HOJA Nº 1

FECHA

IRM - clase 5

__ejercicio__: Sea $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
Escribir a f en forma factorizada.
Hallar $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$. Hallar $Im(f)$.

__Sol__: vamos a necesitar $C_0(f)$ (raíces) para armar la forma factorizada.

$$2x^2 + 4x - 6 = 0$$
$$2 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

es otra función cuadrática, pero tiene las mismas raíces que f

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} r_1 = -6/2 = -3 \\ r_2 = 2/2 = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2 \cdot (x - (-3))(x - 1)$$
$f(x) = 2(x+3)(x-1)$ forma factorizada.

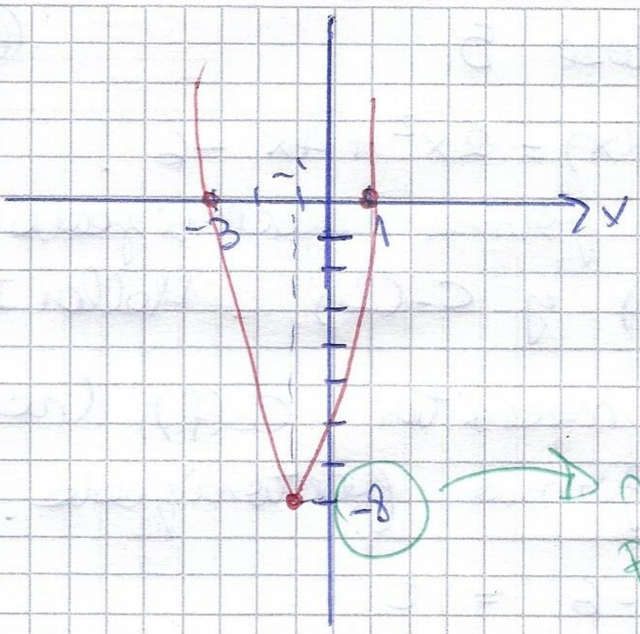
$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\boxed{x_v = -1}$$

$$y_v = f(x_v) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6$$
$$= 2 - 4 - 6 = -8$$

$$\boxed{y_v = -8} \qquad \boxed{V = (-1, -8)}$$

NOTA



necesitamos y_v para saber $Im(f)$

$C_+(f) = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

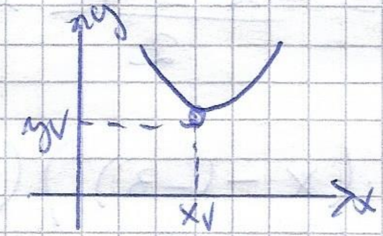
$C_-(f) = (-3, 1)$.

$Im(f) = [-8, +\infty)$.

IMAGEN DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

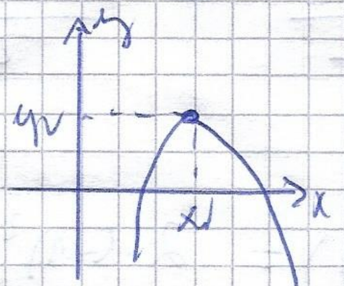
Si $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$.

- Si $a > 0$.



$Im(f) = [y_v, +\infty)$

- Si $a < 0$



$Im(f) = (-\infty, y_v]$

NOTA

ejercicios: Hallar vértice, $Im(f)$, $Co(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$:

1) $f(x) = -2\cdot(x-3)^2 - 1$.

$V = (-3, -1)$.

como $a = -2 < 0 \Rightarrow \frown$ "triste".

$\Rightarrow Im(f) = (-\infty, y_v]$

$= (-\infty, -1]$.

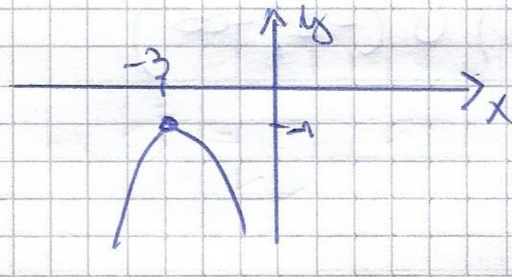
$Co(f)$: $-2\cdot(x-3)^2 - 1 = 0$

$-2(x-3)^2 = 1$

$(x-3)^2 = \frac{1}{-2}$

$(x-3)^2 = -\frac{1}{2}$ ABSURDO

$\Rightarrow Co(f) = \emptyset$.



$C_+(f) = \emptyset$ y $C_-(f) = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = -2(x+3)^2 + 2$.

ojo! $f(x) = -2\cdot(x-(-3))^2 + 2$.

$\Rightarrow V = (-3, 2)$

como $a = -2 < 0 \Rightarrow \frown$

$\Rightarrow Im(f) = (-\infty, 2]$.

$C_0(f)$: $-2(x+3)^2 + 2 = 0$

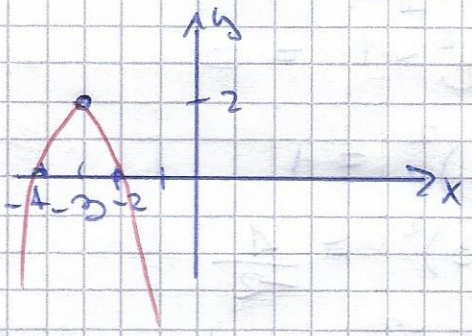
$$-2(x+3)^2 = -2$$

$$(x+3)^2 = \frac{-2}{-2}$$

$$(x+3)^2 = 1$$

$x+3 = 1$ $\qquad$ $x+3 = -1$

$\boxed{x = -2}$ $\qquad$ $\boxed{x = -4}$



$C_0(f) = \{-2, -4\}$

$C_+(f) = (-4, -2)$

$C_-(f) = (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$

Ejercicios:

① Hallar la función cuadrática f. cuyo gráfico pasa por los puntos: (1,0), (0,-1) y (2,2).

Resolución:

En este caso, vamos a buscar la forma normal de la función que cumple lo pedido, o sea, buscamos una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + b.x + c$$, para valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$

Como $f(1) = 0$ entonces

$$f(1) = a.1^2 + b.1 + c = 0$$
$$a + b + c = 0.$$

Como $f(0) = -1$ entonces.

$$f(0) = a.0^2 + b.0 + c = -1$$
$$c = -1$$

Como $f(2) = 2$ entonces

$$f(2) = a.2^2 + b.2 + c = 2.$$
$$4a + 2b + c = 2.$$

NOTA

Luego, tenemos que buscar $a, b, c \in \mathbb{R}$ que cumplan: (las tres condiciones juntas)

$$\begin{cases} a+b+c=0 & (1) \\ \boxed{c=-1} & (2) \\ 4a+2b+c=2 & (3) \end{cases}$$

Reemplazamos (2) en (1) y (3):

$$\begin{cases} a+b-1=0 \ (1) \iff \boxed{a=1-b}. \ (1) \\ 4a+2b-1=2 \ (3) \end{cases}$$

Reemplazamos (1) en (3):

$$4(1-b)+2b-1=2$$

$$4\underbrace{-4b}\underbrace{+2b}-1=2.$$

$$-2b=2+1-4$$

$$-2b=-1$$

$$b=\frac{-1}{-2} \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{2}}$$

Volvemos a (1) y reemplazamos $b=\frac{1}{2}$:

$$a=1-\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

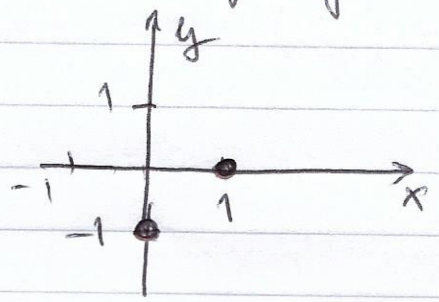
<u>Respuesta</u>: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1.$

NOTA

② Hallar la función cuadrática f cuyo gráfico corta al eje x en 1, al eje y en -1 y que cumple $f(2) = 2$.

Resolución:

Como f corta al eje x en 1 entonces $f(1) = 0$.
Como f corta al eje y en -1 entonces $f(0) = -1$



Luego $(1,0)$ y $(0,-1)$ pertenecen al gráfico de f.

Como $f(2) = 2$ entonces $(2,2)$ pertenece al gráfico de f.

Luego, el gráfico de f pasa por los puntos $(1,0)$, $(0,-1)$ y $(2,2)$.

y se sigue de la misma forma que el ejercicio ①.

③ Hallar la función cuadrática f que satisface: $x_v = 1$, $f(1) = 1$ y $f(0) = 2$.

Resolución: En este caso vamos a buscar la forma canónica de la función (pues es más fácil al tener x_v como dato)

NOTA

$$f(x) = a\cdot(x - x_v)^2 + y_v.$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-1)^2 + y_v.$$

Como $f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = a\cdot\underbrace{(1-1)^2}_{0} + y_v = 1$

$$a\cdot 0 + y_v = 1$$

$$\boxed{y_v = 1}$$

Luego $f(x) = a\cdot(x-1)^2 + 1$

Como $f(0) = 2 \Rightarrow f(0) = a\cdot(0-1)^2 + 1 = 2$

$$a\cdot(-1)^2 + 1 = 2$$

$$a\cdot 1 + 1 = 2$$

$$a + 1 = 2$$

$$a = 2 - 1$$

$$\boxed{a = 1}$$

<u>Respuesta</u>: $f(x) = (x-1)^2 + 1$

(4) Hallar una función cuadrática f que cumpla $C_0(f) = \{2, -3\}$ y $f(0) = 12$.

<u>Resolución</u>: En este caso vamos a buscar la forma factorizada de f ya que sabemos cuáles son las raíces.

Como 2 y -3 son raíces de f, entonces

$$f(x) = a\cdot(x-2)\cdot(x-(-3))$$

$$\Rightarrow f(x) = a\cdot(x-2)\cdot(x+3).$$

Como $f(0) = 12$ entonces $f(0) = a\cdot(0-2)(0+3) = 12$

$$a\cdot(-2)\cdot(3) = 12$$

$$a\cdot(-6) = 12$$

NOTA

IRM - clase 5.

$$-6a = 12$$

$$a = \frac{12}{-6}$$

$$\boxed{a = -2}$$

<u>Respuesta</u> :- $f(x) = -2 \cdot (x-2)(x+3)$.