UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS
INTRODUCCIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
Dr. Claudio G. Schifini

NOTACIONES

NOTACIÓN	SIGNIFICA
N	Conjunto de los números naturales.
Z	Conjunto de los números enteros.
Q	Conjunto de los números racionales.
R	Conjunto de los números reales.
ϕ	Conjunto vacío.
$\subset$	Contenido. Incluido.
$\not\subset$	No contenido. No incluido.
$\cup$	Unión.
$\cap$	Intersección.
$\in$	Pertenece.
$\notin$	No pertenece.
$\exists$	Existe.
$\nexists$	No existe.
$\exists!$	Existe un único.
$\forall$	Para todo.
$\therefore$	Luego. Por lo tanto.
$\wedge$	y.
$\vee$	o.
$/$	Tal que.
$:$	Tal que.
∞	Infinito.
$\Rightarrow$	Implica. Entonces.
$\Leftrightarrow$	Sí y sólo sí. Es equivalente a.

CONJUNTOS

No definiremos el término **conjunto**. Partiremos de la idea intuitiva de este concepto como una colección de objetos definida por una propiedad o atributo (el conjunto de lápices, el conjunto de árboles, etc.) o bien directamente enumerando sus elementos. En el primer caso se dice que el conjunto está definido por **comprensión** y en el segundo caso se dice que el conjunto está definido por **extensión**. Los conjuntos suelen notarse con alguna letra mayúscula y se encierran sus elementos o a la propiedad que los caracteriza entre llaves.

Algunos ejemplos de conjuntos son:

a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

b) $B = \{números\ naturales\ menores\ o\ iguales\ que\ 10\} = \{n \in \mathbb{N}: n \leq 10\}$.

c) $C = \{2,4,6,8,10 \ldots\}$.

d) $D = \{números\ naturales\ pares\} = \{n \in \mathbb{N}: n\ es\ par\}$.

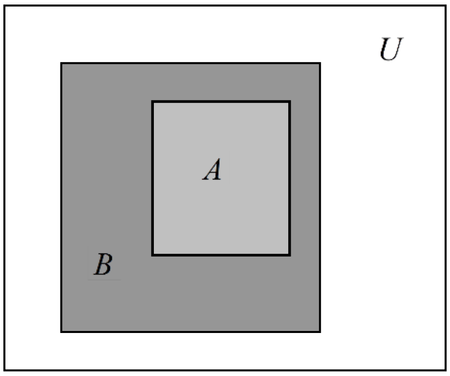
Los conjuntos $A\ y\ C$ están definidos por extensión mientras que los conjuntos $B\ y\ D$ están definidos por comprensión.

Para indicar que un elemento **pertenece** a un conjunto se utiliza el símbolo " $\in$ " y para indicar que **no pertenece** al conjunto se utiliza el mismo símbolo tachado, " $\notin$ " .

Considerando los conjuntos anteriores: $3 \in A$, $3 \notin D$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A está **contenido** en B (o que B **incluye** a A, o que A es **subconjunto** de B), y se lo nota $A \subset B$, si $\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B$ (todo elemento de A es elemento de B).



Dados dos conjuntos A y B, A **no** está contenido en B, y se lo nota $A \not\subset B$, si $\exists a : a \in A \wedge a \notin B$ (por lo menos un elemento de A no pertenece a B).

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se dice que A es **igual** a B, y se lo nota $A = B$, si $A \subset B \wedge B \subset A$ ($\forall a : a \in A \Leftrightarrow a \in B$).

Teniendo en cuenta los ejemplos anteriores, es claro que $A = B$ y $C = D$

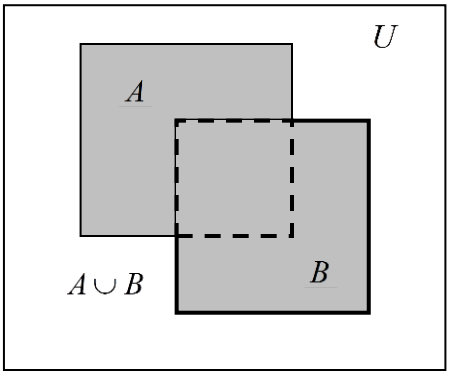
Definición

Se llama conjunto **vacío**, y se lo nota ϕ, al conjunto que no tiene elementos. Una posible manera de definir el conjunto vacío es: $\phi = \{x : x \neq x\}$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **unión** de A con B al conjunto:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

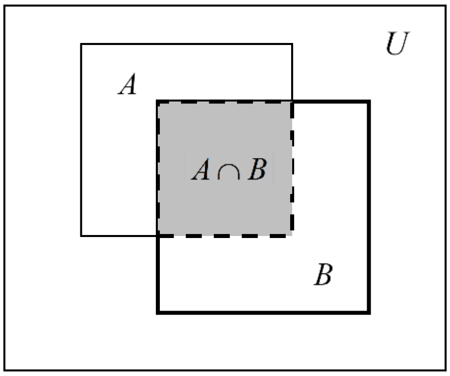


El símbolo "∨" significa "o".

Definición

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **intersección** de A con B al conjunto:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

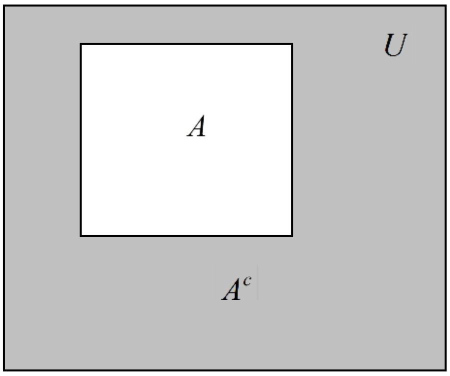


El símbolo "∧" significa "y".

Definición

Dado un conjunto A, se denomina **complemento** de A al conjunto:

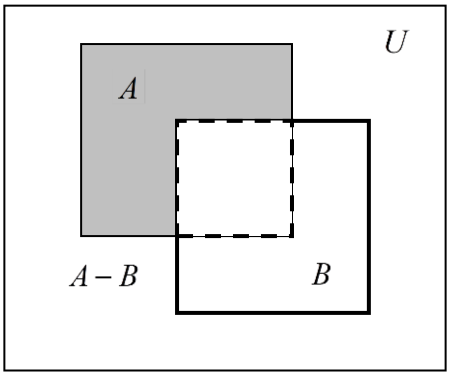
$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}.$$



Definición

Dados dos conjuntos A y B, se denomina **diferencia** de A con B al conjunto:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$



CONJUNTOS NUMÉRICOS. NÚMEROS REALES

A manera de recordatorio, sin pretender ser muy precisos, repasemos los distintos conjuntos numéricos que dan lugar al conjunto de los números reales.
Los **números naturales** son los primeros números que aparecen en nuestra vida[1] (un caramelo, dos árboles, etc.), son aquellos números que se usan para "contar" ($1,2,3,4,\cdots$). El conjunto de los números naturales es notado con la letra N .

$$N = \{1,2,3,4,5,6,7,\cdots\}.$$

Si al conjunto de números naturales se le agregan sus "opuestos" (los números negativos: $-1.-2,-3,-4,\cdots$) y el 0 se consigue un conjunto más grande, el conjunto de los **números enteros** que se nota con la letra Z .

$$Z = \{\cdots,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\}.$$

Si a Z le agregamos los cocientes de números enteros (las fracciones: $\frac{1}{2},\frac{3}{4},-\frac{5}{7},\cdots$), obtenemos un conjunto numérico más grande todavía denominado conjunto de los **números racionales** que se nota con la letra Q .

$$Q = \left\{\tfrac{m}{n} : m \in Z,\, n \in N\right\}.$$

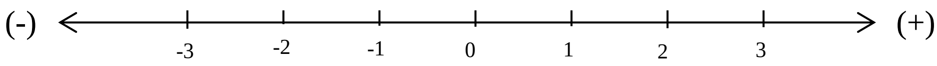
Es claro que todo número natural es entero y que todo número entero es racional $(m = \frac{m}{1},\ \forall m \in Z)$. O sea, $N \subset Z \subset Q$.
Es sabido que, dividiendo el numerador por el denominador, todo número racional puede escribirse mediante una expresión decimal. Por ejemplo: $\frac{1}{2} = 0{,}5$; $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{25}{4} = 6{,}25$; $\cdots$; etc. En algunos casos su expresión decimal puede ser periódica (a partir de un cierto momento un subconjunto de dígitos de su mantisa se repite infinitamente). Por ejemplo: $\frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3} = 0{,}33333\cdots$, $\frac{19}{90} = 0{,}2\widehat{1} = 0{,}2111111\cdots$, etc.
Puede probarse que todo número racional posee un desarrollo decimal finito (su mantisa consta de un número finito de dígitos) o bien periódico.
Recíprocamente, todo número que posee un desarrollo decimal finito o periódico es un número racional. Por ejemplo: $0{,}25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $0{,}2\widehat{1} = \frac{21-2}{90} = \frac{19}{90}$; etc.
Sin embargo, si consideramos el número $0{,}101001000100001000001\cdots$, éste posee un desarrollo decimal infinito no periódico. Es claro que podemos construir infinitos de estos números que, por lo observado, no serán racionales. Estos números se denominan **números irracionales**. Son ejemplos de números irracionales: π , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, en general $\sqrt{p}$ con p un número natural primo, etc.
Finalmente, si al conjunto de números racionales le agregamos todos los números irracionales obtenemos el conjunto de los **números reales** que se nota con la letra R .

[1] "Dios creó los números naturales, el resto lo hizo el hombre". Leopold Kronecker, 21/9/1886.

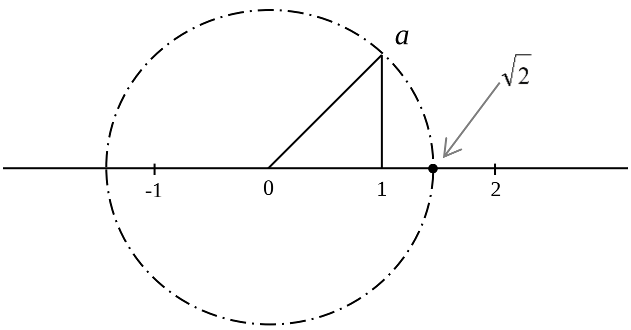
$$R = \{x : x \in Q \text{ o } x \text{ es irracional}\} = Q \cup \{irracionales\}.$$

Luego, $N \subset Z \subset Q \subset R$.

El conjunto de números reales R puede representarse geométricamente sobre una recta (llamada **recta real**) de manera tal que a cada número real le corresponde un único punto de le recta y a cada punto de la recta le corresponde un único número real.



A manera de ejemplo veamos como podemos representar el número irracional $\sqrt{2}$.
Desde el punto correspondiente al número real 1 se traza un segmento $\overline{1a}$ de longitud 1 perpendicular a la recta real. Trazamos luego el segmento $\overline{0a}$ que une el punto correspondiente al número 0 con el punto a marcado.
Nos queda determinado un triángulo rectángulo de vértices 0, 1 y a. Por el teorema de Pitágoras, $\overline{0a} = \sqrt{\left(\overline{01}\right)^2 + \left(\overline{1a}\right)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Por último trazamos la circunferencia de centro 0 y radio $\overline{0a} = \sqrt{2}$. El punto de intersección de esta circunferencia con la recta real es la representación del número real $\sqrt{2}$.



Es sabido que podemos operar con los números reales. Se tienen dos operaciones básicas, la **suma** $(+)$ y el **producto** $(\cdot)$ de números reales. $\forall a,b \in R : a+b \in R$ y $a \cdot b \in R$.
Dichas operaciones verifican las siguientes propiedades básicas:

S1) <u>Asociatividad de la suma</u>
$$a + (b + c) = (a + b) + c; \quad \forall a,b,c \in R.$$

S2) <u>Conmutatividad de la suma</u>
$$a + b = b + a; \quad \forall a,b \in R.$$

S3) <u>Existencia de elemento neutro para la suma</u>
$$a + 0 = a; \quad \forall a \in R.$$

S4) Existencia de inverso aditivo

$$\forall a \in R, \exists\, b \in R \text{ tal que } a + b = 0.$$

(Puede probarse que b es único. Luego se lo denomina "inverso aditivo" de a y se lo nota "$-a$").

P1) Asociatividad del producto

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c; \quad \forall a, b, c \in R.$$

P2) Conmutatividad del producto

$$a \cdot b = b \cdot a; \quad \forall a, b \in R.$$

P3) Existencia de elemento neutro para el producto

$$1 \cdot a = a; \quad \forall a \in R.$$

P4) Existencia de inverso multiplicativo

$$\forall a \in R,\ a \neq 0, \exists\, d \in R \text{ tal que } a \cdot d = 1.$$

(Puede probarse que d es único. Luego se lo denomina "inverso multiplicativo" de a y se lo nota "a^{-1}").

SP) Distributividad

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c; \quad \forall a, b, c \in R.$$

Sabemos también que podemos comparar dos números reales. Es decir está definida sobre R una relación de orden (total), llamada "menor que" y notada **<** **,** que verifica:

O1) Tricotomía

$\forall a, b \in R$ se verifica una y sólo una de las siguientes posibilidades:

$a < b$, $\qquad a = b$, $\qquad b < a$.

O2) Transitividad

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c; \quad \forall a, b, c \in R.$$

O3) Monotonía respecto de la suma

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c; \quad \forall c \in R.$$

O4) Monotonía respecto del producto

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c; \quad \forall c \in R,\ 0 < c.$$

A partir de estas 13 propiedades básicas o axiomas pueden deducirse nuevas propiedades. Algunas de ellas son:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \forall a, b \in R$.
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \forall a, b \in R$.
- $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b); \forall a, b \in R$.

- $x^2 \geq 0; \forall x \in R$.
- $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c; \quad \forall c \in R, c < 0$.

En particular la relación de orden nos permite definir ciertos subconjuntos particulares de R, los intervalos.
Dados $a, b \in R$, $a \leq b$, se denomina:

1. **Intervalo abierto** con extremos a y b al conjunto
$$(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}.$$

2. **Intervalo cerrado** con extremos a y b al conjunto
$$[a,b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

3. **Intervalo semiabierto o semicerrado** con extremos a y b a los conjuntos
$$(a,b] = \{x \in R : a < x \leq b\},\ [a,b) = \{x \in R : a < x \leq b\}.$$

Para definir intervalos infinitos no acotados se utiliza el símbolo ∞ (que se lee **infinito**). Hay que tener en claro que <u>∞ es sólo un símbolo</u> y <u>no</u> un número real.
Se definen entonces los siguientes intervalos infinitos:

4. **Intervalo abierto infinito** con extremo izquierdo a al conjunto
$$(a,+\infty) = \{x \in R : a < x\}.$$

5. **Intervalo abierto infinito** con extremo derecho b al conjunto
$$(-\infty,b) = \{x \in R : x < b\}.$$

6. **Intervalo cerrado infinito** con extremo izquierdo a al conjunto
$$[a,+\infty) = \{x \in R : a \leq x\}.$$

7. **Intervalo cerrado infinito** con extremo derecho b al conjunto
$$(-\infty,b] = \{x \in R : x \leq b\}.$$

<u>OPERACIONES CON FRACCIONES</u>

a) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.

b) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad-bc}{bd}$.

c) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

d) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$.

e) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{1}{c} = \dfrac{a}{bc}$.

f) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a}{1} \cdot \dfrac{c}{b} = \dfrac{ac}{b}$.

MÓDULO

A cada número real x se le puede asignar otro número real denominado módulo o valor absoluto de x y notado $|x|$ como la distancia entre x y 0. O sea,

$$|x| = \text{"}distancia\ entre\ x\ y\ el\ 0\text{"}$$

Alguna de las propiedades más importantes de la función módulo son las siguientes:

a) $\forall x \in R: |x| \geq 0$ y $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $\forall x \in R: |-x| = |x|$.

c) $\forall x, y \in R: |x+y| \leq |x| + |y|$.

d) $\forall x, y \in R: |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

e) $\forall x \in R,\ a > 0: |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$.

f) $\forall x \in R,\ a > 0: |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$.

g) $\forall x \in R,\ a > 0: |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

h) $\forall x \in R,\ a > 0: |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

i) $\forall x, y \in R: |x - y|$ mide la distancia entre x e y.

j) $|x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$.

k) $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \vee x = -y$

POTENCIACIÓN

Recordemos que dado $a \in R$, para cada $n \in N$, se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

Esta operación, denominada **potenciación**, verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} a^{n+m} = a^n \cdot a^m & (1) \\ a^{n \cdot m} = (a^n)^m & (2) \end{cases},$$

$\forall a \in R; \forall n, m \in N$.

La potenciación se extiende a potencias enteras definiendo $\forall a \in R_{\neq 0}$ y $\forall n \in N$:

$$\begin{cases} a^0 = 1 & (3) \\ a^{-n} = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n} & (4) \end{cases},$$

Es fácil verificar que con las definiciones (3) y (4) las propiedades (1) y (2) siguen siendo válidas $\forall n, m \in Z$.

Para poder extender la potenciación a potencias racionales es necesario restringir los valores de a.

Si $a \in R_{>0}$ y $q = \frac{m}{n} \in Q$ ($n \in N, m \in Z$) se define

$$a^q = (a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

donde $\sqrt[n]{a^m}$ indica el único número positivo b tal que $b^n = a^m$.

Puede verificarse también que siguen siendo válidas las propiedades (1) y (2).

RAICES

Raíz cuadrada

La ecuación $x^2 = 4$ tiene dos soluciones: una positiva, $x = 2$ y una negativa, $x = -2$.

Análogamente, la ecuación $x^2 = 9$ tiene dos soluciones: una positiva, $x = 3$ y una negativa, $x = -3$.

Por otro lado, la ecuación $x^2 = -1$ no tiene solución dado que (por la regla de los signos) $x^2 \geq 0, \forall x \in R$. En general, si $a < 0$, la ecuación $x^2 = a$ no tiene solución.

Resumiendo, si $a > 0$, el conjunto solución de la ecuación $x^2 = a$ tiene dos elementos, uno positivo y otro negativo. Si $a = 0$, la ecuación $x^2 = 0$ tiene una única solución, el número 0. Si $a < 0$, la ecuación $x^2 = a$ no tiene solución.

Definición

Dado $a \in R, a \geq 0$, se llama **raíz cuadrada de** a y se lo nota $\sqrt{a}$ a la única solución no negativa de la ecuación $x^2 = a$. O sea, $\sqrt{a}$ es el único número real mayor o igual que cero que elevado al cuadrado da a.

O sea,

- $\sqrt{a} \in R_{\geq 0}$.
- $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Raíz cúbica

En este caso, cualquiera sea $a \in R$, la ecuación $x^3 = a$ tiene siempre una única solución. Por ejemplo: la única solución de la ecuación $x^3 = 8$ es $x = 2$ y la única solución de la ecuación $x^3 = -8$ es $x = -2$.

Definición

Dado $a \in R$, se llama **raíz cúbica de** a y se lo nota $\sqrt[3]{a}$ a la única solución de la ecuación $x^3 = a$. O sea, $\sqrt[3]{a}$ es el único número real que elevado al cubo da $\boldsymbol{a}$**.** O sea,

- $\sqrt[3]{a} \in R$.
- $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Raíz enésima

En general, si $n \in \mathbb{N}$ y n es par, la ecuación $x^n = a$ tiene dos soluciones: una positiva y una negativa.

Definición

Dado $a \in R, a \geq 0$ y $n \in \mathbb{N}\, par$, se llama **raíz enésima de** a y se lo nota $\sqrt[n]{a}$ a la única solución no negativa de la ecuación $x^n = a$. O sea, $\sqrt[n]{a}$ es el único número real mayor o igual que cero que elevado a la n da a**.** O sea,

- $\sqrt[n]{a} \in R_{\geq 0}$.
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Definición

Dado $a \in R$ y $n \in \mathbb{N}\, impar$ se llama **raíz enésima de** a y se lo nota $\sqrt[n]{a}$ a la única solución de la ecuación $x^n = a$. O sea, $\sqrt[n]{a}$ es el único número real que elevado a la n da a**.** O sea,

- $\sqrt[n]{a} \in R$.
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Por ejemplo: $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[5]{-32} = -2$, etc.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE

Sabemos que $x^2 \geq 0, \forall x \in R$; por lo tanto siempre esxiste $\sqrt{x^2}$. Es bastante común cometer el error de "simplificar" la raiz con el cuadrado y contestar que $\sqrt{x^2} = x$. Por ejemplo:
Si $x = 2$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2 = x$. En este caso podemos pensar que la raiz se simplificó con el cuadrado; pero si $x = -2$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq x$. En este caso simplificar la raiz con el cuadrado nos lleva a cometer un error. Observemos que en este ejemplo $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 = -(-2) = -x$.
Lo que se puede ver en general es que si $x \geq 0$, entonces $\sqrt{x^2} = x$ y que si $x < 0$, entonces $\sqrt{x^2} = -x$.
O sea,

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}.$$

O sea,

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

En cambio, la definición de raiz cuadrada nos dice que si $x \geq 0$,

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

O sea, **<u>no</u>** es lo mismo primero calcular la raiz y después elevar al cuadrado que realizar estas operaciones al revés.

Lo anterior sigue siendo válido para las raíces enésimas de índice par.
O sea, si $n \in \mathbb{N}\, es\ par\ (n = 2,4,6, etc.)$

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases} = |x|.$$

POLINOMIOS

Recordemos que un **polinomio** a coeficientes reales es una expresión del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in R$ que se denominan **coeficientes** del polinomio.

Si $a_n \neq 0$ se dice que el polinomio P posee **grado** n y escribimos $gr(P) = n$. El polinomio nulo, $P(x) = 0$ (todos sus coeficientes son 0), no tiene grado.

Por ejemplo: $P(x) = 3x^2 - 2x + 3$ tiene grado 2, el polinomio $P(x) = 0x^5 - 2x^4 + x - 2$ tiene grado 4 y los polinomios constantes no nulos ($P(x) = c,\ (c \neq 0)$) tienen grado 0.

Una **raíz** real de $P(x)$ es un número real r que verifica $P(r) = 0$.

Se sabe que

"$r \in R$ es raíz (real) de $P(x)$ $\Leftrightarrow$ existe un polinomio $Q(x)$, de grado $n-1$, tal que $P(x) = (x - r) \cdot Q(x)$".

Dado que, en general, no tenemos una fórmula que nos dé raíces de polinomios sería bueno que la expresión del polinomio estuviera *factorizada*, esto es que la expresión tuviera forma de productos de otras expresiones, puesto que en este caso es relativamente simple encontrarle las raíces. Por esta razón es necesario manipular ciertos resultados algebraicos que nos ayuden a conseguir dicho objetivo. El primero de ellos es lo que se denomina el "algoritmo de división de polinomios". Sabemos que podemos operar con los polinomios de manera análoga a los números, sabemos sumar, restar y multiplicar polinomios entre sí y también sabemos dividir polinomios. En el caso de la división de polinomios ésta se asemeja a la división entera de números enteros, en donde al dividir dos números enteros se obtiene un cociente y un resto; por ejemplo: si dividimos 203 por 31 obtenemos como cociente 6 y como resto 17 (31 entra exactamente 6 veces en 203 y sobran 17), la división la terminamos allí puesto que 17 es menor que 31 y el 31 no entra exactamente en 17. Observemos que resulta 203 = 31.6 + 17. En el caso de los polinomios hacemos algo parecido, pero en este caso decimos que hemos terminado cuando el grado del polinomio que nos quedó como resto es menor que el grado del polinomio por el cual estamos dividiendo (¡no podemos seguir!). El enunciado preciso de este proceso de división de polinomios es el siguiente:

<u>Algoritmo de división de polinomios:</u> Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios, $Q(x)$ <u>no</u> nulo, entonces, existen dos únicos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que verifican:

i) $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$,

ii) $R(X)$ es el polinomio nulo o bien $gr(R(x)) < gr(Q(x))$.

$C(x)$ se denomina el **cociente** y $R(x)$ el **resto** de la división de $P(x)$ por $Q(x)$.

En el caso particular en que $Q(x) = x - c$, $Q(x)$ tiene grado 1 y por lo tanto $R(x)$ (por la condición ii)) debe ser una constante (un número real).

Como consecuencia del algoritmo de división de polinomios se obtiene otro resultado que nos brinda una herramienta matemática muy importante para intentar factorizar un polinomio.

<u>Teorema del resto:</u> El resto de la división de un polinomio $P(x)$ por un polinomio de la forma $(x-c)$ es el número real $P(c)$.

Podemos extraer una conclusión muy útil de este resultado:
Si un número r es raíz de un polinomio $P(x)$, entonces al dividirlo por el polinomio $(x-r)$ la división da exacta, se dice entonces que $(x-r)$ *divide* a $P(x)$ (o también que $(x-r)$ es un *divisor* de $P(x)$, o que $(x-r)$ es un *factor* de $P(x)$) y $P(x)$ puede escribirse en la forma:

$$P(x)=(x-r).Q(x).$$

Esto último nos da un método para seguir encontrando raíces de un polinomio $P(x)$ una vez que hemos hallado alguna (si es que hay más) y para factorizar totalmente el polinomio. Si r es una raíz de un polinomio $P(x)$, una vez escrito como $P(x)=(x-r).Q(x)$, observando que $Q(x)$ es otro polinomio que tiene un grado menor que el que tiene $P(x)$, podemos tratar de repetir el procedimiento anterior con sólo conocer alguna raíz de $Q(x)$ (que también es raíz de $P(x)$. Pensarlo). Reiterando este procedimiento tantas veces como sea posible llegaremos a la expresión factorizada del polinomio $P(x)$. Por ejemplo: si $P(x)$ tiene grado 3 y conocemos una raíz r, el polinomio $Q(x)$ tendrá grado 2 y tenemos una fórmula para buscarle las raices y factorizarlo.

En definitiva, para poder factorizar un polinomio (escribirlo como producto de polinomios de menor grado) necesitamos encontrarle raíces.
¿Cómo podemos hallar (si tuviera alguna) las raíces de un polinomio?
Lamentablemente no existe una respuesta general a esta pregunta, es decir no se puede hallar una “fórmula” que, para cualquier polinomio, nos dé las raíces como, por ejemplo, en el caso de un polinomio de grado 2 en el que sí tenemos una fórmula. Sin embargo existen algunos resultados teóricos que nos ayudan mucho a encontrar dichas raíces. Uno de estos resultados es el siguiente:
<u>Teorema</u> (Gauss)
Sea $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$, un polinomio a coeficientes <u>enteros</u> $(a_i \in Z, \forall 1\le i\le n)$ de grado n.

Si $\dfrac{p}{q}\in Q$ es raíz de $P(x) \Rightarrow p$ es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n.

<u>Por ejemplo</u>:
Sea $P(x)=6x^5-3x^4+x^3+4x^2-3x+15$.
Como los divisores de 15 son $-1,1,-3,3,-5,5,-15$ y 15 y los divisores positivos de 6 son $1,2,3$ y 6 resulta que las <u>posibles</u> raíces racionales de $P(x)$ son

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2},\ \pm\frac{15}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{5}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{5}{6},\ \pm\frac{15}{6}.$$

Si alguno de estos números es raíz de $P(x)$ habremos hallado una raíz racional de $P(x)$ y podemos comenzar a factorizarlo.

Si. por el contrario, ninguno de estos números es raíz de $P(x)$ podemos asegurar que $P(x)$ no posee raíces racionales (si tuviera alguna raíz real ésta debe ser irracional).

El teorema de Gauss no puede aplicarse si alguno de sus coeficientes no es entero.
Sin embargo, si el polinomio tiene todos sus coeficientes racionales (alguno no entero), multiplicándolo adecuadamente por un número entero, es posible conseguir otro polinomio con coeficientes enteros que posee las mismas raíces que el original y aplicarle el teorema a este último.
Por ejemplo:
Sea $P(x)=\frac{3}{10}x^4+\frac{1}{5}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4$. Luego $P(x)$ posee algunos coeficientes racionales (no enteros) y no podemos aplicar Gauss.
Multiplicando a $P(x)$ por 10 (el mínimo común múltiplo de los denominadores) obtenemos otro polinomio $Q(x)=3x^4+2x^3-5x^2+30x-40$ con coeficientes enteros ($P(x)=\frac{1}{10}Q(x)$) que posee las mismas raíces que $P(x)$.
Aplicándole el teorema de Gauss a $Q(x)$ obtenemos las posibles raíces racionales de $Q(x)$ y, por lo tanto, de $P(x)$.

Polinomios de grado 2.
Un polinomio de grado 2 tiene la forma:

$$P(x)=ax^2+bx+c, \text{ con } a\neq 0.$$

Se sabe que sus raíces vienen dadas por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (*)$$

Dicha fórmula tiene un problema: ¿Que pasa si $b^2-4ac<0$? (sabemos que no se pueden calcular raíces cuadradas de números negativos y no deberíamos haber escrito la fórmula). Sin embargo cuando nos ocurre ésto contestamos que el polinomio no tiene raíces.
Más precisamente:

- Si $b^2-4ac<0$, $P(x)$ no tiene raíces.
- Si $b^2-4ac=0$, la única raiz que tiene $P(x)$ es $x=\frac{-b}{2a}$ (coordenada x del vértice de la parábola $y=ax^2+bx+c$).
- Si $b^2-4ac>0$, las raíces de $P(x)$ están dadas por (*).

FUNCIONES

Definición.
Sean A y B dos conjuntos. Una **función** f de A en B es una correspondencia o relación que asigna a cada elemento de A un único elemento de B.
Es costumbre notar $f:A\to B$ y para cada $a\in A$ indicar con $f(a)$ (imagen de a por f) al único elemento de B que le corresponde por la función.
El conjunto A se denomina **dominio** de la función f y se nota $Dom(f)$.
El conjunto B se denomina **codominio** de la función f y se nota $Codom(f)$.

Definición.

Sea $f : A \to B$ una función.

Llamamos **imagen** de f al subconjunto de B:

$$Im(f) = \{f(a) : a \in A\} = \{b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b\}.$$

Ejemplos.

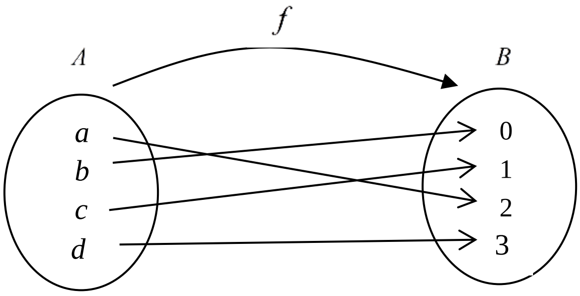
Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{0,1,2,3\}$.

1) Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 2,\ f(b) = 0,\ f(c) = 1 \text{ y } f(d) = 3.$$

Luego, esta correspondencia es una función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. En este caso $Im(f) = B = \{0,1,2,3\}$.

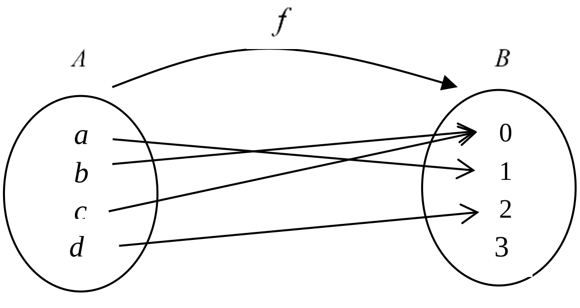
Podemos representar esta situación recurriendo a los *"Diagramas de Venn"*:



2) Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1,\ f(b) = 0,\ f(c) = 0 \text{ y } f(d) = 2.$$

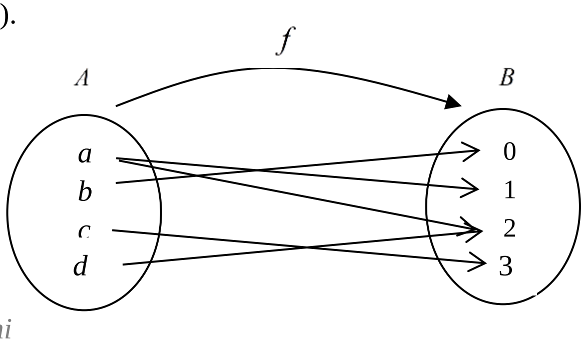
Esta correspondencia también es una función de A en B pues a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B. Observar que <u>no importa</u> que a dos elementos de A (b y c) le correspondan el mismo elemento de B (0), <u>ni tampoco</u> que haya un elemento de B (3) que no es correspondiente de ningún elemento de A. En este caso $Im(f) = \{0,1,2\}$.



Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1,\ f(a) = 2,\ f(b) = 0,\ f(c) = 3 \text{ y } f(d) = 2.$$

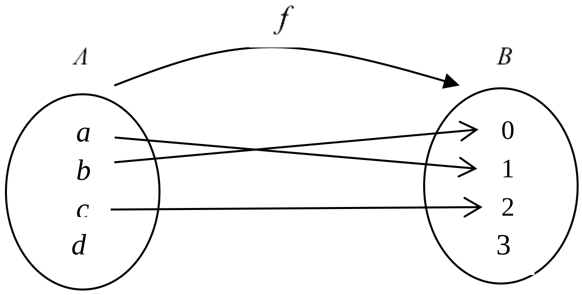
Esta correspondencia <u>no</u> es una función de A en B pues al elemento a de A le corresponden dos elementos de B (1 y 2).



3) Sea $f : A \to B$ la correspondencia definida por:

$$f(a) = 1,\ f(b) = 0 \text{ y } f(c) = 2.$$

Esta correspondencia <u>tampoco</u> es una función de A en B pues al elemento d de A no le corresponde ningún elemento de B.



Recordemos que se nota con la letra R al conjunto de los números reales.
Nos interesará estudiar las funciones de R en R ($A = B = R$), denominadas funciones reales de variable real.
Por ejemplo, la correspondencia $f : R \to R$ definida por $f(x) = x$ (a cada número real x le corresponde el mismo número real x) es función.
Sin embargo, la correspondencia $f : R \to R$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$ <u>no</u> es función puesto que a los números reales negativos no le corresponde ningún número real (no existe la raíz cuadrada de un numero negativo).
Podemos corregir esto último considerando la misma correspondencia pero cambiando el dominio. Más específicamente, si consideramos $f : R_{\geq 0} \to R$ ($A = R_{\geq 0} = \{x \in R : x \geq 0\}$) la correspondencia definida por $f(x) = \sqrt{x}$, entonces ahora sí es función.
Observemos que hemos podido corregir el hecho de que la correspondencia $f(x) = \sqrt{x}$ no era función "achicando" el conjunto de "salida", tomando como nuevo conjunto el mayor subconjunto de R donde la expresión "tiene sentido" (la "cuenta" se puede hacer) que llamaremos **dominio natural**.
Observemos también que la expresión considerada no ofrecía problemas de ambigüedad en cuanto a la correspondencia de un elemento (a ningún elemento le corresponde más de un elemento), propiedad esencial para que una correspondencia pueda ser función.
Es común, en estos casos, hablar de la "función" $f : R \to R$ sobreentendiendo que en realidad estamos hablando de la función $f : A \subset R \to R$, siendo A el mayor subconjunto de R que verifica que f es función en el sentido de la definición (el mayor dominio posible para f).
Cuando se diga "sea $f : R \to R$ la función ..." o simplemente "sea $f : R \to R$ ..." y hablemos del dominio de la función f nos estaremos refiriendo al mayor dominio posible en el sentido antes mencionado.

Ejemplos.

1) Sea $f : R \to R$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$.
Luego, $Dom(f) = R_{\geq 0} = \{x \in R : x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

2) Sea $f: R \to R$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Luego, $Dom(f) = R_{\neq 0} = \{x \in R : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

3) Sea $f: R \to R$, definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2 - 3x + 2}$.

En este caso existen dos condiciones simultáneas para poder calcular la expresión:

1. $x + 1 \geq 0$ (no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo).
2. $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ (no se puede dividir por cero).

O sea, $Dom(f) = \{x \in R : x + 1 \geq 0 \wedge x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$.

Observemos que

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \text{ ①},$$

y que

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2$$

o sea

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \wedge x \neq 2 \text{ ②}.$$

Luego, de ① y ② resulta

$$Dom(f) = \{x \in R : x \geq -1,\ x \neq 1 \wedge x \neq 2\} = [-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty).$$

Definiciones.

Sea $f: A \to B$ una función.

1. Diremos que f es **inyectiva** sii $\forall a, a' \in A:\ f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$.
2. Diremos que f es **suryectiva** o **sobreyectiva** sii $Im(f) = B$.
3. Diremos que f es **biyectiva** sii f es inyectiva y sobreyectiva.

Observaciones.

1) La definición de inyectividad puede reescribirse de la siguiente forma equivalente:

$$f \text{ es inyectiva sii } \forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a').$$

Leída de esta manera nos dice que f es inyectiva sii "a valores distintos de A le corresponden valores distintos de B".

Por lo tanto, f no es inyectiva si existen $a, a' \in A,\ a \neq a'$ tales que $f(a) = f(a')$.

2) f es suryectiva o sobreyectiva sii $Im(f) = B$, es decir, si $\forall b \in B : \exists a \in A \text{ tal que } f(a) = b$. Dicho en palabras, una función es suryectiva si todo elemento de B es correspondido de algún elemento de A ("viene", por lo menos, de algún elemento de A).

Por lo tanto, f no es suryectiva si existe $b \in B$ tal que $b \notin Im(f)$.

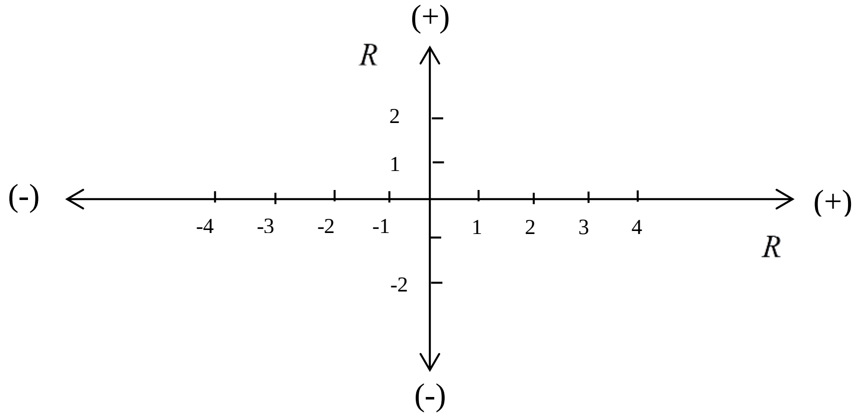
3) Las propiedades de inyectividad y suryectividad son propiedades independientes. Existen funciones inyectivas pero no suryectivas, existen funciones suryectivas pero no inyectivas, existen funciones inyectivas y suryectivas (biyectivas) y existen funciones que no son ni inyectivas ni suryectivas.

4) Sea $f : A \to B$ biyectiva.

Por ser función: a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B (todo elemento de A "va a parar" a un único elemento de B).
Por ser suryectiva: cada elemento de B es correspondido, por lo menos, de algún elemento de A (todo elemento de B "viene", por lo menos, de algún elemento de A).
Por ser inyectiva a valores distintos de A le corresponden valores distintos de B.
Luego, $f : A \to B$ biyectiva $\Leftrightarrow$ cada elemento de B es correspondido por un único elemento de A (todo elemento de B "<u>viene</u>" de un <u>único</u> elemento de A).

Consideremos el conjunto $R^2 = R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$, o sea el conjunto de pares <u>ordenados</u> de números reales (no es lo mismo $(1,2)$ que $(2,1)$).

A partir de la representación geométrica de R el conjunto R^2 puede ser representado sobre un plano considerando dos rectas perpendiculares, una horizontal y una vertical. En cada una de ellas representamos a R colocando el número real 0, de cada copia de R, en el punto de intersección de ambas rectas, los números reales positivos correspondientes a la representación horizontal de R hacia la derecha y los números reales positivos correspondientes a la representación vertical de R hacia arriba de la siguiente manera:

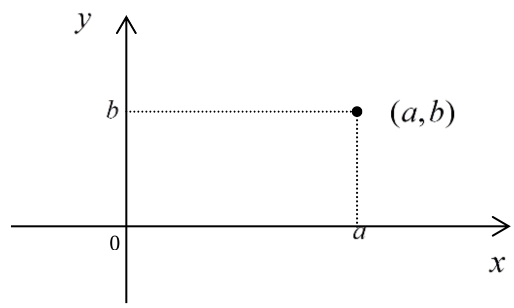


Luego, para representar un par ordenado $(a,b) \in R^2$ hacemos lo siguiente:

1) Ubicamos el número real a (su primera coordenada) en la copia horizontal de R.
2) Ubicamos el número real b (su segunda coordenada) en la copia vertical de R.
3) Trazamos una recta vertical que pase por a.
4) Trazamos una recta horizontal que pase por b.
5) Representamos el par ordenado (a,b) como el punto de intersección de estas rectas.

A la recta horizontal se la suele denominar "eje x" o eje de las **abscisas** y a la recta vertical "eje y" o eje de las **ordenadas**.

Esta representación de R^2 se denomina **sistema de coordenadas cartesianas**.



Definición.
Sea $f : R \to R$. Llamaremos **gráfico** de f al subconjunto de R^2

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom(f)\} \subset R^2 .$$

Sea $f : R \to R$. El gráfico de f nos permite de una manera intuitiva y rápida deducir propiedades de la función.
Mencionemos algunas propiedades que se pueden deducir del gráfico de f.

1. f <u>es función</u> si toda recta vertical corta al $Gr(f)$ a lo sumo una vez.

<u>En efecto</u>: Es claro que si una recta vertical, $x = a$, corta al $Gr(f)$ más de una vez significa que f asigna a a más de un valor y por lo tanto f <u>no</u> es función. ☑

2. $b \in Im(f)$ si la recta horizontal $y = b$ corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez.

<u>En efecto</u>: Si la recta horizontal $y = b$ corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez significa que existe, por lo menos, un $a \in Dom(f)$ tal que $f(a) = b$. ☑

3. f <u>es inyectiva</u> si toda recta horizontal corta al $Gr(f)$ a lo sumo una vez.

<u>En efecto</u>: Si alguna recta horizontal, $y = b$, corta al $Gr(f)$ más de una vez significa que existen por lo menos dos valores distintos $a, a' \in Dom(f)$ tales que $f(a) = f(a') = b$ y por lo tanto f <u>no</u> es inyectiva. ☑

4. f <u>es suryectiva</u> si toda recta horizontal corta al $Gr(f)$ por lo menos una vez.

<u>En efecto</u>: Si alguna recta horizontal, $y = b$, <u>no</u> corta al $Gr(f)$ significa que existe $b \in R$ tal que $b \notin Im(f)$ y por lo tanto f <u>no</u> es suryectiva. ☑

5. f <u>es biyectiva</u> si toda recta horizontal corta al $Gr(f)$ exactamente una vez.

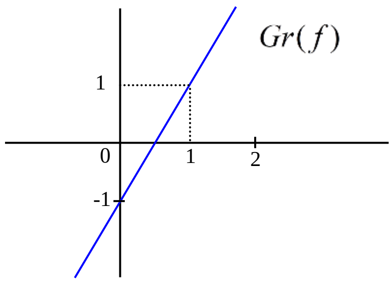
<u>En efecto</u>: Por 2. Y 3. ☑

Queremos hacer notar que, desde un punto de vista estricto, cualquier argumentación que realicemos observando el gráfico de una función tenemos que tomarla como una conjetura que <u>indefectiblemente</u> deberemos probar usando las definiciones analíticas.
Es decir podemos, por ejemplo, argumentar que una función es inyectiva observando su gráfico y utilizando 3, pero la única manera que tenemos de probarlo es usando la definición.
Sin embargo queremos enfatizar que es sumamente importante mantener siempre presente la idea geométrica de una función, realizar argumentaciones a partir de la observación de su gráfico y posteriormente tratar de formalizar la argumentación realizada intentando una demostración analítica.

Ejemplos.

1) Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = 2x - 1$.

Luego la representación del $Gr(f)$ en un sistema de coordenadas cartesianas es una recta de pendiente 2 y ordenada al origen -1.



Es claro del gráfico que f resulta ser una función biyectiva.

Veamos como podemos probar esto analíticamente.

1. f es inyectiva.

Sean $x, x' \in R$ tales que $f(x) = f(x')$. Por 1 de ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia. deberemos probar que $x = x'$.

En efecto:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow 2x - 1 = 2x' - 1 \Rightarrow 2x = 2x' \Rightarrow x = x'.$$

Luego f es inyectiva. ☑

2. f es suryectiva.

Sea $y \in R$. Deberemos probar que existe $x \in R$ tal que $f(x) = y$.

O sea, deberemos probar que existe $x \in R$ tal que $2x - 1 = y$.

Ahora bien,

$$2x - 1 = y \Leftrightarrow 2x = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}.$$

Luego, tomando $x = \dfrac{y+1}{2}$ resulta que

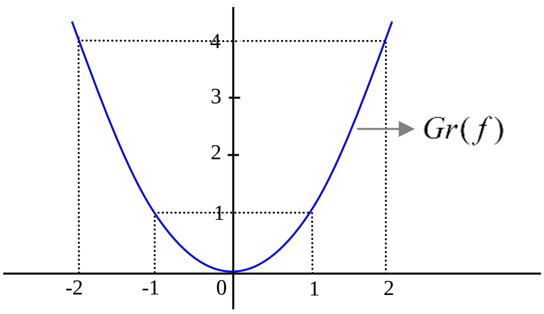
$$f(x) = f\left(\frac{y+1}{2}\right) = 2\left(\frac{y+1}{2}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y.$$

Luego f es suryectiva. ☑

Luego, de 1. y 2. f es biyectiva. ☑

2) Sea $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^2$.

Su gráfico es una parábola.



Es claro del gráfico que esta función no es inyectiva ni suryectiva.
En efecto:
Sean $x, x' \in R$ tales que $f(x) = f(x')$.
Luego,

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x')\cdot(x + x') = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - x' = 0 \vee x + x' = 0 \Leftrightarrow x = x' \vee x = -x'.$$

Nos damos cuenta entonces que no podemos deducir en general que $x = x'$. Más aún el razonamiento anterior nos muestra que si tomamos cualquier $x \in R_{\neq 0}$ y $x' = -x$ resultará $x \neq x'$ y $f(x) = f(x')$.
Por ejemplo, $-1 \neq 1$ y $f(-1) = f(1) = 1$.
Luego, resulta que f no es inyectiva. ☑

Veamos que f no es suryectiva.
Sea $y \in R$. Debemos ver si existe o no $x \in R$ tal que $f(x) = x^2 = y$.
Pero como $x^2 \geq 0, \forall x \in R$, entonces debería ser $y \geq 0$.
Esto nos muestra que si $y \in R_{<0}$ entonces no existe $x \in R$ tal que $f(x) = x^2 = y$.
Por ejemplo, $f(x) \neq -1, \forall x \in R$. Luego $y = -1 \notin Im(f)$ y por lo tanto f no es suryectiva. ☑

Más aún, el razonamiento anterior nos muestra que $y \in Im(f) \Leftrightarrow y \geq 0$ (si $y \geq 0$, tomando $x = \sqrt{y}$ resulta que $f(x) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$).
Luego,

$$Im(f) = R_{\geq 0} = \{y \in R : y \geq 0\} = [0, +\infty). \text{ ☑}$$

Observación.
Vimos que la función $f(x) = 2x - 1$ es biyectiva. Cuando probamos la suryectividad, dado $y \in R$ hemos encontrado el <u>único</u> $x \in R$ tal que $f(x) = y$.
Nos queda definida entonces una nueva función $g : R \to R$ dada por

$$g(y) = \frac{y+1}{2}$$

o bien, lo que es lo mismo (cambiando el nombre de la variable),

$$g(x) = \frac{x+1}{2}.$$

La función g tiene la propiedad de que si a $x \in R$ le aplicamos f y a lo que nos da le aplicamos g el resultado vuelve a ser x. Lo mismo ocurre si primero aplicamos g y luego f. Más precisamente,

$$\forall x \in R, \begin{cases} g(f(x)) = x \\ f(g(x)) = x \end{cases}.$$

<u>En efecto</u>:

$$g(f(x)) = g(2x-1) = \frac{(2x-1)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = (x+1) - 1 = x. \ \boxtimes$$

La función g nos permitió "desandar el camino" que realizó f. Nos permitió resolver el *problema inverso* que nos planteó f. Se dice entonces que f es inversible y que g es (en principio "una") función inversa de f. Más precisamente:

Definición.
Sea $f: A \to B$. Se dice que f es **inversible** sii existe $g: B \to A$ tal que

$$\begin{cases} g(f(a)) = a, \ \forall a \in A \\ f(g(b)) = b, \ \forall b \in B \end{cases}.$$

En este caso, g se denomina (una) **inversa** de f.

Proposición.
Sea $f: A \to B$ inversible. <u>Entonces</u> existe una única $g: B \to A$ inversa de f.
Es decir, si $g, g': B \to A$ son inversas de f, entonces $g = g'$ ($g(b) = g'(b), \forall b \in B$).

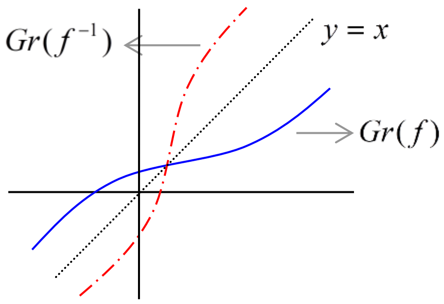
Definición.
Sea $f: A \to B$ inversible. A la <u>única</u> inversa de f se la denomina "la" función **inversa** de f. En este caso, se nota $f^{-1}: B \to A$ a la única inversa de f. O sea, f^{-1} es la única función que verifica

$$\begin{cases} f^{-1}(f(a)) = a, \ \forall a \in A \\ f(f^{-1}(b)) = b, \ \forall b \in B \end{cases}.$$

Proposición.
Sea $f: A \to B$. <u>Entonces</u>:

$$f \text{ es biyectiva} \Leftrightarrow f \text{ es inversible}$$

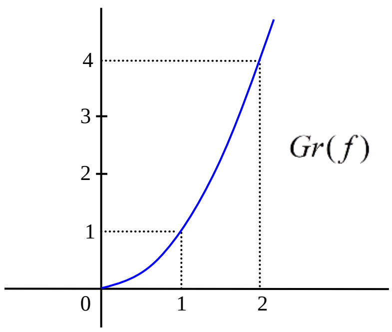
Observación.
Sea $f: R \to R$ biyectiva. Luego, existe $f^{-1}: R \to R$.
Como $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, resulta que $(x, y) \in Gr(f) \Leftrightarrow (y, x) \in Gr(f^{-1})$.
Luego, el gráfico de f^{-1} y el gráfico de f son simétricos respecto de la recta $y = x$.



Observaciones.

1) Es importante notar que en la definición del concepto de función intervienen tres elementos: el <u>dominio</u> (A), el <u>codominio</u> (B) y la <u>relación funcional</u> (la "ley" que relaciona los elementos de A con los elementos de B).
Por lo tanto, si se modificara alguno de estos tres elementos entonces se obtendría una nueva función (distinta a la anterior).
En el caso que se modifique el dominio o el codominio de una función pero <u>no</u> la relación funcional (en esencia no cambiamos la correspondencia), mientras no exista peligro de confusión, seguiremos notando a la nueva función de la misma manera que notábamos la original pero debemos recordar siempre que hemos cambiado la función.

2) Sea $f: R \to R$ definida por $f(x) = x^2$.
Vimos que esta función no es ni inyectiva ni suryectiva. Sin embargo, podemos elegir adecuadamente nuevos dominio y codominio para esta relación funcional de manera tal que resulte biyectiva.
<u>En efecto</u>:
Como $Im(f) = [0,+\infty)$, para que resulte suryectiva, elegimos como nuevo codominio el conjunto $[0,+\infty)$ (su imagen).
Según lo analizado anteriormente, $f(x) = f(x') \Leftrightarrow x = x' \vee x = -x'$. Luego, para que resulte inyectiva, como nuevo dominio podemos optar entre los conjuntos $[0,+\infty)$ y $(-\infty,0]$.
Elijamos $[0,+\infty)$ como su nuevo dominio.
Teniendo en cuenta la observación 1), si consideramos $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ resulta que ahora f es biyectiva.



Luego, existe $f^{-1}:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tal que

$$\begin{cases} f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \geq 0 \\ f(f^{-1}(y)) = y, \ \forall y \geq 0 \end{cases} \quad ①.$$

Esta función (f^{-1}) recibe el nombre de **raíz cuadrada** y se nota $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
Observemos entonces que sólo podemos calcular la raíz cuadrada de números positivos o cero y que su resultado es un número positivo o cero.
Si $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es el <u>único</u> número <u>no negativo</u> b tal que $b^2 = a$ ②.
En este caso ① dice que

$$\begin{cases} \sqrt{x^2} = x, \ \forall x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x, \ \forall x \geq 0 \end{cases}.$$

Observemos, por ②, que si $x \in R$ entonces

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}.$$

Definición.

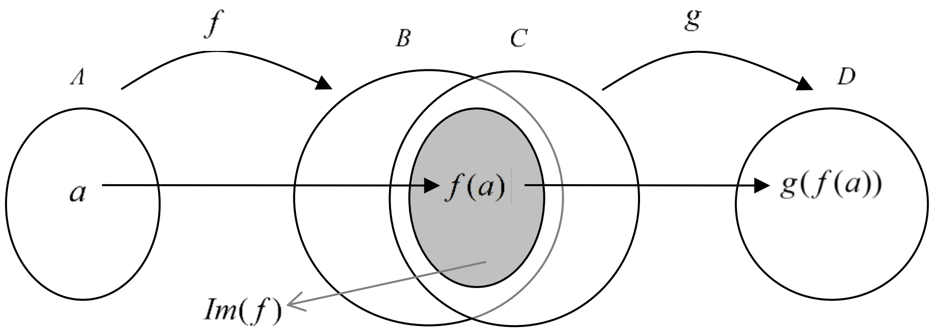
Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ tales que $Im(f) \subset C$.

Se denomina **composición** de g y f a la función

$$g \circ f : A \to D$$

definida por

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \forall a \in A.$$



Observaciones.

1) Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$ tales que $Im(f) \subset C$.
   De la definición, es claro que $A = Dom(g \circ f) = Dom(f)$.

2) Sean $f : R \to R$ y $g : R \to R$.
   En este caso, la condición $Im(f) \subset C$ debe reemplazarse por $Im(f) \subset Dom(g)$.

3) Dado un conjunto A, la función $f : A \to A$ dada por $f(a) = a$ recibe el nombre de **función identidad** sobre el conjunto A y se nota $f = id_A$.
   Con esta notación, si $f : A \to B$ es inversible, su inversa es la única función $f^{-1} : B \to A$ que verifica

$$\begin{cases} f^{-1} \circ f = id_A \\ f \circ f^{-1} = id_B \end{cases}.$$

Ejemplos.

1) Sean $f, g : R \to R$ dadas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$.
Luego, como $Im(f) \subset R = Dom(g)$, podemos calcular $g \circ f : R \to R$,
$Dom(g \circ f) = Dom(f) = R$.
Luego, si $x \in R$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3.$$

O sea,

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 3, \quad \forall x \in R \text{ ①}.$$

Como $Im(g) \subset R = Dom(f)$, también podemos calcular $f \circ g : R \to R$, y también $Dom(f \circ g) = Dom(g) = R$.
Luego, si $x \in R$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = (x+3)^2.$$

O sea,

$$(f \circ g)(x) = (x+3)^2, \quad \forall x \in R \text{ ②}.$$

Es claro que

$$x^2 + 3 \neq (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9.$$

Por lo tanto, de ① y ② concluimos que $g \circ f \neq f \circ g$.
Es decir, concluimos que en general <u>la composición **no** es conmutativa</u>.

2) Sean $f, g : R \to R$ dadas por $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = x + 3$.
Luego, $Im(f) \subset R = Dom(g)$. Podemos calcular entonces $g \circ f : R \to R$ y $Dom(g \circ f) = Dom(f) = [-1, +\infty)$.
Luego, si $x \geq -1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1} + 3.$$

O sea,

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x+1} + 3, \quad \forall x \geq -1 \text{ ①}.$$

Intentemos calcular $f \circ g : R \to R$.
Como $Im(g) = R \not\subset [-1, +\infty) = Dom(f)$, en principio, no podemos calcular $f \circ g$. Deberíamos entonces "achicar" el $Dom(g)$ para que se verifique la condición $Im(g) \subset Dom(f)$.
Sin embargo, si operamos formalmente, resulta que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+3) = \sqrt{(x+3)+1} = \sqrt{x+4}.$$

O sea,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+4}.$$

Nos damos cuenta que $Dom(g \circ f) = [-4, +\infty)$.
Luego, bastará considerar $Dom(g) = [-4, +\infty)$, o sea $g : [-4, +\infty) \to R$, para que se verifique $Im(g) \subset Dom(f)$ y poder calcular $f \circ g$. En este caso

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x+4}, \quad \forall x \geq -4 \text{ ②}.$$

Luego, sin preocuparnos quién debería ser el $Dom(g)$, pudimos calcular $f \circ g$.

De ① y ②, es claro que también en este ejemplo resultó $g \circ f \neq f \circ g$.

Definiciones.

Sean $f, g : R \to R$. Las operaciones de R permiten definir nuevas funciones a partir de f y g.

1. Se denomina función **suma** de f y g a la función $f + g : R \to R$ definida por
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
En este caso, $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

2. Se denomina función **resta** de f y g a la función $f - g : R \to R$ definida por
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x).$$
En este caso, $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

3. Se denomina función **producto** de f y g a la función $f \cdot g : R \to R$ definida por
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$
En este caso, $Dom(f \cdot g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

4. Se denomina función **cociente** de f y g a la función $\frac{f}{g} : R \to R$ definida por
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$
En este caso, $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap \{x \in Dom(g) : g(x) \neq 0\}$.

Definiciones.

Sea $f : R \to R$ tal que $Dom(f) = R$.

1. Se dice que f es **par** sii $f(-x) = f(x), \forall x \in R$.
2. Se dice que f es **impar** sii $f(-x) = -f(x), \forall x \in R$.

Observaciones.

Sea $f : R \to R$ tal que $Dom(f) = R$.

1. Si f es par su gráfico es simétrico respecto de la recta $x = 0$ (eje y).
Son ejemplos de funciones pares: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^4$, en general $f(x) = x^n$ con $n \in N$ par, $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + x^2 - 1$.

2. Si f es impar su gráfico es simétrico respecto del origen de coordenadas.
Son ejemplos de funciones impares: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, en general $f(x) = x^n$ con $n \in N$ impar, $f(x) = 2x^5 + 3x^3 - x$.

Definiciones.

Sea $f : R \to R$.

1. $r \in Dom(f)$ se denomina una **raíz** o **cero** de f sii $f(r) = 0$.

   El conjunto de todas las raíces de f se denomina conjunto de **ceros** o de **raíces** y se nota
$$C_0(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) = 0\}.$$
   Desde un punto de vista geométrico $C_0(f)$ es la intersección del gráfico de f con la recta $y = 0$ (eje x).

2. Se denomina conjunto de **positividad** de f al conjunto
$$C_+(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) > 0\}.$$
   Desde un punto de vista geométrico $C_+(f)$ es el conjunto de puntos donde el gráfico de f se mantiene por arriba del eje x.

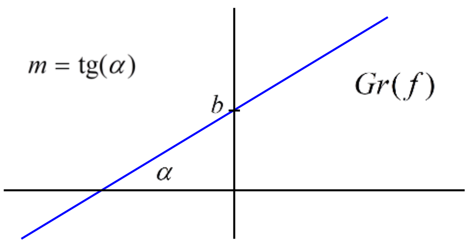
3. Se denomina conjunto de **negatividad** de f al conjunto
$$C_-(f) = \{x \in Dom(f) : f(x) < 0\}.$$
   Desde un punto de vista geométrico $C_-(f)$ es el conjunto de puntos donde el gráfico de f se mantiene por abajo del eje x.

Mencionaremos a continuación algunos ejemplos de funciones reales de variable real.

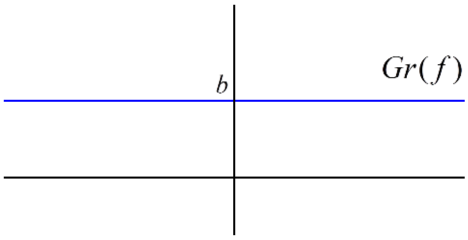
<u>FUNCIONES LINEALES</u>

$f : R \to R$ se dice que es **lineal** sii f tiene la forma
$$f(x) = mx + b,$$
para ciertos $m, b \in R$. $Dom(f) = R$. Si $m \neq 0$ f es biyectiva.

Su gráfico es una recta no vertical que tiene pendiente m (m es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el semieje x positivo) y ordenada al origen b ($b = f(0)$ es la intersección de la recta con el eje y).



En particular, si $m = 0$, la función $f(x) = b$ se denomina función **constante**. Su gráfico es una recta horizontal.



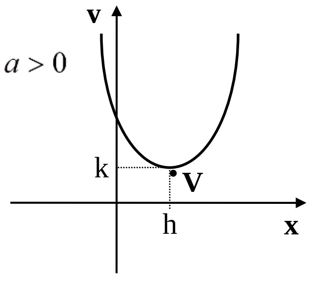
FUNCIONES CUADRÁTICAS

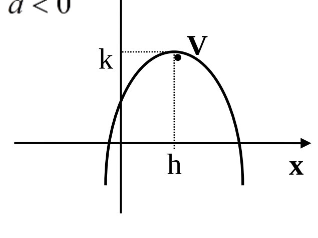
$f : R \to R$ se dice que es una función **cuadrática** si es de la forma

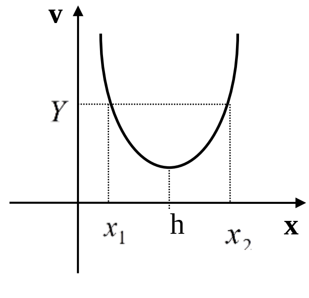
$$f(x) = a.(x-h)^2 + k, \quad a \neq 0, \text{ (I)}$$

donde a, h y k son números reales, h es la coordenada x del punto vértice y k es la coordenada y del punto vértice, es decir el vértice de la parábola es el punto del plano $V = (h,k)$. En general se usa la notación x_v e y_v en vez de h y k respectivamente; en ese caso escribimos $V = (x_v, y_v)$. Es sólo un tema de "notación". El valor del parámetro a (que siempre debe ser **no nulo** para que sea una función cuadrática) nos indica el sentido de la abertura del gráfico de la función (hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$), por otra parte también nos indica cuan "cerrada" o "abierta" es la abertura de la parábola (si a es muy grande en valor absoluto la parábola se "cerrará" hacia el eje y, si en cambio a es muy chico en valor absoluto la parábola se "abrirá" hacia el eje x). Si $a > 0$, el vértice de la parábola $V = (h,k)$ es el punto más "bajo" de la parábola y la función f toma un valor mínimo, $f(h) = k$. Si $a < 0$, el vértice de la parábola $V = (h,k)$ es el punto más "alto" de la parábola y la función f toma un valor máximo, $f(h) = k$. Otro punto muy importante a destacar es que el gráfico de una función cuadrática es simétrico respecto de una recta **vertical** que pasa por la coordenada x del vértice ($x_v = h$), dicha recta se la denomina *eje de simetría de la parábola*. Este hecho muy particular (no común a cualquier función) nos da una herramienta matemática muy fuerte. Si x_1 y x_2 son dos números del eje x de manera tal que $f(x_1) = Y$ y $f(x_2) = Y$ (el mismo valor Y), dicho de otra manera si la parábola pasa por los puntos del plano (x_1, Y) y (x_2, Y), entonces la coordenada x del vértice ($x_v = h$) debe encontrarse a "mitad de camino" (equidistante) de x_1 y x_2, esto es:

$$x_v (= h) = \frac{x_1 + x_2}{2}. \qquad (1)$$







El gráfico de una función cuadrática corta siempre al eje y (una única vez pues es una función), para obtener dicho valor sólo basta tener en cuenta que se busca un punto del plano que pertenece al eje y y al gráfico de la función, dicho de otra manera buscamos el punto de **intersección** del eje y con el gráfico de la función, por lo tanto, para encontrarlo, basta observar que por pertenecer al eje y debe tener la "pinta" (0, #), esto es $x = 0$. Por otra parte como el punto buscado debe pertenecer al gráfico de la función debe satisfacer $f(0) = \#$, y por lo tanto la manera de hallarlo es calculando $f(0)$. (Esto es independiente de que sea una función cuadrática y es válido para cualquier función).

Es sabido también que una función cuadrática **puede o no** cortar al eje x (lo puede no cortar, lo puede cortar una única vez o lo puede cortar dos veces). En el caso en que lo corte es importante hallar el o los valores donde eso ocurre. Si una función cuadrática corta al eje x en $x = r$ se dice que r es una *raíz* de la función. Analíticamente: r es una raíz de la función f si $f(r) = 0$ (su gráfico pasa por el punto del plano $(r,0)$). De manera análoga a lo que comentamos respecto de cómo hallar la intersección del gráfico de una función con el eje y, veamos cómo se calcula el o los valores donde el gráfico de la función corta al eje x (en el caso que esto ocurra). Hay que buscar los puntos de intersección entre el eje x y el gráfico de la función. Dichos puntos por pertenecer al eje x deben tener la "pinta" $(\#,0)$, y por pertenecer al gráfico de la función deben verificar $f(\#) = 0$. Por lo tanto sólo basta plantear la ecuación $\underline{f(x) = 0}$ y tratar de estudiar si tiene o no solución y en el caso de que la tenga hallar todas las soluciones ("despejar los x"). (Este hecho también es independiente de que sea una función cuadrática y es válido para cualquier función). Existen varias formas de hallar sus raíces. Una manera es la siguiente (2):

1ro) se iguala la expresión (I) a 0, esto es

$$a.(x-h)^2 + k = 0$$

2do) se despeja el término $(x-h)^2$

$$(x-h)^2 = -\frac{k}{a}$$

3ro) se pregunta si esto es posible.

Si el miembro derecho de la ecuación diera negativo no puede haber solución, pues ningún número real elevado al cuadrado puede ser negativo, en este caso la función cuadrática **no** tiene raíces.

Si el miembro derecho de la ecuación diera cero, el único número que elevado al cuadrado da cero es el cero. En este caso la función cuadrática tiene una única raíz

$$x = h$$

Si el miembro derecho de la ecuación diera positivo, existen dos números que elevados al cuadrado son iguales a él. En este caso la función cuadrática tiene dos raíces distintas

$$x = h + \left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right) \quad \text{y} \quad x = h - \left(\sqrt{-\frac{k}{a}}\right).$$

Observar que ambas raíces equidistan de h (la coordenada x del vértice) (*simetría*).

Como un <u>caso particular de (1)</u>, si una función cuadrática tiene dos raíces r_1 y r_2, como $f(r_1) = 0$ y $f(r_2) = 0$, entonces:

$$x_v (= h) = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

La forma (I) no es la única manera de expresar una función cuadrática. Desarrollando el término $(x-h)^2$ (recordando la expresión del cuadrado de un binomio $(x-h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$) llegamos a la expresión:

$$f(x) = ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k)$$

Cambiándole el nombre a ciertos parámetros conseguimos otra forma general para expresar una función cuadrática:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (a \neq 0), \qquad \text{(II)}$$

donde a es el mismo que en (I), $b=-2ah$ y $c=ah^2+k$.
De la relación

$$b=-2ah$$

es posible despejar el valor de h obteniendo

$$h=\frac{-b}{2a}. \qquad (3)$$

La igualdad (3) nos da un método para encontrar la expresión (I) de una forma cuadrática conociendo la expresión (II). Con (3) calculamos h (la coordenada x del vértice), una vez conocido el valor de h para conocer el valor de k sólo nos basta recordar que $f(h)=k$ y por lo tanto todo lo que tenemos que hacer es reemplazar x por h en la expresión que tenemos (en este caso la (II)) y habremos calculado el vértice de la parábola.
Existe una tercer forma general útil de expresar una función cuadrática, la expresión *factorizada*. Ésta puede conseguirse solamente en el caso en que la parábola tenga raíces. Si una función cuadrática tiene raíces r_1 y r_2, entonces puede expresarse en la forma:

$$f(x)=a(x-r_1)\cdot(x-r_2),\ \ (a\neq 0), \quad \text{(III)}$$

donde, también en este caso, a es el mismo que en (I) y en (II).
Veamos cuáles son las ventajas y/o desventajas de tener expresada una función cuadrática en cada una de las tres formas ((I),(II) o (III)) y cómo podemos analíticamente llegar de una a otra.

1) Supongamos tener la expresión (I) de una función cuadrática, o sea tenemos como dato que $f(x)=a.(x-h)^2+k,\quad a\neq 0$. Es claro entonces que en este caso conocemos su vértice $V=(h,k)$. Para calcular dónde corta al eje y procedemos como lo vimos anteriormente hallando $f(0)$ y para calcular las raíces, si las tuviera, procedemos como en (2). Si quisiéramos obtener la expresión (II) basta desarrollar el término $(x-h)^2$ (¡hacer cuentas!). Si quisiéramos obtener la expresión (III), sólo en el caso en que tuviera raíces, procedemos como en (2).

2) Supongamos tener la expresión (II) de una función cuadrática, o sea tenemos como dato que $f(x)=ax^2+bx+c,\quad (a\neq 0)$. En este caso estamos en desventaja. Para calcular el vértice debemos proceder apelando a (3) y llegar así a la expresión (I). Para calcular las raíces, si las tuviera, una vez calculada la expresión (I) se procede como en el caso anterior. Existe otra forma de calcular las raíces, si las tuviera, y es recurriendo a una fórmula que puede deducirse analíticamente. La fórmula dice que las raíces de una función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c,\quad (a\neq 0)$, vienen dadas por la expresión:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

donde se sobreentiende que:

- si $b^2-4ac<0$, no existe x real , y por lo tanto, la función no tiene raíces;
- si $b^2-4ac=0$, la función tiene una única raíz

$$x=\frac{-b}{2a} \quad \text{(¡la coordenada } x \text{ del vértice!)}$$

- si $b^2-4ac>0$, entonces la función posee dos raíces:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

3) Supongamos, por último, tener la expresión (III) de una función cuadrática, o sea tenemos como dato que $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2), \quad (a \neq 0)$. En este caso la expresión nos dice que r_1 y r_2 son raíces de la función. En efecto, $f(x) = 0$ es equivalente a $a(x-r_1)\cdot(x-r_2) = 0$, y como un producto de números es cero únicamente si alguno de ellos es cero, entonces debe ser $a = 0$ ó $x - r_1 = 0$ ó $x - r_2 = 0$. Pero como $a \neq 0$, las únicas posibilidades son que $x = r_1$ ó $x = r_2$. O sea que las raíces son efectivamente r_1 y r_2. Conocidas las raíces, usando (1), podemos hallar h y luego k, obteniendo el vértice y la expresión (I). Para conseguir la expresión (II) basta desarrollar la expresión (III) (¡hacer cuentas!).

FUNCIONES POLINÓMICAS

$f : R \to R$ se dice que es una función **polinómica** o simplemente un **polinomio** sii f tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \cdots\cdots, a_2, a_1, a_0 \in R$. $Dom(f) = R$.

Las funciones lineales son un caso particular de funciones polinómicas. Las funciones **cuadráticas**, $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, también son funciones polinómicas.

Otros ejemplos de funciones polinómicas son $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = 4x^5 - \sqrt{2}x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 3$, $f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, etc.

FUNCIONES RACIONALES

$f : R \to R$ se dice que es una función **racional** sii f es un cociente de dos funciones polinómicas. Es decir, si f tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

para ciertos polinomios P y Q. $Dom(f) = \{x \in R : Q(x) \neq 0\}$.

Son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x) = \frac{1}{x},\ Dom(f) = R_{\neq 0};\ f(x) = \frac{x}{x+3},\ Dom(f) = \{x \in R : x \neq -3\};$$

$$f(x) = \frac{-4x^3 + 3x^2 + 2x - 6}{x^2 - 3x + 2},\ Dom(f) = \{x \in R : x \neq 1 \wedge x \neq 2\}.$$

FUNCIONES HOMOGRÁFICAS

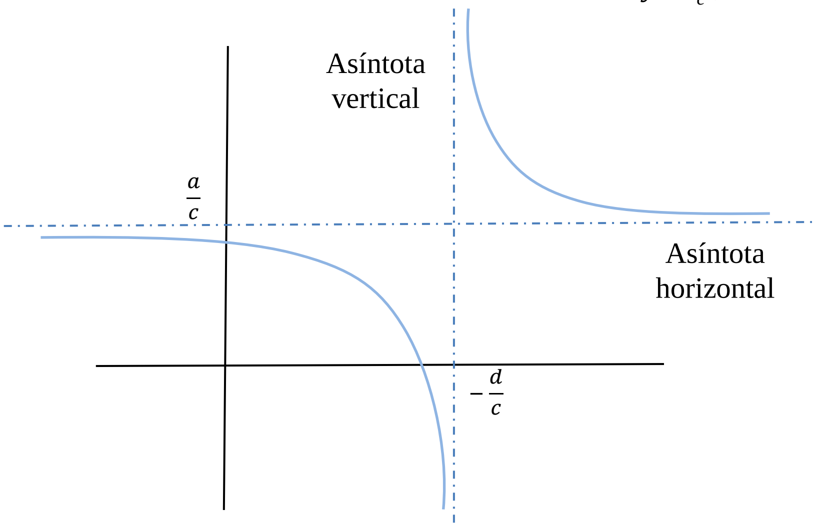
$f : R \to R$ se dice que es una función **homográfica** sii f es un cociente de dos funciones lineales. Es decir, si f tiene la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ (c \neq 0,\ ad - bc \neq 0),$$

(este tipo de funciones provienen de realizar corrimientos de la función $f(x)=\frac{1}{x}$).

El $Dom(f)=R-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

El gráfico de estas funciones son **hipérbolas**.
Su gráfico se aproxima a dos rectas:
una vertical denominada **Asíntota vertical** de ecuación $x=-\frac{d}{c}$,
y una horizontal denominada **Asíntota horizontal** de ecuación $y=\frac{a}{c}$,



(las ramas podrían estar invertidas según la función).

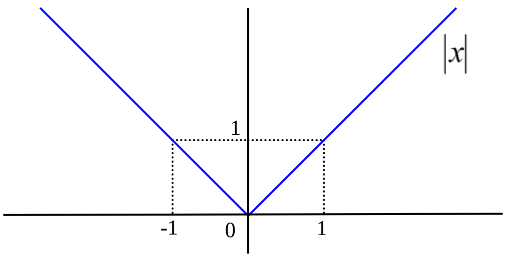
FUNCIÓN MÓDULO

Dado $x \in R$ se puede definir, desde un punto de vista geométrico, el módulo o valor absoluto de x como la distancia entre x y 0. Desde un punto de vista analítico esta definición da lugar a una función definida a trozos (o por partes) denominada **módulo**

$$f: R \to R \text{, dada por}$$

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x<0 \end{cases}.$$

Su gráfico es el siguiente:



Alguna de las propiedades más importantes de la función módulo son las siguientes:

a) $\forall x \in R: |x| \geq 0$ y $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$.

b) $\forall x \in R : |-x| = |x|$. O sea, la función módulo es par.

c) $\forall x, y \in R : |x + y| \leq |x| + |y|$.

d) $\forall x, y \in R : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

e) $\forall x \in R,\ a > 0 : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$.

f) $\forall x \in R,\ a > 0 : |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$.

g) $\forall x \in R,\ a > 0 : |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$.

h) $\forall x \in R,\ a > 0 : |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$.

i) $\forall x, y \in R : |x - y|$ mide la distancia entre x e y.

<u>FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS</u>

Recordemos que dado $a \in R$, para cada $n \in N$, se define

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ veces}}.$$

Esta operación, denominada **potenciación**, verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} a^{n+m} = a^n \cdot a^m & (1) \\ a^{n \cdot m} = (a^n)^m & (2) \end{cases},$$

$\forall a \in R;\ \forall n, m \in N$.

La potenciación se extiende a potencias enteras definiendo $\forall a \in R_{\neq 0}$ y $\forall n \in N$:

$$\begin{cases} a^0 = 1 & (3) \\ a^{-n} = (a^n)^{-1} = \dfrac{1}{a^n} & (4) \end{cases},$$

Es fácil verificar que con las definiciones (3) y (4) las propiedades (1) y (2) siguen siendo válidas $\forall n, m \in Z$.

Para poder extender la potenciación a potencias racionales es necesario restringir los valores de a.

Si $a \in R_{>0}$ y $q = \frac{m}{n} \in Q$ ($n \in N,\ m \in Z$) se define

$$a^q = (a)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},$$

donde $\sqrt[n]{a^m}$ indica el único número positivo b tal que $b^n = a^m$.

Puede verificarse también que siguen siendo válidas las propiedades (1) y (2).

Ahora bien, la extensión de la potenciación a potencias reales ya no es tan sencilla. Se basa en el Axioma de Completitud de los números reales.

<u>En definitiva</u>: para cada $a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1$ (fijo) queda definida una función que denominamos **exponencial** en base a y notamos

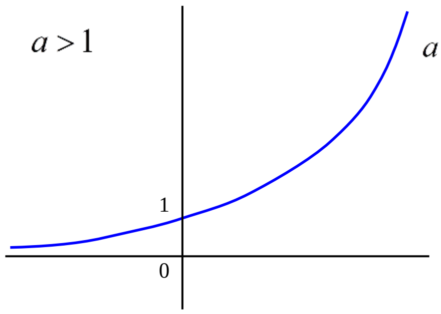
$$f : R \to R \text{ dada por } f(x) = a^x.$$

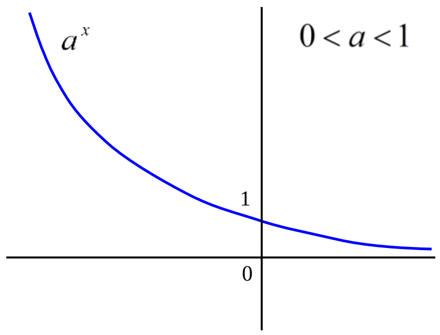
Hemos excluido el caso $a=1$ pues, como $1^x=1, \forall x \in R$, obtendríamos la función constante $f(x)=1$.

Las funciones exponenciales verifican las siguientes propiedades:

1) $Dom(f)=R$.
2) $Im(f)=(0,+\infty)$ ($\forall x \in R: f(x)=a^x>0$).
3) $a^{x+y}=a^x \cdot a^y$ ($f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$).
4) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$ ($f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$).
5) $a^{x\cdot y}=\left(a^x\right)^y$.
6) $a^0=1$ ($f(0)=1$; interseccion con el eje y, $y=1$).
7) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$.
8) Si $a>1$, $\forall x,y \in R: x<y \Rightarrow a^x<a^y$ (el gráfico de f es *creciente*).
9) Si $0<a<1$, $\forall x,y \in R: x<y \Rightarrow a^x>a^y$ (el gráfico de f es *decreciente*).

Los tipos de gráficos posibles para una función exponencial son los siguientes:





A partir de sus gráficos observamos que $\forall a \in R_{>0}$, $a \neq 1$

$$Dom(f)=R \text{ e } Im(f)=(0,+\infty).$$

Es claro que las funciones exponenciales son inyectivas pero no suryectivas. Luego, para que resulten biyectivas deberemos considerar como nuevo codominio su imagen, o sea, el conjunto $(0,+\infty)$.

Considerando entonces, para cada $a \in R_{>0}$, $a \neq 1$

$$f: R \to (0,+\infty)$$

ahora sí resulta biyectiva.

Su función inversa se denomina **logaritmo en base** a y se la nota $(f)^{-1}=log_a$.

O sea,

$$log_a: (0,+\infty) \to R$$

es la única función que verifica

$$\begin{cases} log_a(f(x)) = x, & \forall x \in R \\ f(log_a(x)) = x, & \forall x > 0 \end{cases} \text{(\#).}$$

Recordando que $f(x) = a^x$, podemos reescribir (#) de la forma siguiente:

$$\begin{cases} log_a(a^x) = x, & \forall x \in R \\ a^{log_a(x)} = x, & \forall x > 0 \end{cases}.$$

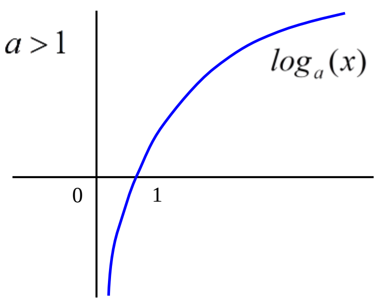
Observemos que, dado que hemos definido el log_a como la función inversa de f, no existe una expresión que describa al log_a. Todo lo que sabemos es que

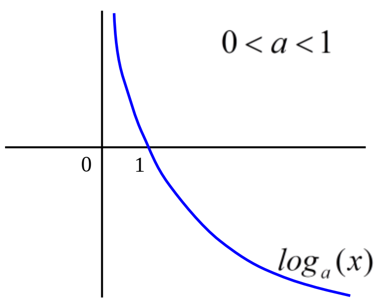
$$\forall x \in R_{>0} : log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x,$$

es decir, el $log_a(x)$ es el único número real y que verifica que $a^y = x$.
Las funciones logarítmicas verifican las siguientes propiedades:

1) $Dom(log_a) = (0,+\infty)$.
2) $Im(log_a) = R$.
3) $\forall x, y \in R_{>0} : log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$.
4) $\forall x, y \in R_{>0} : log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$
5) $\forall x \in R_{>0}, \forall y \in R : log_a\left(x^y\right) = y \cdot log_a(x)$.
6) $log_a(1) = 0$ (intersección con el eje x, $x = 1$).
7) $log_a(a) = 1$.
8) $C_0(log_a) = \{1\}$.
9) Si $a > 1$: $C_+(log_a) = (1,+\infty)$ y $C_-(log_a) = (0,1)$.
10) Si $0 < a < 1$: $C_+(log_a) = (0,1)$ y $C_-(log_a) = (1,+\infty)$.
11) Si $a > 1$, $\forall x, y \in R : x < y \Rightarrow log_a(x) < log_a(y)$ (el gráfico de log_a es *creciente*).
12) Si $0 < a < 1$, $\forall x, y \in R : x < y \Rightarrow log_a(x) > log_a(y)$ (el gráfico de log_a es *decreciente*).
13) Sean $a, b \in R_{>0}$, $a \neq 1, b \neq 1$. $\forall x > 0 : log_b(x) = \dfrac{log_a(x)}{log_a(b)}$.

Los tipos de gráficos posibles para una función logarítmica son los siguientes:





Recordemos que existe un número real (irracional) muy especial, el número e.
Se sabe que $2 < e < 3$ (en particular $e > 1$) y que, aproximadamente (es irracional)

$$e \approx 2{,}7182818.$$

En particular tenemos las funciones $f(x) = e^x$ y su inversa log_e. La función log_e se denomina **logaritmo natural** y se la nota ln. O sea ,

$$\forall x \in R_{>0} : ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

Si consideramos $a = 10$ obtenemos las funciones $f(x) = 10^x$ y su inversa log_{10}. La función log_{10} se la nota simplemente log. O sea,

$$\forall x \in R_{>0} : log(x) = y \Leftrightarrow 10^y = x.$$

La propiedad 13) de las funciones logarítmicas nos permite calcular el valor del logaritmo en una base dada en función del logaritmo en otra base. Es por esta razón que en las calculadoras generalmente aparecen únicamente ln y log.

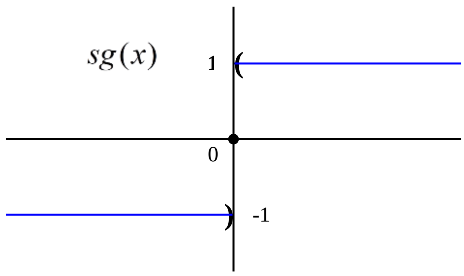
FUNCIONES DEFINIDAS A TROZOS

La función módulo es un ejemplo de lo que denominamos funciones definidas a trozos o simplemente funciones partidas.
Otro ejemplo de este tipo de funciones es la función **signo** que notamos sg. Su definición es la siguiente:

$$sg : R \to R$$

$$sg(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

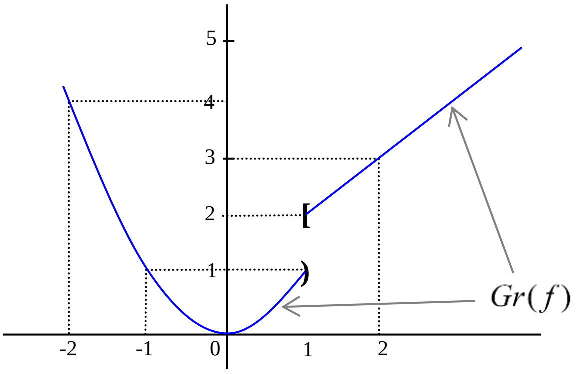
Su gráfico es el siguiente:



Pueden definirse funciones partidas a partir de funciones conocidas. Por ejemplo si $f : R \to R$ es la función dada por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 1 \\ x^2 & si\ x < 1 \end{cases}$$

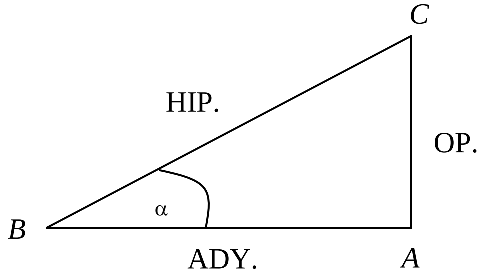
f queda definida a partir de las funciones $g(x) = x+1$ y $h(x) = x^2$.
Su gráfico es el siguiente:



Es decir, la función f posee dos expresiones según si $x \geq 1$ o $x < 1$. Por lo tanto, hay que tener en claro que se tiene una única función, la función f, y no dos. Si queremos saber cuál es el valor de f aplicada a un número x, primero debemos observar si $x \geq 1$ o $x < 1$ y recién después aplicar la expresión correspondiente. Por ejemplo, como $2 \geq 1$ (por más que podemos calcular $h(2) = 2^2 = 4$) $f(2) = 2+1 = 3$ y no $h(2) = 4$.
De la misma manera observemos que $f(0) = 0^2 = 0$ (pues $0 < 1$) y no $h(0) = 0+1 = 1$, $f(1) = 1^2 = 1$ (pues $1 \geq 1$) y no $h(1) = 1+1 = 2$, etc.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Recordemos que construyendo un triángulo rectángulo a partir de un ángulo agudo α (mayor que 0 y menor que un recto),



se definen las relaciones trigonométricas del ángulo α por:

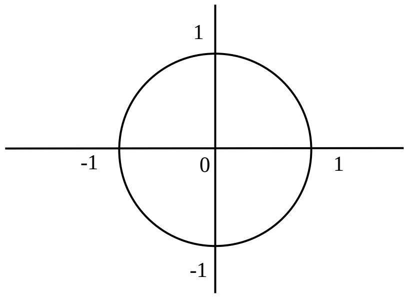
$sen(\alpha) = \dfrac{OP}{HIP}$ (seno de α), $\quad cosec(\alpha) = \dfrac{HIP}{OP} = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$ (cosecante de α),

$cos(\alpha) = \dfrac{ADY}{HIP}$ (coseno de α), $\quad sec(\alpha) = \dfrac{HIP}{ADY} = \dfrac{1}{cos(\alpha)}$ (secante de α),

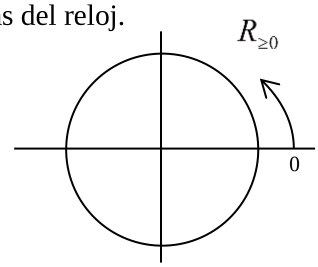
$tg(\alpha) = \dfrac{OP}{ADY}$ (tangente de α), $\quad cotg(\alpha) = \dfrac{ADY}{HIP} = \dfrac{1}{tg(\alpha)}$ (cotangente de α).

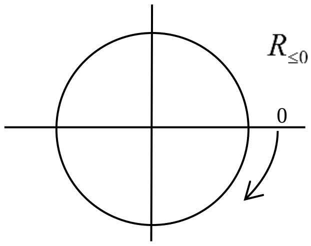
Hemos notado: $OP =$ cateto opuesto a α, $ADY =$ cateto adyacente a α e $HIP =$ hipotenusa del triángulo rectángulo construido.

Por propiedades relativas a triángulos semejantes, estas relaciones dependen sólo del ángulo α y no del triángulo rectángulo construido a partir de él.
Podemos extender estas relaciones definiendo, geométricamente, funciones de R en R. Para ello hacemos lo siguiente:
Consideramos la circunferencia de centro 0 y radio 1 de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.



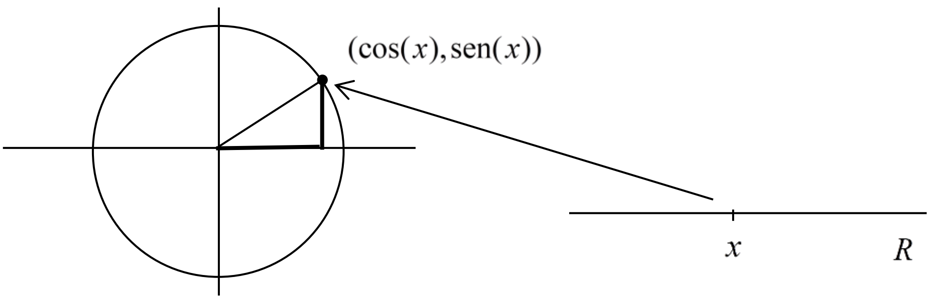
1) "Enrollamos" la semirrecta positiva de números reales sobre la circunferencia en sentido contrario a las agujas del reloj haciendo coincidir el número real 0 con el punto $(1,0)$ de la circunferencia.
"Enrollamos" la semirrecta negativa de números reales sobre la circunferencia en sentido de las agujas del reloj.





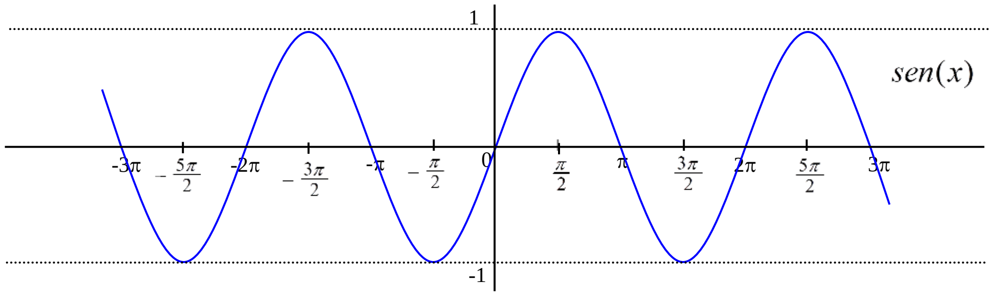
Luego, todo $x \in R$ queda representado en la circunferencia de centro 0 y radio 1.
Es claro que, como la longitud de la circunferencia es 2π, cualquiera sea $x \in R$, los números $x + 2k\pi, \forall k \in Z$ quedan representados sobre el mismo punto de la circunferencia. Por ejemplo, los números reales $0, 2\pi, 4\pi, \ldots, -2\pi, -4\pi, \ldots$, quedan todos representados sobre la circunferencia como el punto del plano $\boldsymbol{R}_{\geq 0}$.
Luego, cada $x \in R$, pensado sobre la circunferencia de centro 0 y radio 1, es un punto del plano (a,b).
Se definen entonces funciones $sen : R \to R$ (seno) y $cos : R \to R$ (coseno) por

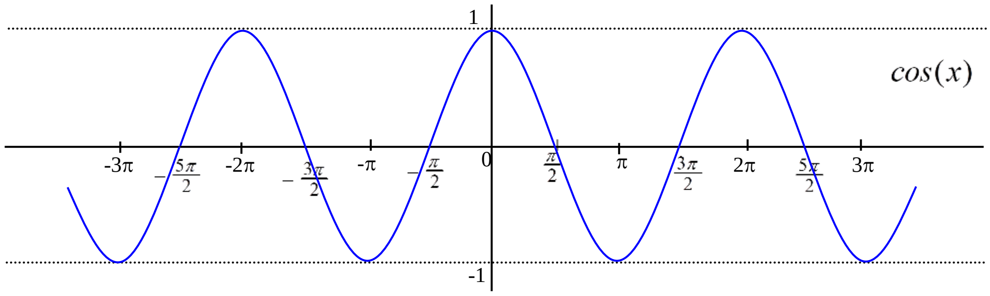
$$\begin{cases} cos(x) = a, \\ \text{sen}(x) = b. \end{cases}$$



Esta definición extiende a todo R las relaciones trigonométricas definidas para ángulos α tales que (medido en radianes) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Los gráficos de las funciones $sen : R \to R$ y $cos : R \to R$ son los siguientes:





A partir de estas definiciones geométricas de las funciones seno y coseno se pueden verificar rápidamente (entre otras) las siguientes propiedades:

1) $Dom(sen) = Dom(cos) = R$.

2) sen y cos son funciones periódicas de período 2π. O sea, $\forall x \in R$ y $\forall k \in Z$
$sen(x + 2k\pi) = sen(x)$ y $cos(x + 2k\pi) = cos(x)$.

3) $sen : R \to R$ es impar. O sea, $sen(-x) = -sen(x), \forall x \in R$.

4) $cos : R \to R$ es par. O sea, $cos(-x) = cos(x), \forall x \in R$.

5) $sen^2(x) + cos^2(x) = 1, \forall x \in R$.

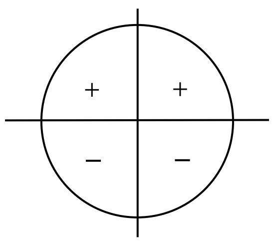
6) $sen(x \pm y) = sen(x) \cdot cos(y) \pm sen(y) \cdot cos(x); \forall x, y \in R$.

7) $cos(x \pm y) = cos(x) \cdot cos(x) \mp sen(x) \cdot sen(y)$.

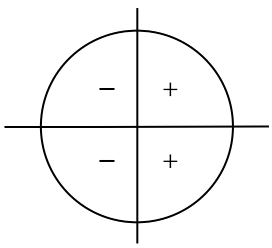
8) $\forall x \in R : sen(x + \frac{\pi}{2}) = cos(x)$ y $cos(x - \frac{\pi}{2}) = sen(x)$.

9) sen es positiva en el primer y segundo cuadrantes y negativa en el tercer y cuarto cuadrantes.

10) cos es positiva en el primer y cuarto cuadrantes y negativa en el segundo y tercer cuadrantes.



$sen(x)$



$cos(x)$

11) $\forall x \in R : sen(x+\frac{\pi}{2}) = cos(x)$ y $cos(x-\frac{\pi}{2}) = sen(x)$.

12) $\forall x \in R : |sen(x)| \leq 1$ y $|cos(x)| \leq 1$.

13) $C_0(sen) = \{x \in R : sen(x) = 0\} = \{x \in R : x = k\pi,\ k \in Z\}$.

14) $C_0(cos) = \{x \in R : cos(x) = 0\} = \{x \in R : x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.

A partir de las funciones sen y cos se definen las otras funciones trigonométricas:

$$tg : R \to R \text{ (tangente)},\ tg(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)},$$
$$Dom(tg) = \{x \in R : cos(x) \neq 0\} = \{x \in R : x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\};$$

$$cosec : R \to R \text{ (cosecante)},\ cosec(x) = \frac{1}{sen(x)},$$
$$Dom(cosec) = \{x \in R : sen(x) \neq 0\} = \{x \in R : x \neq k\pi,\ k \in Z\};$$

$$sec : R \to R \text{ (secante)},\ sec(x) = \frac{1}{cos(x)},$$
$$Dom(sec) = \{x \in R : cos(x) \neq 0\} = \{x \in R : x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\};$$

$$cotg : R \to R \text{ (cotangente)},\ cotg(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)},$$
$$Dom(cotg) = \{x \in R : sen(x) \neq 0\} = \{x \in R : x \neq k\pi,\ k \in Z\}.$$

El gráfico de la función tangente es el siguiente: