Práctica 3: Funciones, dominio e imagen. Composición. Función Inversa.

1. Para cada una de las siguientes funciones homográficas, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 1) hallar el dominio, 2) hallar sus asíntotas (vertical y horizontal), 3) hallar su imagen, 4) hallar, analíticamente, la intersección con los ejes coordenados, 5) realizar un gráfico aproximado.
   (a) $f(x) = 1/x$
   (b) $f(x) = 3 - \frac{2}{x-4}$
   (c) $f(x) = -3 + \frac{1}{2x+4}$
   (d) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$
   (e) $f(x) = \frac{-3x+2}{2x+1}$

2. La función de demanda inversa de un producto está dada por $p = \bar{D}(q) = \frac{a}{q}$, y la función de oferta inversa por $p = \bar{O}(q) = 3q - 60$ (p indica el precio y q la cantidad de unidades). Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que el precio de equilibrio es \$15.

3. Para cada una de las siguientes funciones partidas $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hallar el dominio y realizar un gráfico aproximado. Hallar analíticamente la intersección con los ejes coordenados y hallar gráficamente su imagen.
   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 2 \\ x - \frac{3}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{si } x \geqslant -1 \\ 4 - x^2 & \text{si } x < -1 \end{cases}$
   (d) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{-x+1} & \text{si } x < 3 \\ |2x-4| - 6 & \text{si } 3 \leqslant x \end{cases}$

4. Escribir las siguientes funciones como funciones partidas y realizar un gráfico aproximado:
   (a) $f(x) = |3x - 4|$
   (b) $f(x) = |-5x + 2|$
   (c) $f(x) = |3x - 4| + 2x - 1$

5. Resolver las siguientes inecuaciones:
   (a) $|x - 3| \leq 5$
   (b) $|2 - x| < 2$
   (c) $|2x + 1| \geq 2$
   (d) $|3x - 2| \leq 3x - 4$
   (e) $\dfrac{3}{|5 - 2x|} < 2$
   (f) $\dfrac{2}{|2x + 3|} \geq 5$

6. Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ h$, $h \circ f$, $g \circ h$ y $h \circ g$, en cada uno de los siguientes casos:
   (a) $f(x) = x + 8, \qquad g(x) = x^2, \qquad h(x) = x - 8.$

(b) $f(x) = |x - 1|$, $\quad g(x) = x^2$, $\quad h(x) = x + 2$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |2x^2 - 3| + 1$. Describir la función f como composición de
   (a) dos funciones de dos maneras distintas,
   (b) tres funciones.

8. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = |x|$, $g(x) = x - 2$ y $h(x) = 3x$.
   En cada uno de los siguientes casos describir la función $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como composición de f y/o g y/o h.
   (a) $r(x) = |x - 2|$
   (b) $r(x) = |x| - 2$
   (c) $r(x) = |3x - 2|$

9. Analizar la inyectividad de cada una de las siguientes funciones $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si es inyectiva probarlo y si no lo es dar un contraejemplo. En los casos en los que no sea inyectiva hallar un intervalo I, lo más grande posible, tal que $f : I \to \mathbb{R}$ resulte inyectiva (probar que es inyectiva en I).
   (a) $f(x) = 2x + 1$
   (b) $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$
   (c) $f(x) = 2$
   (d) $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   (e) $f(x) = 1 - x^2$
   (f) $f(x) = \frac{1}{x}$
   (g) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+4}$
   (h) $f(x) = \frac{-3x+2}{2x-1}$
   (i) $f(x) = |x| + 2$
   (j) $f(x) = 2|3x + 2| - 1$

   En los siguientes items, graficar la función y decidir a partir del gráfico:
   (a) $f(x) = |x^2 - 8x + 12| - 7$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = x^2 + |x - 2|$
   (d) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$
   (e) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 2 \\ x - \frac{3}{2} & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$
   (f) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

10. Para cada una de las siguientes funciones cuadráticas f hallar $Im(f)$. Hallar un intervalo (lo más grande posible) I_1 donde f sea creciente y un intervalo (lo más grande posible) I_2 en donde f sea decreciente. Probar que f es inyectiva en I_1 y también en I_2. Considerando $f : I_1 \to Im(f)$, hallar la expresión de $f^{-1} : Im(f) \to I_1$ y considerando $f : I_2 \to Im(f)$, hallar la expresión de $f^{-1} : Im(f) \to I_2$.
    (a) $f(x) = x^2 + 4x + 4$
    (b) $f(x) = (x + 2)(3 - x)$
    (c) $f(x) = -x^2 + x + 6$
    (d) $f(x) = (3 - x)^2$
    (e) $f(x) = (x - 7)^2 - 9$
    (f) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$

11. Para cada una de las siguientes funciones, elegir dos intervalos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ (lo más grandes posible) de manera que $f : A \to B$ resulte biyectiva y hallar la expresión de $f^{-1} : B \to A$. Graficar f y f^{-1} en un mismo sistema de coordenadas.

(a) $f(x) = 3x - 7$

(b) $f(x) = \frac{4x+3}{x-2}$

(c) $f(x) = 3 - \frac{1}{x+4}$

(d) $f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

(e) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

(f) $f(x) = |x| + 2$

(g) $f(x) = 2|3x+2| - 1$

(h) $f(x) = \sqrt{x}$

(i) $f(x) = -2\sqrt{x} + 3$

(j) $f(x) = \sqrt{x}$

(k) $f(x) = \sqrt{x+2}$