

## Práctica 7: Límites.

---

1. Calcular los siguientes límites

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 1}{2x - 2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 7x - 8}{2x^2 - 4x - 6}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{4 - 2x^2}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{-2x^2 - x + 1}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

(k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2}$

(l)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

(m)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$

(n)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5 - \sqrt{x^2 + 16}}{x - 3}$

(o)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

(p)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{x - 1}$

(q)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}$

(r)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$

2. Calcular los siguientes límites

(a)  $\lim_{x \rightarrow \pi} x \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(x)$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \cos\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

(f)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \cdot \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$

3. Calcular los siguientes límites

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 - \cos(x)) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}}{x} \right]$

4. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x+1}{x-4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x+1}{x-4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x+1}{x-4}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x)$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{-1})$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 3^+} \ln\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

5. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x-4}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{x-4}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 - 5x + 3$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 6}{x^3 + 5}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 2x + 6}{x^3 + 5}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 2x + 6}{x^3 + 5x^2 - 3}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{3x^2 - 2x + 6}{x^3 + 5}\right)}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\left(\frac{3x^2 - 2x + 6}{x^3 + 5}\right)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\left(\frac{3x^4 - 2x + 6}{x^3 + 5x^2 - 3}\right)}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

6. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

7. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+1} + 2}{3^x - 5}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x}{7 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cdot 2^x + 7 \cdot 5^x}{7 \cdot 2^x + 3 \cdot 5^x}$$

8. En cada uno de los siguientes casos, realice un gráfico de una función  $f$  que verifique simultáneamente las siguientes condiciones:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2.$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$9. \text{ Hallar todos los } a \in \mathbb{R} \text{ para los cuales se verifica que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+5}{ax-1} = \frac{2}{3}$$

$$10. \text{ Hallar todos los } a, b \in \mathbb{R} \text{ para los cuales se verifican simultáneamente}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + 1} - 1}{x} = 2$$

$$11. \text{ Calcular los siguientes límites}$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(-2x+2)}{x^2+x-2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{1 - \cos(x)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(6x)}{\tan(4x)}$$

$$12. \text{ Hallar todos los } a \in \mathbb{R} \text{ para los cuales se verifica que}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sqrt{x+4}-2}$$

$$13. \text{ Calcular los siguientes límites}$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} (3x-5)^{(1/x)}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{(x)}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x}\right)^{\left(\frac{\tan x}{3x}\right)}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{(x)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2x^2+1}+1}{x}\right)^{(x+1)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin(x)\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x)}{\sin(2x)}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{(x^2)}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 1} (1+x)^{\left(\frac{1}{2x}\right)}$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{(x)}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^{\left(\frac{1}{3x^2}\right)}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-3)^{\left(\frac{1}{x-2}\right)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2-1)^{\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x+2}{3x+2}\right)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2-3x)^{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\cos(x)}{x^2}\right)^{(5x+1)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(x^2)}{x}\right)^{(\ln(x))}$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

14. Hallar todos los  $a \in \mathbb{R}$  para los cuales se verifica que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^{(ax)} = \sqrt{e}$$

15. Calcular los siguientes límites

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^3 + x^2}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sin(x)}{x} \right)^{(\sqrt{x}+1)}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{\sqrt{16x^2 + 5x + 4}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{\sin(x)} \right)^{(\sin(\frac{3}{x}))}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x + \sin(x)}{2 \sin(x)} \right)^{(\cos(\frac{1}{x}))}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + x + 1}}{2x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{\left(\frac{1}{x + \sqrt[5]{x}}\right)}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x))^{\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1} \right)^{\left(\frac{\sin(x)}{\sin(3x)}\right)}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{2+x} \right)^{\left(\frac{\sqrt[5]{x^7}}{\sin^2(x)}\right)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 6x + 11} - x - 3$$