Ejercicio 7-34. El camino del borracho. Método de Montecarlo.

Francisco Javier Fernández Caro

24 de abril de 2024

1. Planteamiento del problema.

Un problema típico de simulación por Montecarlo es el del paseo al azar, que está estrechamente relacionado con el movimiento browniano y con la difusión. Una versión simplificada del problema transcurre en una ciudad formada por calles completamente cuadriculadas y de la misma longitud l, de manera que son indistinguibles unas de otras. A la salida del hotel, que está en la esquina de una calle, una persona desorientada elige al azar una calle, por la que camina con velocidad constante hasta que llega a un cruce, donde vuelve a elegir al azar otra calle, y así sucesivamente.
(a - 3 pto.) Haz un programa para comprobar que, después de haber recorrido N calles, la persona se habrá alejado del hotel una distancia cuadrática media $\mathrm{d}_{rms} \propto \sqrt{N}$.
A continuación vamos a eliminar la restricción de que hay calles (y, por lo tanto, direcciones prefijadas) por las que poder deambular. Así pues, la persona parte de un lugar inicial y, cada vez que da un paso, puede escoger cualquier dirección. Calcula la distancia cuadrática media a la que se encontrará la persona respecto del punto de partida y obtén la ley que relaciona d_{rms} con el número N de pasos, cuyas longitudes se toman de (b - 3 pto.) una distribución uniforme entre $l_1 = 50$ cm y $l_2 = 70$ cm.
(c - 4 pto.) Supón que, debido al cansancio, cada paso que da el caminante es menor en un factor $0 < \mathrm{p} < 1$ que el paso previo. Si el paso inicial tiene longitud l, ¿cuál es la distancia cuadrática media drms desde el punto inicial después de dar N pasos? Representa los resultados de tus simulaciones en una gráfica. Emplea los valores siguientes: $l = 1$ m y p = 0.9DNI, donde DNI representa los tres últimos dígitos de tu DNI. Recuerda que, para obtener resultados aceptables estadísticamente, conviene trabajar con números N bastante grandes.
(d - 3 pto.) Para cada una de las distribuciones que has estudiado en los apartados anteriores, representa en una gráfica 5 trayectorias realizadas con N = 1000 pasos, cada una de un color. Indica el punto final de cada trayectoria mediante un símbolo.

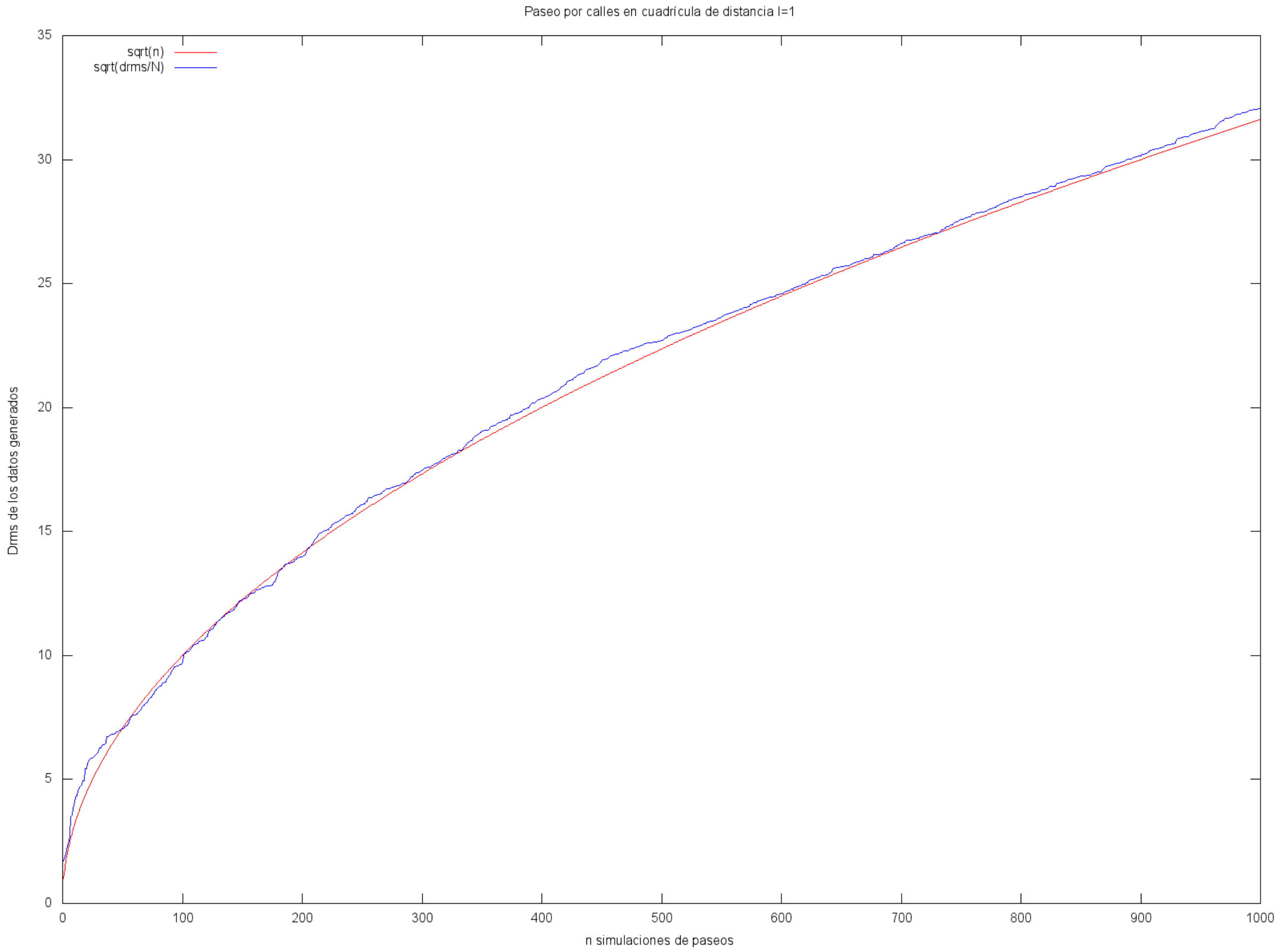
2. Método de resolución

En primer lugar para el apartado a) hemos hecho 3 bucles, uno para generar un paso en dirección aleatoria 1000 veces, después, para calcular la d_{rms} y ver su proporcionalidad con $\sqrt{N}$, hemos hecho otro bucle con 1000 de éstas simulaciones con 1000 pasos calculando d_{rms} para cada simulación, ya que así obtendremos una mejor comparación con un valor más ajustado. Por último, para el apartado d) hacemos otro bucle de 5 trayectorias en las que vamos apuntando los puntos (x_i,y_i) de cada iteración para más tarde graficarlo con gnuplot.

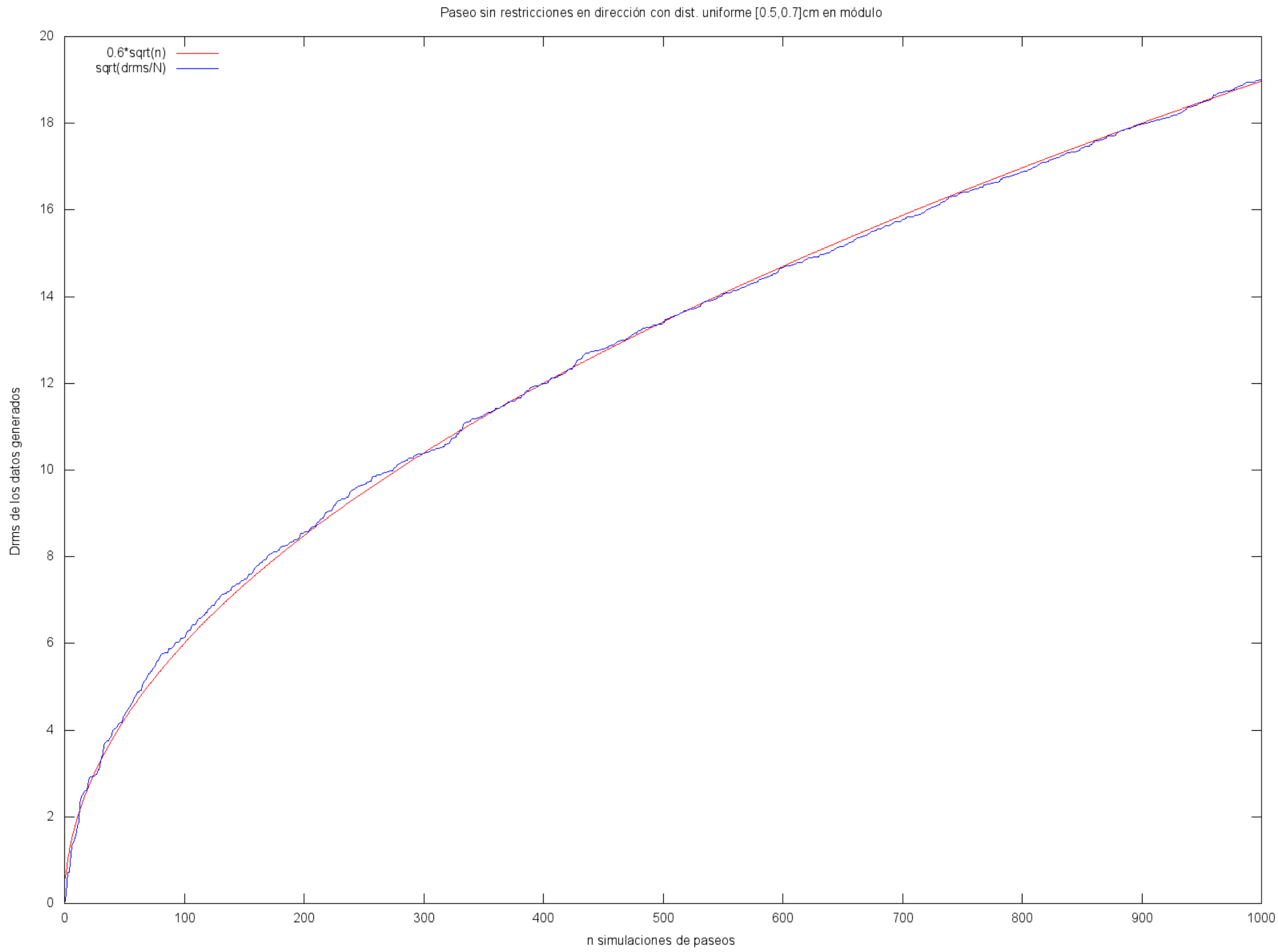
El procedimiento para los siguientes apartados ha sido exactamente el mismo, cambiando únicamente los pasos que se daban en el apartado b) y c) ajustandose a las condiciones de nuestro problema, siendo nuestro factor p=0.9621

3. Resultados

Para nuestro primer apartado a) obtenemos los siguientes resultados:



Podemos observar claramente que $d_{rms} \propto \sqrt{N}$. Siendo nuestra d_{rms}=32.096 m tras 1000 trayectorias de 1000 pasos cada una.

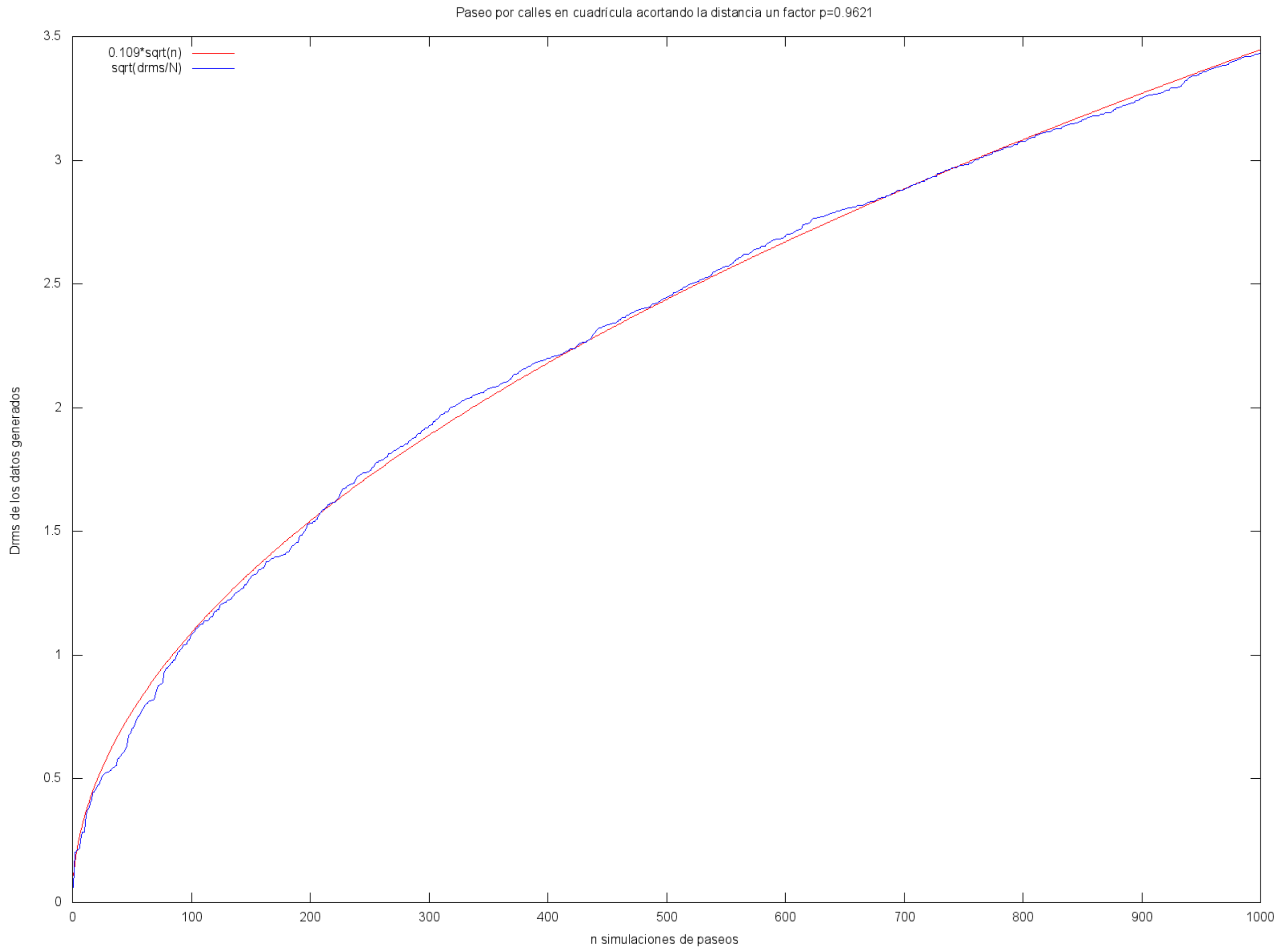


Para el apartado b) hemos realizado la toma de datos de manera que hemos escogido un ángulo aleatorio entre 0 y 2π y para el módulo hemos hecho una distribución uniforme entre 0.5 y 0.7 metros. Obteniendo los siguientes resultados:

En éste caso, vemos que nuestros datos se relacionan con N de la siguiente forma: $\sqrt{drms/N} \approx 0{,}6 \cdot \sqrt{N}$. Ya que hemos ido probando valores para ver la dependecia con $\sqrt{N}$ hasta dar con la que más se ajusta con un valor de d_{rms}=19.018 para 1000 simulaciones de trayectoria.

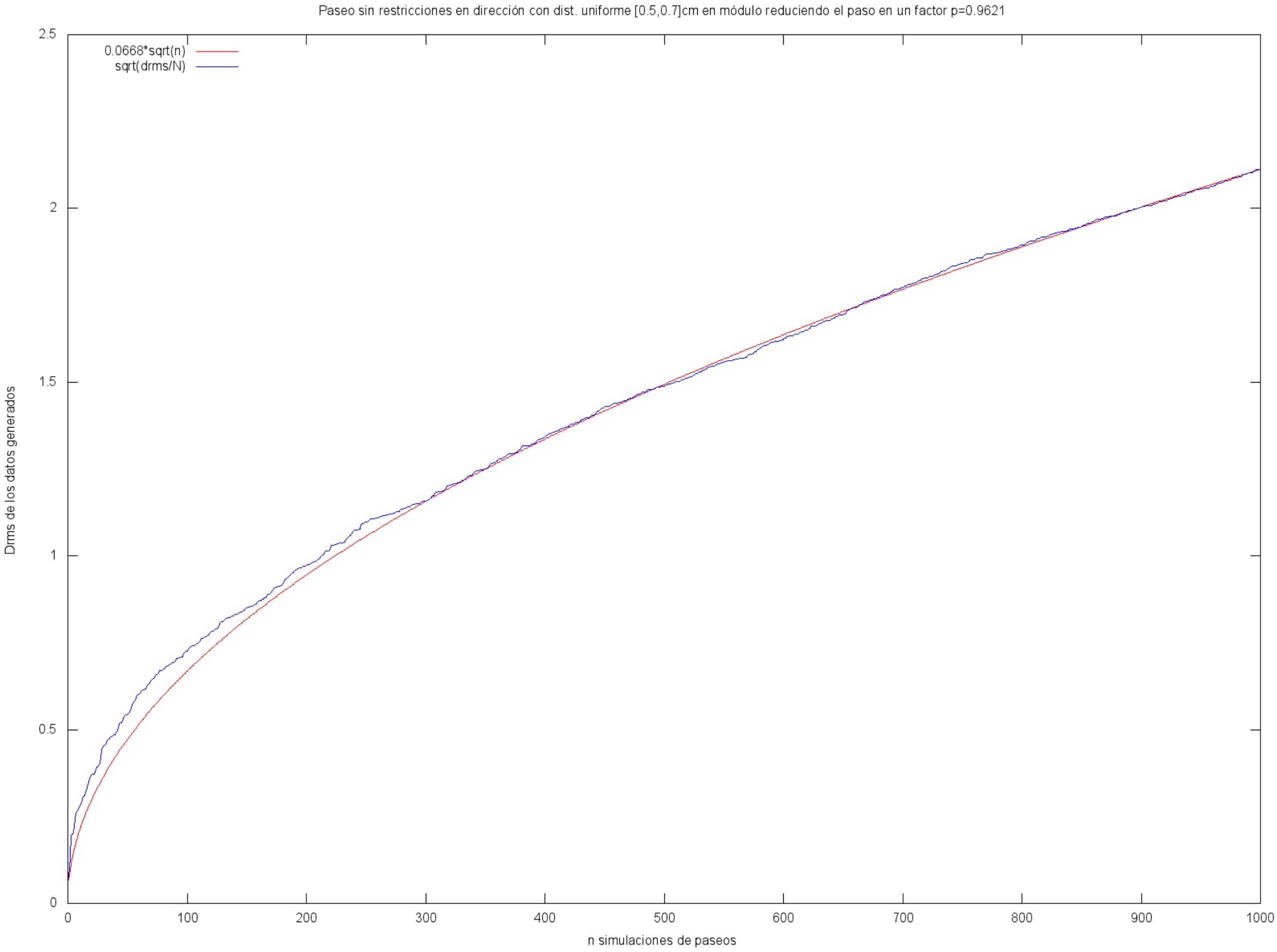
Para el apartado c) hemos mantenido el mismo procedimiento salvo el factor p multiplicando i veces por cada iteración de los pasos de una misma trayectoria.

Para N=1000 hemos realizado las ambas simulaciones y calculado la dependencia con $\sqrt{N}$. Obteniendo los siguientes resultados:



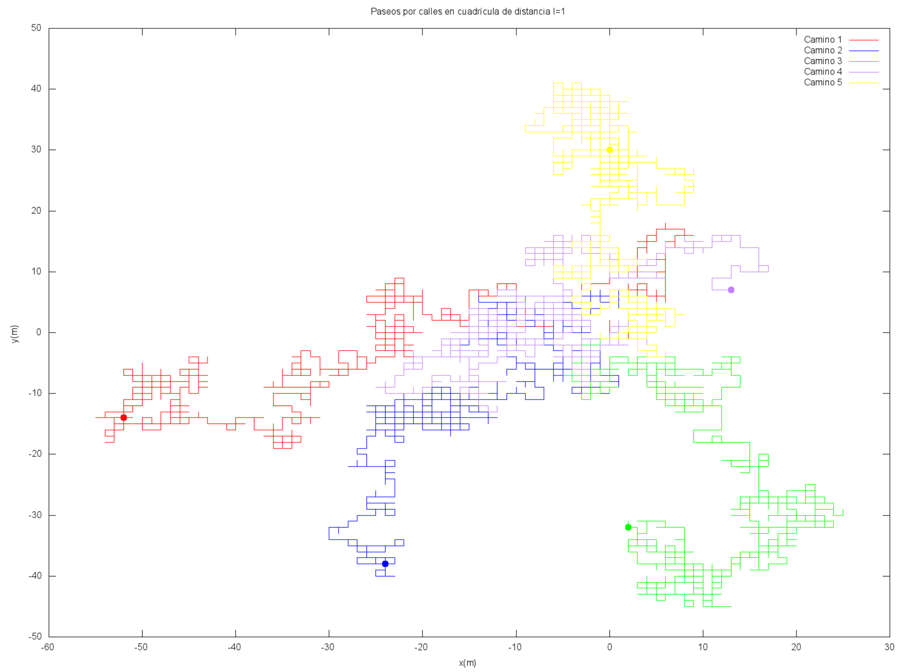
En éste caso, el de cuadrícula disminuyendo el paso un factor p, vemos que la dependecia sigue existiendo, pero con un valor mucho más bajo para el coeficiente, siendo nuestra aproximación: $\sqrt{drms/N} \approx 0{,}109 \cdot \sqrt{N}$. Con un valor de d_{rms}=3.432 después de 1000 simulaciones.

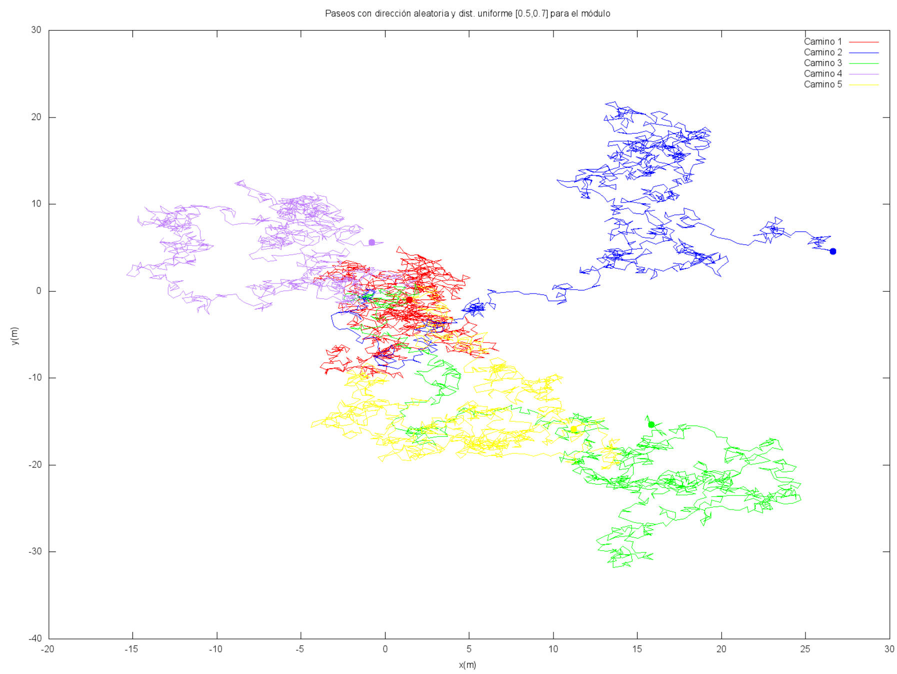
Para la trayectoria sin restricción en la dirección con reducción en el paso un factor p hemos obtenido de la misma forma:

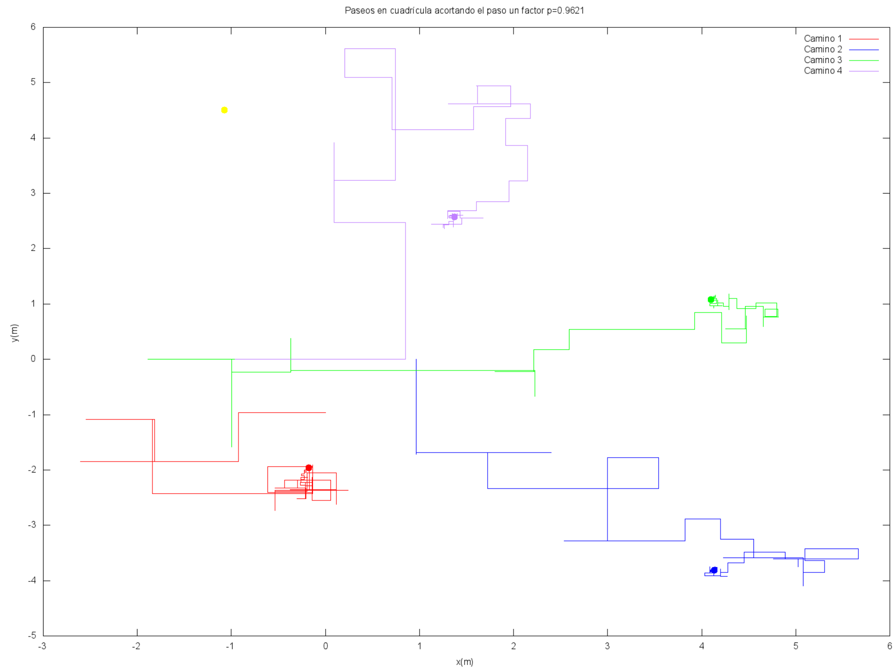


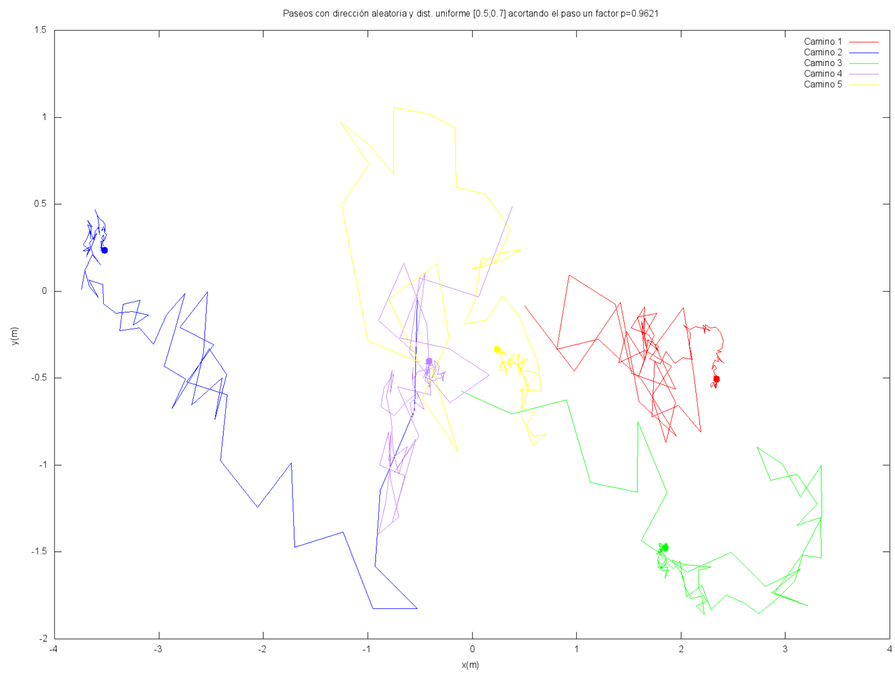
En éste caso obtenemos que la dependencia con $\sqrt{N}$ viene dada por la expresión: $\sqrt{drms/N} \approx 0{,}0668 \cdot \sqrt{N}$. Con un valor de d_{rms}=2.113 tras 1000 iteraciones.

Una vez vistas las distancias cuadráticas medias simuladas y sus dependencias con $\sqrt{N}$ nos disponemos a graficar cada uno de los paseos simulados 5 veces cada uno. Hemos indicado el final de cada trayectoria con un punto relleno del color de su misma trayectoria para identificar el punto en el que acaba cada una:









4. Conclusiones

Ha sido un ejercicio diferente en la que hemos podido aplicar el Método de Montecarlo junto a la subrutina 'ran2.f' que genera números aleatorios para simular un problema suficientes veces como para ver su correspondencia con N, haciendo gráficos para visualizar mejor el problema. Como hemos podido observar, independientemente de si ponemos restricciones en la dirección como si vamos acortando el paso un factor p, la proporcionalidad con $\sqrt{N}$ no se pierde, simplemente cambiamos el coeficiente para ajustar lo mejor posible nuestros datos.