

Práctica 0: Propiedades básicas. Ecuaciones e Inecuaciones

1. Para cada uno de los siguientes enunciados: expresar el problema en términos de ecuaciones y resolver:
 - (a) El triple de un número es igual al número aumentado en 8. ¿Cuál es el número?
 - (b) La suma de tres números enteros consecutivos es 63. ¿Cuáles son esos números?
 - (c) La diferencia de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 61. ¿Cuáles son esos números?
 - (d) La suma de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 41. ¿Cuáles son esos números?
 - (e) ¿Cuál es el número que disminuido en sus dos terceras partes equivale a su doble disminuido en 25?
2. Un libro de Geografía cuesta el doble de lo que cuesta el de Matemática y éste $\frac{2}{3}$ del de Historia. Se pagaron \$45 por los tres libros. ¿Cuánto cuesta cada libro?
3. Dos personas tienen 27 y 15 años de edad. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad de la mayor sea los $\frac{4}{3}$ de la edad de la menor?
4. Hallar los lados de un rectángulo cuya área es 24 sabiendo que la diferencia entre la base y la altura es 2.
5. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x < 12\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}: x \leq 19\}$,
 - (a) Dar 3 números irracionales que pertenezcan al conjunto A .
 - (b) Dar 3 números mayores a 11 que pertenezcan al conjunto B .
 - (c) Calcular $A \cup B$ y $A \cap B$.
 - (d) Expresar A y B como intervalos.
6. Expresar los siguientes conjuntos de números reales como intervalos o como unión de intervalos:
 - (a) $A = \{x \in \mathbb{R}: x < 12 \wedge 0 \leq x \leq 38 \wedge x \neq 5\}$.
 - (b) $B = \{x \in \mathbb{R}: x > \sqrt{8} \wedge \frac{14}{5} < x < \sqrt{23}\}$.
 - (c) $C = \mathbb{R} \setminus [0, 3]$.
 - (d) $D = \{x \in \mathbb{R}: x < -\sqrt{2} \wedge x^2 \geq 0 \wedge x < 7\}$.
 - (e) $E = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 5 \vee x < 5\}$.
 - (f) $F = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 3 \vee -2 < x < 5\}$.
 - (g) $G = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 3 \wedge x < 5\}$.
7. Dados los conjuntos
 - $A = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$,
 - $C = [-2, 13]$,
 - $D = (4, 20]$,
 - $B = \{x \in \mathbb{R}: x < -3\}$,
 - $E = \{x \in \mathbb{R}: 2 < x < 7\}$.

Averiguar los siguientes conjuntos y representarlos como intervalos o unión de intervalos.

- $A \cup D$.
- $A \cup B \cup C$.
- $A \cup C$.
- $(C \cap D) \cup E$.
- $C \cap (D \cup E)$.
- $A \setminus E$.
- $A \setminus B$.
- $A \setminus (C \cap D)$.
- $(C \cap E) \setminus B$.

8. Resolver las siguientes ecuaciones

- (a) $\frac{2}{3} + 3x = 2x - \frac{1}{5}$.
- (b) $\frac{2x-4}{x-1} = 4$.
- (c) $\frac{-10x+2}{5} = \frac{2-8x}{4} - \frac{1}{10}$.
- (d) $\frac{6x^2+2x-4}{3x+1} = 2x$.
- (e) $\frac{5}{x+3} + \frac{4}{x} = 3$.
- (f) $\frac{1}{x-2} + \frac{5}{2(x-2)} = \frac{5x+3}{4x-8}$.

9. Analizar la siguiente lista de propiedades y errores comunes. ¿Cuáles son verdaderas? ¿Cuáles son falsas? En aquellos casos que crea que es verdadera, justifique porqué. En aquellos casos que crea que es falsa, explique porqué y muestre un contraejemplo. Analícelas con detenimiento.

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $(a-b)^2 = (a+b)(a-b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad \forall a, c \in \mathbb{R}, b, d, b+d \in \mathbb{R} - \{0\}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ad}{bc}$
- $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$
- $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a^2} = -a$
- $\sqrt{a^2} = |a|$
- $\sqrt{a^2} = a$
- $|a+b| = |a|+|b|$
- $|a-b| = |a|-|b|$

10. Calcular el cociente y el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ en cada uno de los casos.

- (a) $P(x) = 2x^4 - 6x^2 - 16x, \quad Q(x) = -x^2 + 2x$.
- (b) $P(x) = 3x^4 - 2x, \quad Q(x) = 3x^3 - 4$.
- (c) $P(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 1, \quad Q(x) = x - 3$.
- (d) $P(x) = x^4 - x^2 + 1, \quad Q(x) = 2x + 1$.

11. Factorizar los siguientes polinomios

- (a) $P(x) = x^2 - 3x + 2$.
- (b) $P(x) = -x^2 - 3x + 10$.
- (c) $P(x) = 2x^2 + 5x - 3$.
- (d) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
- (e) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
- (f) $P(x) = x^3 - 1$.
- (g) $P(x) = x^3 + 1$.
- (h) $P(x) = 6x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4$.

12. Para cada una de las siguientes inecuaciones, resolver analíticamente y expresar la solución como unión de intervalos y representar la solución en la recta real.

(a) $2x - 10 < 6$

(b) $-2x - 10 < 6$

(c) $x + 3 < x + 5$

(d) $x + 3 < x + 2$

(e) $x - 10 > 2 - 2x$

(f) $7x - 1 \leq 2x + 1$

(g) $-5 < x - 4 < 2 - x$

(h) $2x - 5 \leq x - 4 \leq 2 - x$

(i) $2x - 5 \leq x - 4 \leq 3x - 2$

(j) $(x - 1)(x + 2) > 0$

(k) $x^2 - 36 \geq 0.$

(l) $x^2 - 9 \leq x - 3$