Ejercicio 5-17. Cálculo de frecuencias de vibración de una cuerda mediante el método del disparo. Búsqueda de autovalores y autofunciones de una ecuación diferencial.

Francisco Javier Fernández Caro

18 de marzo de 2024

1. Planteamiento del problema.

Tenemos una cuerda fijada por sus extremos separados a una distancia L. La elongación transversal y de la cuerda satisface la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{\omega^2\lambda}{T}y(x) = 0$$

donde T es la tensión de la cuerda, λ es su densidad lineal de masa y ω representa la frecuencia propia de las vibraciones de la cuerda.

Si la densidad másica de la cuerda tiene el valor constante λ_0, las frecuencias de vibración de la cuerda son:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\lambda_0}}$$

con n=1, 2, ...

Nos piden obtener la frecuencia fundamental correspondiente a la vibración de una cuerda cuya densidad lineal de masa varía con la distancia x según la relación: $\lambda(x) = \lambda_0 + (x - \frac{L}{2})\Lambda$. Después, nos piden obtener las dos frecuencias siguientes y comparar las frecuencias y las formas de los modos de vibración que calculemos para la solución inhomogénea con los que obtendremos en la solución homogénea de densidad másica λ_0.
Ya que mi penúltima cifra del DNI es par, usaremos los siguientes datos para el resto del problema: T = 1000 N, L = 1 m, λ_0=0.5g/m y Λ=0.9g/m^2

2. Método de resolución

Para ello vamos a utilizar el método del disparo. Usando la ya utilizada subrutina rk4-r8 ofrecida por el profesor que usa el método de Runge-Kutta en doble precisión. En éste caso lo usaremos fijando unas condiciones de contorno y_0 e y_f. En éste caso comenzamos los cálculos al principio del dominio [x_0,x_f] a partir del valor inicial $y(x_0) = y_0$, que en nuestro caso para la cuerda, sabemos que está fijada al principio y al final de la cuerda de tal modo que $y(x_0 = 0) = 0$ y

$y(x_f = 1) = 0$ sabiendo éstas condiciones de contorno, sólo nos hace falta un valor arbitrario para $y'(x_0)$ que en nuestro caso hemos elegido $y'(x_0) = 1$

Con nuestro intervalo para recorrer los distintos autovalores dividido en un millón de puntos y nuestra tolerancia $tol = 1 \cdot 10^{-6}$ he probado distintos intervalos para buscar los primeros 3 autovalores de nuestra ecuación diferencial inhomogénea cambiando los valores de 'cmin' y 'cmax' poco a poco haciendo un barrido hasta encontrarlos.

Una vez encontrado el autovalor con dicha tolerancia, nos disponemos a guardar los resultados en un documento para más tarde poder graficar en gnuplot las autofunciones correspondientes a cada autovalor y normalizarlas para comparar las soluciones de la ecuación diferencial inhomogénea y las soluciones de la ecuación diferencial homogénea.

Hemos resuelto todo el problema corriendo varias veces el mismo programa '.f' , dentro del mismo hemos indicado las partes que hemos ido cambiando y comentando para ir obteniendo los archivos '.dat' con los datos para cada apartado del problema. Hemos mantenido fijo el número de puntos para dividir el intervalo entre 'cmin' y 'cmax', el valor de la derivada en y_0 y la tolerancia. Hemos ido variando los valores de 'cmin' y 'cmax' para ir buscando los distintos autovalores para la solución inhomogénea. Más tarde para resolver la ecuación homogénea hemos cambiado la subrutina "derivs"para definir la ecuación diferencial con $\lambda_0 = cte$ repitiendo el mismo proceso que para la ecuación diferencial inhomogénea variando los valores de 'cmin' y 'cmax' con mismo valor para la derivada, la tolerancia y el número de puntos en el que dividimos nuestro intervalo de posibles autovalores.

3. Resultados

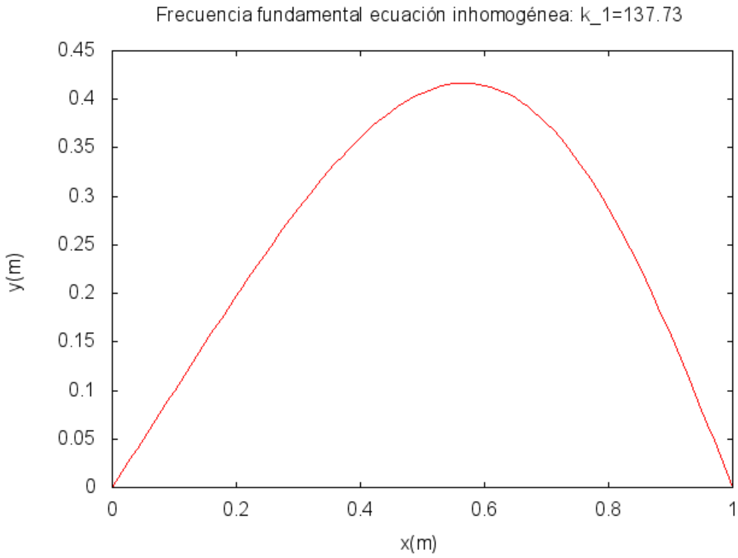
Para la ecuación diferencial inhomogénea hemos encontrado los siguientes autovalores:

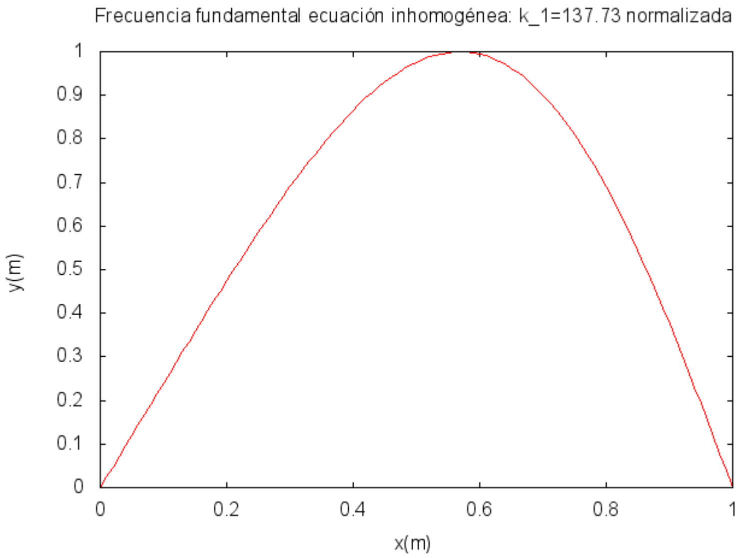
$$\begin{aligned} Autovalor\quad 1 : k_1 &= 137{,}732560\ \ rad/s \\ Autovalor\quad 2 : k_2 &= 286{,}278000\ \ rad/s \\ Autovalor\quad 3 : k_3 &= 435{,}187960\ \ rad/s \end{aligned}$$

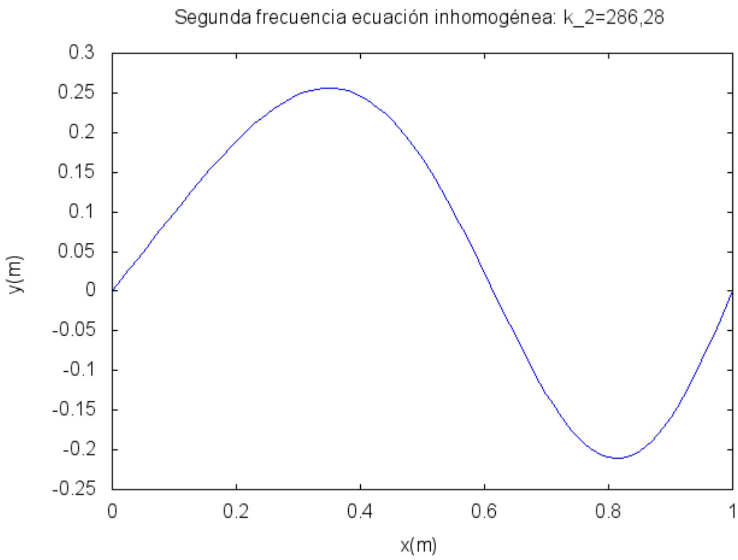
Y para la ecuación diferencial homogénea hemos obtenido los siguientes valores:

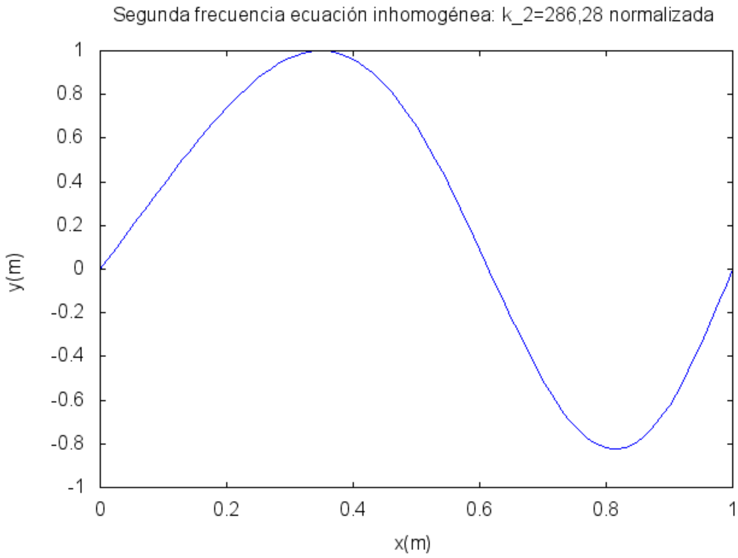
$$\begin{aligned} Autovalor\quad 1 : \omega_1 &= 4442{,}878499\ \ rad/s \\ Autovalor\quad 2 : \omega_2 &= 8885{,}757999\ \ rad/s \\ Autovalor\quad 3 : \omega_3 &= 13328{,}64400\ \ rad/s \end{aligned}$$

Una vez obtenidos los autovalores, hemos llamado otra vez a la subrutina rk4-r8.f"hallar su autofunción escribiendo los datos en un archivo ".dat". A continuación nos disponemos a mostrar y comparar las gráficas obtenidas para cada uno de los autovalores en la solución homogénea e inhomogénea.

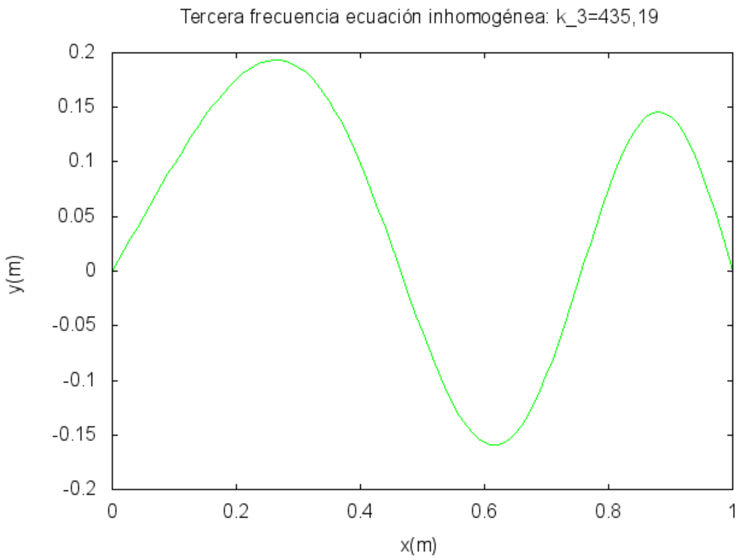

Frecuencia fundamental ecuación inhomogénea: k_1=137.73
y(m)
x(m)
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
0.45
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Frecuencia fundamental ecuación inhomogénea: k_1=137.73 normalizada
y(m)
x(m)
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

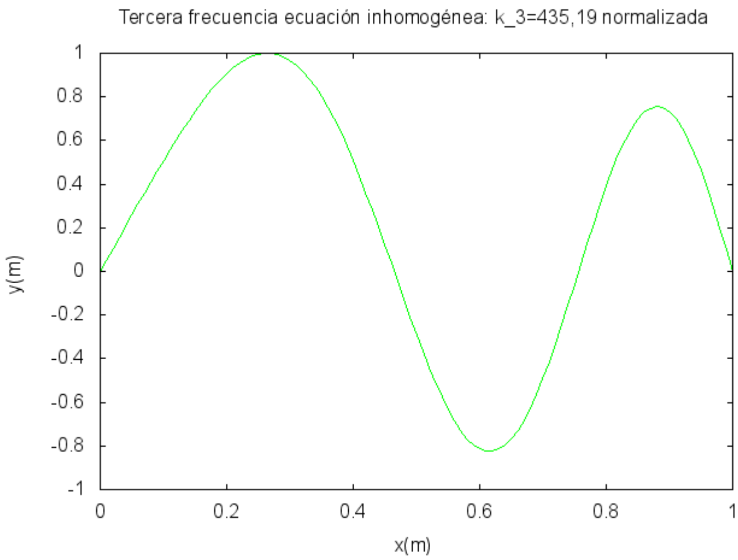

Segunda frecuencia ecuación inhomogénea: k_2=286,28
y(m)
x(m)
-0.25
-0.2
-0.15
-0.1
-0.05
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



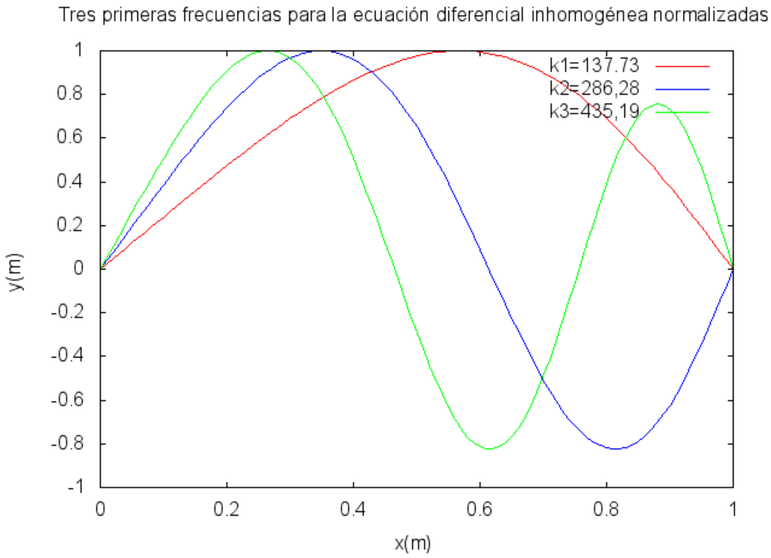
Segunda frecuencia ecuación inhomogénea: k_2=286,28 normalizada
y(m)
x(m)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

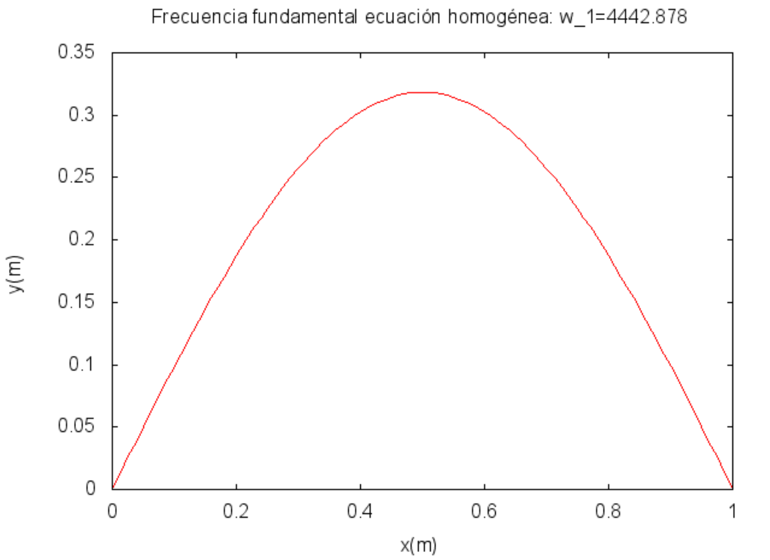


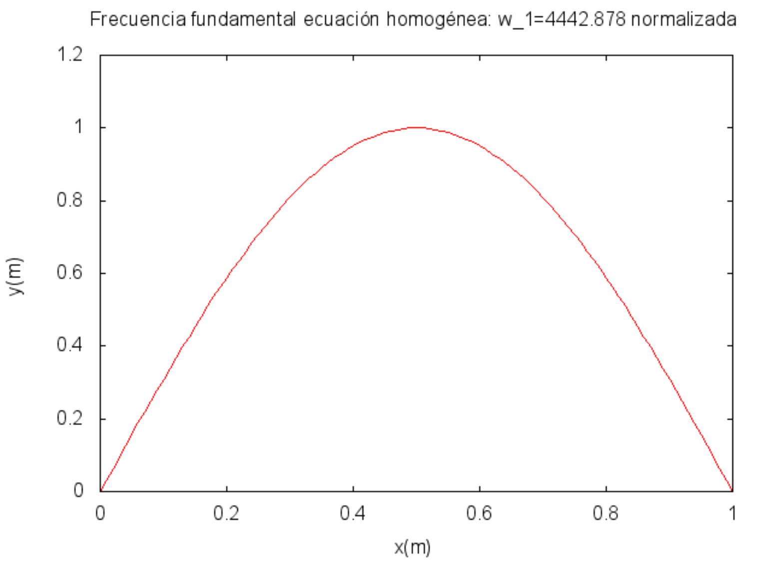
Tercera frecuencia ecuación inhomogénea: k_3=435,19
y(m)
x(m)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

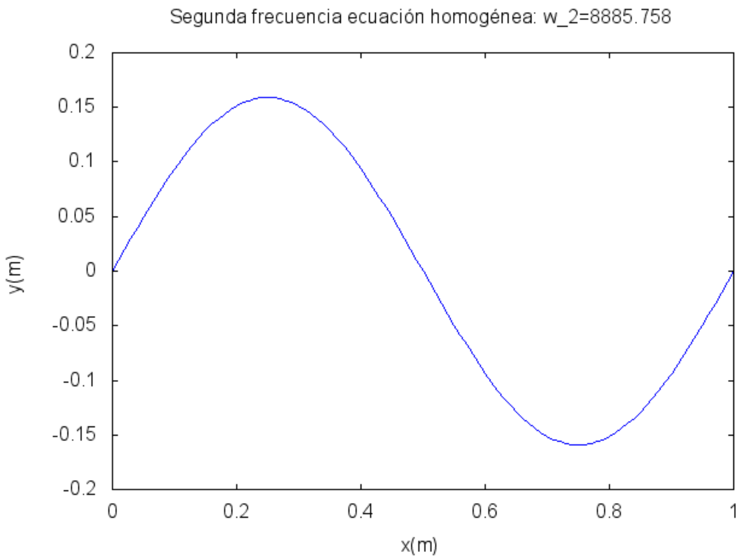


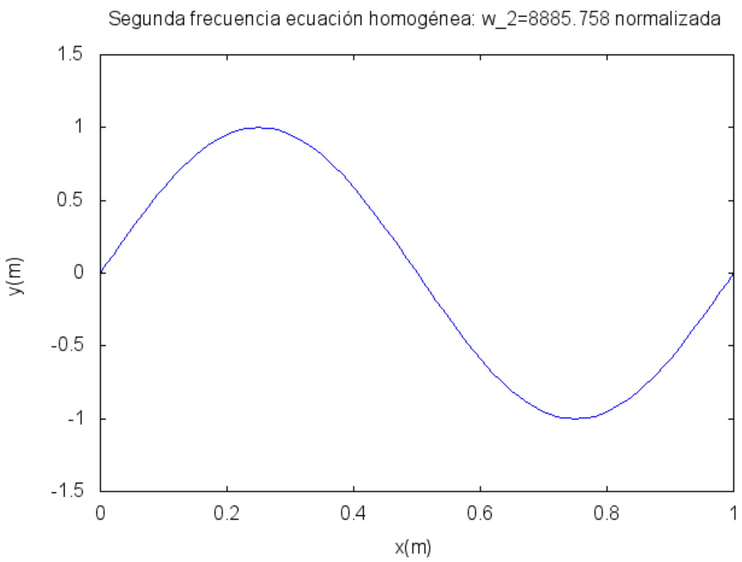
Tercera frecuencia ecuación inhomogénea: k_3=435,19 normalizada
y(m)
x(m)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

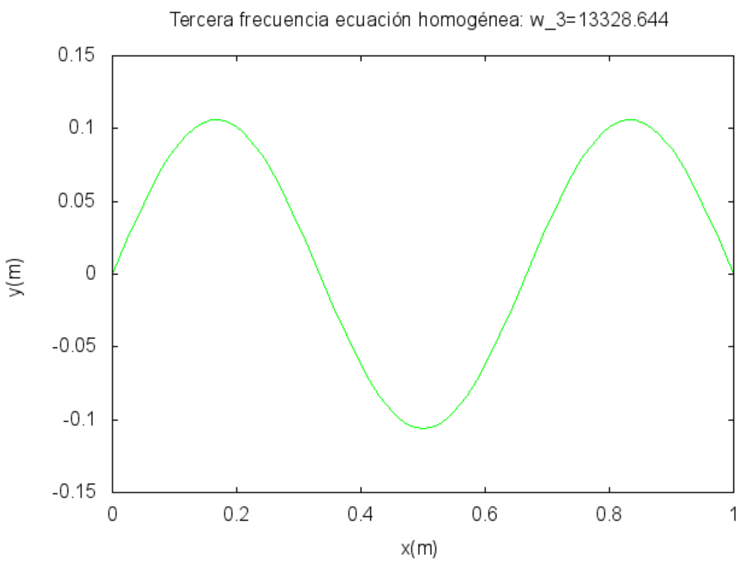

Tres primeras frecuencias para la ecuación diferencial inhomogénea normalizadas
k1=137.73
k2=286,28
k3=435,19
y(m)
x(m)

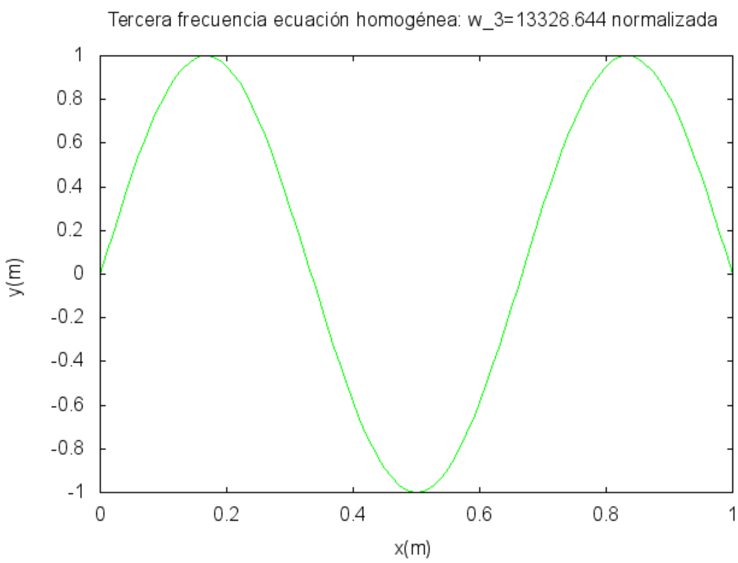

Frecuencia fundamental ecuación homogénea: w_1=4442.878
y(m)
x(m)

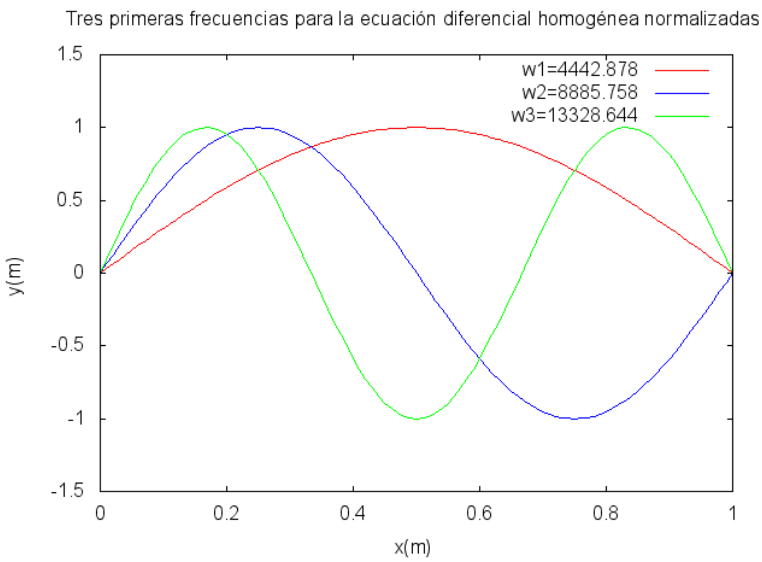

Frecuencia fundamental ecuación homogénea: w_1=4442.878 normalizada
y(m)
x(m)

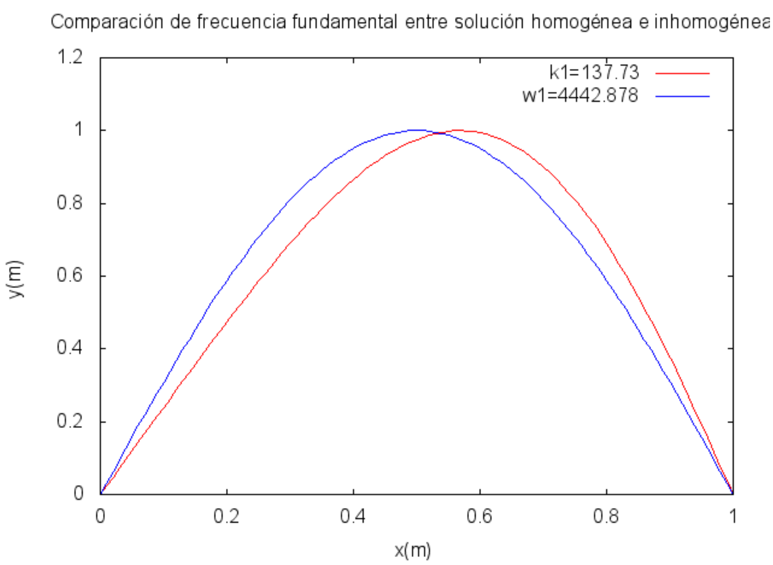

Segunda frecuencia ecuación homogénea: w_2=8885.758
y(m)
x(m)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

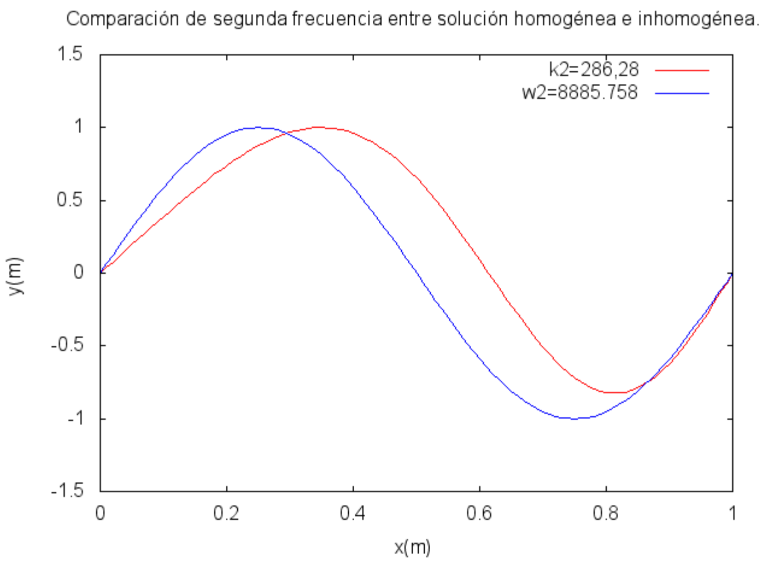

Segunda frecuencia ecuación homogénea: w_2=8885.758 normalizada
y(m)
x(m)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Tercera frecuencia ecuación homogénea: w_3=13328.644
y(m)
x(m)
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

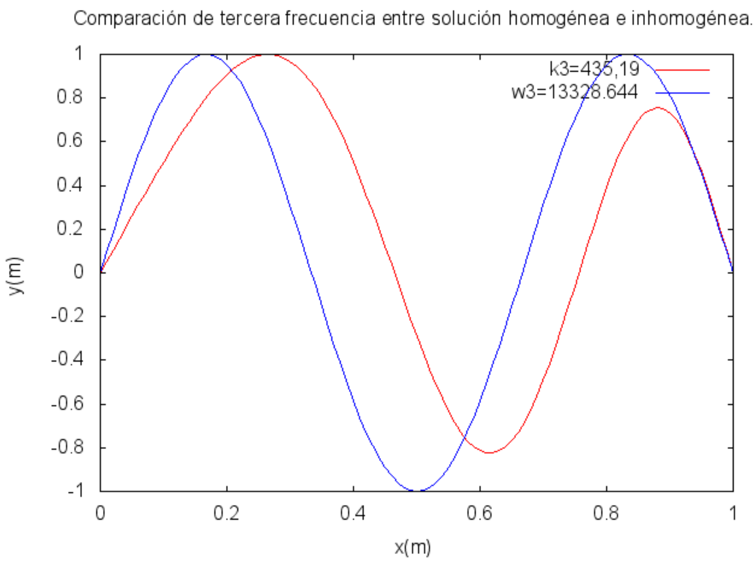

Tercera frecuencia ecuación homogénea: w_3=13328.644 normalizada
y(m)
x(m)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Tres primeras frecuencias para la ecuación diferencial homogénea normalizadas
w1=4442.878
w2=8885.758
w3=13328.644
y(m)
x(m)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Comparación de frecuencia fundamental entre solución homogénea e inhomogénea
k1=137.73
w1=4442.878
y(m)
x(m)
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1



Comparación de segunda frecuencia entre solución homogénea e inhomogénea.
k2=286,28
w2=8885.758
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
y(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(m)



Comparación de tercera frecuencia entre solución homogénea e inhomogénea.
k3=435,19
w3=13328.644
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
y(m)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x(m)

4. Conclusiones

Como podemos observar, para las soluciones de la ecuación diferencial homogénea obtenemos resultados simétricos en los modos de vibración de la cuerda. Sin embargo, para las soluciones de la ecuación diferencial inhomogénea vemos que los máximos y mínimos están desplazados hacia la derecha en el eje x y los valores de nuestros mínimos y máximos de la función $y(x)$ son menores en valor absoluto cuanto más nos desplazamos hacia la derecha en el eje x. Ésto se debe a la dependencia con x de la densidad másica de la cuerda $\lambda(x) = \lambda_0 + (x - \frac{L}{2})\Lambda$, ya que cuando $x < L/2$ tenemos una contribución negativa a la densidad másica de la cuerda y cuando $x > L/2$ tenemos una contribución positiva a la densidad másica de la cuerda, que modifica éstos modos de vibración de ésta manera. Con otra dependencia de $\lambda(x)$ distinta obtendríamos resultados diferentes.