Funciones homográficas:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es una función homográfica si f es cociente de dos funciones lineales. Es decir, si f tiene la forma:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $c \neq 0$. y $ad - b \cdot c \neq 0$

(si llega a pasar que $c = 0$ ó $ad - bc = 0$ se puede re-escribir la expresión de manera que f resulte una función lineal)

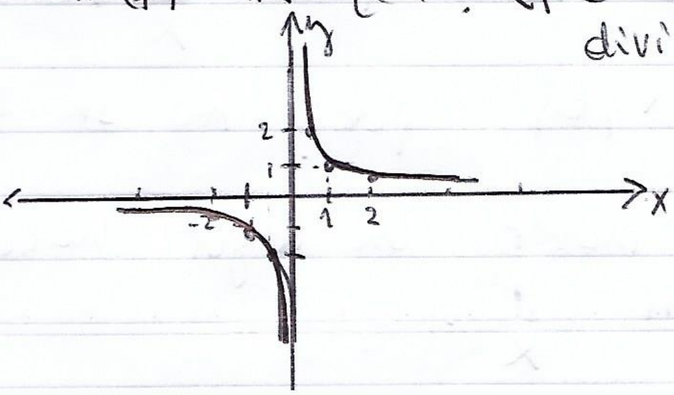
Este tipo de funciones provienen de hacer corrimientos y/o inversiones de la función $\frac{1}{x}$.

- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$.

obs: es una función homográfica con $a=0$, $b=1$, $c=1$, $d=0$.

x	$1/x$.
1	1
−1	−1
2	1/2
−2	−1/2
1/2	2
−1/2	−2

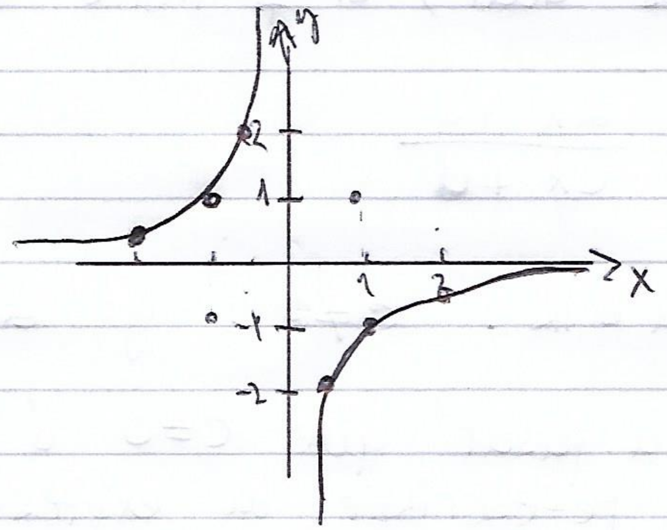
$Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (pues no puedo dividir por 0)



Asintota Horizontal de ecuación $y=0$
Asintota Vertical de ecuación $x=0$
$C_0(f)=\phi$, $C_+(f)=(0,+\infty)$, $C_-(f)=(-\infty,0)$
$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Gráfico de $f(x) = -\frac{1}{x}$. $Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
(pues no puedo dividir por 0)

x	$-1/x$
1	-1
2	$-1/2$
-2	$1/2$
$1/2$	-2
$-1/2$	2



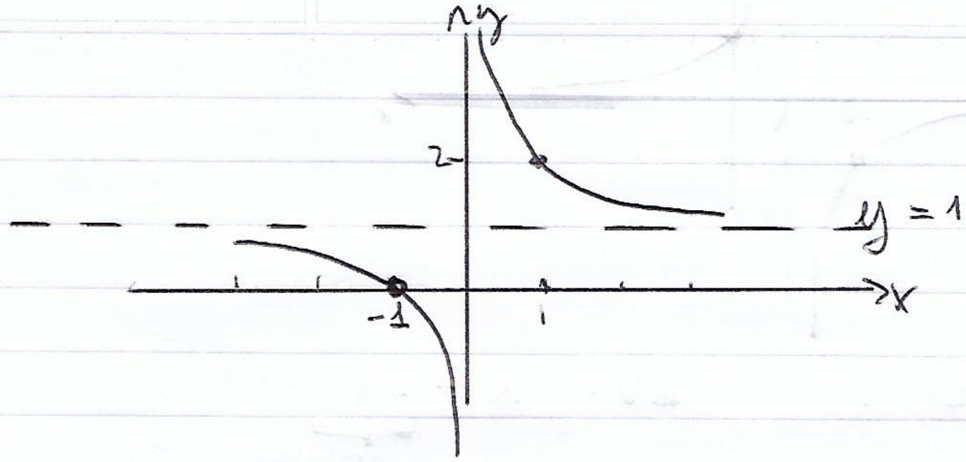
Asintota Horizontal (A.H) de ec. $y=0$
Asintota Vertical (A.V) de ec. $x=0$.
$C_0(f)=\phi$. $C_+(f)=(-\infty,0)$, $C_-(f)=(0,+\infty)$
$Im(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

obs: Se "invirtió" la función $1/x$,
La parte positiva pasa a negativa y la negativa a positiva. O sea, $\frac{1}{x}$ y $-\frac{1}{x}$ son simétricas con respecto al eje x.

- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}+1$.

$Dom f \mathbb{R}\setminus\{0\}$. pues no se puede dividir por 0.

Hay que mover un lugar hacia arriba a la función $\frac{1}{x}$.



AH: $y = 1$. AV: $x = 0$ $\downarrow$ no está en el dom.

Co(f): $\frac{1}{x} + 1 = 0$.

$$\frac{1}{x} = -1$$

$$1 = -x$$

$$\boxed{-1 = x}$$

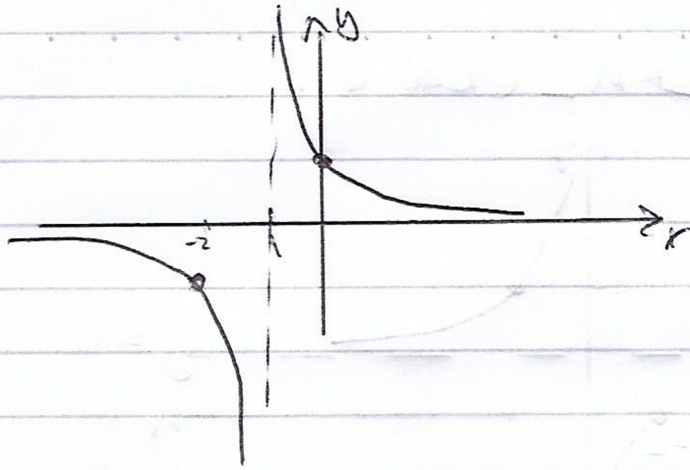
$C_0(f) = \{-1\}$, $C_+(f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$,

$C_-(f) = (-1, 0)$, $Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\downarrow$ la AH.

- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+x}$. $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Pues $1+x = 0 \iff x = -1$.
Luego, cuando $x = -1$ el denominador se hace 0.

en vez de x tengo "1+x", entonces se corre a la izquierda un lugar a $\frac{1}{x}$

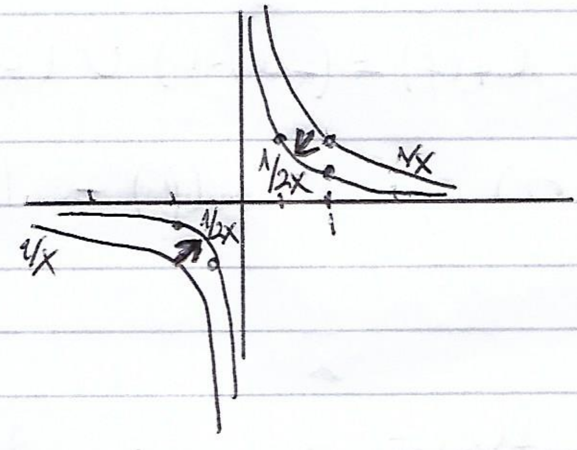


AH: $y = 0$. AV: $x = \underbrace{-1}_{\text{no está en el dom.}}$

$Co(f) = \phi$. $C+(f) = (-1, +\infty)$. $C-(f) = (-\infty, -1)$

$Im(f) = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$.
↓
AH.

- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2x}$. $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



con respecto a $\frac{1}{x}$ está "más cerca" de los ejes.

AH: $y = 0$ AV: $x = 0$.

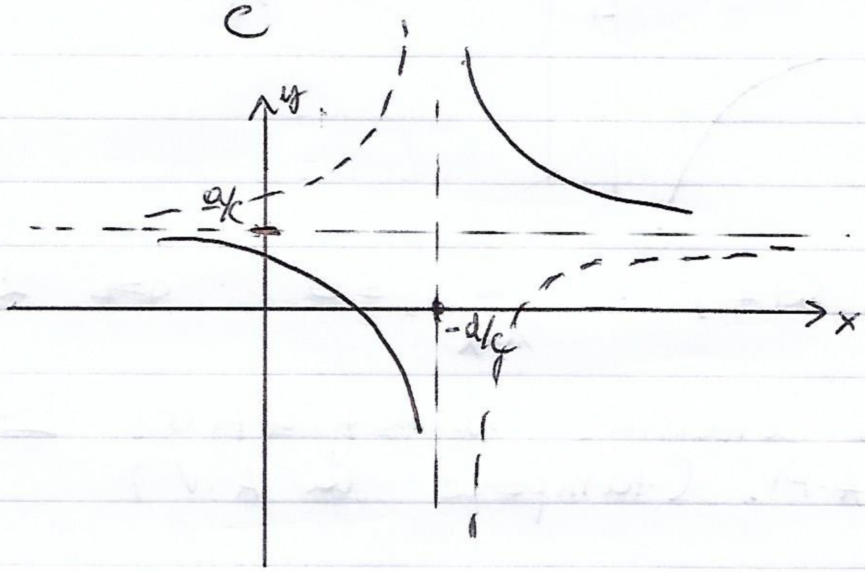
$Co(f) = \phi$ $C+(f) = (0, +\infty)$ $C-(f) = (-\infty, 0)$

$Im(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

<u>En general</u>: $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$ → AV.

AV: $x = -\dfrac{d}{c}$. AH: $y = \dfrac{a}{c}$



podría ser — ó - - -
(cualquiera de los dos gráficos).

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{a}{c} \right\}$ (en ambos casos)
↓
AH.

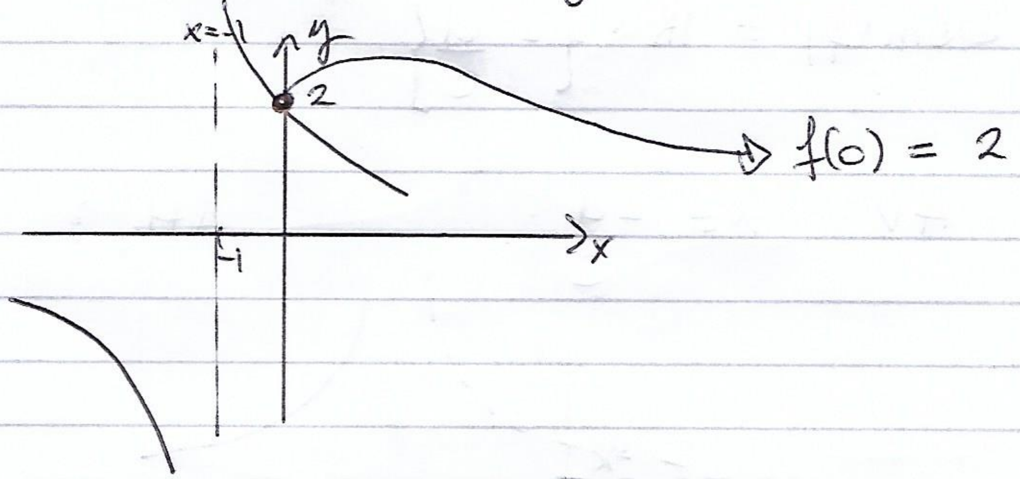
<u>Ejercicios</u>: Para las siguientes funciones homográficas hallar Dom(f), AH., AV., Im(f), Co(f), C+(f), C-(f).

(1) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.

$x+1=0 \iff x=-1$. Luego, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$.

A V: $x=-1$, A H: $y=0$.



Busco $C_0(f)$: $\frac{2}{1+x} = 0 \iff 2 = 0$ Abs!

obs: Las funciones homográficas NO tocan la A.H. (tampoco la A.V)

$C_+(f) = (-1, +\infty)$ $C_-(f) = (-\infty, -1)$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

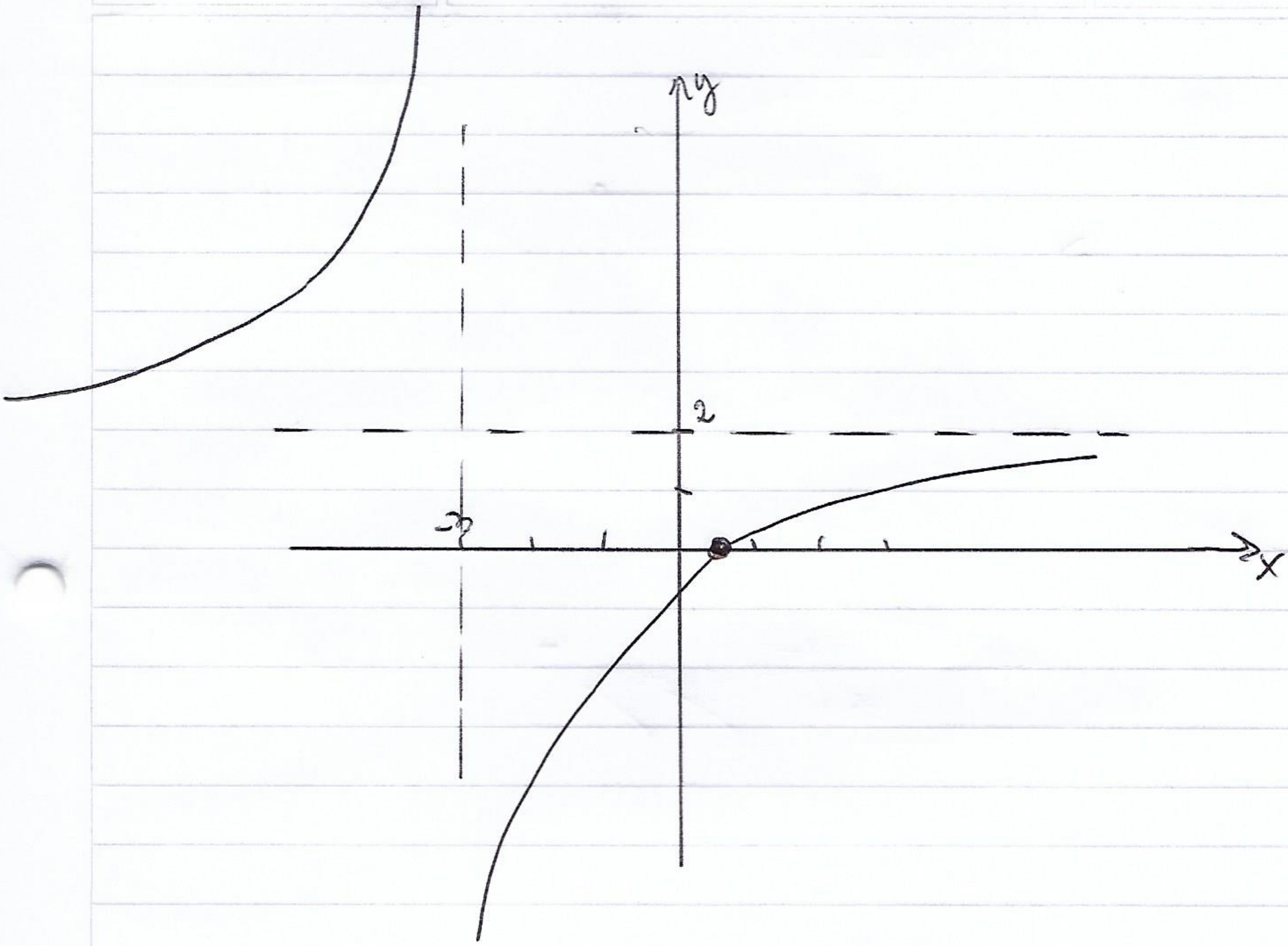
(2). $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

$x+3=0 \iff x=-3$. Luego, $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$\frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$.

A H: $y=2$. A.V: $x=-3$.

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\setminus\{2\}$.



Ubico primero las asintotas y luego algún punto del grafico.

Busco $Co(f)$: $\frac{2x-1}{x+3} = 0$

$2x-1 = 0$

$2x = 1$

$\boxed{x = \frac{1}{2}}$

$Co(f) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ y lo ubico en el grafico

$C_+(f) = (-\infty,-3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; $C_-(f) = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$