UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS
INTRODUCCIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
Dr. Claudio G. Schifini

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

La resolución de ecuaciones se basa en los siguientes hechos.

1) Si dos números reales a y b son iguales, ($a = b$), significa que son el mismo número con diferente nombre. Por lo tanto si le realizamos la misma acción a ambos (siempre y cuando la acción está permitida) se mantiene la igualdad.
2) Las acciones no permitidas son: dividir por el número cero o por cualquier expresión que pueda ser cero; calcular raíces cuadradas o de orden par a números negativos o a expresiones que puedan ser negativas.
3) Si a y b son dos números reales (a y b pueden ser expresiones) el hecho que sepamos que $a + b = 0$, no nos es muy útil para determinar los valores de a y b. En cambio si supiéramos que $a \cdot b = 0$, podríamos asegurar que, por lo menos, alguno de los 2 es 0. O sea,

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0}$$

   Por lo tanto, siempre hay que tratar de factorizar (escribir como un producto) y comparar contra 0.
4) En base a 1) hay que tener en cuenta que NO existe el "pasar de término", o en todo caso entender que "pasar de término" significa haberle aplicado la misma acción (permitida!!!) a dos números que son iguales.
5) Tampoco existe el "tachar" o "simplificar" pues esto puede hacer que sin darnos cuenta estemos dividiendo por 0 y perdamos soluciones.
6) Cuando nos plantean resolver una ecuación puede ocurrir que la expresión no tenga sentido para algunos valores de la variable a encontrar, y lo primero que tenemos que calcular es lo que se denomina el dominio natural (Dom) de la expresión que es el subconjunto de números reales más grande posible para los cuáles toda la expresión tiene sentido (toda la cuenta se puede hacer). Las soluciones encontradas tienen que pertenecer al dominio.

Ejemplos:

1. $\frac{2x-2}{x} = 2$.

   Dado que no se puede dividir por 0, $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

   Multiplicando por x ambos términos resulta

$$2x - 2 = 2x \Rightarrow -2 = 0$$

   Como esto último es falso concluímos que no existe ningún x que sea solución. O sea

$$S = \phi.$$

2. $\frac{2x+2}{x+1} = 2$.

   En este caso, la condición que debe cumplir x es que $x + 1 \neq 0$, o sea $x \neq -1$. Luego el $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$.

   Multiplicando por $x + 1$ ambos términos resulta

   $$2x + 2 = 2x + 2 \Rightarrow 0 = 0.$$

   Como esto último es verdadero concluímos que cualquier x **<u>del dominio</u>** es solución. O sea

   $$S = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

3. $\frac{x^2-x}{x} = 0$.

   Dado que no se puede dividir por 0, $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

   Para que el cociente sea 0 el numerador debe ser 0, o sea

   $$x^2 - x = 0,$$

   que factorizando queda

   $$x \cdot (x - 1) = 0,$$

   Teniendo en cuenta 3) resulta que

   $$x = 0 \text{ o } x = 1.$$

   Como $0 \notin Dom$, resulta que el conjunto solución es

   $$S = \{1\}.$$

4. $x^2 + 3x = 5x$.

   En este caso, $Dom = \mathbb{R}$.

   Una posibilidad es factorizar el miembro izquierdo

   $$x \cdot (x + 3) = 5x$$

   Si "tacháramos" una x de ambos miembros

   $$\cancel{x} \cdot (x + 3) = 5\cancel{x}$$

   nos quedaría

   $$x + 3 = 5$$

   de donde

   $$x = 2$$

   Y concluiríamos que el conjunto solución es

   $$S = \{2\}.$$

   Sin embargo, <u>lo que hicimos está mal!!!</u>

   Cuando "tachamos" las x lo que en realidad hicimos fué dividir por x ambos términos, o sea

$$\frac{x \cdot (x+3)}{x} = \frac{5x}{x}$$

Que si x no fuera 0, la expresión anterior se puede reescribir en la forma

$$\frac{x \cdot (x+3)}{x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{x+3}{1} = 1 \cdot (x+3) = x+3$$

$$\frac{5x}{x} = 5 \cdot \frac{x}{x} = 5 \cdot 1 = 5$$

Y hubiesemos llegado como antes a

$$x + 3 = 5$$

Pero como x puede ser 0, lo que hicimos está mal.

Podemos resolver correctamente la ecuación $x^2 + 3x = 5x$ de varias maneras.

Una de ellas es restar miembro a miembro $5x$ (“pasar” $5x$ restando)

$$x^2 + 3x - 5x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$$

Finalmente el conjunto solución correcto es

$$S = \{0,2\}.$$

5. $\dfrac{2}{\left(\dfrac{x-2}{x}\right)} + \dfrac{1}{2x-4} = \dfrac{6}{\left(\dfrac{4x-8}{x+1}\right)}.$

Para calcular el dominio tenemos que analizar cuáles son las condiciones que tiene que cumplir x. Como no se puede dividir por 0, resulta que x tiene que cumplir todas las siguientes condiciones:

1) $x \neq 0$, 2) $2x - 4 \neq 0$, 3) $x + 1 \neq 0$, 4) $\frac{4x-8}{x+1} \neq 0$.

La condición 1) es clara, la condición 2) dice que $x \neq 2$, la 3) $x \neq -1$ y la 4) vuelve a ser $x \neq 2$. Por lo mtanto el $Dom = \mathbb{R} - \{-1,0,2\}$.

Teniendo en cuenta que $\frac{2}{\left(\frac{x-2}{x}\right)} = \frac{2x}{x-2}$ y que $\frac{6}{\left(\frac{4x-8}{x+1}\right)} = \frac{6x+6}{4(x-2)}$ reescribimos la ecuación en la forma

$$\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{6x+6}{4(x-2)}$$

Restando miembro a miembro $\frac{6x+6}{4(x-2)}$ resulta que

$$\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{2(x-2)} - \frac{6x+6}{4(x-2)} = 0$$

Realizando la suma de las fracciones (común denominador) obtenemos

$$\frac{8x + 2 - (6x+6)}{4(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{8x + 2 - 6x - 6)}{4(x-2)} = 0 \Rightarrow \frac{2x-4}{4(x-2)} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Pero como $2 \notin Dom$, resulta que

$$S = \phi.$$

6. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{2x+9}$.

Para calcular el dominio tenemos que recordar que no se pueden calcular raíces cuadradas a números negativos. Por lo tanto, debe ser:

1) $x + 1 \geq 0$, 2) $x - 4 \geq 0$, 3) $2x + 9 \geq 0$.

Aunque aún no hemos trabajado con inecuaciones, aceptemos que x debe cumplir, simultáneamente,

1) $x \geq -1$, 2) $x \geq 4$, 3) $x \geq -\frac{9}{2}$.

Por lo tanto, el $Dom = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 4\}$.

Para poder despejar x comenzamos elevando al cuadrado ambos miembros

$$\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+9}\right)^2$$

Desarrollando el miembro izquierdo

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4} + \left(\sqrt{x-4}\right)^2 = \left(\sqrt{2x+9}\right)^2$$

Teniendo en cuenta que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, resulta que

$$x + 1 + 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4} + x - 4 = 2x + 9 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4} = 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4} = 6$$

Elevando al cuadrado nuevamente

$$\left(\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-4}\right)^2 = 36$$

O sea,

$$(x+1) \cdot (x-4) = 36 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 36 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow x = 8 \ o \ x = -5$$

Como $-5 \notin Dom$, resulta que

$$S = \{8\}.$$

7. $x + \sqrt{x} = 6$.

En este caso el $Dom = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$.

Despejamos la $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} = 6 - x$$

Elevamos al cuadrado

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (6-x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9 \ o \ x = 4.$$

En este caso ambos valores están en el dominio, pero si contestáramos que el conjunto solución es $S = \{4,9\}$ cometeríamos un error.

Si reemplazamos los valores obtenidos en la ecuación original resulta lo siguiente:

Si $x = 4$, reemplazando, $4 + \sqrt{4} = 4 + 2 = 6$. O sea, $x = 4$ es solución.

Pero si $x = 9$, reemplazando, $9 + \sqrt{9} = 9 + 3 = 12 \neq 6$. O sea, $x = 9$ NO es solución.

Po lo tanto la respuesta correcta es

$$S = \{4\}.$$

Lo que ocurrió en este ejemplo se debe a que la propiedad

$$a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

es VERDADERA.

Pero la recíproca de esta propiedad

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$$

es FALSA (por ejemplo, $1^2 = (-1)^2$, pero $1 \neq -1$).

En general, si para resolver una ecuación elevamos al cuadrado (o a cualquier potencia par) debemos controlar que las soluciones halladas no sólo estén en el dominio sino que hay que verificar si son o no soluciones.

8. $|x| = 3$.

   Es claro que el $Dom = \mathbb{R}$. Recordando que $|x| = distancia\ de\ x\ al\ 0$, resulta que

$$S = \{-3,3\}.$$

9. $|x| = -3$.

   $Dom = \mathbb{R}$. Recordando que $|x| \geq 0$, resulta que

$$S = \phi.$$

10. $|-2x + 3| = 7$.

   $Dom = \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $|-2x + 3| = distancia\ de\ (-2x + 3)\ al\ 0$, resulta que

$$-2x + 3 = -7\ o - 2x + 3 = 7$$

   Resolviendo cada una de las ecuaciones

$$-2x + 3 = -7 \Rightarrow -2x = -10 \Rightarrow x = 5$$

$$-2x + 3 = 7 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

$$S = \{-2,5\}.$$

11. $|x - 1| = 2x$.

   $Dom = \mathbb{R}$. Dado que no conocemos el signo de $2x$ (pues no conocemos x), tendríamos que considerar 2 casos posibles:

   Caso1) $2x \geq 0$ ó caso 2) $2x < 0$. O sea, Caso1) $x \geq 0$ ó caso 2) $x < 0$.

En el caso 2) la ecuación $|x-1| = 2x$ no tiene solución pues $|x-1| \geq 0$.

En el caso 1) la ecuación $|x-1| = 2x$ se resuelve como en el ejercicio anterior

$$x - 1 = -2x \text{ o } x - 1 = 2x$$

de donde

$$x - 1 = -2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x - 1 = 2x \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

Pero teniendo en cuenta que en el caso que estamos analizando $x \geq 0$, la única respuesta posible es $x = \frac{1}{3}$. O sea,

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

Otra forma de resolverlo es sin separar en casos, despreocupándose del signo de $2x$.

Resolviendo la ecuación como si el miembro derecho fuera un número concreto no negativo

$$x - 1 = -2x \text{ o } x - 1 = 2x$$

de donde

$$x - 1 = -2x \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$x - 1 = 2x \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = -1$$

Pero ahora tendríamos que comprobar si las soluciones halladas son o no solución

Si $x = \frac{1}{3}$, $\left|\frac{1}{3} - 1\right| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3}$. Se verifica la ecuación.

Si $x = -1$, $|-1-1| = |-2| = 2 \neq 2 \cdot (-1) = -2$. En este caso no se verifica la ecuación.

Entonces

$$S = \left\{\frac{1}{3}\right\}.$$

12. $|2x - 4| = |-3x + 9|$.

$Dom = \mathbb{R}$. Recordando que $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$,

$$2x - 4 = -(-3x + 9) \text{ ó } 2x - 4 = -3x + 9$$

Resolviendo cada ecuación

$$2x - 4 = -(-3x + 9) = 3x - 9 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$$

$$2x - 4 = -3x + 9 \Rightarrow 5x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{5}$$

Luego

$$S = \left\{\frac{13}{5}, 5\right\}.$$