1. IRM - Grupo 1 - Clase de Problemas 1 y 2 - Clase 3 - 15/03/21

Ejercicio 1.1. Hallar la ecuación de una función cuadrática $f(x)$, que cumple

(i) $f(-3) = f(-1)$
(ii) $f(2) = -13$
(iii) $f(1) = -6$

Solución Lo primero que debemos decidir, es cual de las fórmulas que conocemos para expresar una función cuadrática utilizaremos para resolver este problema.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v, \quad f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Utilizando la simetría que poseen las parábolas, podemos calcular la primera coordenada del vértice si tenemos dos valores de x que poseen la misma imagen. El punto medio entre estos valores, será igual a x_v. En este caso, utilizando (i), dado que $x = -3$ y $x = -1$ poseen igual imagen, deducimos que

$$x_v = \frac{-3 + (-1)}{2} = -2.$$

Luego,

$$f(x) = a(x - (-2))^2 + y_v.$$

Utilizando los datos (ii) y (iii), tenemos que

$$\begin{cases} -13 = f(0) = a(2 - (-2))^2 + y_v = 16a + y_v \\ -6 = f(-1) = a(-1 - (-2))^2 + y_v = 9a + y_v. \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Para resolverlo, por ejemplo, podemos restar ambas ecuaciones y obtener la relación

$$-13 - (-6) = (16a + y_v) - (9a + y_v) \Leftrightarrow -7 = 7a \Leftrightarrow a = -1.$$

Luego, $-6 = 9a + y_v = 9(-1) + y_v \Leftrightarrow y_v = -6 + 9 = 3$. Por lo tanto,

$$f(x) = -(x + 2)^2 + 3.$$

Ejercicio 1.2. Decidir si los gráficos de las funciones $f(x) = 3x^2 - x + 1$ y $g(x) = 2x^2 - 2x + 7$ se cortan. En caso afirmativo, hallar todos los puntos de intersección.

Solución Los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ se cortan siempre y cuando la ecuación $f(x) = g(x)$ tenga solución, y las soluciones de esta, son las coordenadas x de los puntos de intersección. En este caso,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - x + 1 = 2x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -3.$$

Por lo tanto, los gráficos de las funciones se cortan en los puntos $(2, f(2)) = (2, g(2))$ y $(-3, f(-3)) = (-3, g(-3))$, es decir, $(2, 11)$ y $(-3, 31)$

Ejercicio 1.3. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales los gráficos de la parábola $f(x) = -x^2 - 2kx - 1$ y la recta $g(x) = -2x - k$, no se cortan.

Solución Para hallar la intersección de los gráficos de estas funciones, debemos resolver el sistema $f(x) = g(x)$, es decir,

$$-x^2 - 2kx - 1 = -2x - k \Leftrightarrow 0 = x^2 + 2kx + 1 - 2x - k \Leftrightarrow 0 = x^2 + (2k - 2)x + (1 - k).$$

Si queremos que los gráficos no se corten, debemos pedir que esta ecuación cuadrática no posea solución, es decir, que $b^2 - 4ac < 0$. En este caso, $a = 1, b = 2k - 2$ y $c = 1 - k$, luego

$$(2k-2)^2 - 4.1.(1-k) < 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 8k + 4 - 4 + 4k < 0 \Leftrightarrow 4k^2 - 4k < 0 \Leftrightarrow 4k(k-1) < 0.$$

Esto sucede, siempre y cuando $k \in (0,1)$, ya que la función cuádratica $4k^2 - 4k$ posee sus raíces en $k = 0$ y $k = 1$, y su coeficiente principal es positivo.

En un mercado monopólico, los ingresos de una empresa van a depender de la demanda del producto. En tal caso, el precio del producto p y la cantidad de unidades vendidas q, van a estar determinadas por la función demanda o demanda inversa. Por esto, los ingresos de la empresa se obtienen como $p.q$.

Ejercicio 1.4. Supongamos que existe una única empresa de baterías de litio cuyo costo semanal está dado por la función $C(q) = 3600 + 100q + 2q^2$. La función de demanda semanal de dicho producto está dada por la relación $p = 500 - 2q$. ¿Cuantas unidades debe vender la empresa para tener ganancias? ¿Que cantidad de unidades debe vender la empresa para obtener el máximo de ganancias? Hallar el punto de máximos ingresos de la empresa, ¿coincide con el punto de máximas ganancia?

Solución La función ingresos semanales de la empresa será

$$I(q) = p.q = (500 - 2q)q = 500q - 2q^2.$$

Por lo tanto, la función utilidad resulta ser

$$U(q) = I(q) - C(q) = 500q - 2q^2 - (3600 + 100q + 2q^2) = -4q^2 + 400q - 3600.$$

Si queremos que la empresa tenga ganancias se debe cumplir que $U(q) > 0$, es decir,

$$-4q^2 + 400q - 3600 > 0.$$

Para ello, debemos hallar el conjunto de positividad de la función cuadrática $U(q)$. Para ello, hallamos sus raíces por medio de la fórmula resolvente

$$\frac{-400 \pm \sqrt{400^2 - 4.(-4)3600}}{2(-4)} = \frac{-400 \pm \sqrt{102400}}{-8} = \frac{-400 \pm 320}{-8} = 90 \text{ o } 10.$$

Obtenemos de esta forma que la empresa obtiene ganancias si produce entre 10 y 90 unidades por semana.

Observemos que la función utilidad es una función cuadrática con coeficientes principal negativo. Esto implica que dicha función tendrá un valor máximo, el cual se alcanzará en el vértice. Recordemos que la coordenada x del vértice se encuentra por medio de la fórmula

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{2(-4)} = 50$$

Para dicha producción de unidades, la ganancia será igual a

$$U(50) = -4(50)^2 + 400.50 - 3600 = 6400.$$

Para calcular el máximo de ingresos de la empresa, debemos hallar el valor máximo de la función de ingresos

$$I(q) = 500q - 2q^2.$$

Al igual que antes, esta es una parábola con coeficientes principal negativo y por lo tanto, alcanza un valor máximo en su vértice. En este caso, el vértice está dado por

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-500}{2(-2)} = \frac{500}{4} = 125.$$

Es decir, la empresa tendrá un máximo de ingresos si produce y vende 125 unidades semanales. Sin embargo, observar que para esa cantidad producida, la empresa tiene pérdidas. Por lo tanto, el punto de utilidad máxima no es igual al de ingresos máximos.