HOJA Nº 1

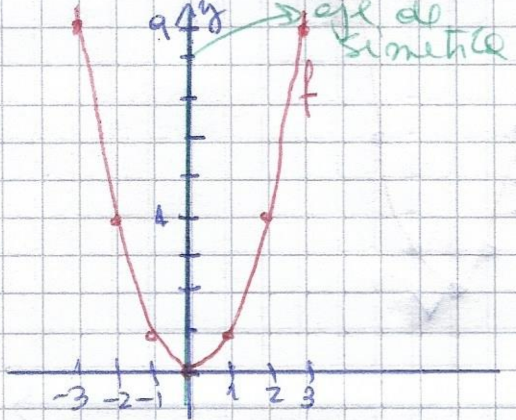
FECHA

IRM- clase 4

Simetrías:

(1) $f(x) = x^2$.

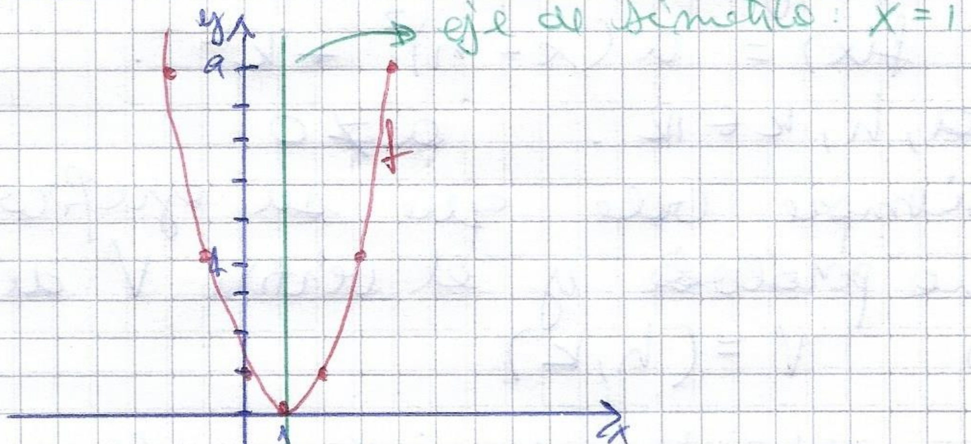
El gráfico es simétrico con respecto al eje y.



(2) $f(x) = (x-1)^2$

El gráfico es simétrico con respecto a la recta vertical $x = 1$.

Recordar que f es un corrimiento de "x^2" un lugar a la derecha:



En general $f(x) = (x-k)^2$. $k \in \mathbb{R}$.

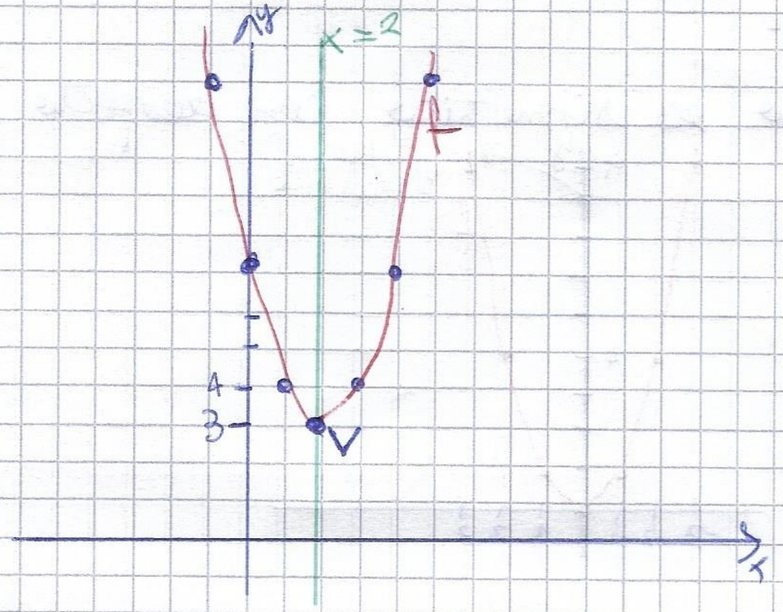
El gráfico tiene un eje de simetría en $x = k$.

Ejercicio: Realiza el gráfico de $f(x) = (x-2)^2+3$.

hay que correr 3 lugares hacia arriba el

NOTA

gráfico de "$\underbrace{(x-2)^2}_{\text{simétrica en } x=2}$ +"



Obs:
$(x-2)^2+3 =$
$x^2-8x+4+3 =$
x^2-8x+7

$a=1$
$b=-8$
$c=7$

$V=(2,3)$ vértice de la parábola.

<u>FORMA CANÓNICA</u> de la función cuadrática.

Una función cuadrática se puede escribir de la forma

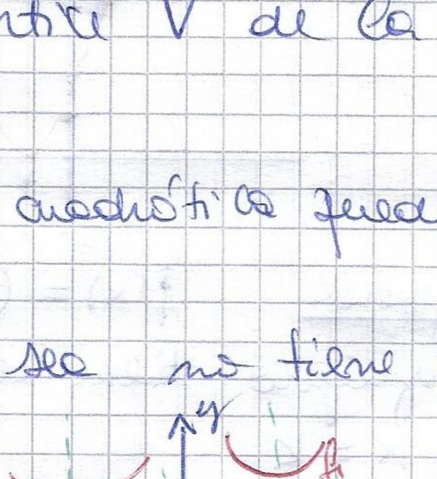
$$f(x) = a(x-h)^2+k.$$

$a, h, k \in \mathbb{R}$. $a \neq 0$.

Siempre vale que su gráfico es una parábola y el vértice V de la parábola es $V=(h,k)$

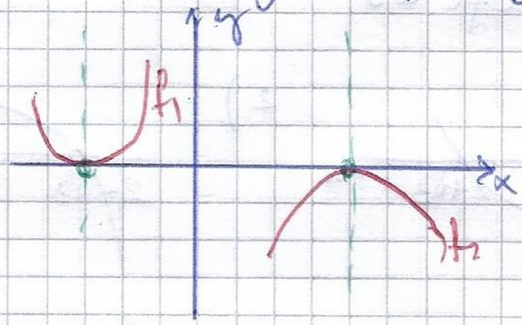
<u>Observación</u>: Una función cuadrática puede o no cortar el eje x:

- la puede NO cortar, o sea no tiene ninguna raíz, por ejemplo:



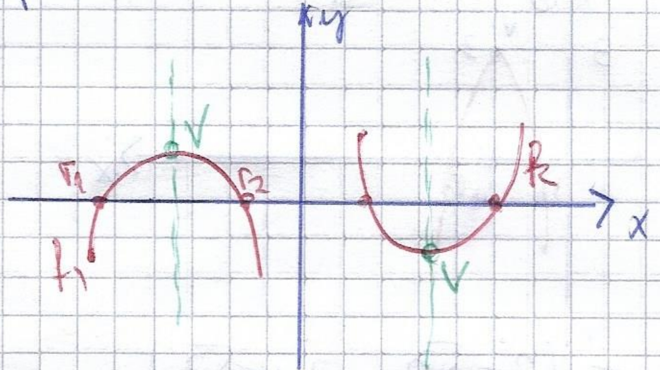
NOTA

• la puede cortar una ÚNICA vez, o sea tiene una sola raíz. por ej:



el eje de simetría coincide con la raíz.

• la puede cortar dos veces: ejemplos:



$V = (x_v, y_v)$

en este caso, vale que $x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}$.

o sea el x_v (donde está el eje de simetría $x = x_v$) está en el medio de las dos raíces, es el promedio!.

<u>ejercicio</u>: Sea $f(x) = (x-2)^2 - 3$.
Hallar $C_0(f)$, $C_+(f)$ y $C_-(f)$.

<u>$C_0(f)$</u>:

$$(x-2)^2 - 3 = 0.$$

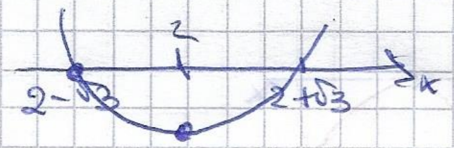
$$(x-2)^2 = 3$$

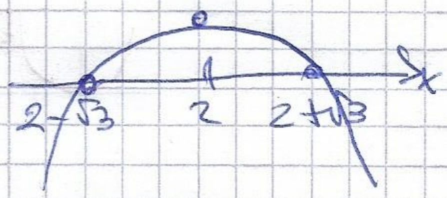
$x - 2 = \sqrt{3}$ $\quad$ $x - 2 = -\sqrt{3}$.

$x = 2+\sqrt{3}$ y $x = 2-\sqrt{3}$

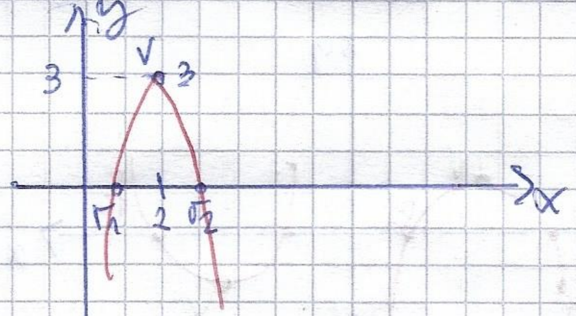
$C_0(f) = \{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$.

dos posibles gráficas:

1) 

2) 

una forma de averiguarlo es mirando el vértice. $V = (2, 3)$



luego: $C_+(f) = (2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$

$C_-(f) = (-\infty, 2-\sqrt{3}) \cup (2+\sqrt{3}, +\infty)$

otra forma de averiguar si es 1) o 2) es saber si la parábola es $\rightarrow \cup$ "contenta"

o $\cap$ "triste".

- si $f(x) = \boxed{a}(x-h)^2 + k$. $a \neq 0$, $h, k \in \mathbb{R}$

entonces $\rightarrow$ $a>0 \Rightarrow \cup$

$a<0 \Rightarrow \cap$.

- si $f(x) = \boxed{a}x^2 + bx + c$. $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$.

NOTA

entonces $\rightarrow a>0 \Rightarrow \cup$

$\searrow a<0 \Rightarrow \cap$

obs: Es el mismo a!

$a(x-h)^2+k = a(x^2-2hx+h^2)+k$

$= ax^2-2hxa+ah^2+k$.

$= \underbrace{a}_{a} \cdot x^2 \underbrace{-2ha}_{b} x + \underbrace{ah^2+k}_{c}$

$= ax^2+bx+c$; mismo a

$b=-2ha$

$c=ah^2+k$. ⊛

¿ Cómo busco las raíces si no está en forma canónica?

Vamos a usar ⊛ para relacionar la forma canónica con la normal.

$$a(x-h)^2+k=0$$

$$(x-h)^2 = \frac{-k}{a} \quad \text{si } \frac{-k}{a}>0.$$

$$x = h+\sqrt{\frac{-k}{a}} \qquad x = h-\sqrt{\frac{-k}{a}}$$

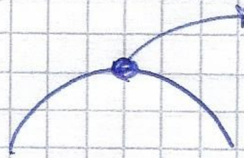
⋮ (re-escribiendo usando ⊛)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

obs: si $b^2-4ac<0 \Rightarrow$ No hay raíces.

De (*) se sigue que $h = \frac{-b}{2a}$.

o lo que es lo mismo $\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$



$\to V = (x_v, y_v)$.

$$f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v.$$

siempre vale que $\boxed{y_v = f(x_v)}$

ej: Sea $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
Hallar el vértice de la parábola correspondiente al gráfico de f.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$\Rightarrow x_v = 2$

$y_v = f(x_v) = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1$

$f(2) = 4 - 8 + 1 = -4 + 1 = -3$

$\to y_v = -3$.

Rta: $V = (2, -3)$

obs: $f(x) = (x-2)^2 - 3$
es la forma canónica de f.

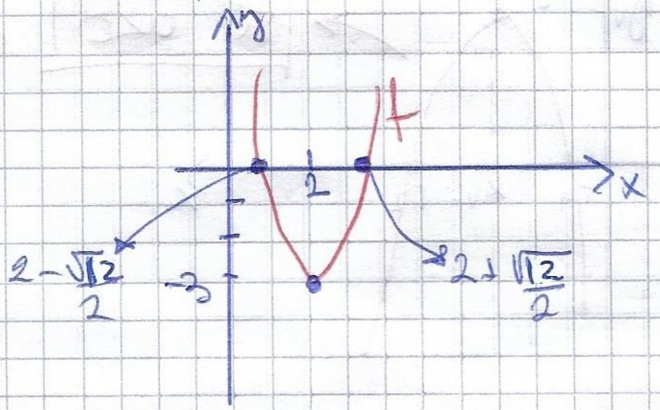
obs: Raíces, puedo usar

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

NOTA

$$= \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{12}}{2}$$

$$\text{Raíces} = \left\{ 2 - \frac{\sqrt{12}}{2} \; ; \; 2 + \frac{\sqrt{12}}{2} \right\}.$$



<u>FORMA FACTORIZADA</u> de una función cuadrática.

Sólo existe cuando f tiene raíces.

- Si f tiene dos raíces distintas r_1 y r_2, entonces:

$$f(x) = \boxed{a} \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$$

Coeficiente principal:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{ó } f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

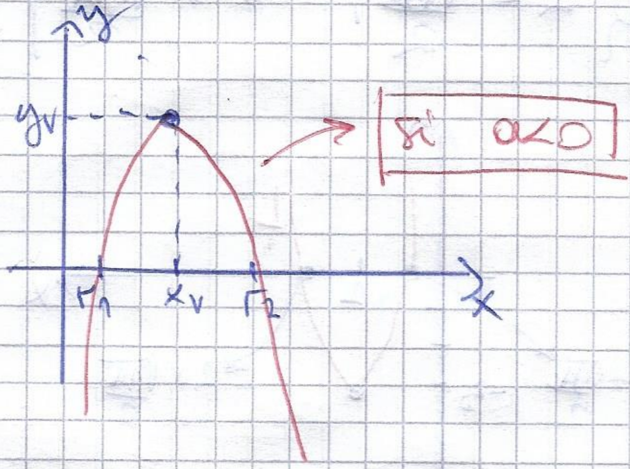
- Si f tiene una sola raíz r entonces:

$$f(x) = \boxed{a} \cdot (x - r)^2$$

Coeficiente principal.

PROPIEDAD

• Si f tiene dos raíces distintas r_1 y r_2 entonces $x_v = \dfrac{r_1+r_2}{2}$.

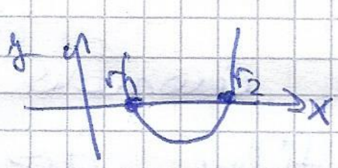


• Si $a<0$:

$C_+(f) = (r_1, r_2)$

$C_-(f) = (-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty)$

• si $a>0$

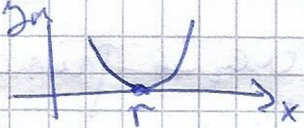


$C_+(f) = (-\infty, r_1) \cup (r_2, +\infty)$

$C_-(f) = (r_1, r_2)$

¿ y si tengo una única raíz r?

• si $a>0$

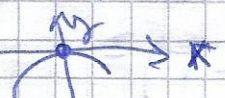


$r = x_v$

$C_+(f) = (-\infty, r) \cup (r, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{r\}$

$C_-(f) = \emptyset$

• si $a<0$



$C_+(f) = \emptyset$

$C_-(f) = (-\infty, r) \cup (r, +\infty)$