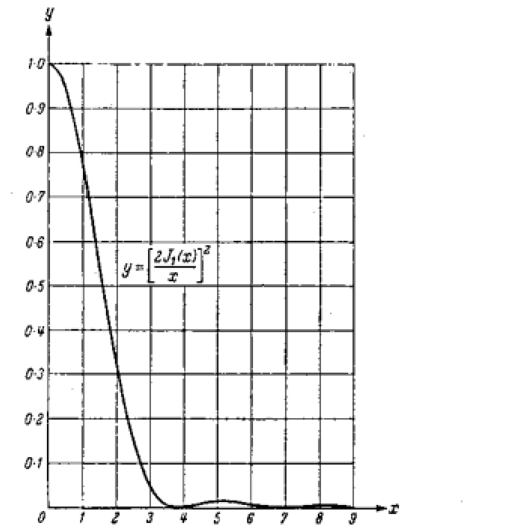
Vemos que se asemejan bastante salvo que da la impresión de que los segundos máximos son un poco más acentuados para la gráfica que representa el problema con el obstáculo.

Para ver mejor ésta diferencia graficamos ambas gráficas juntas:



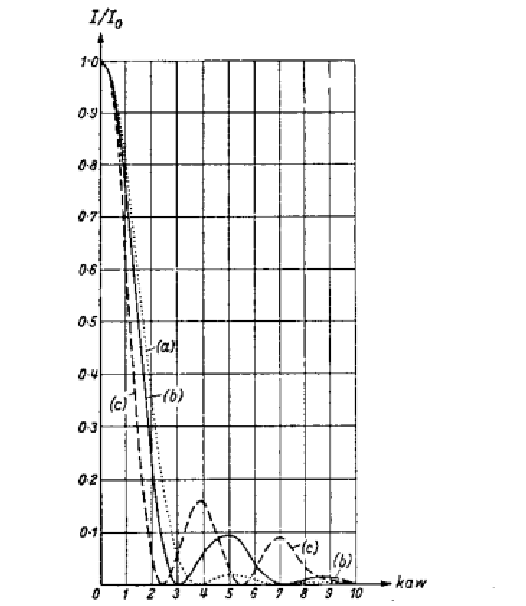
Como vemos, cuando hay un obstáculo la intensidad se reparte un poco más en los segundos máximos siendo más intensos que en la simulación del experimento sin obstáculo.

Observamos que ésta solución se ajusta bastante bien con la analítica que se nos presenta en la bibliografía propuesta por el profesor en términos de la función de Bessel de primer orden:



FRAUNHOFER diffraction at a circular aperture. The function

$$y = \left(\frac{2J_1(x)}{x}\right)^2.$$



Illustrating the effect of central obstruction on the resolution.