1. IRM - Grupo 1 - Clase de Problemas 1 y 2 - Clase 2 - 08/03/21

La cantidad de unidades de un producto que un consumidor esta dispuesto y financieramente en condición de comprar durante un periodo de tiempo, es lo que llamamos cantidad demandada de dicho producto, y lo notamos con la letra q. La demanda de un producto, por partes de un consumidor, está ligada a diversos factores, el precio del producto, los precios de otros productos similares, los ingresos del consumidor y otros factores como podrían ser el clima, la época del año, los gustos del consumidor, entre otros. La función de demanda de un producto, es aquella que relaciona todos los factores antes mencionados con la cantidad demandada del producto. Si denotamos por p al precio del producto en cuestión, se tiene que

$$q = D\left(p, p_1, p_2, \ldots, \text{ingresos, clima, gustos,...}\right).$$

donde p_1 y p_2 representan precios de productos similares.

Por supuesto que cada consumidor da lugar a una función de demanda distinta. La función que se suele estudiar es la demanda del mercado, que se obtiene de sumar las distintas funciones de demanda de diversos demandantes del producto.

La **Ley de demanda** establece que la cantidad demandada de un producto aumenta cuando su precio baja y que la demanda disminuye si su precio aumenta[1], asumiendo que todas las otras cantidades que afectan la demanda permanecen constantes. Por esto, para nosotros una función demanda dependerá solamente del precio unitario p,

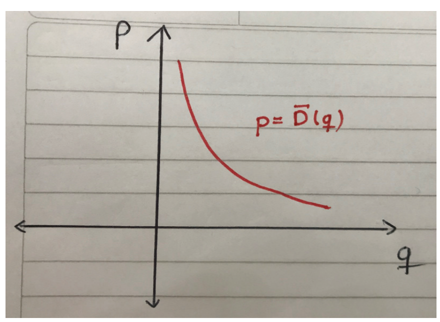
$$D : A \subseteq [0, +\infty) \to [0, \infty).$$

Observar que el dominio de la función demanda está contenido dentro del intervalo $[0, +\infty)$, ya que el precio de un producto es no negativo. La Ley de Demanda establece que el gráfico de la función será decreciente.

Si bien, por lo antes explicado, la función demanda depende del precio, los economistas tradicionalmente expresan el precio de un producto en función de la cantidad demandada. Esto se debe a que se contempla la relación entre la demanda y el precio, desde el punto de vista del vendedor. De esta forma, obtenemos la función demanda inversa

$$\overline{D}(q) = p,$$

y un gráfico usual de tal función se representa en un par de ejes cartesianos con la variable q sobre el eje horizontal y la variable p en el eje vertical



Ejercicio 1.1. Supongamos que a lo largo de un mes, la demanda de kilos de helado en una heladería es de 2000 kilos si el precio del kilo es de \$ 810, mientras que la demanda será de 6000 kilos si el precio es de \$ 510. Asumiendo que la relación entre precio y demanda es lineal, calcular las funciones demanda $q = D(p)$ y demanda inversa $p = \overline{D}(q)$. Hallar el dominio de la función $\overline{D}$.

[1]Existen bienes que no cumplen la ley de demanda, como pueden ser algunos productos de lujo o relacionados al estatus social.

Solución Como estamos asumiendo que la función demanda es lineal, sabemos que su expresión es de la forma

$$q = D(p) = mp + b.$$

Los datos del enunciado se traducen a que los puntos $(810, 2000)$ y $(510, 6000)$ pertenecen al gráfico de la función demanda. Por lo tanto, la pendiente de dicha función lineal estará dada por la expresión

$$m = \frac{2000 - 6000}{810 - 510} = -\frac{4000}{300} = -\frac{40}{3}.$$

Por ejemplo, como la función satisface que $D(810) = 2000$, se tiene que

$$2000 = -\frac{40}{3}.810 + b$$

lo que implica que

$$b = 2000 + \frac{40}{3}810 = 12800.$$

Luego,

$$q = -\frac{40}{3}p + 12800.$$

Podemos hallar la función demanda inversa, despejando la variable p en función de la variable q a partir de la relación dada por la función demanda. Es decir,

$$q = -\frac{40}{3}p + 12800 \Leftrightarrow q - 12800 = -\frac{40}{3}p \Leftrightarrow -\frac{3}{40}(q - 12800) = p \Leftrightarrow -\frac{3}{40}q + 960 = p$$

Luego,

$$\overline{D}(q) = -\frac{3}{40}q + 960.$$

Observemos que otra forma de calcular la función $\overline{D}$ es realizar el mismo procedimiento que se utilizó al hallar la expresión de la función D, teniendo en cuenta que el gráfico de la función $\overline{D}$ pasa por los puntos $(q, p) = (2000, 810)$ y $(6000, 510)$.

Para hallar el dominio de la función $\overline{D}$, demos recordar que el precio de un producto debe ser positivo. Por lo tanto, debemos resolver la inecuación

$$-\frac{3}{40}q + 960 = p > 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}q + 960 => 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}q > -960 \Leftrightarrow q < 12800.$$

Por lo tanto, el dominio será el intervalo $(0, 12800)$.

La cantidad de unidades de un producto o servicio que un productor está dispuesto y en posibilidades de fabricar y suministrar al mercado se conoce como oferta del producto. Esta cantidad depende de varios factores, el precio del producto, el precio de los distintos insumos, la tecnología con la cual se produce, el clima, el precio de otros productos ya sean propios o no, entre otros. Notamos por q a la cantidad del producto que el productor ofrece mientras que p denotará el precio unitario de dicho producto. La función que depende de los factores antes mencionados y nos devuelve la cantidad de a ofertar al mercado se la llama función de oferta y la notamos

$$q = O\left(p, p_1, p_2, \ldots, \text{clima}, \ldots\right).$$

La **Ley de oferta** establece que la cantidad suministrada al mercado de un bien aumenta en la medida que su precio aumenta. La Ley de oferta supone que, a excepción del precio del producto, todas las otras cantidades que afectan la cantidad suministrada permanecen constantes. Es por esto, que la la función oferta

$$O(p) = q$$

resulta creciente. Al igual que antes, tanto el precio p como la cantidad q son no negativas por lo tanto,

$$O : A \subseteq [0, +\infty) \to [0, \infty).$$

Al igual que con la función demanda, se suele expresar el precio p del producto en función de la cantidad a ofertar q. Por esto, la función oferta inversa será de la forma

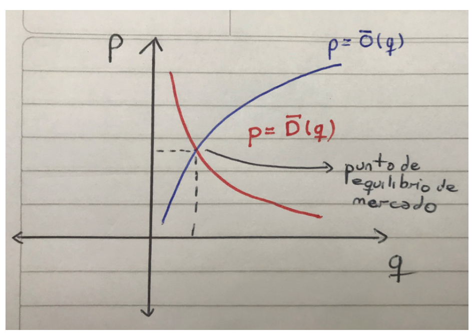
$$\overline{O}(q) = p.$$

Estudiar por separado las curvas de demanda y oferta, no nos dirá hasta que punto pueden llegar los precios o en que medida son compatibles los planes de los consumidores y productores. Se dice que se alcanza un **equilibrio de mercado** cuando la demanda y oferta son iguales, es decir, a un determinado precio unitario todos compran y ofrecen cuanto quieren. El precio y cantidad de equilibrio, son aquellos para los que las intenciones de los compradores y los vendedores coinciden.

El punto de equilibrio se puede hallar como el punto de intersección entre la curva de oferta inversa $p = \overline{O}(q)$ y demanda inversa $p = \overline{D}(q)$. Es decir, cuando

$$\overline{O}(q) = \overline{D}(q).$$

O similarmente, podemos hallarlo igualando la funciones $q = O(p)$ y $q = D(p)$.



Ejercicio 1.2. Una empresa dedicada a la construcción esta dispuesta a comprar 50 taladros al mes si el precio es $ 200 y 30 taladros si el precio es $300. El fabricante está dispuesto a ofertar 20 a un precio de $210 y 30 a un precio de $230. Asumiendo que las funciones oferta y demanda son lineales, hallar el precio de equilibrio.

Solución Por un lado, el gráfico de la función demanda inversa $p = \overline{D}(q)$, pasa por los puntos $(50, 200)$ y $(30, 300)$. Dado que estamos asumiendo que la relación es lineal $p = mq + b$, se tiene que

$$m = \frac{300 - 200}{30 - 50} = -5.$$

Dado que $200 = (-5).50 + b$, se tiene que $b = 200 + 250 = 450$. Por lo tanto,

$$\overline{D}(q) = -5q + 450$$

es la función demanda inversa.

Por otro lado, el gráfico de la función oferta inversa, pasa por los puntos $(20, 210)$ y $(30, 230)$. Al estar asumiendo que $\overline{O}(q) = \tilde{m}q + \tilde{b}$, se obtiene que

$$\tilde{m} = \frac{230 - 210}{30 - 20} = 2.$$

Utilizando que $230 = 2.30 + \tilde{b}$, se concluye que $\tilde{b} = 230 - 60 = 170$. Por lo tanto,

$$\overline{O}(q) = 2q + 170$$

es la función oferta inversa.

Para hallar el punto de equilibrio, resolvemos la ecuación $\overline{D}(q) = \overline{O}(q)$.

$$-5q + 450 = 2q + 170 \Leftrightarrow 450 - 170 = 2q + 5q \Leftrightarrow 280 = 7q \Leftrightarrow q = 40.$$

Concluimos que el precio de equilibrio es $p = \overline{D}(40) = \overline{O}(40) = 250$.

Recordemos que la **función costo** de un producto, está compuesta de dos partes. Costos fijos, C_f, como pueden ser el alquiler, los sueldos de los empleados, impuestos, servicios, etc, y una parte variable que depende de la cantidad de unidades a producir $C_v(q)$. La función costo está dada por

$$C(q) = C_v(q) + C_f,$$

con q representando la cantidad producida.

La **función de ingreso** representa la retribución total que genera la venta de las unidades producidas al precio vigente. Se define como

$$I(q) = p.q,$$

donde p es el precio unitario y q la cantidad de unidades vendidas del bien.

Podemos definir a la **función de beneficio**(o función utilidad) como la diferencia entre los ingresos y los costos que surgen de producir y vender q unidades, es decir,

$$B(q) = I(q) - C(q),$$

Notar que el beneficio puede llegar a ser negativo. Si los ingresos son mayores a los costos la firma tiene ganancias, es decir, los beneficios son positivos. En el caso contrario, cuando los costos superan a los ingresos, diremos que las firmas generan pérdidas o beneficios negativos.

Ejercicio 1.3. Supongamos que una empresa vende un producto a \$ 10 por unidad. Si la empresa tiene un gasto fijo mensual de \$ 1200, y el costo de producir cada unidad es de \$ 2,50. Hallar la función de utilidad $U(q)$ en función de la cantidad de unidades producidas q. ¿Cuantas unidades debe vender la empresa por mes para tener ganancias? ¿Y para tener ganancias de al menos \$ 24000 mensuales?

Solucion La función costo de producir q unidades está dada por

$$C(q) = 2,5.q + 1200$$

mientras que la función ingresos será igual a

$$I(q) = 10.q.$$

Por lo tanto, la función utilidad es igual a

$$U(q) = I(q) - C(q) = 10q - (2,5.q + 1200) = 7,5q - 1200.$$

Para que la empresa tenga ganancias, las utilidades de la empresa deben ser positivas, es decir,

$$U(q) > 0.$$

Por lo tanto,

$$U(q) > 0 \Leftrightarrow 7,5q - 1200 > 0 \Leftrightarrow 7,5q > 1200 \Leftrightarrow q > 160.$$

Luego, la empresa debe vender al menos 161 unidades para tener ganancias.

Para saber cuántas unidades debe vender la empresa para tener ganancias de al menos \$ 24000 mensuales, debemos resolver la inecuación $U(q) \geq 24000$.

$$U(q) \geq 24000 \Leftrightarrow 7,5q - 1200 \geq 24000 \Leftrightarrow 7,5q \geq 22800 \Leftrightarrow q \geq 3040.$$