1. IRM - Grupo 1 - Clase de Problemas 1 y 2 - 03/05/21

Ejercicio 1.1. Hallar las soluciones de la ecuación $7^{x+4} = 7^{-2x+3}$.

Solución Por inyectividad de la función $f(x) = 7^x$, se tiene que resolver la ecuación $7^{x+4} = 7^{-2x+3}$, es equivalente a resolver la ecuación $x + 4 = -2x + 3$. Luego,

$$x + 4 = -2x + 3 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -1/3.$$

Ejercicio 1.2. Hallas las soluciones de la ecuación $4^{x+1} = 8^{x-2}$.

Solución Para resolver esta ecuación, expresamos ambos lados de la misma como potencias de de una misma base. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 4^{x+1} &= 8^{x-2} \\ (2^2)^{x+1} &= (2^3)^{x-2} \\ 2^{2(x+1)} &= 2^{3(x-2)} \end{aligned}$$

Por inyectividad de la función $f(x) = 2^x$, esta ecuación es equivalente a resolver

$$2(x + 1) = 3(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 2 = 3x - 6 \Leftrightarrow 8 = x$$

Ejercicio 1.3. Hallar las soluciones de la ecuación $3^{x+2} - 23^{x+1} + 3^{x-1} = 30$.

Solución Utilizando las propiedades de la potenciación, podemos escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} 3^{x+2} - 23^{x+1} + 3^{x-1} &= 30 \\ 3^x 3^2 - 23^x 3^1 + 3^x 3^{-1} &= 30 \end{aligned}$$

Sacando factor común 3^x, se tiene que

$$\begin{aligned} 3^x 3^2 - 23^x 3^1 + 3^x 3^{-1} &= 30 \\ 3^x(3^2 - 23^1 + 3^{-1}) &= 30 \\ 3^x(9 - 6 + \frac{1}{3}) &= 30 \\ 3^x \frac{10}{3} &= 30 \\ 3^x &= 9 \\ 3^x &= 3^2. \end{aligned}$$

Lo que implica que $x = 2$, por la inyectividad de la función $f(x) = 3^x$.

Ejercicio 1.4. Hallar, analíticamente, los puntos del plano que son intersección de los gráfi
cos de las funciones $f(x) = 3.4^x$ y $g(x) = 24 - 6.2^x$

Solución Debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ o equivalentemente

$$3.4^x = 24 - 6.2^x \Leftrightarrow 3.4^x + 6.2^x - 24 = 0.$$

Lo que vamos a hacer es escribir las potencias presentes en esta ecuación, en términos de una misma base, es decir,

$$\begin{aligned} 3.4^x + 6.2^x - 24 &= 0 \\ 3.(2^2)^x + 6.2^x - 24 &= 0 \\ 3.2^{2x} + 6.2^x - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Utilizando que podemos escribir 2^{2x} como $(2^x)^2$, reescribimos la ecuación anterior como $3.(2^x)^2 + 6.2^x - 24 = 0$. Utilizando el cambio de variables $t = 2^x$, el problema se vuelve equivalente a resolver la ecuación $3t^2 + 6t - 24 = 0$, la cual posee como soluciones a $t = -4$ y $t = 2$. Recordando el cambio de variables planteado, $2^x = t$, debemos resolver las ecuaciones $2^x = -4$ y $2^x = 2$. La primera no posee soluciones pues 2^x es siempre positivo, mientras que la segunda posee a $x = 1$ como única soluciones. Concluimos que $x = 1$ es el único punto de intersección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio 1.5. Hallar analíticamente, los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $f(x) = 2 + 3^x$ y $g(x) = 3^{1-x}$

Solución Debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ o equivalentemente

$$2 + 3^x = 3^{1-x} \Leftrightarrow 2 + 3^x = 3.3^{-x}.$$

Multiplicando por 3^x a ambos lados de esta ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned} 3^x(2 + 3^x) &= 3^x(3.3^{-x}) \\ 23^x + 3^x3^x &= 33^x3^{-x} \\ 23^x + 3^{2x} &= 33^{x-x} \\ 23^x + 3^{2x} &= 3 \\ 23^x + 3^{2x} - 3 &= 0 \\ 3^{2x} + 23^x - 3 &= 0 \\ (3^x)^2 + 23^x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Llamando por un momento t a la cantidad 3^x, transformamos la ecuación anterior en la ecuación de incógnita t

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

cuyas soluciones son $t = -3$ y $t = 1$. Recordando que $t = 3^x$, obtenemos que las soluciones a nuestra ecuación, son las soluciones de las ecuaciones $3^x = -3$ y $3^x = 1$. Por un lado, $3^x = -3$ no posee soluciones ya que 3^x es siempre positivo. Por otro lado, por inyectividad de la función $h(x) = 3^x$, se tiene que

$$3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Concluimos que $x = 0$ es el única punto de intersección de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Ejercicio 1.6. Hallar analíticamente, los puntos de intersección de los gráficos de las funciones $f(x) = x^3e^x$ y $g(x) = -x^2e^x + 2xe^x$

Solución Debemos resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ o equivalentemente

$$x^3e^x = -x^2e^x + 2xe^x \Leftrightarrow x^3e^x + x^2e^x - 2xe^x = 0 \Leftrightarrow (x^3 + x^2 - 2x)e^x = 0.$$

Dado que un producto es nulo si y solo si alguno de sus factores es nulo, esta ecuación es equivalente a resolver las ecuaciones $x^3 + x^2 - 2x = 0$ o $e^x = 0$. Dado que e^x nunca se anula, resolvemos la ecuación $x^3 + x^2 - 2x = 0$.

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 1, -2.$$

Ejercicio 1.7. Hallar el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual la funcion $f(x) = 23^{a|x-1|+2} - 162$ posee una raíz en $x = -1$. Calcular $C_+(f)$.¿Es f inyectiva?

Solución Si $x = -1$ es raíz de $f(x)$, se debe cumplir la igualdad

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0 \\ 23^{a|-1-1|+2} - 162 &= 0 \\ 23^{a|-2|+2} &= 162 \\ 3^{2a+2} &= 81 \\ 3^{2a+2} &= 3^4 \end{aligned}$$

Por inyectividad de la función $g(x) = 3^x$, concluimos que

$$2a + 2 = 4 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1.$$

Por lo tanto, $f(x) = 23^{|x-1|+2} - 162$.

Para calcular el conjunto de positividad, debemos resolver la inecuación

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ 23^{|x-1|+2} - 162 &\geq 0 \\ 23^{|x-1|+2} &\geq 162 \\ 3^{|x-1|+2} &\geq 81 \\ 3^{|x-1|+2} &\geq 3^4 \end{aligned}$$

Dado que $g(x) = 3^x$ es una función creciente (recordar el gráfico), esto es equivalente a pedir

$$|x-1|+2 \geq 4 \Leftrightarrow |x-1| \geq 2$$

Las soluciones de esta ecuación son los puntos de la recta numérica a distancia mayor o igual a 2 de $x = 1$, es decir $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

Estudiemos la inyectividad de $f(x)$. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ 23^{|x_1-1|+2} - 162 &= 23^{|x_2-1|+2} - 162 \\ 23^{|x_1-1|+2} &= 23^{|x_2-1|+2} \\ 3^{|x_1-1|+2} &= 3^{|x_2-1|+2} \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\begin{aligned} |x_1-1|+2 &= |x_2-1|+2 \\ |x_1-1| &= |x_2-1| \end{aligned}$$

Por ejemplo, tomando $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$, obtenemos que la función no es inyectiva ya que $0 \neq 2$ y $|0-1| = |2-1|$, lo que implica que $f(0) = f(2)$.