1. IRM - Grupo 1 - Clase de Problemas 1 y 2 - Clase 5 - 29/03/21

Ejercicio 1.1. Consideremos las funciones $f(x) = |2x - 14|$ y $g(x) = x^2 - 2$. Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$. Escribir ambas funciones como funciones partidas para eliminar la presencia de los módulos, de ser posible. Realizar un gráfico aproximado de $f \circ g$.

Solución Observemos que ambas funciones tienen por dominio al conjunto de todos los números reales, por lo tanto,

- $Dom(f \circ g) = Dom(g) = \mathbb{R}$
- $Dom(g \circ f) = Dom(f) = \mathbb{R}$.

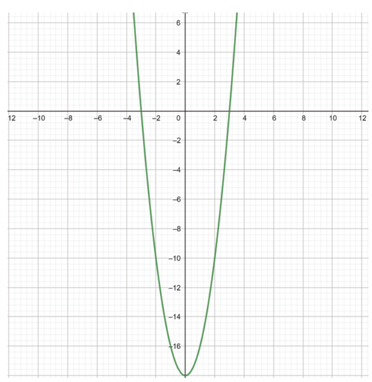
Por un lado,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |2(x^2 - 2) - 14| = |2x^2 - 4 - 14| = |2x^2 - 18|.$$

Para escribir a esta función como función partida, debemos hallar los valores de x para los cuales $2x^2 - 18$ es positivo y para los cuales es negativo. Como esta es una función cuadrática, las cuales ya fueron estudiadas y conocemos muy bien, podemos hallar su conjunto de positividad y negatividad a partir de sus raíces. En este caso, las raíces de la función $2x^2 - 18$ son las soluciones a la ecuación

$$2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Dado que las raíces de esta función cuadrática son $x = -3$ y $x = 3$, al poseer coeficiente principal positivo[1], podemos asegurar que el siguiente es un gráfico aproximado:

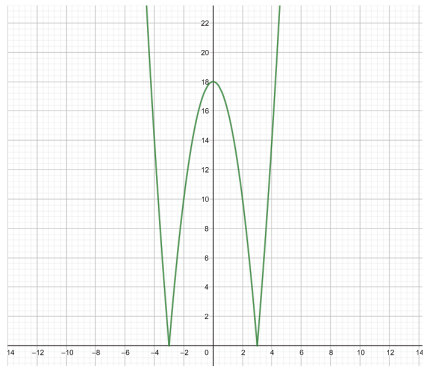


Por lo tanto, el conjunto de positividad será igual al intervalo $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$, mientras que el conjunto de negatividad será igual al intervalo $(-3, 3)$. Concluimos de esta forma que

$$(f \circ g)(x) = |2x^2 - 18| = \begin{cases} 2x^2 - 18 & \text{si } x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty) \\ -(2x^2 - 18) = -2x^2 + 18 & \text{si } x \in [-3, 3] \end{cases}$$

[1] Es necesario mencionar el efecto del coeficiente principal para justificar adecuadamente el gráfico aproximado.

A partir del gráfico aproximado de $2x^2 - 18$ y el estudio del conjunto de negatividad de dicha función, concluimos que el siguiente es un gráfico aproximado de $f \circ g$



debido al efecto de la función módulo sobre los números reales positivos y negativos.

Por otro lado,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|2x - 14|)^2 - 2.$$

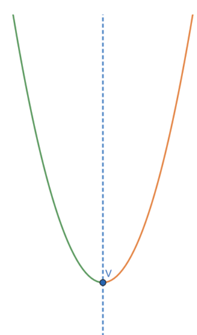
Dado que, elevar al cuadrado números reales es una operación que no distingue signo, obtenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (|2x - 14|)^2 - 2 = (2x - 14)^2 - 2.$$

Ejercicio 1.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Hallar un intervalo (lo más grande posible) I, donde f sea decreciente. Considerar $f : I \to Im(f)$ y calcular $f^{-1} : Im(f) \to I$.

(1) Graficar f^{-1}.
(2) Escribir a f^{-1} como una composición de 3 funciones de dos formas diferentes.

Solución Como estamos trabajando con una función cuadrática, la cual ya estudiamos bastante, a partir de su gráfico se puede deducir que si su coeficiente principal es positivo



el mayor intervalo sobre el cual será creciente es igual a $[x_v, +\infty)$, mientras que el mayor intervalo sobre el cual es decrecientes es $(-\infty, x_v]$. Un resultado similar vale en el caso de una función cuadrática con coeficiente principal negativo.

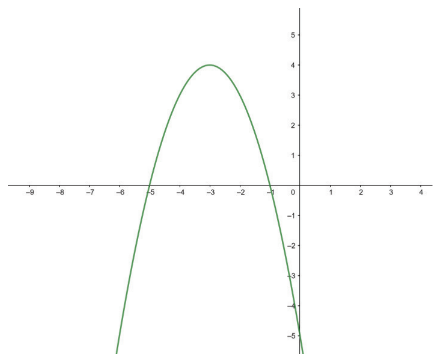
En nuestro caso, la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ posee coeficiente principal negativo. Calculando su vértice, tenemos que

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{-2} = -3$$

e

$$y_v = f(x_v) = f(-3) = -9 + 18 - 5 = 4.$$

Si lo tanto, se tiene que f será creciente sobre el intervalo $(-\infty, -3]$ y decreciente sobre $[-3, +\infty)$. Podemos ver esto más claramente mediante un gráfico aproximado. Utilizando la fórmula resolvente obtenemos que las raíces de f son $x = -5$ y $x = -1$.



Para calcular $f^{-1}(x)$, debemos despejar la variable x de la ecuación $f(x) = y$. Una posible forma de hacer esto, es expresando a f en su forma canónica. En este caso, dado que el vértice es igual a $(-3, 4)$, se tiene que $f(x) = -(x+3)^2 + 4$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} -(x+3)^2 + 4 &= y \\ -(x+3)^2 &= y - 4 \\ (x+3)^2 &= -y + 4 \\ \sqrt{(x+3)^2} &= \sqrt{-y+4} \\ |x+3| &= \sqrt{-y+4} \end{aligned}$$

Observar que al ser $y = f(x)$ e $Im(f) = [4, -\infty)$, $4 \geq y$ y luego $-y + 4 \geq 0$. Por lo tanto, tiene sentido calcular su raíz cuadrada. Como tenemos un módulo, vamos a separar en dos casos:
Caso 1 Si $x + 3 \geq 0$, $|x + 3| = x + 3$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |x+3| &= \sqrt{-y+4} \\ x+3 &= \sqrt{-y+4} \\ x &= \sqrt{-y+4} - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si trabajamos sobre los valores de x para los cuales $x + 3 \geq 0$, es decir, $x \geq -3$, la inversa de f será igual a

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-x+4} - 3.$$

Caso 2 Si $x + 3 \leq 0$, $|x + 3| = -(x + 3)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |x+3| &= \sqrt{-y+4} \\ -(x+3) &= \sqrt{-y+4} \\ x+3 &= -\sqrt{-y+4} \\ x &= -\sqrt{-y+4} - 3. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si trabajamos sobre los valores de x para los cuales $x + 3 \leq 0$, es decir, $x \leq -3$, la inversa de f será igual a

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{-x+4} - 3.$$

Recordemos que a nosotros nos interesaba el caso $f : [-3, +\infty) \to (-\infty, 4]$, es decir, el caso 1. Por lo tanto, $f^{-1} : (-\infty, 4] \to [-3, +\infty)$ con

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-x+4} - 3,$$

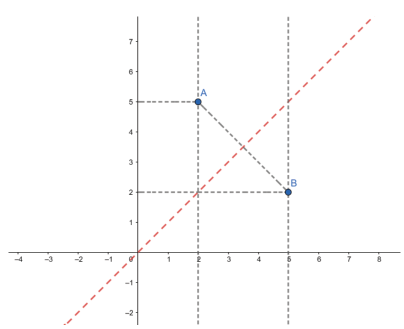
es la expresión de la función inversa buscada.

Ítem (1) Una posible forma de pensar el gráfico de una función inversa es la siguiente. Supongamos que tenemos una función inversible $f(x)$ con inversa f^{-1}. De esta forma,

$$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x.$$

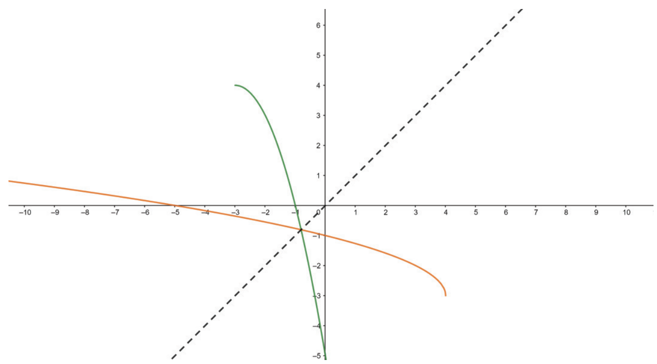
Por lo tanto, el punto $(x, f(x))$ pertenece al gráfico de f si, y sólo si, el punto $(f(x), x)$ pertenece al gráfico de f^{-1}.

En el siguiente gráfico vemos esta observación sobre el punto $(2, 5)$



De esta forma, podemos pensar que el punto $(5, 2)$ se obtiene al poner un espejo sobre la recta $y = x$ y ver el reflejo del punto $(2, 5)$.

Por lo tanto, en nuestro caso, el gráfico de la función $f^{-1}(x) = \sqrt{-x+4} - 3$, será aproximadamente



Por supuesto que en este caso, como conocemos el gráfico aproximado de la función $\sqrt{x}$, podriamos haber hecho el gráfico aproximado de $f^{-1}(x)$ a base de traslaciones y multiplicaciones por escalares.

Ítem (2) Si no nos preocupamos por un momento por los dominios e imagenes y que las composiciones esten bien definidas, dos posibles opciones son

- $g(x) = -x+4$, $h(x) = \sqrt{x}$, $p(x) = x-3$. Luego,
$$(p \circ h \circ g)(x) = p\left(h\left(g(x)\right)\right) = p\left(h(-x+4)\right) = p\left(\sqrt{-x+4}\right) = \sqrt{-x+4} - 3.$$
- $g(x) = -x$, $h(x) = x+4$, $p(x) = \sqrt{x} - 3$. Entonces
$$(p \circ h \circ g)(x) = p\left(h\left(g(x)\right)\right) = p\left(h(-x)\right) = p\left(-x+4\right) = \sqrt{-x+4} - 3.$$

Consideremos ahora los dominios y co-dominios. En el primer caso, basta tomar $g : (-\infty, 4] \to \mathbb{R}$, $h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ y $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De esta forma,
$$g\left((-\infty, 4]\right) \subseteq [0, +\infty) = Dom(h).$$
Mientras que en el segundo caso se puede tomar $g : (-\infty, 4] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y así,
$$h\left(g\left((-\infty, 4]\right)\right) \subseteq h\left([-4, +\infty)\right) \subset [0, +\infty) = Dom(p).$$

Ejercicio 1.3. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función partida dada por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2x-4} + 3 & \text{si } x > -1 \\ \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq -1 \end{cases} \tag{1.1}$$

(1) Hallar el mayor dominio A, sobre el cual podemos definir a f, cumpliendo las condiciones dadas por la expresión (1.1).
(2) Hallar, analiticamente, la intersección con los ejes coordenados.
(3) Realizar un gráfico aproximado.
(4) Hallar gráficamente su imagen. Determinar si -12 es un punto de la imagen de f. En caso afirmatico hallar el conjunto $\{x \in A : f(x) = -12\}$.
(5) Determinar si f es inyectiva.

Solución
(1) Debemos determinar el mayor conjunto de números reales, sobre el cual tiene sentido evaluar a la función f. Dado que f es una función partida, estudiaremos cada una de sus ramas. Para los números reales x que cumplan $x > -1$, en caso de estar sobre el dominio de f, la expresión a usar será

$$\frac{-1}{2x-4} + 3.$$

Esta expresión tiene sentido evaluarla sobre cualquier número real en el cual el denominador no sea nulo, es decir,

$$2x - 4 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 2.$$

Por lo tanto, podremos utilizar esta expresión para todos los $x > -1$ que además cumplan $x \neq 2$.

Por otro lado, la expresión utilizada sobre los números reales x que satisfacen $x \leq -1$, es igual a la expresión cuadrática

$$-x^2 - 2x + 3.$$

Dicha expresión la podemos evaluar para cualquier número real, en particular, para todos los $x \leq -1$.

Concluimos de esta forma, que el mayor dominio de la función f será el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ y obtenemos de esta forma que la expresión de f será

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2x-4} + 3 & \text{si } x > -1 \wedge x \neq 2 \\ \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

(2) Empecemos hallando la intersección con el eje y. Como 0 es un elemento del dominio, podemos calcular $f(0)$. Al ser f una función partida, debemos reconocer cual de las ramas utilizar, es decir, hallar sobre cual conjunto de definición de cada rama se encuentra $x = 0$. Como $0 > -1$ y $0 \neq 2$, utilizaremos la primer rama. Luego,

$$f(0) = \frac{-1}{2.0 - 4} + 3 = \frac{-1}{-4} + 3 = \frac{13}{4}.$$

Busquemos ahora la intersección con el eje x. Para ello, debemos hallar todos los números reales x que se encuentran en el dominio de f y satisfagan la igualda

$$f(x) = 0.$$

Al ser f una función partida, debemos estudiar cada rama por separado. Primero, estudiamos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2x-4} + 3 = 0 &\Leftrightarrow \frac{-1}{2x-4} = -3 \\ &\Leftrightarrow -1 = -3(2x-4) \\ &\Leftrightarrow -1 = -6x + 12 \\ &\Leftrightarrow -13 = -6x \\ &\Leftrightarrow \frac{13}{6} = x. \end{aligned}$$

Para poder asegurar que $x = 13/6$ es efectivamente una solución a la ecuación $f(x) = 0$, debemos verificar que el punto encontrado se encuentra dentro del conjunto de puntos a los cuales corresponde la primer rama de la ecuación. Como esto es verdadero en este caso, ya que $13/6 \neq 2$ y $-1 < 13/6$, podemos concluir que $x = 13/6$ es un punto de intersección con el eje x.

Por otro lado, estudiamos la otra rama de la función f. Para eso, consideramos la ecuación

$$-x^2 - 2x + 3 = 0.$$

Como esta es una expresión cuadrática, aplicando la fórmula resolvente obtenemos que las soluciones a dicha ecuación son los puntos

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)3}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = -3\ ,\ 1.$$

Recordando que estamos trabajando con la segunda rama de f, concluimos que $x = -3$ es un punto de intersección con el eje x ya que $-3 \leq -1$, mientras que $x = 1$ no lo es ya que $1 \leq -1$ es falso.

Resumiendo, el punto de intersección con el eje y tiene por coordenadas

$$\left(0, \frac{13}{4}\right),$$

y los puntos de intersección con el eje x son

$$\left(\frac{13}{6}, 0\right) \ \text{ y } \ (-3, 0).$$

(3) Para realizar el gráfico aproximado de una función partida, debemos graficar cada una de sus ramas y quedarnos con la parte del gráfico de cada rama que le corresponde a los puntos donde esta definida. En nuestro caso, la primer rama esta dada por la función

$$g(x) = \frac{-1}{2x - 4} + 3.$$

Esta, es una función homográfica y para poder realizar un gráfico aproximado debemos hallar su asíntota vertical, asíntota horizonta, intersección con los ejes coordenados y de ser necesario, algunos puntos extras para realizar un mejor gráfico. Para ello, escribamos a esta función homográfica como el cociente de dos funciones lineales.

$$\frac{-1}{2x - 4} + 3 = \frac{-1}{2x - 4} + \frac{3.(2x - 4)}{2x - 4} = \frac{-1 + 6x - 12}{2x - 4} = \frac{6x - 13}{2x - 4}.$$

Observemos que el dominio de esta función homográfica es el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Una vez expresada la función homográfica como un cociente de funciones lineales, por lo visto en clase, la asíntota horizontal se calcula como el cociente de las pendientes de ambas rectas, es decir,

$$\frac{6}{2} = 3$$

será la asintota horizontal. Mientras que la asintota vertical será igual al punto donde se anula el denominador, en este caso,

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 4/2 = 2.$$

Por lo tanto, la función homográfica

$$\frac{-1}{2x - 4} + 3 = \frac{6x - 13}{2x - 4},$$

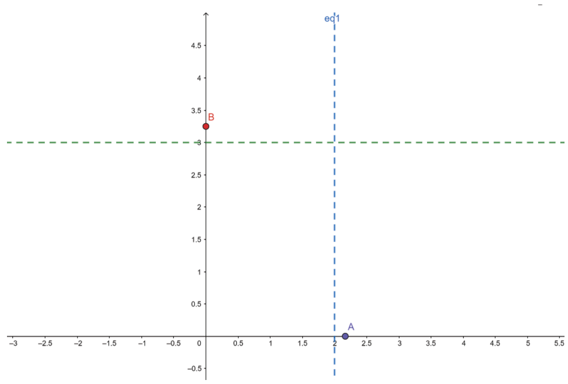
posee a la recta $y = 3$ como asíntota horizontal y a la recta $x = 2$ como asíntota vertical. Su intersección con el eje y se encuentra reemplazando la variable x por 0, es decir,

$$\frac{6.0 - 13}{2.0 - 4} = \frac{-13}{-4} = \frac{13}{4} = 3,25.$$

Mientras que su intersección con el eje x se halla resolviendo la ecuación

$$\frac{6x-13}{2x-4} = 0 \Leftrightarrow 6x - 13 = 0.(2x-4) \Leftrightarrow 6x - 13 = 0 \Leftrightarrow 6x = 13 \Leftrightarrow x = 13/6.$$

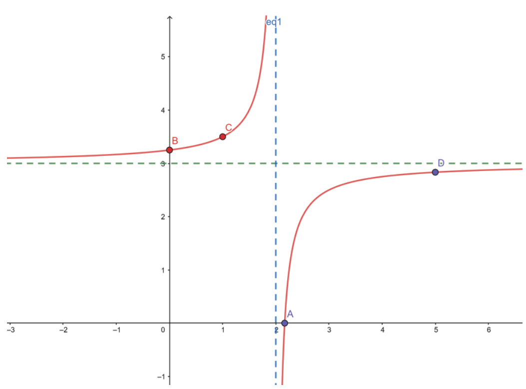
Como $13/6$ es un punto del dominio de esta función homográfica ya que $13/6 \neq 2$. Por lo tanto, lo que tenemos hasta el momento es la siguiente información



Con esta información ya podemos dar un gráfico aproximado pero evaluaremos en $x = 1$ y $x = 5$ para tener algunos puntos más.

$$g(1) = \frac{6.1-13}{2.1-4} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2} \;\; y \;\; g(5) = \frac{6.5-13}{2.5-4} = \frac{17}{6}$$

Por lo tanto, el gráfico aproximado de la función homográfica $g(x)$ es igual a



Observar que muchas de las cuentas realizadas anteriormente, raíces, ordenada y asíntota vertical, fueron hechas con anterioridad al estudiar raíces, ordenada y dominio de la función $f(x)$ respectivamente.

Consideremos ahora la segunda rama de nuestra función $f(x)$. Llamaremos a esta función $h(x)$, es decir,

$$h(x) = -x^2 - 2x + 3.$$

Esta es una función cuadrática con coeficiente principal negativo. Para realizar un gráfico aproximado debemos buscar intersección con los ejes coordenados y vértice. Las raíces son las soluciones de la ecuación

$$h(x) = -x^2 - 2x + 3 = 0,$$

la cual fue realizada anterioremente y obtuvimos

$$x = -3, 1$$

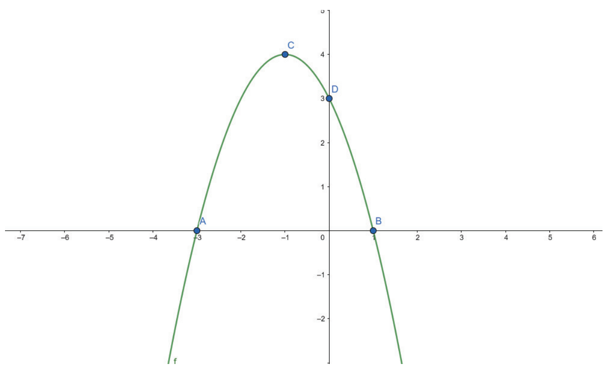
como soluciones. La intersección con el eje y será

$$h(0) = 3$$

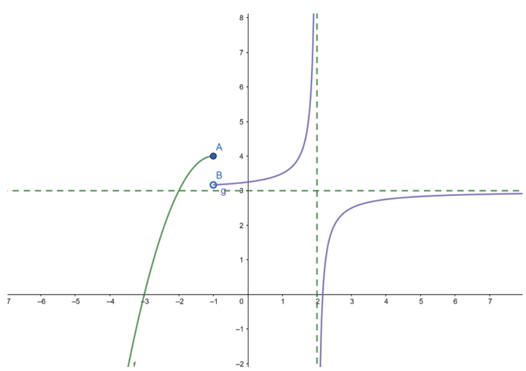
mientras que el vértice será

$$x_v = \frac{-(-2)}{2.(-1)} = -1 \text{ e } y_v = h(x_v) = h(-1) = 4$$

Por lo tanto, el siguiente es un gŕafico aproximado de la función $h(x)$



Para obtener el gráfico definitivo de nuestra función original $f(x)$, debemos quedarnos con la parte del gráfico de las ramas $g(x)$ y $h(x)$ sobre los puntos que estan definidos, es decir,



(4) Apartir del conocimiento de los gráficos aproximados de las funciones cuadráticas y homográficas, y el gráfico aproximado realizado en el item anterior, podemos concluir que la imagen de la función es igual al conjunto de todos los números reales. En particular, sabemos que 3 pertenece a la imagen de $f(x)$. Para hallar los valores de x que resuelven la ecuación

$$f(x) = 3,$$

debemos trabajar con cada rama dicha función. Resolvemos primero la ecuación

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{6x-13}{2x-4} = -12 &\Leftrightarrow 6x - 13 = -12(2x-4) \\ &\Leftrightarrow 6x - 13 = -24x + 48 \\ &\Leftrightarrow 30x = 61 \\ &\Leftrightarrow x = 61/30. \end{aligned}$$

Como $-1 < 61/30$ y $61/30 \neq 2$, este punto está sobre el conjunto de números reales donde aplicamos la primer rama $g(x)$, por lo tanto, es una posible solución. Si ahora utilizamos la segunda rama, debemos resolver la ecuación

$$h(x) = -x^2 - 2x + 3 = -12 = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 15 = 0 \Leftrightarrow -(x+5)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -5 \text{ o } x = 3$$

Dado que $-5 \leq -1$ y $3 \nleq -1$, la única solución posible que obtenemos utilizando esta rama será $x = -5$. Por lo tanto, las soluciones a la ecuación $f(x) = -12$ son $x = 61/30$ y $x = -5$.

(5) A partir del gráfico de f podemos concluír que esta función no es inyectiva. Para probarlo adecuadamente, debemos hallar dos puntos distintos del dominio a y b para los cuales $f(a) = f(b)$. Por ejemplo, podemos considerar las dos raíces halladas. $-3 \neq 13/6$ y $f(-3) = 0 = f(13/6)$.