UNIVERSIDAD DE SAN ANDRÉS
INTRODUCCIÓN AL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO
Dr. Claudio G. Schifini

RESOLUCIÓN DE INECUACIONES

La resolución de inecuaciones se basa fundamentalmente en “la regla de los signos” (mas por mas da mas, mas por menos da menos, menos por menos da mas). Como dividir es multiplicar por el inverso multiplicativo, lo mismo vale para la división. Conviene tener en cuenta que:

1) El orden es compatible respecto de la suma (o resta). O sea,

$$\boxed{a < b \Rightarrow a + c < b + c, \forall c \in \mathbb{R}}.$$

Es decir que la “acción” de sumar (o restar) un mismo número a ambos miembros de una inecuación no altera el orden. En este caso el “pasar de término” no altera el orden.

2) El orden es compatible respecto del producto (o división) siempre y cuando se multiplique (o divida) por números positivos. O sea,

$$\boxed{a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c, \underline{\forall \boldsymbol{c} > \mathbf{0}}}$$

3) Si se multiplica (o divide) por números negativos el orden se invierte. O sea,

$$\boxed{a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \underline{\forall \boldsymbol{c} < \mathbf{0}}}$$

4) Las acciones no permitidas son las mismas que en el caso de las ecuaciones: dividir por el número cero o por cualquier expresión que pueda ser cero; calcular raíces cuadradas o de orden par a números negativos o a expresiones que puedan ser negativas.

5) No es cierto que cualquier acción que se le aplique a ambos miembros de una inecuación mantenga el orden. Por ejemplo, la propiedad $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$ es FALSA ($-3 < -2$ pero $(-3)^2 > (-2)^2$).

6) Si a y b son dos números reales (a y b pueden ser expresiones) el hecho que sepamos que $a + b < 0$, no nos es muy útil para determinar los valores de a y b. En cambio si supiéramos que

$$a \cdot b < 0, \text{ o } \frac{a}{b} < 0,$$

podríamos utilizar la regla de los signos y asegurar que

$$(a > 0 \ y \ b < 0) \text{ ó } (a < 0 \ y \ b > 0).$$

Análogamente, si supiéramos que

$$a \cdot b > 0, \text{ o } \frac{a}{b} > 0,$$

podríamos utilizar la regla de los signos y asegurar que

$$(a > 0 \ y \ b > 0) \text{ ó } (a < 0 \ y \ b < 0).$$

Por lo tanto, siempre hay que tratar de factorizar (escribir como un producto o un cociente) y comparar contra 0.

7) Hay que tener en cuenta que NO existe el "pasar de término", o en todo caso entender que "pasar de término" significa haberle aplicado la misma acción (permitida!!!) a dos números que están en un cierto orden y según cual sea la acción aplicada **podría invertirse el orden**.
8) Tampoco existe el "tachar" o "simplificar" pues esto puede hacer que sin darnos cuenta estemos dividiendo por 0 (que no se puede) o por números negativos (que harían invertir el orden).
9) Al igual que en las ecuaciones, tenemos que calcular el dominio de la inecuación. Las soluciones encontradas tienen que pertenecer al dominio.

Ejemplos:

1. $-2x + 4 < 6$

   $Dom = \mathbb{R}$.

   Restando 4 a ambos miembros (el orden no se altera)

$$-2x < 2$$

   Dividiendo por -2 ambos miembros y recordando que el orden se invierte resulta

$$x > -1$$

   O sea

$$S = (-1, +\infty).$$

2. $x^2 - 4x + 3 > 0$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

   Es imposible despejar x. Tenemos que factorizar el miembro izquierdo. Para eso buscamos las raíces del ploinomio que son $x = 1\ y\ x = 3$. Por lo tanto, $x^2 - 4x + 3 = (x - 1) \cdot (x - 3)$.

   Luego la inecuación a resolver es

$$(x - 1) \cdot (x - 3) > 0.$$

   Aplicando la regla de los signos, las posibilidades son

   Caso 1) $(x - 1) > 0\ y\ (x - 3) > 0$

   ó

   Caso 2) $(x - 1) < 0\ y\ (x - 3) < 0$

   Como "y" es intersección y "ó" es unión, debemos resolver cada una de las inecuaciones e intersecar cundo dice "y" y unir cuando dice "ó".

   Esto es (caso 1),

$$x-1>0 \Rightarrow x>1 \qquad \text{y} \qquad x-3>0 \Rightarrow x>3$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 1) es

$$S_1=(3,+\infty).$$

Caso 2)

$$x-1<0 \Rightarrow x<1 \qquad \text{y} \qquad x-3<0 \Rightarrow x<3$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 2) es

$$S_2=(-\infty,1).$$

Finalmente, unimos las soluciones de ambos casos y la solución final es

$$S=(-\infty,1)\cup(3,+\infty).$$

3. $-3x^2+4x-1\geq 0.$

$Dom=\mathbb{R}.$

Para factorizar el miembro izquierdo buscamos las raíces del ploinomio que son $x=1\, y\; x=\frac{1}{3}$.

Por lo tanto, $-3x^2+4x-1=-3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$ (recordar que hay que colocar el coeficiente principal al escribir el polinomio factorizado).

Luego la inecuación a resolver es

$$-3\cdot(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0$$

Dividiendo por -3 ambos miembros y recordando que se invierte el orden, resulta que

$$(x-1)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\leq 0$$

Aplicando la regla de los signos, las posibilidades son

Caso 1) $(x-1)\geq 0\; y\; \left(x-\frac{1}{3}\right)\leq 0$

ó

Caso 2) $(x-1)\leq 0\; y\; \left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0$

Caso 1),

$$(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \qquad \text{y} \qquad \left(x-\frac{1}{3}\right)\leq 0 \Rightarrow x\leq\frac{1}{3}$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 1) es

$$S_1=\phi.$$

Caso 2)

$$(x-1)\leq 0 \Rightarrow x\leq 1 \qquad \text{y} \qquad \left(x-\frac{1}{3}\right)\geq 0 \Rightarrow x\geq\frac{1}{3}$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 2) es

$$S_2 = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

Finalmente, unimos las soluciones de ambos casos y la solución final es

$$S = \phi \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right].$$

4. $\frac{x-4}{-x+3} < 2$.

En este caso, $Dom = \mathbb{R} - \{3\}$.

Si seguimos pensando que lo que está dividiendo "pasa" multiplicando nos quedaría

$$x - 4 < 2 \cdot (-x + 3) \Rightarrow x - 4 < -2x + 6 \Rightarrow 3x < 10 \Rightarrow x < \frac{3}{10}$$

Y obtendríamos como solución

$$S = \left(-\infty, \frac{3}{10}\right).$$

Pero, por ejemplo, $x = 5$ es solución y no está en nuestra respuesta. La razón es que lo que hicimos está mal!!! Al "pasar" multiplicando $(-x + 3)$ lo que hicimos fue multiplicar ambos miembros $(-x + 3)$ y, como no conocemos su signo, no sabemos si el orden se mantiene o se invierte (depende de x).

La resolución correcta es comparar contra 0, conseguir un producto o cociente y utilizar la regla de los signos. O sea,

$$\frac{x-4}{-x+3} < 2 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+3} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-2(-x+3)}{-x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+2x-6}{-x+3} < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3x-10}{-x+3} < 0.$$

O sea, la inecuación original es equivalente (tiene las mismas soluciones) a la inecuación

$$\frac{3x-10}{-x+3} < 0.$$

Que se resuelve considerando los posibles casos de signos.

Caso 1) $3x - 10 > 0 \ \ y \ -x + 3 < 0$

ó

Caso 2) $3x - 10 < 0 \ \ y \ -x + 3 > 0$

Recordar que al multiplicar o dividir por un número negativo el orden se invierte.

Caso 1),

$$3x - 10 > 0 \Rightarrow x > \frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad -x + 3 < 0 \Rightarrow -x < -3 \Rightarrow x > 3$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 1) es

$$S_1 = \left(\frac{10}{3}, +\infty\right).$$

Caso 2)

$$3x - 10 < 0 \Rightarrow x < \frac{10}{3} \qquad \text{y} \qquad -x + 3 > 0 \Rightarrow -x > -3 \Rightarrow x < 3$$

Luego, intersecamos y la solución del caso 2) es

$$S_2 = (-\infty, 3).$$

Finalmente, unimos las soluciones de ambos casos y la solución final es

$$S = (-\infty, 3) \cup \left(\frac{10}{3}, +\infty\right).$$

5. $\frac{5}{x-1} < 0.$

$Dom = \mathbb{R} - \{1\}.$

En este caso conocemos el signo de uno de los dos números ($5 > 0$). Por lo tanto no hay que tomar casos. Para que el cociente sea negativo, como el numerador es positivo, la única posibilidad es que el denominador sea negativo.

O sea,

$$\frac{5}{x-1} < 0 \underset{5>0}{\Leftrightarrow} x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Luego la solución es

$$S = (-\infty, 1).$$

6. $x^2 + 1 > 0.$

$Dom = \mathbb{R}.$

Si intentamos despejar x podemos cometer un error conceptual y dar una respuesta erronea.

$$x^2 + 1 > 0 \Rightarrow x^2 > -1 \Rightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{-1}.$$

Como no existe $\sqrt{-1}$, nuestra conclusión sería que no existe ningún x que sea solución ($S = \phi$).

Pero está claro que nuestra conclusión está mal!!! Por ejemplo, si $x = 1$ ($1^2 + 1 = 2 > 0$), es solución.

Lo que hicimos mal es haber aplicado la raíz cuadrada a un número negativo. No se puede aplicar raíces cuadradas a números negativos. El razonamiento erroneo es primero aplicar raíz cuadrada y después concluir que no existe cuando en realidad si no existe no se puede aplicar.

Entonces ¿cómo encaramos esta inecuación?. Respuesta: razonando.

Sabemos que $x^2 \geq 0$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Sumando 1 (no altera el orden) resulta $x^2 + 1 > 0$, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $S = \mathbb{R}$.

Hay que tener en cuenta que si $\ast$ representa una expresión algebraica, entonces:

• $\ast^2 + posit. > 0$	• $\sqrt{\ast} + posit. > 0$	• $\lvert\ast\rvert + posit. > 0$
• $-\ast^2 - posit. < 0$	• $-\sqrt{\ast} - posit. < 0$	• $-\lvert\ast\rvert - posit. < 0$

7. $\frac{x^2+1}{x-1} > 0.$

$Dom = \mathbb{R} - \{1\}.$

Teniendo en cuenta lo observado antes, como $x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$\frac{x^2+1}{x-1} > 0 \underset{x^2+1>0}{\Longrightarrow} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1.$$

Luego,

$$S = (1, +\infty).$$

INECUACIONES CON MÓDULO

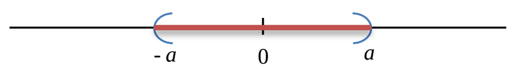
Recordemos que $|x| = distancia\ de\ x\ al\ 0$. En general si $\ast$ representa una expresión algebraica,

$$|\ast| = distancia\ de\ \ast\ al\ 0.$$

Si $a \in \mathbb{R}$, resolver las inecuaciones del tipo

$$|\ast| < a$$

significa hallar todos los números $\ast$ cuya distancia al 0 es menor que a. Geométricamente



O sea,

$$\ast \in (-\mathrm{a}, \mathrm{a}) \Leftrightarrow \ast > -\mathrm{a}\ \wedge\ \ast < \mathrm{a}.$$

O sea $\ast$ debe cumplir ambas inecuaciones. En este caso, puede escribirse como una doble desigualdad en la forma

$$-\mathrm{a} < \ast < \mathrm{a}$$

En algunos casos la inecuación $|\ast| < a$ puede resolverse (despejar la x de $\ast$) operando con la doble desigualdad $(-\mathrm{a} < \ast < \mathrm{a})$, en otros casos habrá que resolver cada inecuación $(\ast > -\mathrm{a}\ \wedge\ \ast < \mathrm{a}\ )$ y despues (como dice “y”) intersecar las soluciones.

Si $a \in \mathbb{R}$, resolver las inecuaciones del tipo

$$|\ast| \leq a$$

significa hallar todos los números $\ast$ cuya distancia al 0 es menor o igual que a. Geométricamente

O sea,

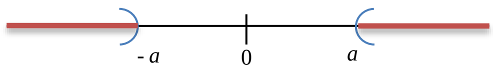
$$\ast \in [-\mathrm{a},\mathrm{a}] \Leftrightarrow \ast \geq -\mathrm{a} \ \wedge \ \ast \leq \mathrm{a} \Leftrightarrow -\mathrm{a} \leq \ast \leq \mathrm{a}.$$

La diferencia con el caso anterior es que ahora puede ser $\ast = -\mathrm{a}$ ó $\ast = \mathrm{a}$

Si $a \in \mathbb{R}$, resolver las inecuaciones del tipo

$$|\ast| > a$$

significa hallar todos los números $\ast$ cuya distancia al 0 es mayor que a. Geométricamente



O sea,

$$\ast \in (-\infty,-\mathrm{a}) \cup (\mathrm{a},+\infty) \Leftrightarrow \ast < -\mathrm{a} \ \vee \ \ast < \mathrm{a}.$$

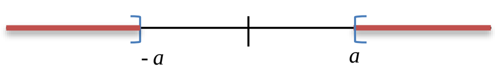
En este caso, como es "o", NO puede escribirse como una doble desigualdad

Para resolver la inecuación $|\ast| > a$ hay que resolver (despejar la x de $\ast$) de cada inecuación ($\ast < -\mathrm{a} \ \vee \ \ast < \mathrm{a}$) y despues (como dice "o") unir las soluciones.

Si $a \in \mathbb{R}$, resolver las inecuaciones del tipo

$$|\ast| \geq a$$

significa hallar todos los números $\ast$ cuya distancia al 0 es mayor o igual que a. Geométricamente



O sea,

$$\ast \in (-\infty,-\mathrm{a}] \cup [\mathrm{a},+\infty) \Leftrightarrow \ast \leq -\mathrm{a} \ \vee \ \ast \geq \mathrm{a}.$$

La diferencia con el caso anterior es que ahora puede ser $\ast = -\mathrm{a}$ ó $\ast = \mathrm{a}$

8. $|\mathrm{x}| < 3$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

   Teniendo en cuenta lo anterior,

$$|\mathrm{x}| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-3,3).$$

   Luego,

$$S = (-3,3).$$

9. $|\mathrm{x}| < -3$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$S = \phi.$$

10. $|-2x + 4| \leq 8$.

$Dom = \mathbb{R}$.

En este caso,

$$|-2x + 4| \leq 8 \Leftrightarrow -8 \leq -2x + 4 \leq 8 \Leftrightarrow -12 \leq -2x \leq 4 \underset{-2<0}{\Longleftrightarrow} 6 \geq x \geq -2.$$

Luego,

$$S = [-2,6].$$

11. $\left|\frac{x-4}{-x+2}\right| \leq 10$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$.

$$\left|\frac{x-4}{-x+2}\right| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq \frac{x-4}{-x+2} \leq 10.$$

En este caso no es posible resolver las dos inecuaciones simultáneamente. Las inecuaciones a resolver son:

$$① \ \frac{x-4}{-x+2} \geq -10 \qquad\qquad ② \ \frac{x-4}{-x+2} \leq 10.$$

Si $S_{①}$ y $S_{②}$ indican respectivamente los conjuntos solución de las inecuaciones ① y ②, teniendo en cuenta lo analizado con anterioridad, la solución final será la <u>intersección</u> de los dos conjuntos. O sea

$$S = S_{①} \cap S_{②}.$$

Resolvemos cada inecuación recordando que hay que conseguir un producto o un cociente comparado contra 0 y aplicar la regla de los signos.

Inecuación ①:

$$\frac{x-4}{-x+2} \geq -10 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+2} + 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+10(-x+2)}{-x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-10x+20}{-x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-9x+16}{-x+2} \geq 0.$$

O sea, la inecuación original es equivalente a la inecuación

$$\frac{-9x+16}{-x+2} \geq 0.$$

Considerando la regla de los signos

Caso 1) $-9x + 16 \geq 0 \ \ y \ -x + 2 > 0$

ó

Caso 2) $-9x + 16 \leq 0 \ \ y \ -x + 2 < 0$.

Caso 1),

$$-9x+16\geq 0 \Rightarrow -9x\geq -16 \underset{-9<0}{\Longrightarrow} x\leq \frac{16}{9} \qquad \text{y} \qquad -x+2>0 \Rightarrow x<2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{16}{9}<2\right)$ y la solución del caso 1) es

$$S_1=(-\infty,\tfrac{16}{9}].$$

Caso 2),

$$-9x+16\leq 0 \Rightarrow -9x\leq -16 \underset{-9<0}{\Longrightarrow} x\geq \frac{16}{9} \qquad \text{y} \qquad -x+2<0 \Rightarrow x>2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{16}{9}<2\right)$ y la solución del caso 2) es

$$S_2=(2,+\infty).$$

Unimos las soluciones de ambos casos y la solución final de la inecuación ① es

$$S_{①}=(-\infty,\tfrac{16}{9}]\cup(2,+\infty).$$

Inecuación ②:

$$\frac{x-4}{-x+2}\leq 10 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+2}-10\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-10(-x+2)}{-x+2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+10x-20}{-x+2}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{11x-24}{-x+2}\leq 0.$$

O sea, la inecuación original es equivalente a la inecuación

$$\frac{11x-24}{-x+2}\leq 0.$$

Considerando la regla de los signos

Caso 1) $11x-24\geq 0 \;\; y \; -x+2<0$

ó

Caso 2) $11x-24\leq 0 \;\; y \; -x+2>0$

Caso 1),

$$11x-24\geq 0 \Rightarrow 11x\geq 24 \Rightarrow x\geq \frac{24}{11} \qquad \text{y} \qquad -x+2<0 \Rightarrow x>2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{24}{11}>2\right)$ y la solución del caso 1) es

$$S_1=[\tfrac{24}{11},+\infty).$$

Caso 2),

$$11x-24\leq 0 \Rightarrow 11x\leq 24 \Rightarrow x\leq \frac{24}{11} \qquad \text{y} \qquad -x+2>0 \Rightarrow x<2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{24}{11}>2\right)$ y la solución del caso 2) es

$$S_1 = (-\infty, 2).$$

Unimos las soluciones de ambos casos y la solución final de la inecuación ② es

$$S_{②} = (-\infty, 2) \cup [\tfrac{24}{11}, +\infty).$$

Finalmente, recordando que la solución final de la inecuación original es $S = S_{①} \cap S_{②}$, resulta que

$$S = S_{①} \cap S_{②} = \left[(-\infty, \tfrac{16}{9}] \cup (2, +\infty)\right] \cap \left[(-\infty, 2) \cup [\tfrac{24}{11}, +\infty)\right] \cap Dom.$$

Por lo tanto,

$$S = \left(-\infty, \frac{16}{9}\right] \cup \left[\frac{24}{11}, +\infty\right).$$

12. $|\mathrm{x}| > 3$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

   Teniendo en cuenta lo anterior,

   $$|\mathrm{x}| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ó } x > 3.$$

   Luego,

   $$S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty).$$

13. $|\mathrm{x}| > -3$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

   Teniendo en cuenta que $|\mathrm{x}| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, resulta que

   $$S = Dom = \mathbb{R}.$$

14. $|-2\mathrm{x} + 4| \geq 8$.

   $Dom = \mathbb{R}$.

   En este caso,

   $$|-2\mathrm{x} + 4| \geq 8 \Leftrightarrow -2x + 4 \leq -8 \text{ ó } -2x + 4 \geq 8.$$

   Tenemos que resolver dos inecuaciones que son:

   $$① \ -2x + 4 \leq -8 \qquad\qquad ② \ -2x + 4 \geq 8.$$

   Si $S_{①}$ y $S_{②}$ indican respectivamente los conjuntos solución de las inecuaciones ① y ②, teniendo en cuenta lo analizado con anterioridad, la solución final será la <u>unión</u> de los dos conjuntos. O sea

   $$S = S_{①} \cup S_{②}.$$

   Inecuación ①:

   $$-2x + 4 \leq -8 \Rightarrow -2x \leq -12 \underset{-2<0}{\Longrightarrow} x \geq 6.$$

   Luego,

$$S_{①} = [6, +\infty).$$

Inecuación ②:

$$-2x + 4 \geq 8 \Rightarrow -2x \geq 4 \underset{-2<0}{\Longrightarrow} x \leq -2.$$

Luego,

$$S_{②} = (-\infty, -2].$$

Finalmente, recordando que la solución final es $S = (S_{①} \cup S_{②}) \cap Dom$, resulta que

$$S = (-\infty, -2] \cup [6, +\infty).$$

15. $\left|\frac{x-4}{-x+2}\right| \geq 10.$

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}.$

$$\left|\frac{x-4}{-x+2}\right| \geq 10 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+2} \leq -10 \text{ ó } \frac{x-4}{-x+2} \geq 10.$$

Las dos inecuaciones a resolver son:

$$① \ \frac{x-4}{-x+2} \leq -10 \qquad\qquad ② \ \frac{x-4}{-x+2} \geq 10.$$

Si $S_{①}$ y $S_{②}$ indican respectivamente los conjuntos solución de las inecuaciones ① y ②, teniendo en cuenta lo analizado con anterioridad, la solución final será la unión de los dos conjuntos. O sea

$$S = S_{①} \cup S_{②}.$$

Resolvemos cada inecuación recordando que hay que conseguir un producto o un cociente comparado contra 0 y aplicar la regla de los signos.

Inecuación ①:

$$\frac{x-4}{-x+2} \leq -10 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+2} + 10 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+10(-x+2)}{-x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-10x+20}{-x+2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-9x+16}{-x+2} \leq 0.$$

O sea, la inecuación original es equivalente a la inecuación

$$\frac{-9x+16}{-x+2} \leq 0.$$

Considerando la regla de los signos

Caso 1) $-9x + 16 \geq 0 \ \ y \ -x + 2 < 0$

ó

Caso 2) $-9x + 16 \leq 0 \ \ y \ -x + 2 > 0$

Caso 1),

$$-9x + 16 \geq 0 \Rightarrow -9x \geq -16 \underset{-9<0}{\Longrightarrow} x \leq \frac{16}{9} \qquad \text{y} \qquad -x + 2 < 0 \Rightarrow x > 2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{16}{9} < 2\right)$ y la solución del caso 1) es

$$S_1 = \phi.$$

Caso 2),

$$-9x + 16 \leq 0 \Rightarrow -9x \leq -16 \underset{-9<0}{\Longrightarrow} x \geq \frac{16}{9} \qquad \text{y} \qquad -x + 2 > 0 \Rightarrow x < 2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{16}{9} < 2\right)$ y la solución del caso 2) es

$$S_2 = [\tfrac{16}{9}, 2).$$

Unimos las soluciones de ambos casos y la solución final de la inecuación ① es

$$S_{①} = [\tfrac{16}{9}, 2).$$

Inecuación ②:

$$\frac{x-4}{-x+2} \geq 10 \Leftrightarrow \frac{x-4}{-x+2} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4-10(-x+2)}{-x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-4+10x-20}{-x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11x-24}{-x+2} \geq 0.$$

O sea, la inecuación original es equivalente a la inecuación

$$\frac{11x-24}{-x+2} \geq 0.$$

Considerando la regla de los signos

Caso 1) $11x - 24 \geq 0 \;\; y \; -x + 2 > 0$

ó

Caso 2) $11x - 24 \leq 0 \;\; y \; -x + 2 < 0$

Caso 1),

$$11x - 24 \geq 0 \Rightarrow 11x \geq 24 \Rightarrow x \geq \frac{24}{11} \qquad \text{y} \qquad -x + 2 > 0 \Rightarrow x < 2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{24}{11} > 2\right)$ y la solución del caso 1) es

$$S_1 = \phi.$$

Caso 2),

$$11x - 24 \leq 0 \Rightarrow 11x \leq 24 \Rightarrow x \leq \frac{24}{11} \qquad \text{y} \qquad -x + 2 < 0 \Rightarrow x > 2$$

Luego, intersecamos $\left(\frac{24}{11} > 2\right)$ y la solución del caso 2) es

$$S_2 = (2, \tfrac{24}{11}].$$

Unimos las soluciones de ambos casos y la solución final de la inecuación ② es

$$S_{②} = (2, \tfrac{24}{11}].$$

Finalmente, recordando que la solución final de la inecuación original es $S = S_{①} \cup S_{②}$, resulta que

$$S = S_{①} \cup S_{②} = \left[\left[\tfrac{16}{9}, 2\right) \cup \left(2, \tfrac{24}{11}\right]\right] \cap Dom.$$

Por lo tanto,

$$S = \left[\tfrac{16}{9}, 2\right) \cup \left(2, \tfrac{24}{11}\right].$$

16. $\frac{9}{|x-5|} \geq 3.$

$Dom = \mathbb{R} - \{5\}.$

Como antes, podríamos restar 3, conseguir un cociente comparado contra 0 y tomar los casos posibles de signos.

Sin embargo, sabiendo que $x = 5 \notin Dom$, resulta que $|x-5| > 0$, por lo tanto podemos multiplicar ambos miembros de la inecuación por $|x-5|$ y el orden no varía. O sea,

$$\frac{9}{|x-5|} \geq 3 \Leftrightarrow 9 \geq 3 \cdot |x-5| \Leftrightarrow 3 \geq |x-5|.$$

Entonces, tenemos que resolver la inecuación

$$|x-5| \leq 3.$$

En este caso,

$$|x-5| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-5 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8.$$

Luego,

$$x \in [2,8].$$

Intersecando con el dominio, resulta

$$S = [2,5) \cup (5,8].$$