POLITÉCNICO DE LEIRIA
ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Departamento de Matemática

Caderno de apontamentos teóricos e de exercícios teórico-práticos de Álgebra Linear

2023/2024

Licenciatura em Engenharia Informática – 1.º ano

Elaborado pelos docentes:

Ana Mendes

Fernando Sebastião

Ana Cristina Lemos

Conceição Nogueira

____

Uma **proposição** (declaração ou frase) é uma afirmação que é falsa (F ou 0) ou verdadeira (V ou 1), sem ambiguidades.

As **proposições compostas** são formadas por subproposições (ou proposições elementares) e vários conetivos lógicos (por exemplo, "e", "ou", ...).

O valor lógico de uma proposição composta fica determinado pelo valor lógico das subproposições e pela forma como estas estão conetadas.

Uma proposição designa-se por **primitiva** quando não pode ser decomposta em subproposições mais simples.

Operações lógicas: Considerando p e q duas proposições, define-se:

- a **negação** de p e denota-se por $\sim p$ e lê-se "não p" ou "negação de p". O valor lógico de $\sim p$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	$\sim p$
V	F
F	V

- a **conjunção** de p e q e denota-se por $p \wedge q$ e lê-se "p e q". O valor lógico de $p \wedge q$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- a **disjunção** de p e q e denota-se por $p \vee q$ e lê-se "p ou q". O valor lógico de $p \vee q$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- a **disjunção exclusiva** de p e q e denota-se por $p \dot{\vee} q$ e lê-se "ou p ou q". O valor lógico de $p \dot{\vee} q$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \dot{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Proposições e tabelas de verdade

- Cada variável lógica pode tomar um de dois valores distintos: ou Verdadeiro ou Falso.

- Uma **proposição composta** $P(p, q, \ldots)$ é uma expressão construída a partir das **variáveis lógicas** p, q, $\ldots$ e dos **conetivos lógicos** $\wedge$, $\vee$, $\sim$, entre outros.

- O valor lógico de uma proposição $P(p, q, \ldots)$, em geral, depende dos valores lógicos das variáveis lógicas p, q, $\ldots$. Para estudar o valor lógico de uma proposição composta pode-se usar uma **tabela de verdade**.

  Exemplo:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

(A tabela de verdade de uma proposição que dependa de n variáveis lógicas terá, para além da linha das proposições, 2^n linhas.)

- Chama-se **tautologia** a uma proposição que é sempre verdadeira e **contradição** a uma proposição que é sempre falsa, independentemente dos valores lógicos das variáveis lógicas.

- Por convenção têm-se as seguintes prioridades: primeiro a negação; depois a conjução e a disjunção; por último a implicação e a equivalência.

Ordem de precedência	operador lógico
1°	negação
2°	conjunção / disjunção
3°	implicação / equivalência

Usam-se parêntesis para clarificar ou alterar a ordem pela qual se realizam as operações lógicas.

Equivalência lógica

Duas proposições $P = P(p, q, \ldots)$ e $Q = Q(p, q, \ldots)$ são **logicamente equivalentes**, ou iguais, escrevendo-se $P \equiv Q$, se $P(p, q, \ldots) = Q(p, q, \ldots)$, para qualquer conjunto de variáveis lógicas $(p, q, \ldots)$.

Declarações condicionais e bicondicionais

- Uma **declaração condicional** ou **implicação** de p e q representa-se por $p \to q$. Lê-se "p implica q" ou "se p então q". O valor lógico de $p \to q$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Uma **declaração bicondicional** ou **equivalência** de p e q representa-se por $p \leftrightarrow q$. Lê-se "p é equivalente a q" ou "p se e só se q". O valor lógico de $p \leftrightarrow q$ estuda-se recorrendo a uma tabela de verdade.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercícios

1. Representando por letras as proposições elementares, traduza em linguagem simbólica as seguintes afirmações, com o auxílio dos conetivos lógicos:

   (a) Este ano vou a Inglaterra e não vou ao Brasil.

   (b) Este ano vou ao Brasil ou vou a Inglaterra.

   (c) Se este ano vou ao Brasil então não vou a Inglaterra.

2. Formule em linguagem corrente a negação das duas primeiras proposições do exercício anterior.

3. Indique o valor lógico de cada proposição composta.

   (a) (5 é divisor de 10) $\wedge$ (3 é divisor de 11).

   (b) (3 não é número primo) $\vee$ (20 é múltiplo de 4).

   (c) (8 é um número par) $\rightarrow$ (2 não é um número primo).

   (d) (4 é divisor de 20) $\vee$ (6 é divisor de 10).

   (e) (5 é um número ímpar) $\leftrightarrow$ (4 não é par).

   (f) $(1+3=5) \rightarrow (\sqrt{36} = 6)$.

   (g) $(|-3| = 3) \wedge (2^3 = 8)$.

4. Supondo que os valores lógicos das proposições p, q e r são, respetivamente, V, F e F, determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições.

   (a) $(\sim q \wedge q) \vee \sim r$

   (b) $\sim p \rightarrow r$

   (c) $p \wedge (\sim q \rightarrow r)$

   (d) $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$

5. Sejam p,q e r proposições. Construa a tabela de verdade das proposições compostas seguintes e diga, justificando, quais as proposições compostas que são tautologias e quais são contradições.

   (a) $\sim (p \wedge \sim q)$

   (b) $p \wedge \sim p$.

   (c) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

   (d) $(p \wedge q) \rightarrow p$

   (e) $(p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim r)$

   (f) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

   (g) $(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

   (h) $(p \dot{\vee} q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

6. Sejam p, q e r proposições tais que $p \wedge r$ é uma proposição verdadeira e $p \rightarrow q$ é uma proposição falsa. Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

   (a) $p \wedge q \wedge r$.

   (b) $p \vee (q \wedge r)$.

   (c) $(q \rightarrow p) \wedge r$.

7. Três indivíduos A, B e C, suspeitos de um rapto, fizeram os seguintes depoimentos:

   A : B é culpado, mas C é inocente;

   B : C é culpado se A é culpado;

   C : Eu estou inocente, mas pelo menos um dos outros dois é culpado.

(a) Traduza os depoimentos de cada indivíduo usando apenas os símbolos "$\sim$", "$\vee$", "$\wedge$", "$\rightarrow$" e denotando a proposição "X é culpado" por $\text{Culp}(X)$, onde $X = A, B, C$.

(b) Admitindo que os três depoimentos são verdadeiros, diga justificando, quem é inocente e quem é culpado.

(c) Supondo que os três indivíduos são inocentes, diga justificando, quem mentiu.

8. Sabendo que a e b são proposições, prove por tabelas de verdade que:

   (a) $(a \wedge \sim b) \rightarrow \sim b \equiv b \rightarrow \sim (a \wedge \sim b)$;

   (b) $\sim [(\sim a \vee b) \wedge (a \rightarrow b)] \equiv a \wedge \sim b$.

9. Sabendo que p e q são proposições, verifique através de tabelas de verdade, que as seguintes proposições são tautologias.

   (a) $\sim (q \rightarrow p) \leftrightarrow \sim p \wedge q$ (negação da implicação).

   (b) $(p \rightarrow (q \wedge p)) \leftrightarrow q \vee \sim p$.

   (c) $p \vee \sim (p \wedge q)$.

10. Recorrendo apenas à proposição p e aos conetivos lógicos $\wedge$, $\vee$ e $\sim$, apresente uma proposição composta que seja:

    (a) uma tautologia;

    (b) uma contradição.

11. Indique, justificando, se a proposição $(p \leftrightarrow q) \vee \sim q$ é uma tautologia, uma contradição ou nenhuma delas.

12. Mostre, recorrendo a tabelas de verdade, que a proposição $p \rightarrow q$ é logicamente equivalente a $\sim p \vee q$.

Soluções:

1. (a) Consideramos as proposições elementares:

   p: Este ano vou ao Brasil.

   q: Este ano vou a Inglaterra.

   $q \wedge \sim p$.

   (b) $p \ \vee \ q$.

   (c) $p \rightarrow \sim q$.

2. (a) $\sim q \vee p$. Este ano não vou a Inglaterra ou vou ao Brasil.

   (b) $\sim p \wedge \sim q$. Este ano não vou ao Brasil e não vou a Inglaterra.

3. (a) F; (b) V; (c) F (d) V (e) F; (f) V; (g) V.

4. (a) Verdadeiro.

   (b) Verdadeiro.

   (c) Falso.

   (d) Verdadeiro.

5. (a)

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

   (b)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

(c)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \ \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	V	F	F

(d)

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

(e)

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge r$	$q \vee \sim r$	$(p \wedge r) \rightarrow (q \vee \sim r)$
V	V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

(f)

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

(g)

p	q	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F

(h)

p	q	$p \dot{\vee} q$	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	$(p \dot{\vee} q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F	F	V

São tautologias as proposições (d), (f) e (h) porque tomam sempre o valor de verdade e são contradições as proposições (b), (c) e (g) porque tomam sempre o valor falso.

6. (a) Falso.

   (b) Verdadeiro.

   (c) Verdadeiro.

7. (a) A: Culp$(B) \wedge \sim$ Culp(C).

   B: Culp$(A) \rightarrow$ Culp(C).

   C: $\sim$ Culp$(C) \wedge$ (Culp$(A) \vee$ Culp(B)).

   (b) A e C são inocentes e B é culpado.

   (c) O indivíduo B teria dito a verdade e os indivíduos A e C teriam mentido.

8. (a)

a	b	$\sim b$	$a \wedge \sim b$	$(a \wedge \sim b) \to \sim b$	$\sim (a \wedge \sim b)$	$b \to \sim (a \wedge \sim b)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

(É tautologia.)

(b)

a	b	$\sim a$	$\sim b$	$\sim a \vee b$	$a \to b$	$(\sim a \vee b) \wedge (a \to b)$	$\sim [(\sim a \vee b) \wedge (a \to b)]$	$a \wedge \sim b$
V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F

9. (a) —-

(b) —-

(c) —-

10. (a) $p \vee \sim p$

(b) $p \wedge \sim p$

11.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim q$	$(p \leftrightarrow q) \vee \sim q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

Nem é tautologia nem é contradição.

12.

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

POLITÉCNICO DE LEIRIA | ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear - 1^o ano / 1^o sem.

Folha 2 - Lógica Proposicional - Propriedades

Sejam p, q e r proposições lógicas. Verificam-se as seguintes propriedades:

Disjunção

Idempotência	$p \vee p \equiv p$
Comutatividade	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
Elemento neutro	$p \vee F \equiv F \vee p \equiv p$
Elemento absorvente	$p \vee V \equiv V \vee p \equiv V$

Conjunção

Idempotência	$p \wedge p \equiv p$
Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Elemento neutro	$p \wedge V \equiv V \wedge p \equiv p$
Elemento absorvente	$p \wedge F \equiv F \wedge p \equiv F$

Distributividade

Conjunção em relação à disjunção	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Disjunção em relação à conjunção	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leis de *De Morgan*:	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
	$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Dupla negação	$\sim\sim p \equiv p$
Propriedade da não contradição	$p \wedge \sim p \equiv F$
Propriedade do terceiro excluído	$p \vee \sim p \equiv V$
Outras propriedades	$\sim V \equiv F, \ \sim F \equiv V$

Definição de implicação	$p \to q \equiv \sim p \vee q$
Negação da implicação	$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$
Contra-recíproca	$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$
Definição de equivalência	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

Exercícios

1. Considere as proposições p, q, r e s dadas por

   p: Neva;

   q: A estrada está escorregadia;

   r: O meu carro tem os pneus gastos;

   s: Chego a tempo ao trabalho.

   (a) Escreva em linguagem corrente:

   I) $\sim q \vee s$.

   II) $\sim r \to \sim q$.

   III) $(r \wedge q) \to \sim s$.

   IV) $\sim p \wedge \sim s$.

   V) $\sim(p \vee q) \to s$.

   (b) Obtenha na forma mais simples a negação de I, II, III, IV e V.

   (c) Escreva em linguagem simbólica:

   (i) Se neva então não chego a tempo ao trabalho.

(ii) Se neva ou a estrada está escorregadia então não chego a tempo ao trabalho.

(iii) Não é verdade que, se neva ou a estrada está escorregadia então eu não chego a tempo ao trabalho.

(iv) Se chego a tempo ao trabalho então nem tenho os pneus gastos nem neva.

(d) Simplifique a expressão

$$\sim [(\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge r)]$$

e em seguida traduza em linguagem corrente o seu significado.

2. Na expressão

$$a \vee \sim (\sim a \rightarrow b)$$

a e b designam proposições elementares.

(a) Simplifique a expressão.

(b) Indique, justificando, o valor lógico da expressão dada, supondo que o valor lógico de a é V.

3. Considere a proposição verdadeira

$$A\colon\ p \wedge (q \rightarrow r).$$

(a) Sabendo que q tem o valor lógico V, qual é o valor lógico de p e r? Justifique.

(b) Prove que

$$\sim A : \sim [(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r)].$$

4. Considere as seguintes proposições:

p: O S.L.B. ganha o campeonato.

q: O F.C.P. ganha o campeonato.

r: O S.C.P. ganha o campeonato.

Admitindo como verdadeira a proposição

$$\sim [\sim p \vee (\sim q \rightarrow r)]$$

diga qual das equipas citadas ganha o campeonato.

5. Sabendo que p e q são proposições, mostre que:

   (a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$; (b) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

6. Sabendo que p, q e r são proposições, simplifique as seguintes proposições, usando as propriedades estudadas.

   (a) $p \wedge (p \rightarrow p)$
   (b) $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$
   (c) $\sim (\sim p \wedge q)$
   (d) $q \wedge \sim (p \wedge q)$
   (e) $\sim [(\sim p \wedge \sim q) \wedge q] \wedge [\sim (p \vee \sim p)]$
   (f) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$
   (g) $[[\sim (p \wedge q) \vee q] \wedge \sim r] \rightarrow (r \wedge \sim p)$

7. Considere a proposição P: $\sim (a \wedge b) \vee c$.

   (a) Construa a tabela de verdade de P.

   (b) Qual é o valor lógico de P se a, b e c forem verdadeiras?

8. Simplifique as seguintes expressões supondo que a, b, p e q são proposições.

   (a) $\sim [a \wedge (a \vee b)] \wedge a$;

   (b) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$;

   (c) $\sim [(\sim a \vee b) \rightarrow (a \wedge b)] \rightarrow a$.

<u>Soluções:</u>

1. (a) I) A estrada não está escorregadia ou chego a tempo ao trabalho.

   II) Se o meu carro não tem os pneus gastos então a estrada não está escorregadia.

   III) Se o meu carro tem os pneus gastos e a estrada está escorregadia então não chego a tempo ao trabalho.

IV) Não neva e não chego a tempo ao trabalho.

V) Se não é verdade que neva ou a estrada está escorregadia, então chego a tempo ao trabalho.

(b) I) $q \wedge \sim s$;

II) $\sim r \wedge q$;

III) $r \wedge q \wedge s$;

IV) $p \ \vee \ s$;

V) $\sim p \wedge \ \sim q \wedge \ \sim s$.

(c) I) $p \rightarrow \sim s$;

II) $(p \vee q) \rightarrow \sim s$;

III) $\sim [(p \vee q) \rightarrow \sim s]$;

IV) $s \rightarrow (\sim r \wedge \sim p)$.

(d) $q \wedge p \wedge \sim r$: Neva e a estrada está escorregadia e o meu carro não tem os pneus gastos.

2. (a) $a \vee \sim b$.

   (b) V.

3. (a) p e r têm valor lógico Verdadeiro.

   (b) —-

4. S.L.B.

5. (a) —-

   (b) —-

6. (a) p.

   (b) F.

   (c) $p \vee \sim q$.

   (d) $q \wedge \sim p$.

   (e) F.

   (f) $p \vee q$.

   (g) r.

7. (a)

a	b	c	$a \wedge b$	$\sim (a \wedge b)$	$\sim (a \wedge b) \vee c$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	V

   (b) V.

8. (a) F.

   (b) V.

   (c) a.

Um **argumento** é uma afirmação em que um dado grupo de proposições P_1, P_2, ..., P_n, a que chamamos de premissas (ou hipóteses) tem como consequência uma proposição Q, a que chamamos de conclusão (ou tese) e denota-se por:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q.$$

O argumento $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n \vdash Q$ é **válido** se Q é verdadeira sempre que as hipóteses P_1, P_2, ..., P_n forem verdadeiras.

As proposições P_1, P_2, ..., P_n são todas verdadeiras se e só se $P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$ é verdadeira. Então, sendo $P = P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n$, dizemos que o argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ é válido se e só se $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Uma **função proposicional** p de domínio A é uma função que para cada $a \in A$, $p(a)$ é uma proposição que toma o valor ou verdadeiro ou falso.

Se p de domínio A é uma função proposicional, $p(a)$ pode ser verdadeira para todos, alguns ou nenhum $a \in A$. Por essa razão passamos a introduzir quantificadores.

Seja p uma função proposicional.

- $\forall\, a \in A, p(a)$: lê-se qualquer que seja $a \in A$, $p(a)$ é verdadeira.
- $\exists\, a \in A, p(a)$: lê-se existe pelo menos um $a \in A$ tal que $p(a)$ é verdadeira.

Negação de declarações com quantificadores

- $\sim [\forall\, a \in A, p(a)] \equiv \exists\, a \in A, \sim p(a)$
- $\sim [\exists\, a \in A, p(a)] \equiv \forall\, a \in A, \sim p(a)$

Uma **função proposicional** p **com mais de uma variável**, de domínio $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é uma função que para cada $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma proposição que toma o valor ou verdadeiro ou falso.

Exercícios

1. Considere o argumento $q, p \to q \vdash p$. Mostre que o argumento não é válido.

2. Sejam p, q e r proposições.

   (a) Mostre que $p \wedge (p \to q) \wedge (\sim q \vee r) \to r$ é uma tautologia.

   (b) Indique, justificando, se o argumento p, $p \to q$, $q \to r \vdash r$ é válido.

3. Considere o argumento $(q \to p) \wedge \sim p, q \to r \vdash r$. Mostre que o argumento não é válido.

4. Analise a validade do seguinte argumento: $p \to (q \to r), \sim r \vdash q \to \sim r$.

5. Prove a validade do seguinte argumento: $p \to \sim q$, $r \to q$, $r \vdash \sim p$.

6. Seja $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $\forall x \in A\ \exists y \in A :\ x + y = 10$.

   (b) $\forall x \in A\ \forall y \in A,\ x + y$ é par.

   (c) $\exists x \in A\ \forall y \in A,\ x + y \leq 15$.

   (d) $\exists x \in A\ \exists y \in A :\ x + y = 10$.

   (e) $\exists x \in A\ \exists y \in A :\ x + y \neq 10$.

7. Sejam $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{10, 20, 30\}$. Considere as seguintes proposições:

   i) $\forall x \in A\ \exists y \in B :\ y$ é divisível por x.

   ii) $\forall x \in A\ \forall y \in B,\ x + y$ é ímpar.

   iii) $\exists x \in A\ \forall y \in A,\ x + y \geq 36$.

   iv) $\exists x \in A\ \exists y \in B\ \forall z \in A,\ x + y + z = 24$.

(a) Determine o valor lógico de cada uma das proposições.

(b) Negue cada uma das proposições acima apresentadas.

8. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $\exists x \in A: \ x + 2 < 5$.

   (b) $\forall x \in A, \ x + 2 > 4$.

   (c) $\exists x \in A: \ x + 4 = 10$.

   (d) $\forall x \in A, \ x + 4 < 10$.

9. Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

   (a) $\forall x \in A \ \exists y \in A: \ x + y = 6$.

   (b) $\forall x \in A \ \forall y \in A, \ x + y = 6$.

   (c) $\exists x \in A \forall y \in A, \ x + y = 6$.

   (d) $\exists x \in A \ \exists y \in A: \ x + y = 6$.

   (e) $\exists x \in A \ \exists y \in A: \ x + y \neq 6$.

10. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

   (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + 3 > 0$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}: \ x + 7 \geq 0$.

   (c) $\exists x \in \mathbb{Z}: \ 3x + 4 = 2$.

   (d) $\forall x, y \in \mathbb{R}: x < y$.

   (e) $\exists x \in \mathbb{R}: \ 2x - \pi = 0$.

   (f) $\exists x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R}: \ y = x^2$.

   (g) $\exists y \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ x + y = 0$.

   (h) $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R}: \ x + y = 0$.

   (i) $\exists a \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}, \ a + x = x$.

11. Indique o valor lógico de cada proposição seguinte e determine a sua negação (simplificando de modo a não usar o símbolo "$\sim$").

   (a) $\exists x \in \mathbb{Q}: \ 3x - 6 = 2$.

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \ x^2 + 3 > 0 \wedge x \leq -5$.

(c) $\exists x \in \mathbb{N}: \ |x| \geq 3.$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}: \ \dfrac{2}{x} = -1.$

(e) $\exists y \in \mathbb{Q}: \ y$ é primo.

Soluções:

1. —

2. (a) — (b) É válido pela alínea anterior.

3. —

4. É válido.

5. —

6. (a) Falso. (b) Verdadeiro. (c) Verdadeiro. (d) Verdadeiro. (e) Verdadeiro.

7. (a) (i)Verdadeiro. (ii) Falso. (iii) Falso. (iv) Falso.

   (b) **i)** $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(y$ não é divisível por $x)$.

   ii) $(\exists x \in A)(\exists y \in B)(x + y$ é par$)$.

   iii) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 36)$.

   iv) $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\exists z \in A)(x + y + z \neq 24)$.

8. (a) Verdadeiro. (b) Falso. (c) Falso. (d) Verdadeiro.

9. (a)Verdadeiro. (b) Falso. (c) Falso. (d) Verdadeiro. (e) Verdadeiro.

10. (a)Verdadeiro. (b) Falso. (c) Falso. (d) Falso. (e) Verdadeiro. (f) Verdadeiro. (g) Falso. (h) Verdadeiro. (i) Verdadeiro.

11. (a) Verdadeiro. Negação: $\forall x \in \mathbb{Q} \ 3x - 6 \neq 2$.

    (b) Falso. Negação: $\exists x \in \mathbb{R}: \ x^2 + 3 \leq 0 \vee x > -5$.

    (c) Verdadeiro. Negação: $\forall x \in \mathbb{N} \ |x| < 3$.

    (d) Verdadeiro. Negação: $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \dfrac{2}{x} \neq -1$.

    (e) Verdadeiro. $\forall y \in \mathbb{Q}, \ y$ não é primo.

Departamento de Matemática

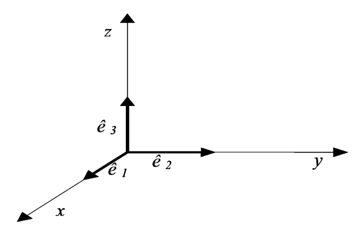
Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear - 1º ano / 1º sem.

Folha 4 - Vetores - Conceitos Básicos

No que se segue, considera-se em $\mathbb{R}^3$ o referencial ortonormado $\{O, \widehat{e}_1, \widehat{e}_2, \widehat{e}_3\}$, onde $O = (0,0,0)$ é a origem e os vetores $\widehat{e}_1$, $\widehat{e}_2$ e $\widehat{e}_3$ são definidos da seguinte forma:

$\mathbf{i} = \widehat{e}_1 = (1,0,0) \parallel$ *eixo dos xx*



$\mathbf{j} = \widehat{e}_2 = (0,1,0) \parallel$ *eixo dos yy*

$\mathbf{k} = \widehat{e}_3 = (0,0,1) \parallel$ *eixo dos zz*

$$\sphericalangle(\widehat{e}_1, \widehat{e}_2) = \sphericalangle(\widehat{e}_1, \widehat{e}_3) = \sphericalangle(\widehat{e}_2, \widehat{e}_3) = \frac{\pi}{2}$$

Nestas condições: $\forall \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3, \;\; \overrightarrow{u} = (a,b,c) = a\,\widehat{e}_1 + b\,\widehat{e}_2 + c\,\widehat{e}_3.$

Se $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor com ponto inicial em A e ponto final em B, então as componentes são definidas por $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A$.

Um vetor $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ não nulo é caracterizado por:

- **direção** - dada pela reta que define a ação do vetor.
- **sentido** - determinado pela orientação que o vetor tem sobre a sua linha de ação.
- **grandeza** - é um escalar que mede a intensidade ou comprimento do vetor.

Nota: O vetor nulo (sem direção, sentido e grandeza) é designado por: $\overrightarrow{0} = (0,0,0)$.

Todos os vetores com o mesmo comprimento, direção e sentido são **equivalentes**.

Sejam $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)\,,\ \overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Podemos definir as seguintes operações:

- **soma:** $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1)\widehat{e}_1 + (a_2 + b_2)\widehat{e}_2 + (a_3 + b_3)\widehat{e}_3 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\,,$
- **diferença:** $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (a_1 - b_1)\widehat{e}_1 + (a_2 - b_2)\widehat{e}_2 + (a_3 - b_3)\widehat{e}_3 = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)\,,$
- **multiplicação por um escalar** $\alpha \in \mathbb{R}$**:** $\alpha\,\overrightarrow{a} = \alpha a_1 \widehat{e}_1 + \alpha a_2 \widehat{e}_2 + \alpha a_3 \widehat{e}_3 = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)\,.$

Sejam $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

- Designa-se por **norma** ou **comprimento** de $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, o escalar definido por:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

- Quando $\|\overrightarrow{a}\| = 1$, $\overrightarrow{a}$ diz-se um vetor **unitário**.

- Designa-se por **versor** do vetor $\overrightarrow{a}$, o vetor unitário $\widehat{a}$ com a direção e sentido de $\overrightarrow{a}$, isto é,

$$\widehat{a} = \frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}(a_1, a_2, a_3).$$

- Considera-se o **ângulo** entre os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ como o menor dos ângulos por eles formado e denota-se por $\theta = \sphericalangle\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right)$. Logo $0 \leq \sphericalangle\left(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}\right) \leq \pi$.

- $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dizem-se **paralelos** ou **colineares**, $\overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}$, quando:

$$\text{existe } \ \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ tal que } \ \overrightarrow{b} = \alpha\ \overrightarrow{a} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0 \vee \theta = \pi.$$

- $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dizem-se **ortogonais** ou **perpendiculares**, $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercícios

1. Dados os pontos $O = (0, 0)$, $A = (2, 1)$ e $B = (-1, -2)$,

   (a) determine o vetor $\overrightarrow{AB}$.

   (b) represente o vetor $\overrightarrow{OP}$ em que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ e indique as coordenadas do ponto P.

2. Determine as coordenadas do ponto A, sabendo que M é o ponto médio de $[AB]$, sendo $B = (2, 0, 1)$ e $M = (4, 1, 2)$.

3. Dados os pontos $A = (2, 0, 1)$, $B = (3, 0, 1)$ e $C = (1, 0, 1)$ verifique se estão sobre a mesma reta.

4. Seja $[ABC]$ um triângulo de vértices A, B e C. Sejam D o ponto médio do lado $[AB]$ e E o ponto médio do lado $[AC]$. Mostre que $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

5. Determine a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$, sendo $A = (3, 2, 1)$ e $B = (1, 0, 2)$.

6. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\overrightarrow{u} = (0, -4, k)$, $\overrightarrow{v} = (0, 3, -1)$.

   (a) Calcule k de modo que $\|\overrightarrow{u}\| = 5$.

   (b) Calcule k de modo que $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{u}$.

7. Considere em $\mathbb{R}^3$ o vetor $\overrightarrow{a} = (-4, 0, 3)$.

   (a) Analise se algum dos vetores $\overrightarrow{b} = (2, 0, -2)$ ou $\overrightarrow{c} = (8, 0, -6)$ é paralelo a $\overrightarrow{a}$.

   (b) Determine o vetor unitário com a direção e sentido de $\overrightarrow{a}$.

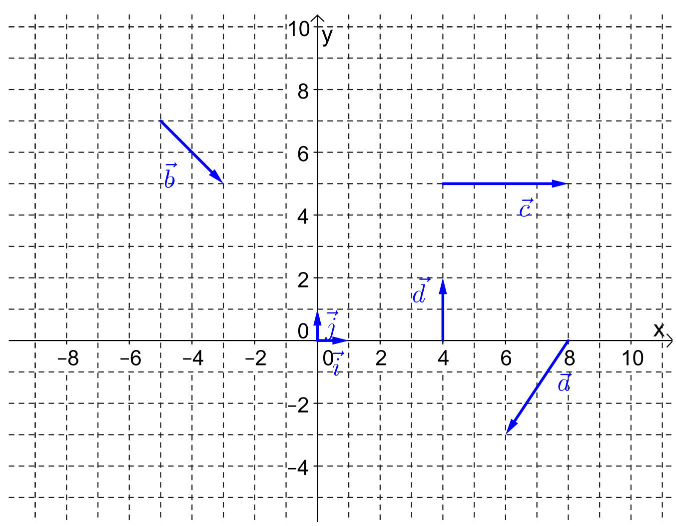
   (c) Determine os vetores unitários que são colineares a $\overrightarrow{a}$.

   (d) Calcule um vetor que seja paralelo a $\overrightarrow{a}$ de comprimento igual a 4.

8. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (20, 30, 60)$. Determine os versores dos vetores.

9. Dado o vetor $\overrightarrow{u} = (0, 4, -3)$, determine $\overrightarrow{v}$ tal que $\overrightarrow{v} \| \overrightarrow{u}$ e $\|\overrightarrow{v}\| = 2$.

10. Considere, no referencial ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de $\mathbb{R}^2$, os vetores representados na figura.



   (a) Indique as coordenadas dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$.

(b) Esboce na figura o vetor $\frac{1}{2}\vec{b}$ com origem no ponto $A(8,4)$ e os vetores $-\vec{a}$ e $3\vec{d}$.

(c) Represente na figura os seguintes vetores:

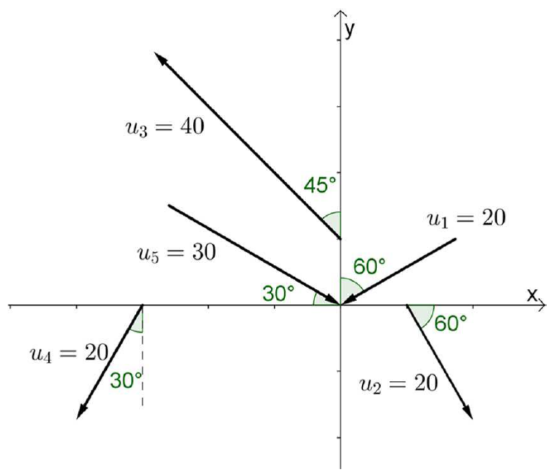
(i) $\vec{u} = -\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$; (ii) $\vec{v} = \vec{b} + \vec{a}$; (iii) $\vec{w} = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$; (iv) $\vec{z} = 2\vec{d} - \vec{a}$.

(d) Indique o vetor unitário $\overrightarrow{t}$ com a direção do vetor $\overrightarrow{d}$ e sentido contrário ao do vetor $\overrightarrow{d}$.

(e) Indique uma equação da reta que passa pelo ponto $A(-3,1)$ e tem a direção do vetor $\overrightarrow{d}$.

11. Observe a figura onde estão representados cinco vetores num referencial ortonormado de $\mathbb{R}^2$.

Determine as coordenadas dos vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ e $\mathbf{u}_5$ cujos comprimentos são indicados.



Soluções:

1. (a) $\overrightarrow{AB} = (-3,-3)$.

(b) $P = (-3,-3)$.

2. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, logo $A = (6,2,3)$.

3. Sim, pois $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AC}$.

4. —

5. 3.

6. (a) $k = -3 \vee k = 3$.

(b) $k = \dfrac{4}{3}$.

7. (a) O vetor $\overrightarrow{c} = -2\overrightarrow{a}$.

   (b) $\widehat{a} = \left(-\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{3}{5}\right)$.

   (c) $\widehat{a} = \left(-\dfrac{4}{5}, 0, \dfrac{3}{5}\right)$ e $-\widehat{a} = \left(\dfrac{4}{5}, 0, -\dfrac{3}{5}\right)$.

   (d) $4\widehat{a} = \left(-\dfrac{16}{5}, 0, \dfrac{12}{5}\right)$ ou $-4\widehat{a} = \left(\dfrac{16}{5}, 0, -\dfrac{12}{5}\right)$.

8. $\widehat{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\widehat{v} = \left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$.

9. $\overrightarrow{v} = \left(0, \dfrac{8}{5}, -\dfrac{6}{5}\right)$ ou $\overrightarrow{v} = \left(0, -\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$.

10. (a) $\vec{a} = (-2, -3)$, $\vec{b} = (2, -2)$, $\vec{c} = (4, 0)$ e $\vec{d} = (0, 2)$.

    (b) e (c)

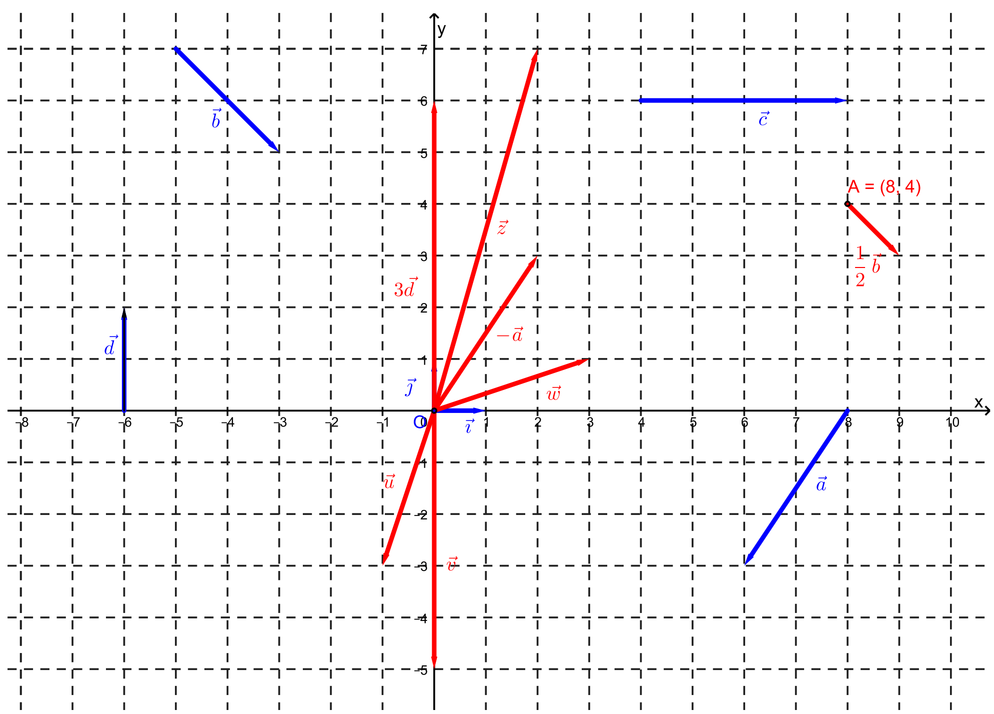


Figura 1: Vetores do exercício das alíneas (b) e (c).

    (d) $\overrightarrow{t} = -\vec{j} = (0, -1)$.

    (e) $(x, y) = (-3, 1) + t(0, 2)$, com $t \in \mathbb{R}$ ou $x = -3$.

11. $\mathbf{u}_1 = \left(-10\sqrt{3}, -10\right)$; $\mathbf{u}_2 = \left(10, -10\sqrt{3}\right)$; $\mathbf{u}_3 = \left(-20\sqrt{2}, 20\sqrt{2}\right)$; $\mathbf{u}_4 = \left(-10, -10\sqrt{3}\right)$; $\mathbf{u}_5 = \left(15\sqrt{3}, -15\right)$.

Produto escalar

Sejam $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\theta = \sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$. Designa-se por **produto escalar** (ou **interno**) **de** $\overrightarrow{a}$ **e** $\overrightarrow{b}$, o escalar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} &= \begin{cases} \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \cos\theta; & \text{se } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0} \\ 0; & \text{no caso contrário} \end{cases} \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \end{aligned}$$

A partir da definição do produto escalar temos que:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\|}\right).$$

Teorema (Condição necessária e suficiente de perpendicularidade)

Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Então,

$$\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = 0 \ \text{ se e só se } \ \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}.$$

Os escalares $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_i\right)\right)$, $i = 1, 2, 3$ são designados por **cossenos diretores** do vetor $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Observe-se que:

- $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_i\right)\right) = \dfrac{a_i}{\|\overrightarrow{a}\|}$; $i = 1, 2, 3$.
- $\cos^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_1\right)\right) + \cos^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_2\right)\right) + \cos^2\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_3\right)\right) = 1$.

- Os cossenos diretores de um vetor são as coordenadas do seu versor.

Exercícios

1. Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (2, -4, -4)$ e $\overrightarrow{v} = (-1, 2, 2)$ de $\mathbb{R}^3$, determine

   (a) $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$.

   (b) $\sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, em graus e em radianos.

2. Determine o ângulo formado pelos seguintes vetores:

   (a) $\overrightarrow{a} = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{b} = (-1, 2, -2)$.

   (b) $\overrightarrow{a} = (0, 1, -1)$ e $\overrightarrow{b} = (2, 0, 2)$.

   (c) $\overrightarrow{a} = (1, 10, 200)$ e $\overrightarrow{b} = (-10, 1, 0)$.

3. Determine $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v}$, sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ e $\sphericalangle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 60^o$.

4. Determine quais dos seguintes vetores são ortogonais ao vetor $\overrightarrow{a} = (2, -3, 1)$.

   $\overrightarrow{b} = (2, 2, 2)$; $\overrightarrow{c} = (4, -1, 0)$; $\overrightarrow{d} = (-1, -2, -3)$; $\overrightarrow{e} = (-2, 9, 31)$.

5. Considere os pontos $P_1 = (1, 2, 1)$ e $P_2 = (0, 1, -1)$.

   (a) Determine os cossenos diretores do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$.

   (b) Determine o vetor unitário paralelo a $\overrightarrow{P_1P_2}$ e com o sentido de $\overrightarrow{P_1P_2}$.

   (c) Qual a relação existente entre os cossenos diretores da alínea (a) e os cossenos diretores do vetor unitário da alínea (b)? Justifique.

6. Considere os vetores $\overrightarrow{a} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{b} = (3, 0, -4)$, $\overrightarrow{c} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{d} = \left(\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1\right)$.

   (a) Calcule os vetores unitários que são paralelos a $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{d}$.

   (b) Determine os cossenos diretores de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{d}$.

7. Considerando os vetores $\vec{a} = (-2, 2, 0)$ e $\vec{b} = (0, 2, -2)$, determine:

   (a) o ângulo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$;

   (b) os vetores unitários $\vec{u}$ que são paralelos a $\vec{a}$;

   (c) os cossenos diretores de $\vec{a}$ e os ângulos deste com os eixos coordenados;

   (d) os vetores $\vec{w}$ tais que $\|\vec{w}\| = \sqrt{2}$ e $\vec{w} \parallel \vec{b}$;

   (e) os vetores $\vec{u}$ tais que $\|\vec{u}\| = 1$, $\vec{u} \perp \vec{a}$ e $\vec{u} \perp \vec{b}$.

8. Para cada par de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, determine um vetor unitário $\widehat{w}$, ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   (a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 0, 1)$.

   (b) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$.

Soluções:

1. (a) -18. (b) $\pi\,\text{rad} = 180^o$.

2. (a) $\frac{3}{4}\pi$. (b) $\frac{2}{3}\pi$. (c) $\frac{\pi}{2}$.

3. 1.

4. $\vec{b}$ e $\vec{e}$.

5. (a) $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \widehat{e}_1\right)\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \widehat{e}_2\right)\right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{P_1P_2},\ \widehat{e}_3\right)\right) = -\frac{2\sqrt{6}}{6}$;

   (b) $\widehat{P_1P_2} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{6}\right)$.

   (c) São iguais pois um vetor e seu versor têm os mesmos cossenos diretores. Os cossenos diretores de um vetor são as componentes do seu versor.

6.

(a) $\widehat{a} = (1, 0, 0) \vee -\widehat{a} = (-1, 0, 0)$;

$\widehat{b} = \left(\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right) \vee -\widehat{b} = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$;

$\widehat{c} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \vee -\widehat{c} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

$\widehat{d} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \vee -\widehat{d} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.

(b) $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_1\right)\right) = 1$, $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_2\right)\right) = 0$ e $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_3\right)\right) = 0$;

$\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{b}, \widehat{e}_1\right)\right) = \frac{3}{5}$, $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{b}, \widehat{e}_2\right)\right) = 0$ e $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{b}, \widehat{e}_3\right)\right) = -\frac{4}{5}$;

$\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{c}, \widehat{e}_1\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{c}, \widehat{e}_2\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{c}, \widehat{e}_3\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{d}, \widehat{e}_1\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{d}, \widehat{e}_2\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{d}, \widehat{e}_3\right)\right) = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

7.

(a) $\frac{\pi}{3}$;

(b) $\overrightarrow{u} = \widehat{a} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \vee \overrightarrow{u} = -\widehat{a} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$;

(c) $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_1\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_1\right) = \frac{3\pi}{4}$; $\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_2\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_2\right) = \frac{\pi}{4}$;
$\cos\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_3\right)\right) = 0$ e $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \widehat{e}_3\right) = \frac{\pi}{2}$;

(d) $\overrightarrow{w} = (0, 1, -1) \vee \overrightarrow{w} = (0, -1, 1)$;

(e) $\overrightarrow{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \vee \overrightarrow{u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

8.

(a) $\widehat{w} = (0, 1, 0) \vee \widehat{w} = (0, -1, 0)$.

(b) $\widehat{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee \widehat{w} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear - 1^o ano / 1^o sem.

Folha 6 -Vetores. Propriedades do Produto Escalar e Projeções

Propriedades do produto escalar

- é **comutativo**

  $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a}, \quad \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3;$

- **não é associativo** pois não faz sentido $\left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right) \bullet \overrightarrow{c}$ ou $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right)$;

- é **associativo em relação à multiplicação escalar**

  $(\alpha \overrightarrow{a}) \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \bullet \left(\alpha \overrightarrow{b}\right) = \alpha \left(\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3;$

- é **distributivo em relação à adição** de vetores

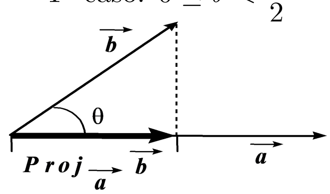
  ▷ $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3;$

  ▷ $\overrightarrow{a} \bullet \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3.$

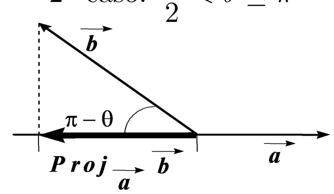
Projeção ortogonal vetorial e Projeção escalar. Interpretação geométrica.

Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dois vetores não nulos e não perpendiculares. Designa-se por **projeção ortogonal** do vetor $\overrightarrow{b}$ sobre o vetor $\overrightarrow{a}$, denotando-se por $\text{proj}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b}$, o vetor representado nas seguintes figuras.

1^o caso: $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$



2^o caso: $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$



A **projeção ortogonal (ou vetorial)** de $\overrightarrow{b}$ sobre $\overrightarrow{a}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|} \widehat{a} = \frac{\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \overrightarrow{a}.$$

O **comprimento** da projeção ortogonal de $\overrightarrow{b}$ sobre $\overrightarrow{a}$ (ou **projeção escalar**) é dado por:

$$\left\|\text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}\right|}{\|\overrightarrow{a}\|}.$$

Se algum dos vetores $\overrightarrow{a}$ ou $\overrightarrow{b}$ é o vetor nulo ou se os vetores são perpendiculares então $\text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} = (0,0,0)$ e $\left\|\text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}\right\| = 0.$

Observações:

1. No caso geral, $\text{proj}_{\overrightarrow{b}}\ \overrightarrow{a} \neq \text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}$.

2. O vetor $\text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}$ também é designado por **componente vetorial de $\overrightarrow{b}$ paralela a $\overrightarrow{a}$**.

3. Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ vetores não nulos e não perpendiculares.

   Então existem vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ tais que $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, com $\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{a}$.

   Repare-se que $\overrightarrow{v} = \text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}$ e que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{b} - \text{proj}_{\overrightarrow{a}}\ \overrightarrow{b}$. Ao vetor $\overrightarrow{w}$ designamos por **componente vetorial de $\overrightarrow{b}$ ortogonal a $\overrightarrow{a}$.**

Exercícios

1. Para quaisquer vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} = \|\overrightarrow{a}\|^2$;

   (b) $\|\lambda \overrightarrow{a}\| = |\lambda|\, \|\overrightarrow{a}\|$;

   (c) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = 2\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} + \|\overrightarrow{a}\|^2 + \|\overrightarrow{b}\|^2$;

   (d) $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right) = \|\overrightarrow{a}\|^2 - \|\overrightarrow{b}\|^2$;

   (e) $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = 4\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}$;

   (f) $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right\|^2 = 2\,\|\overrightarrow{a}\|^2 + 2\|\overrightarrow{b}\|^2$.

2. Sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 2$ e $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ calcule o valor da expressão $(2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \bullet (\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{u})$.

3. Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dois vetores tais que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$ e $\|\overrightarrow{b}\| = 5$. Determine o valor do parâmetro real α de modo que os vetores $\overrightarrow{a} + \alpha\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{a} - \alpha\overrightarrow{b}$ sejam ortogonais.

4. Sabendo que $\|\overrightarrow{a}\| = 3$, $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = 7$ e $\left\|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right\| = 8$, mostre que $\cos(\measuredangle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})) = \dfrac{1}{7}$.

5. Prove que as diagonais de um quadrado são ortogonais.

6. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Mostre que:

   (a) se $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais;

   (b) $\left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2 + \vec{u} \bullet \left(-\vec{u} + 2\vec{v}\right) = \left\|\vec{v}\right\|^2$.

7. Sejam $\overrightarrow{u} = (2, 1, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (3, 6, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ sobre $\overrightarrow{u}$;

   (b) as componentes de $\overrightarrow{v}$ que são paralela e perpendicular, respetivamente, ao vetor $\overrightarrow{u}$.

8. Decomponha o vetor $\overrightarrow{u} = (-1, -3, -2)$ como a soma de dois vetores, $\overrightarrow{w}_1$ e $\overrightarrow{w}_2$ tais que $\overrightarrow{w}_1$ é paralelo ao vetor $\overrightarrow{v} = (0, 1, 3)$ e $\overrightarrow{w}_2$ é ortogonal a $\overrightarrow{v}$.

9. Considere o vetor $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$. Determine o vetor $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ tal que:

$$c > 0, \ \ \|\overrightarrow{u}\| = 1, \ \ \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_1}) = \frac{\pi}{3} \ \text{ e } \ \|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{u}}\ \overrightarrow{v}\| = 1.$$

10. Considere os pontos $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, 0, -1)$ e $C = (1, 4, 1)$.

    (a) Calcule $\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AC}}\ \overrightarrow{AB}$ e $\left\|\mathrm{proj}_{\overrightarrow{AC}}\ \overrightarrow{AB}\right\|$.

    (b) Mostre que A, B e C são colineares.

Soluções:

1. —

2. -28.

3. $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.

4. —

5. —

6. —

7. (a) $\left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$

   (b) $\overrightarrow{v}_{\parallel} = \left(\dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{8}{3}\right)$ e $\overrightarrow{v}_{\perp} = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{14}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$.

8. $\overrightarrow{w}_1 = \left(0, -\dfrac{9}{10}, -\dfrac{27}{10}\right)$ e $\overrightarrow{w}_2 = \left(-1, -\dfrac{21}{10}, \dfrac{7}{10}\right)$.

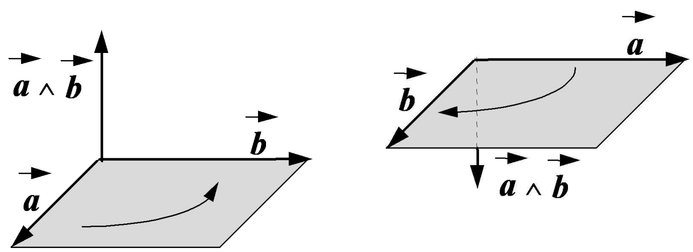
9. $\overrightarrow{u} = \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10.

    (a) $\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ e $\left\|\text{proj}_{\overrightarrow{AC}} \overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{5}$. (b) —— .

Produto externo ou vetorial

Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ dois vetores não nulos e não paralelos. Designa-se por **produto externo** ou **produto vetorial** de $\overrightarrow{a}$ por $\overrightarrow{b}$, denotando-se por $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ ou $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, o vetor representado na seguinte figura



e que tem as seguintes caraterísticas:

- a *direção* é perpendicular ao paralelogramo formado por $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$;
- o *sentido* é de acordo com a regra do polegar da mão direita, ou seja, é tal que os vetores $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right)$, por esta ordem, formam uma tríada positiva;
- a *grandeza* é igual à **área do paralelogramo** representado na figura anterior, isto é,

$$\left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right\| = \acute{A}rea\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin(\theta), \text{ com } \theta = \sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right).$$

No caso dos vetores serem paralelos $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} = (0, 0, 0)$.

Note-se que não faz sentido escrever $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin(\theta)$ pois $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ é um vetor e $\|\overrightarrow{a}\| \left\|\overrightarrow{b}\right\| \sin(\theta)$ é um escalar. De igual modo, quando $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são paralelos, não se pode escrever $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = 0$, mas sim $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$.

Teorema (Condição necessária e suficiente de paralelismo)

Sejam $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{\overrightarrow{0}\right\}$. Então,

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{0} \text{ se e só se } \overrightarrow{a} \parallel \overrightarrow{b}.$$

Propriedades do produto externo

- $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{a} \quad$ e $\quad \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \perp \overrightarrow{b}$.

- é **anticomutativo**

  $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3.$

- **não é associativo** pois, em geral, $\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right)$.

- é **associativo em relação à multiplicação escalar**

  $(\alpha \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge \left(\alpha \overrightarrow{b}\right) = \alpha \left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right), \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3;$

- é **distributivo em relação à adição** de vetores

  $\triangleright$ $\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3;$

  $\triangleright$ $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}, \ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3.$

Produto externo para os vetores da base ortonormada

O produto externo entre os três vetores que definem o referencial ortonormado de $\mathbb{R}^3$ encontra-se na seguinte tabela:

$\wedge$	$\widehat{e}_1$	$\widehat{e}_2$	$\widehat{e}_3$
$\widehat{e}_1$	$\overrightarrow{0}$	$\widehat{e}_3$	$-\widehat{e}_2$
$\widehat{e}_2$	$-\widehat{e}_3$	$\overrightarrow{0}$	$\widehat{e}_1$
$\widehat{e}_3$	$\widehat{e}_2$	$-\widehat{e}_1$	$\overrightarrow{0}$

Pode expressar-se o produto externo através das coordenadas dos vetores $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} &= (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3) \wedge (b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, \ a_3b_1 - a_1b_3, \ a_1b_2 - a_2b_1), \end{aligned}$$

ou simbolicamente,

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \widehat{e}_1 & \widehat{e}_2 & \widehat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Exercícios

1. Considere os vetores $\overrightarrow{a} = (2,-3,1)$, $\overrightarrow{b} = (-3,1,2)$ e $\overrightarrow{c} = (1,0,0)$.

   (a) Determine $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$.

   (b) O que pode concluir sobre a propriedade comutativa do produto externo? Justifique.

   (c) Determine $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

   (d) O que pode concluir sobre a propriedade associativa do produto externo? Justifique.

2. Verifique, por dois processos diferentes, se os seguintes vetores são paralelos:

   (a) $\overrightarrow{a} = (1,0,2)$ e $\overrightarrow{b} = \left(-\frac{5}{2}, 0, -5\right)$;

   (b) $\overrightarrow{a} = (-1,2,4)$ e $\overrightarrow{b} = (-1,2,-4)$;

   (c) $\overrightarrow{a} = (-4,2,6)$ e $\overrightarrow{b} = (2,-1,-3)$.

3. Considere os vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{d}$ de $\mathbb{R}^3$ tais que:

   $$\|\overrightarrow{a}\| = 2, \quad \left\|\overrightarrow{b}\right\| = 3, \quad \sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \frac{\pi}{3}, \quad \overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{c} \text{ e } \overrightarrow{a} \text{ é colinear com } \overrightarrow{d}.$$

   Calcule o valor das expressões que estejam definidas e justifique no caso contrário.

   (a) $\left(\text{proj}_{\overrightarrow{d}} \overrightarrow{c}\right) \wedge \overrightarrow{a}$.

   (b) $\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}\right) \wedge \left\|\overrightarrow{b}\right\|$.

   (c) $\overrightarrow{a} \bullet \left(-2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\right)$.

4. Sejam $\overrightarrow{u} = (1,2,-2)$, $\overrightarrow{v} = (1,1,0)$ e $\overrightarrow{w} = (k, 2k+2, 0)$ vetores de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

   (b) Determine o(s) valor(es) de k de modo que a área do triângulo definido pelos vetores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ seja igual a 1 unidade.

   (c) Mostre que os vetores $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ e $\text{proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{2u}$ são perpendiculares.

   (d) Indique um vetor que seja perpendicular em simultâneo aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

5. Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que $\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \dfrac{\pi}{4}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 2$ e $\overrightarrow{u}$ é unitário.

   Mostre que: $\|\text{proj}_{\overrightarrow{v}} \overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

6. Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{d}$ vetores de $\mathbb{R}^3$ tais que:

   - $\overrightarrow{a}$ é colinear com $\overrightarrow{c}$;
   - $\overrightarrow{b}$ é perpendicular a $\overrightarrow{a}$;
   - $\sphericalangle\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{d}\right) = \dfrac{\pi}{3}$;
   - $\|\overrightarrow{a}\| = \left\|\overrightarrow{d}\right\| = 2$;
   - $\left\|\overrightarrow{b}\right\| = \|\overrightarrow{c}\| = 1$.

   Determine o valor das seguintes expressões no caso de estarem definidas e justifique no caso contrário.

   (a) $\overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{b}$; (b) $\vec{a} \bullet \vec{b} \bullet \vec{c}$; (c) $\left(\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{d}\right) \bullet \left(\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{d}\right)$; (d) $\left\|\text{proj}_{\vec{d}}\, \vec{a}\right\|$;

   (e) $\text{proj}_{\vec{b}}\, \vec{a} + (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{d}$; (f) $\left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{d}\right\|$; (g) $\left\|\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{a}\right\|$; (h) $\vec{a} \bullet \left\|\vec{b} \wedge \vec{c}\right\|$.

<u>Soluções:</u>

1. (a) $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = (-7, -7, -7)$ e $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} = (7, 7, 7)$.

   (b) O produto externo não é comutativo mas anticomutativo.

   (c) $\left(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right) \wedge \overrightarrow{c} = (0, -7, 7)$ e $\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = (1, 2, 4)$.

   (d) O produto externo não goza da propriedade associativa.

2. (a) São paralelos. (b) Não são paralelos. (c) São paralelos.

3. (a) $\overrightarrow{0}$. (b) Sem significado. (c) -2.

4. (a) 3. (b) $k = 0$ ou $k = -4$. (c) — (d) Por exemplo, $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (2, -2, -1)$.

5. —.

6. (a) 4. (b) Não está definido. (c) -22. (d) 1. (e) $\overrightarrow{0}$. (f) $2\sqrt{3}$. (g) 4. (h) Não está definido.

Produto misto

Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Designa-se por **produto misto** dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$, o escalar definido por $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}$.

Pode então expressar-se o produto misto através das coordenadas dos vetores. De facto,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c} &= (a_1, a_2, a_3) \wedge (b_1, b_2, b_3) \bullet (c_1, c_2, c_3) \\
&= \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bullet (c_1, c_2, c_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \bullet (c_1, c_2, c_3) \\
&= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, c_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, c_3.
\end{aligned}$$

Propriedades do produto misto

- **comutatividade das operações**

  O produto misto não se altera quando se comutam (trocam entre si) os sinais $\wedge$ e $\bullet$, isto é,

  $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c},\ \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3.$

- **permutação circular de vetores**

  O produto misto não se altera por permutação circular dos vetores, isto é,

  $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{b}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3.$

- **permutação não circular de vetores**

  O produto misto troca de sinal quando se trocam entre si dois vetores, isto é,

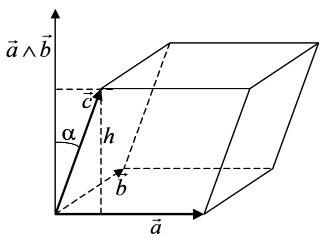
  $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} \bullet \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}, \forall \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3.$

Os vetores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ designam-se por vetores **complanares** quando forem estritamente paralelos a um mesmo plano, isto é, quando

- dois dos vetores forem paralelos ou
- existirem dois números reais α e β tais que $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$, com $\overrightarrow{a} \nparallel \overrightarrow{b}$.

Interpretação geométrica

Na figura que se segue está representado o paralelepípedo formado por três vetores não complanares, $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$.



O volume do paralelepípedo representado na figura é dado por

$$Volume\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \left|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c}\right|.$$

Teorema (Condição necessária e suficiente de complanaridade)

$\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ são complanares se e só se $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \bullet \overrightarrow{c} = 0$.

Exercícios

1. Determine $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$ para $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 3)$ e $\overrightarrow{w} = (0, 1, 3)$.

2. Sem realizar cálculos, indique o valor de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$ para:

   (a) $\overrightarrow{u} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (0, 0, 1)$;

   (b) $\overrightarrow{u} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0)$ e $\overrightarrow{w} = (0, 0, 3)$.

3. Sabendo que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 2$, determine o valor de:

   (a) $\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$;

   (b) $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{u}$;

(c) $\overrightarrow{v} \wedge 2\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{w}$;

(d) $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v}$.

4. Considere os vetores $\widehat{e}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{u} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{v} = (0,\beta,1)$ e $\overrightarrow{w} = (\alpha,0,-1)$.

   (a) Determine α e β de modo que:

      i. os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam colineares;

      ii. os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam complanares;

      iii. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| = 1$ e $\cos(\sphericalangle(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})) = \sin(\sphericalangle(\overrightarrow{u}, \widehat{e}_1))$. (**Sugestão** : Recorra ao produto interno e externo)

   (b) Considerando $\beta = 1$, determine α de forma que o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\overrightarrow{u}$, $2\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ seja igual a 4.

5. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$:

   $$\overrightarrow{a} = (1,0,\sqrt{3}),\ \overrightarrow{b} = (\alpha,\beta+1,0) \ \text{ e } \overrightarrow{c} = (0,0,\alpha-1).$$

   (a) Determine o vetor $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ tal que:

   $$\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{a}\|,\ \ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{a} \ \text{ e } \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \widehat{e}_3) = \frac{\pi}{3}.$$

   (b) Determine os parâmetros reais α e β tais que:

   $$\left\| proj_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} \right\| = 1 \ \text{ e } \ \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \text{ e } \overrightarrow{c} \text{ sejam complanares.}$$

6. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1,0,-1)$, $\overrightarrow{v} = (-2,x,y)$ e $\overrightarrow{w} = (x,1,0)$.

   Determine os valores reais x e y de modo que:

   (a) $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$ e $proj_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;

   (b) $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{2}$ e os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ sejam complanares.

7. Sejam $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que:

   (a) se os vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ são complanares então os vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{c}$ também o são;

(b) se $\overrightarrow{a} = \alpha \overrightarrow{b}$ $(\alpha > 0)$ e $\overrightarrow{a}$ e $2\overrightarrow{c}$ são vetores unitários então $\left(3\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) \bullet \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \bullet \overrightarrow{c} = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{13}{4}$.

8. Considere os vetores $\overrightarrow{a} = (\alpha, 1, 2)$, $\overrightarrow{b} = (\alpha, 0, -2)$ e $\overrightarrow{c} = (1, \beta, 4)$, onde α, $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine os valores do parâmetro real α de forma que os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ sejam ortogonais.

   (b) Determine o valor de α e β de modo que os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{c}$ sejam colineares.

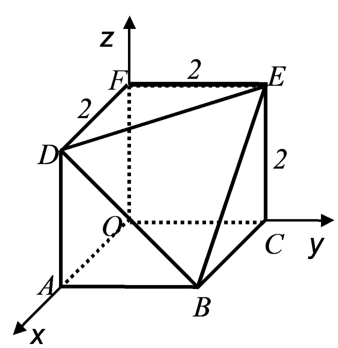
   (c) Considerando $\alpha = 1$, determine:

      i. o valor do parâmetro real β de modo que os vetores sejam complanares;

      ii. os valores do parâmetro real β de forma que o volume do paralelepípedo definido pelos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ seja igual a 2.

   (d) Considerando $\alpha = 1$, $\beta = 1$ determine a projeção vetorial e escalar do vetor $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ sobre o vetor $\overrightarrow{c}$.

9. Considere a seguinte figura.



   (a) Verifique analiticamente que:

      i. $\overrightarrow{FE} \bullet \overrightarrow{BA} = -\left\|\overrightarrow{FE}\right\|^2$;

      ii. $\overrightarrow{OF} \bullet \overrightarrow{DE} = 0$;

      iii. $\sphericalangle\left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{DE}\right) = \dfrac{\pi}{4}$;

      iv. $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{OF}$;

      v. $\overrightarrow{DA} \wedge \left(\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE}\right) = \overrightarrow{0}$;

      vi. $\overrightarrow{DB} \bullet \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{DE} = 0$.

   Interprete os resultados obtidos nas alíneas ii., iv., v. e vi..

   (b) Determine a área do triângulo de vértices B, D e E.

(c) Usando o produto misto, calcule o volume do sólido definido pelos vetores $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\left(\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE}\right)$.

Soluções:

1. -9.

2.

(a) 1. (b) 0.

3.

(a) -2. (b) 2. (c) -4. (d) 4.

4.

(a) i. $\alpha = 2$. ii. $\alpha = 2 \vee \beta = 0$. iii. $\alpha = -\frac{1}{2} \wedge \beta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. (b) $\alpha = 0 \vee \alpha = 4$.

5.

(a) $\overrightarrow{u} = \left(-\sqrt{3}, 0, 1\right)$. (b) $\alpha = \pm 2 \wedge \beta = -1$.

6.

(a) $x = 0 \wedge y = -2$. (b) $x = \pm 1 \wedge y = 3$.

7. —.

8. (a) $\alpha = \pm 2$. (b) $\alpha = \frac{1}{2} \wedge \beta = 2$. (c) i. $\beta = \frac{3}{2}$. ii. $\beta = 1 \vee \beta = 2$.

(d) $proj_{\overrightarrow{c}}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ e $\left\|proj_{\overrightarrow{c}}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)\right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9.

(a) ii. Os vetores $\overrightarrow{OF}$ e $\overrightarrow{DE}$ são perpendiculares.

iv. O vetor $\overrightarrow{OF}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

v. $\overrightarrow{DA}$ e $\left(\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{DE}\right)$ são vetores colineares, ou seja, $\overrightarrow{DA}$ é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{FE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

vi. Os vetores $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{DE}$ são complanares.

(b) $2\sqrt{3}$. (c) 16.

Matrizes

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo comutativo (em particular $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), m e n dois números naturais. Designa-se por **matriz sobre o corpo** $\mathbb{K}$ ou **matriz de entradas em** $\mathbb{K}$ a todo o conjunto de elementos do corpo $\mathbb{K}$ colocados numa tabela de dupla entrada com m linhas (ou filas horizontais) e n colunas (ou filas verticais), ou seja, uma tabela do tipo:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Numa versão simplificada é usual representar a matriz anterior por $A_{m\times n} = (a_{ij})$ onde i é o índice de linha ($i = 1, 2, \ldots, m$) e j é o índice de coluna ($j = 1, 2, \ldots, n$). A matriz $A_{m\times n}$ designa-se por **matriz do tipo** $m \times n$ ou, para simplificação de escrita, **matriz** $m \times n$.

A matriz $A_{m\times n}$ designa-se por **matriz real** (**complexa**) quando os seus elementos são números reais (números complexos). Cada entrada a_{ij} da matriz $A_{m\times n}$ é designada por **coeficiente** ou **elemento da matriz**.

O conjunto de todas as matrizes do tipo $m \times n$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Definições

- Uma matriz $m \times n$ que tem todos os seus elementos iguais a zero designa-se por **matriz nula** e representa-se por $O_{m\times n}$.

- Uma matriz em que o número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n) designa-se por **matriz quadrada de ordem** n ou, simplesmente, **matriz de ordem** n e representa-se por A_n. No caso de $m \neq n$ a matriz designa-se por **matriz retangular** $m \times n$.

- Uma matriz $1 \times n$ ($m \times 1$) designa-se por **matriz linha** (**matriz coluna**) e quando utilizada para representar um vetor, designa-se por **vetor linha** (**vetor coluna**).

- Designam-se por **elementos principais** (**elementos secundários**) da matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ a todos os seus elementos em que $i = j$ ($i + j = n + 1$), os quais estão dispostos ao longo da **diagonal principal** (**diagonal secundária**).

- Uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ designa-se por **matriz triangular superior** (**inferior**) quando todos os seus elementos abaixo (respetivamente acima) da diagonal principal são nulos, isto é, $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ($i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

- Uma matriz quadrada $A_n = (a_{ij})$ designa-se por **matriz diagonal** quando todos os seus elementos que não pertencem à diagonal principal são nulos, isto é, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$, e representa-se por $A_n = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

- Uma matriz diagonal designa-se por **matriz escalar** quando todos os seus elementos principais são iguais, isto é, $A_n = \text{diag}\,(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$.

- Uma matriz diagonal de ordem n com todos os elementos principais iguais a 1 designa-se por **matriz identidade de ordem** n e representa-se por $I_n = \text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1)$.

Igualdade de matrizes

Diz-se que $A_{m\times n} = (a_{ij})$ é **igual** a $B_{m\times n} = (b_{ij})$ e escreve-se $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ quando os elementos homólogos (na mesma posição) das duas matrizes forem iguais, isto é, $\forall i, j : a_{ij} = b_{ij}$.

Operações com matrizes

1. A **adição** das matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, que se denota por $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém adicionando os elementos de A aos elementos homólogos de B, isto é,

$$C = A + B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})\,.$$

2. A **subtração** das matrizes $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{m\times n} = (b_{ij})$, que se denota por $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém subtraindo aos elementos de A os elementos homólogos de B, isto é,

$$C = A - B \Leftrightarrow (c_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Propriedades da adição de matrizes

Sejam $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$ quaisquer matrizes e $O_{m\times n}$ a matriz nula. Então, a adição de matrizes:

- é comutativa: $A + B = B + A$;
- é associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
- admite a existência de elemento neutro: $A + O = O + A = A$;
- admite, para cada matriz A, uma matriz $A' = -A$ tal que $A + A' = A' + A = O$.

3. A **multiplicação de $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{K}$ pela matriz** $A_{m\times n} = (a_{ij})$, que se denota por $\boldsymbol{\lambda}\mathbf{A}$, é uma matriz $C_{m\times n} = (c_{ij})$ que se obtém multiplicando todos os elementos da matriz A pelo escalar λ, isto é,

$$C_{m\times n} = \lambda A_{m\times n} \Leftrightarrow (c_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Propriedades da multiplicação de um escalar por uma matriz

Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{m\times n}$ duas quaisquer matrizes, λ e μ dois quaisquer elementos do corpo $\mathbb{K}$. Então, a multiplicação de um escalar por uma matriz:

- é distributiva em relação à adição de matrizes: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
- é distributiva em relação à adição de escalares: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
- é associativa em relação à multiplicação de escalares: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
- admite a existência de elemento neutro da multiplicação por um escalar: $1.A = A$.

4. O **produto** ou a **multiplicação** da matriz $A_{m\times n} = (a_{ij})$ pela matriz $B_{n\times p} = (b_{jk})$, que se denota por $\mathbf{AB}$, é uma matriz $C_{m\times p} = (c_{ik})$ que se obtém multiplicando as linhas da matriz A

pelas colunas da matriz B, isto é, o elemento c_{ik} do produto é a soma algébrica dos produtos dos elementos da linha i pelos correspondentes elementos da coluna k, ou seja,

$$C_{m\times p} = A_{m\times n} \times B_{n\times p} \Leftrightarrow (c_{ik}) = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk})\,.$$

Nota: A partir da definição do produto de duas matrizes A e B é fácil verificar que este só está definido quando o número de colunas da primeira matriz (A) for igual ao número de linhas da segunda matriz (B), isto é, $A_{m\times n}\ B_{n\times p} = C_{m\times p}$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Sejam A, B e C, quaisquer matrizes de dimensões apropriadas, I e O as matrizes identidade e nula, respetivamente, e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, a multiplicação de matrizes:

- não é comutativa, em geral: $AB \neq BA$;
- é associativa: $(AB)\,C = A\,(BC)$;
- é distributiva à esquerda, em relação à adição de matrizes: $A\,(B + C) = AB + AC$;
- é distributiva à direita, em relação à adição de matrizes: $(B + C)\,A = BA + CA$;
- é associativa em relação à multiplicação por um escalar: $(\lambda A)\,B = A\,(\lambda B) = \lambda\,(AB)$;
- verifica $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$ e $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$;
- verifica $A_{m\times n}O_{n\times p} = O_{m\times p}$ e $O_{p\times m}A_{m\times n} = O_{p\times n}$.

Definições

- Duas matrizes A e B, de ordem n, dizem-se **permutáveis**, **comutáveis** ou que **comutam entre si** quando $AB = BA$.

  Observação: Uma vez que $I_nA_n = A_n = A_nI_n$, então qualquer matriz de ordem n é comutável com I_n.

- Seja A uma matriz de ordem n. A matriz A diz-se **idempotente** quando $A^2 = A$.

Exercícios

1. Determine, se possível, os parâmetros reais a, b, c e d tais que:

$$\begin{bmatrix} 5a+7 & d+1 & a+b \\ 6b & c & b \\ c-2a & 5+c & c-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 3 \\ 12 & 13 & 2 \\ 11 & 18 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz real $A = \begin{bmatrix} a^2 & b & 0 \\ 0 & c^2-1 & 0 \\ d+1 & 0 & e \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$ de modo a que A seja:

   (a) a matriz nula; (b) uma matriz triangular superior;

   (c) uma matriz diagonal; (d) a matriz identidade.

3. Escolha duas matrizes da lista seguinte de tal forma que a sua soma esteja definida e calcule a matriz soma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

4. Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$. Indique quais dos produtos seguintes estão definidos e, para cada um desses casos, diga qual o tipo de matriz obtida.

   (a) ABC; (b) CAB; (c) BAC.

5. Complete o seguinte quadro de forma que os produtos considerados sejam possíveis.

Matriz	A	B	C	D	$ABCD$	$BCDA$	$CDAB$	$DABC$
N° de linhas					5		4	
N° de colunas						3		2

6. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 6 \\ 6 & -2 & 10 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Realize, se possível, as seguintes operações:

(a) DB e BD; (b) $\frac{1}{2}C - 2\ DB$; (c) $BC + CB$;

(d) $A^2 - A$; (e) EC; (f) CE.

7. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule AB e BA.

   (b) Que conclusões pode tirar sobre a comutatividade do produto matricial?

8. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que $AB = AC$ e $BD = CD$.

   (b) Será que, para quaisquer matrizes A, B, C onde os produtos sejam possíveis de efetuar, podemos afirmar que é verdade

$$AB = AC \Rightarrow B = C?$$

9. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Escolha uma maneira de as ordenar de tal modo que o produto das quatro matrizes esteja definido.

10. Sejam A e B matrizes comutáveis de ordem n. Mostre que:

    (a) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;

    (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

11. Considere as matrizes A, B e a matriz nula O. Determine o valor lógico das seguintes proposições, justificando convenientemente.

    (a) $AB = O \Leftrightarrow A = O \vee B = O$;

    (b) $A = O \vee B = O \Rightarrow AB = O$.

Soluções:

1. $a = 1$, $b = 2$, $c = 13$ e $d = 6$.

2. (a) $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = \pm 1 \wedge d = -1 \wedge e = 0$;

    (b) $d = -1 \wedge a, b, c, e \in \mathbb{R}$;

    (c) $b = 0 \wedge d = -1 \wedge a, c, e \in \mathbb{R}$;

    (d) $a = \pm 1 \wedge b = 0 \wedge c = \pm\sqrt{2} \wedge d = -1 \wedge e = 1$.

3. Ao critério do estudante.

4.

    (a) Não definido; (b) Definido, do tipo 1×3; (c) Não definido.

5.

Matriz	A	B	C	D	$ABCD$	$BCDA$	$CDAB$	$DABC$
N^o de linhas	5	3	4	2	5	3	4	2
N^o de colunas	3	4	2	5	5	3	4	2

6.

(a) $DB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ e $BD = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{1}{2}C - 2DB = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -5 & -9 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $BC + CB$ não é possível.

(d) $A^2 - A = \begin{bmatrix} -25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$.

(e) $EC = \begin{bmatrix} 0 & -26 & 8 \end{bmatrix}$

(f) CE não é possível.

7.

(a) $AB = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 15 & 0 \\ 5 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -15 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Como $AB \neq BA$ conclui-se que o produto matricial não é comutativo.

8.

(a) —

(b) A propriedade do cancelamento (à esquerda) não se verifica, como vimos na alínea (a). A igualdade do lado esquerdo $AB = AC$ pode ocorrer com $B \neq C$.

9. Por exemplo, $BADC$.

10. —

11.

(a) Falso. Considerando, por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = O$ mas $A \neq O$ e $B \neq O$.

(b) Verdadeiro. A multiplicação matricial de uma matriz nula por uma matriz qualquer resulta sempre numa matriz nula.

Designa-se por **transposição** a operação que consiste em trocar as linhas pelas colunas de uma matriz. A matriz que se obtém de $A_{m\times n} = (a_{ij})$ trocando as linhas pelas colunas designa-se por **matriz transposta** de A e representa-se por $\mathbf{A^T}$, isto é, $A^T_{n\times m} = \left(a'_{ij}\right)$ onde $a'_{ij} = a_{ji}$, $\forall_{i,j}$.

Propriedades da transposição de matrizes

Se $A_{m\times n} = (a_{ij})$, $B_{m\times n} = (b_{ij})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

- $\left(A^T\right)^T = A$;
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
- $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Se $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{n\times p} = (b_{jk})$ então

- $(AB)^T = B^T A^T$.

Definições

Diz-se que a matriz quadrada A de ordem n é:

- **simétrica** quando $A^T = A$;
- **antissimétrica** quando $A^T = -A$;
- **ortogonal** quando $A^T A = AA^T = I_n$.

Uma matriz A de ordem n diz-se **invertível**, **regular** ou **não singular** quando existir uma matriz X de ordem n tal que

$$AX = I_n \text{ e } XA = I_n. \tag{1}$$

A matriz X designa-se por **inversa** da matriz A e representa-se por $\mathbf{A^{-1}}$.

Uma matriz que não admita inversa designa-se por matriz **singular**, **não regular** ou **não invertível**.

Observações

1. Só as matrizes quadradas admitem inversa, mas nem todas as matrizes quadradas são invertíveis!

2. Note que, se existir uma matriz que satisfaça uma das igualdades de (1) então também verifica a outra igualdade. Assim, para determinar a inversa de uma matriz A é suficiente encontrar uma matriz que satisfaça uma das igualdades de (1). Neste caso, A é invertível e $X = A^{-1}$, em (1).

3. Se A for uma matriz invertível então a sua matriz inversa é única.

Propriedades da matriz inversa

- A matriz I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$.

- Se $A = \text{diag}\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ é uma matriz diagonal com elementos principais todos não nulos, então A é invertível e $A^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \ldots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$.

- Se A é uma matriz invertível então A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

- Se A é uma matriz invertível e $\alpha \in \mathbb{K}$ um escalar não nulo então αA é invertível e $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

- Se A e B são duas matrizes invertíveis então a matriz AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Se A é uma matriz invertível então, para $k \in \mathbb{N}$, a matriz A^k é invertível e $\left(A^k\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^k$.

- Se A é uma matriz invertível então a matriz A^T é invertível e $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Exercícios

1. Considere as matrizes A, B e C tais que

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 10 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 8 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Calcule $(AC)^T$, B^TA^T e $(ACB^T)A^T$.

2. Verifique se as seguintes matrizes são simétricas ou antissimétricas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 15 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Complete a matriz $A = \begin{bmatrix} * & * & -5 & 3 \\ 2 & * & * & * \\ * & -1 & * & * \\ * & 4 & -7 & * \end{bmatrix}$ de modo que seja:

   (a) simétrica;

   (b) antissimétrica.

4. Verifique se as seguintes matrizes são ortogonais.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Determine o valor lógico das seguintes proposições, justificando convenientemente.

   (a) Se A é uma matriz simétrica então é quadrada.

   (b) A matriz A é simétrica se é quadrada.

6. Sejam A e B matrizes de ordem n e I a matriz identidade de ordem n. Prove que:

   (a) $A + A^T$ é uma matriz simétrica.

   (b) $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.

   (c) $AB + B^TA^T$ é uma matriz simétrica.

   (d) se B é uma matriz simétrica então $ABA^T + I$ é uma matriz simétrica.

   (e) se A é uma matriz antissimétrica e B uma matriz simétrica então $ABA + I$ é simétrica.

7. Determine a inversa das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

8. Mostre que a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

9. Sabendo que A, B e C são matrizes invertíveis de ordem n, resolva as seguintes equações matriciais em ordem a X.

   (a) $BX = A$. (b) $X^{-1}A^{-1} = B^{-1}$. (c) $AX^{-1} = B$. (d) $\left[(AX)^T\right]^{-1} = B$.

   (e) $AXB = AB$. (f) $(AXB)^T = BA$. (g) $\left[AX^{-1}B\right]^T = C$.

<u>Soluções:</u>

1. $(AC)^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 14 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^TA^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 5 & 10 & 14 \end{bmatrix}$ e $(ACB^T)A^T = \begin{bmatrix} -10 & -12 & -16 \\ 0 & 32 & 48 \\ 0 & 56 & 84 \end{bmatrix}$.

2. A é simétrica e D é antissimétrica.

3.

   (a) $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -5 & 3 \\ 2 & b & -1 & 4 \\ -5 & -1 & c & -7 \\ 3 & 4 & -7 & d \end{bmatrix}$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & -1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & -7 & 0 \end{bmatrix}$.

4. A e B são matrizes ortogonais.

5.

(a) Verdadeiro. Pois para uma matriz ser simétrica é necessário que ela seja quadrada.

(b) Falso. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto $A \neq A^T$, logo A é quadrada mas não é simétrica.

6. —

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

8. —

9. (a) $X = B^{-1}A$ (b) $X = A^{-1}B$ (c) $X = B^{-1}A$ (d) $X = A^{-1}\left(B^{-1}\right)^T$.

(e) $X = I$ (f) $X = A^{-1}A^TB^TB^{-1}$ (g) $X = B\left(C^{-1}\right)^T A$

Transformações elementares

Designam-se por **transformações elementares** ou **operações elementares** sobre as linhas (colunas) de uma matriz A as seguintes operações:

• a troca da linha (coluna) i pela linha (coluna) j denota-se por $L_i \longleftrightarrow L_j$ ($C_i \longleftrightarrow C_j$).

• a multiplicação da linha (coluna) i por um escalar $\alpha \neq 0$ denota-se por $L_i \longrightarrow \alpha L_i$ ($C_i \longrightarrow \alpha C_i$).

• a adição à linha (coluna) i de α vezes a linha (coluna) j denota-se por $L_i \longrightarrow L_i + \alpha L_j$ ($C_i \longrightarrow C_i + \alpha C_j$).

Definições

- Diz-se que uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é equivalente por linhas a uma matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se B pode ser obtida de A efetuando uma sequência finita de transformações elementares sobre as linhas e denota-se $A \underset{\text{linhas}}{\longrightarrow} B$.

- Chama-se **pivô** ou **pivot** de uma linha ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha. Uma linha nula não tem pivô.

- Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Diz-se que A está em **forma de escada** ou na **forma escalonada por linhas** se $A = O_{m\times n}$ ou quando tiver as seguintes características:

  - se houver linhas nulas, elas situam-se abaixo das linhas não nulas.
  - o primeiro elemento não nulo de cada linha (com excepção da primeira) situa-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.
  - os elementos que se situam abaixo do primeiro elemento não nulo de cada linha são todos nulos.

Condensação de uma matriz

Designa-se por **condensação de uma matriz**, o processo que consiste em realizar sucessivas operações elementares sobre a matriz, de forma a obter a sua forma escalonada por linhas.

Proposição: Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ é equivalente a uma matriz A' na forma escalonada por linhas e representa-se essa transformação por $A \underset{\text{linhas}}{\longrightarrow} A'$.

Característica de uma matriz

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Chama-se característica de A ao número de linhas não nulas de qualquer matriz equivalente por linhas de A e em forma de escada. Denotamos a característica de A por $car(A)$.

Teorema

Se uma matriz A está na forma escalonada por linhas então a sua característica é igual ao número de pivôs.

Exemplos: A matriz nula $O_{m\times n}$ tem característica igual a zero e a matriz identidade I_n tem característica igual a n.

Observação

Se B é uma matriz que se obtém de uma matriz A usando operações elementares então
$car(B) = car(A)$. O inverso não é verdadeiro.

Exemplo de aplicação

A condensação da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ pode ser efetuada do seguinte modo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 + L_1}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc} \{1\} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \{-1\} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \{1\} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como a forma escalonada da matriz A tem 3 pivôs então $car(A)=3$.

Neste exemplo a condensação foi realizada usando o primeiro elemento da primeira linha para eliminar todos os elementos da primeira coluna abaixo dele, em seguida, foi usado o primeiro elemento não nulo da segunda linha para anular todos os elementos da segunda coluna abaixo dele, e assim sucessivamente, até se obter a matriz na sua forma escalonada por linhas.

Teorema

Seja A uma matriz de ordem n. A é invertível se e só se $car\,(A)=n$, isto é, A é invertível se e só se a sua caraterística for igual à sua ordem.

Exercícios

1. Quais das seguintes matrizes se encontram na forma escalonada por linhas?

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad E=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Determine a característica das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -5 & -10 & 5 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & -10 & -2 \\ 3 & 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Considere as seguintes matrizes em função dos parâmetros reais k e m:

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2k+4 & 4 \\ -1 & -2 & -k-3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -k+1 & 1 & -7 \\ 2 & -2 & 0 & k+5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 8 & k \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2k & -2 \\ 1 & 0 & -2-m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -k & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -2m+2 \end{bmatrix}.$$

(a) Discuta a característica das matrizes em função dos parâmetros reais k e m.

(b) Indique para que valores dos parâmetros reais k e m, as matrizes são invertíveis.

Soluções:

1. As matrizes A e C encontram-se na forma escalonada por linhas.

2. $car(A) = 2$, $car(B) = 2$, $car(C) = 2$, $car(D) = 1$, $car(E) = 2$ e $car(F) = 3$.

3.

(a)

Matriz A : Se $k = -2$, $car(A) = 1$; se $k \neq -2$, $car\,(A) = 2$.

Matriz B : Se $k = 0$, $car(B) = 2$; se $k \neq 0$, $car\,(B) = 3$.

Matriz C : Se $k = -1$, $car(C) = 2$; se $k \neq -1$, $car\,(C) = 3$.

Matriz D : $car\,(D) = 2$ para qualquer valor de k.

Matriz E : Se $m = 0$, $car\,(E) = 2$; se $k = 0$, $car\,(E) = 2$; se $m \neq 0 \wedge k \neq 0$, $car\,(E) = 3$.

Matriz F : Se $m = -1$, $car\,(F) = 2$; se $k = 0$, $car\,(F) = 2$; se $m \neq -1 \wedge k \neq 0$, $car\,(F) = 3$.

(b)

- A matriz A é invertível se $k \neq -2$.
- A matriz B é invertível se $k \neq 0$.
- A matriz C não é invertível para qualquer k.
- A matriz D não é invertível para qualquer k.
- A matriz E é invertível se $m \neq 0 \wedge k \neq 0$.
- A matriz F não é invertível para quaisquer k e m.

Cálculo da matriz inversa utilizando condensação

Teorema: Se existir uma matriz X_n que verifique uma das seguintes igualdades

$$A_n X_n = I_n \text{ e } X_n A_n = I_n,$$

então A_n é invertível e $X_n = (A_n)^{-1}$.

Seja A_n uma matriz de ordem n:

- Por aplicação de sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz A_n é possível realizar--se o processo

  $$[A_n \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid X_n]$$

  se e só se a matriz A_n for invertível. Sendo A_n invertível, $X_n = A^{-1}$.

- Uma vez que o processo $[A_n \mid I_n] \longrightarrow [I_n \mid X_n]$ só é válido para matrizes A_n invertíveis, e dado que as operações elementares não alteram a característica de uma matriz, então $\operatorname{car}(A_n) = \operatorname{car}(I_n) = n$.

É consequência imediata desta constatação o resultado seguinte.

Teorema: A_n é invertível se e só se $\operatorname{car}(A) = n$, isto é, A_n é invertível se e só se a sua característica for igual à sua ordem.

Na prática, o que se faz para obter a inversa de uma matriz é o seguinte:

1. colocam-se lado a lado as matrizes A_n e I_n (A_n à esquerda e I_n à direita),
2. vão-se efectuando simultaneamente sobre as linhas de A_n e de I_n as mesmas operações elementares,
3. quando do lado esquerdo se obtiver a matriz I_n então do lado direito estará a matriz A^{-1}.

Exemplo de aplicação:

O cálculo da inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ pode ser efectuado do seguinte modo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício

1. Determine as matrizes inversas das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

Soluções:

1.

(a) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-4}{5} \end{bmatrix}$.

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

Álgebra Linear - 1.^{o} ano / 1.^{o} sem.

Folha 12 - Sistemas de Equações Lineares

O sistema formado por m equações lineares nas n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definido por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

é designado por **sistema de equações lineares.**

O sistema anterior pode também escrever-se na forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B},$$

ou ainda na forma matricial $AX = B$, onde $A_{m\times n} = (a_{ij})$ designa-se por **matriz dos coeficientes**, $X_{n\times 1} = (x_j)$ é o **vetor das incógnitas** e $B_{m\times 1} = (b_i)$ o **vetor dos termos independentes**.

- Designam-se por **raízes** ou **soluções do sistema** de equações lineares, os valores das incógnitas que satisfazem as equações do sistema $AX = B$.

- Designa-se por **sistema linear homogéneo** um sistema de equações lineares $AX = O$, ou seja, um sistema cujo vetor dos termos independentes é o vetor nulo.

- Todo o sistema linear homogéneo $AX = O$, com n incógnitas, admite pelo menos a solução $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, designada por **solução trivial** ou **solução nula**.

Classificação de sistemas

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares. Então o sistema diz-se:

• **possível** ou **compatível** quando admitir pelo menos uma solução,

• **impossível** ou **incompatível** quando não admitir qualquer solução,

• **determinado** quando a solução for única,

• **indeterminado** quando admitir mais do que uma solução. O grau de indeterminação do sistema é dado pelo número de variáveis livres.

Definições

Designam-se por **sistemas equivalentes** os sistemas de equações lineares que admitem a mesma solução.

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares. Designa-se por **matriz completa** ou **ampliada** do sistema e representa-se por $[\mathbf{A} \mid \mathbf{B}]$ a matriz

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Método de eliminação de Gauss

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares. O **método de eliminação de *Gauss*** é usado na obtenção da solução, se existir, de um sistema de equações lineares; consiste em efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $[A \mid B]$ de forma a obter a sua forma escalonada por linhas $[A' \mid B']$;

O sistema representado pela matriz $[A' \mid B']$, obtida pela condensação, é equivalente ao sistema representado por $[A \mid B]$.

Discussão de sistemas de equações lineares

Sejam $AX = B$ a forma matricial de um sistema de equações lineares com m equações n incógnitas, $[A \mid B]$ a matriz ampliada do sistema e $[A' \mid B']$ a sua forma escalonada por linhas. Nestas condições, tem-se:

- $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}(A')$ e $\operatorname{car}[A \mid B] = \operatorname{car}[A' \mid B']$;
- $\operatorname{car}[A \mid B] = \operatorname{car}(A)$ ou $\operatorname{car}([A \mid B]) = \operatorname{car}(A) + 1$. Logo $\operatorname{car}(A) \leq \operatorname{car}[A \mid B]$.

Então,

- Se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}[A \mid B]$ então o sistema é **possível**.
  - Se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}[A \mid B] = n$ então o sistema é **possível e determinado**.
  - Se $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}[A \mid B] < n$ então o sistema é **possível e indeterminado**, sendo o grau de indeterminação dado por $n - \operatorname{car}(A)$.
- Se $\operatorname{car}(A) < \operatorname{car}[A \mid B]$ então o sistema é **impossível**.

Exemplo de aplicação

Dado o sistema de equações lineares:

$$(S)\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - z = 11 \\ 3x + 2y + z = -5 \end{cases},$$

a sua resolução usando o método de eliminação de Gauss, pode ser feita do seguinte modo:

• condensação da matriz ampliada:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 10 & -14 \end{array}\right] \underset{L_3 \to L_3 - \frac{4}{5}L_2}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -18 \end{array}\right] = [A' \mid B'] \,.$$

Como $\text{car}(A) = \text{car}\,[A|B] = 3 =$ número de variáveis tem-se que o sistema é possível e determinado. Mais, o sistema equivalente é definido por:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x - y - z = 11 \\ 3x + 2y + z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -5y + 5z = 5 \\ 6z = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \\ z = -3 \end{cases}.$$

Deste modo, conclui-se que o sistema (S) é possível e determinado, sendo o seu conjunto solução dado por $\{(2, -4, -3)\}$.

Método da matriz inversa

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares em que A é uma matriz invertível. O método para determinar a solução de um sistema de equações lineares denominado método da matriz inversa consiste em:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_nX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Exercícios

1. Classifique e resolva, se possível, os seguintes sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss.

   (a) $\begin{cases} 2x + 6z = 6 \\ \frac{1}{2}x + 3z = 3 \\ -x - y - z = 1 \\ x - y + 5z = 7 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ -3x - 6y - 9z = -9 \\ 2x + 4y + 6z = -2 \end{cases}$. (c) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -x - 2y - 3z = -7 \end{cases}$.

2. Considere as matrizes reais $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ b-1 \end{bmatrix}$.

   Indique, justificando, todos os valores de a e b para os quais o sistema de equações lineares $AX = B$ é:

   (a) impossível. (b) possível e determinado. (c) possível e indeterminado.

3. Considere o seguinte sistema de equações lineares de parâmetros reais a e b:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b+3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Classifique o sistema em função dos parâmetros a e b.

   (b) Resolva o sistema para o caso em que $a = 0$ e $b = 0$.

4. Classifique os seguintes sistemas de equações lineares em função dos parâmetros reais a e b.

(a) $\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ -2x + (4-b)z = a+3 \end{cases}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ b-2 \end{bmatrix}$.

5. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares pelo método da matriz inversa.

(a) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Soluções:

1.

   (a) O sistema é possível e determinado. A solução é $(x, y, z) = (0, -2, 1)$.

   (b) O sistema é impossível.

   (c) O sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação 1. O conjunto de soluções é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z - 1 \wedge y = 4 - 2z\}$.

2. O sistema é:

   (a) impossível para $a = -2 \wedge b \neq 1$ pois $\operatorname{car}(A) = 2 \neq 3 = \operatorname{car}[A \mid B]$.

   (b) possível e determinado para $a \neq -2 \wedge b \in \mathbb{R}$ pois $\operatorname{car}(A) = \operatorname{car}[A \mid B] = 3 =$ n^o de variáveis.

(c) possível e indeterminado para $a = -2 \wedge b = 1$ pois $\text{car}\,(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] = 2 < 3 = \text{n}^o$ de variáveis. Grau de indeterminação 1.

3.

(a) • Quando $a \neq 1 \wedge b \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado, pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] = 3 =$ n^o de variáveis.

• Quando $a = 1 \wedge b = -3$ o sistema é possível e indeterminado, pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] =$ $2 < 3 = \text{n}^o$ de variáveis. Grau de indeterminação 1.

• Quando $a = 1 \wedge b \neq -3$ o sistema é impossível pois $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}\,[A \,|\, B]$.

(b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \\ -3 \end{bmatrix}.$

4.

(a) • Para $b \neq 0 \wedge a \in \mathbb{R}$ o sistema é possível e determinado pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] = 3 =$ n^o de variáveis.

• Para $b = 0$:

  • $a \neq -3$ o sistema é impossível pois $\text{car}(A) = 2 \neq 3 = \text{car}\,[A \,|\, B]$.

  • $a = -3$ o sistema é possível e indeterminado, pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] =$ $= 2 < 3 = \text{n}^o$ de variáveis. Grau de indeterminação 1.

(b) • Para $a \in \mathbb{R} \wedge b \neq 2$ o sistema é impossível pois $\text{car}\,(A) \neq \text{car}\,[A \,|\, B]$.

• Para $b = 2$:

  • $a \neq -1$ o sistema é possível e determinado, pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] =$ $= 3 = \text{n}^o$ de variáveis.

  • $a = -1$ o sistema é possível e indeterminado, pois $\text{car}(A) = \text{car}\,[A \,|\, B] =$ $= 2 < 3 = \text{n}^o$ de variáveis. Grau de indeterminação 1.

5. (a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$ (b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

Folha 13 - Determinantes - Conceitos e propriedades

Permutações

Seja $S = (1\ 2\ \ldots\ n)$ a sequência dos n primeiros números naturais (de 1 a n) dispostos por ordem crescente.

• Designa-se por **permutação** de S, toda a sequência de n elementos formada com os números de S, sem omissões e sem repetições.

• Quando, numa permutação de S, se trocam entre si dois números adjacentes, a nova permutação designa-se por **inversão**.

• Uma permutação de S diz-se **par** (**ímpar**) se for obtida a partir de S, por um número par (ímpar) de inversões.

$(1\ 2\ \ldots\ n)$ é considerada uma permutação par de S. O conjunto de todas as permutações representa-se por S_n.

Regra prática para determinar a paridade de uma permutação:

Seja $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ uma permutação de $S = (1\ 2\ \ldots\ n)$ e $k = 1, 2, \ldots, n$.

1. Seja s_k o número de elementos à direita de j_k e inferiores a j_k.
2. Considere-se $s = \sum_{k=1}^{n-1} s_k$.
3. A permutação $(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n)$ é par (ímpar) se s for par (ímpar).

Seja A uma matriz de ordem n. Designa-se por **produto elementar de** A, qualquer produto de n elementos de A, de forma que não haja elementos que estejam na mesma linha nem na mesma coluna de A. Representa-se por $a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$ onde $(i_1 \cdots i_n)$ e $(j_1 \cdots j_n)$ são permutações de $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Observação: Como cada produto elementar deve ter n fatores e cada fator vem de uma linha distinta, os fatores podem ser ordenados de forma que, da esquerda para a direita, os índices de linha estejam ordenados por ordem crescente: $a_{1 j_1} \cdots a_{n j_n}$, onde $(j_1 \cdots j_n)$ é uma permutação de $(1\ 2\ \ldots\ n)$.

Um produto elementar $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ multiplicado por $+1$ ou -1, é um **produto elementar com sinal**; afeta-se um sinal positivo (negativo) se $(j_1\cdots j_n)$ é uma permutação par (ímpar).

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O **determinante da matriz** A é a soma de todos os produtos elementares com sinal de A. Representa-se por $\det(A)$ ou $|A|$.

Chama-se **símbolo da permutação** $e_{j_1\cdots j_n}$ onde $(j_1\cdots j_n)$ é uma permutação de $(1\ 2\ \ldots\ n)$, aos n^n elementos definidos por

$$e_{j_1\cdots j_n}=\begin{cases}1 \text{ se } (j_1\ldots j_n) \text{ é uma permutação par de } (1\ldots n)\\ -1 \text{ se } (j_1\ldots j_n) \text{ é uma permutação ímpar de } (1\ldots n)\\ 0 \text{ se pelo menos 2 dos indíces forem iguais}\end{cases}$$

Assim, o determinante de uma matriz é dado pela expressão:

$$\det(A)=\sum_{j_1\cdots j_n} e_{j_1\cdots j_n}a_{1j_1}\ldots a_{nj_n}$$

Regras práticas para o cálculo de determinantes

Regra prática para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 2: multiplicam-se os elementos da diagonal principal e afeta-se do sinal + ; multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e afeta-se o sinal − ; adicionam-se algebricamente os produtos obtidos.

Regra prática (Sarrus) para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3:

- (opção 1) repetem-se à direita as duas primeiras colunas da matriz (ou, repetem-se por baixo as duas primeiras linhas da matriz); consideram-se o produto dos elementos da diagonal principal e os produtos dos elementos de cada paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal +; consideram-se o produto dos elementos da diagonal secundária e os produtos dos elementos de cada paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal −; adicionam-se algebricamente os produtos obtidos.

- (opção 2) multiplicam-se os elementos da diagonal principal bem como os elementos de cada triângulo com base paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal +; multiplicam-se os elementos da diagonal secundária bem como os elementos de cada triângulo com base paralela a essa diagonal, e afetam-se os três produtos do sinal − ; adicionam-se algebricamente os produtos obtidos.

Propriedades dos Determinantes

- Seja a matriz $A = (a_{ij})$. Então $\det\left(A^T\right) = \det(A)$.
- Sejam as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Então $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz triangular, então $\det(A) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
- Se uma das linhas (colunas) da matriz $A = (a_{ij})$ é a linha nula, então $\det(A) = 0$.
- Se duas linhas (colunas) da matriz $A = (a_{ij})$ forem iguais ou proporcionais, então $\det(A) = 0$.
- Das operações elementares resulta que:
  - Se $B = (b_{ij})$ é a matriz que se obtém da matriz $A = (a_{ij})$ por troca da posição relativa de duas linhas (colunas), então $\det(B) = -\det(A)$. A propriedade anterior pode ser generalizada para a troca da posição relativa de n linhas (colunas), e desta forma $\det(B) = (-1)^n \det(A)$.
  - Se $B = (b_{ij})$ é a matriz que se obtém da matriz $A = (a_{ij})$ multiplicando uma linha (coluna) de A por um escalar α, então $\det(B) = \alpha \det(A)$. A propriedade anterior pode ser generalizada para a multiplicação de um escalar α pelas n linhas (colunas), e desta forma $\det(B) = \alpha^n \det(A)$.
  - Se $B = (b_{ij})$ é a matriz que se obtém da matriz $A = (a_{ij})$ adicionando a uma linha (coluna) de A, outra linha (coluna) de A multiplicada por um escalar não nulo então $\det(B) = \det(A)$.

- Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem n, com $n-1$ linhas(colunas) iguais. Se $C = (c_{ij})$ é a matriz formada por essas $n-1$ linhas (colunas) e em que a restante linha (coluna) é a soma da restante linha (coluna) de A com a de B então $\det(C) = \det(A) + \det(B)$, ou seja, o determinante de uma matriz goza da aditividade para cada linha (coluna).

- Seja a matriz $A = (a_{ij})$. Então $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$, sempre que $\det(A) \neq 0$. Quando $\det(A) = 0$ então A não admite matriz inversa.

Exercícios

1. (* Facultativo) Mostre que:

   (a) (53241) é uma permutação par de (12345).

   (b) (35412) é uma permutação ímpar de (12345).

2. (* Facultativo) Diga se as seguintes permutações de (1234) são pares ou ímpares:

$$(3241); (2413); (4312).$$

3. (* Facultativo) Use a definição para calcular o valor do determinante das matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

4. Use as regras práticas para o cálculo do determinante de matrizes de ordem 2 e 3 para obter o valor do determinante das matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \; \text{e} \; D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 10 & 15 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12$, calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 18 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 10 \end{vmatrix}$

6. Sabendo que a, b, c, d, e, f, g, h e j são parâmetros reais, utilize as propriedades dos determinantes para mostrar que:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$; (c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$; (d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$; (f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$; (g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;

(h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & j \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$; (i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & j & h \end{vmatrix}$.

7. Sejam a, b e c parâmetros reais tais que $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 \\ c & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Utilizando as propriedades dos determinantes prove que: $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - m & -m & 1-m \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = m$, com $m \in \mathbb{R}$.

8. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & c & 0 \end{vmatrix} = -5$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, calcule $\begin{vmatrix} -1 & a & 2a+2 \\ -2 & b & 2b+1 \\ -1 & c & 2c \end{vmatrix}$.

9. Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Mostre que:

   (a) se A é uma matriz ortogonal então $|A| = \pm 1$;

   (b) se $A = A^2$ então $|A| = 1$ ou $|A| = 0$;

   (c) se A é uma matriz antissimétrica de ordem ímpar então $|A| = 0$.

10. Sejam A e B duas matrizes de ordem n. Verifique se:

   (a) $|A| = |B| \Rightarrow A = B$;

   (b) $|A + B| = |A| + |B|$.

11. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e tais que $\det A = 2$ e $\det B = -1$. Determine o valor dos determinantes:

   (a) $\det(A^2 B^T)$.

   (b) $\det(-A^{-1}B)$.

   (c) $\det(\frac{1}{2}(A^2)^T(B^{-1})^T)$.

   (d) $\det(2A^{-1}B^2)$.

Soluções:

1. —.

2. Par ; Ímpar ; Ímpar.

3. $\det A = 12$; $\det B = 8$ e $\det C = a^4$.

4. $|A| = 6$, $\quad |B| = -26$, $\quad |C| = -14$ e $\quad |D| = 0$.

5. (a) 120 (b) 96 (c) 12.

6. (a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$, pois existe uma coluna nula.

   (b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$, pois $L_1 = -L_2$.

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, pois $C_2 = 2C_1$.

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$, pois existe uma coluna nula.

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$, pois o determinante de uma matriz triangular é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

(f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$, pois o determinante matriz diagonal é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal.

(g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, pois $\left|A^T\right| = |A|$.

(h) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} g & h & j \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$, pois $L_1 \leftrightarrow L_3$.

(i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & j & h \end{vmatrix}$, pois $C_2 \leftrightarrow C_3$.

7. —.

8. $\begin{vmatrix} -1 & a & 2a+2 \\ -2 & b & 2b+1 \\ -1 & c & 2c \end{vmatrix} = 5$.

9. —.

10.

(a) Falso. Contra exemplo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

(b) Falso. Contra exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11.

(a) -4.

(b) $\frac{1}{2}$

(c) $-\frac{1}{2}$

(d) 4.

Menor complementar

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Designa-se por **menor complementar** de A e representa-se por $|M_{ij}|$, o determinante da matriz obtida por supressão da i-ésima linha e da j-ésima coluna da matriz A.

Complemento algébrico

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. Designa-se por **complemento algébrico** de a_{ij} o valor $(-1)^{i+j} |M_{ij}|$ e representa-se por A_{ij}.

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n, é igual à soma algébrica dos produtos dos elementos de uma qualquer linha (ou coluna) pelos respetivos complementos algébricos, ou seja,

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad \text{ou} \quad \det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

se for escolhida a i-ésima linha ou a j-ésima coluna de A, respetivamente.

Matriz adjunta e matriz inversa

- Seja A uma matriz de ordem n. Designa-se por **matriz dos complementos algébricos** de $A = (a_{ij})$, e denota-se por $A^C = (A_{ij})$, a matriz que se obtém de A substituindo cada um dos seus elementos pelo respetivo complemento algébrico.

- Seja A uma matriz de ordem n. Designa-se por **matriz adjunta** de $A = (a_{ij})$, e denota-se por $\text{adj}(A)$ a transposta da matriz dos complementos algébricos, isto é:

$$\text{adj}(A) = \left(A^C\right)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T.$$

Proposição: Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se que:

$$A\,(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))\,A = (\det(A))\,I_n.$$

Teoremas:

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- A matriz A é invertível se, e só se, $\det(A) \neq 0$.
- Se A é uma matriz invertível então $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$.

Exercícios

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcule o determinante de A e B.

   (b) Determine os complementos algébricos dos elementos c_{22} e c_{32}.

   (c) Calcule $|C|$.

2. Calcule, utilizando o teorema de Laplace, o valor do determinante de cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Considere as seguintes matrizes reais de parâmetros a e b:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & a \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & 9 \\ 1 & b & 4 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} a+2 & 1 & 2 \\ 3 & 2a & 3 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; \text{e} \; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que $\det(A) = 2a-20$, $\det(B) = -5b+10$, $\det(C) = -6a^2-3a$ e $\det(D) = -2a+b+2$.

(b) Determine os valores de a e b para os quais:

i. as matrizes são invertíveis;

ii. a característica é igual à ordem.

(c) Considere $a = 0$ e $b = -2$. Para as matrizes invertíveis determine:

i. a matriz dos complementos algébricos;

ii. a matriz adjunta;

iii. a matriz inversa.

4. Usando a teoria dos determinantes, verifique que cada uma das matrizes seguintes é invertível e determine a respetiva inversa.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 4 & 9 & 8 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Considere as seguintes matrizes e os parâmetros reais a, b e c.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ b-1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ b & 0 & a & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Usando a teoria de determinantes, determine a inversa da matriz A.

(b) Recorrendo à alínea anterior, determine a e b de modo que $AB = C$.

(c) Usando o teorema de Laplace verifique que $\det(D) = -2c(a+b)$.

(d) Indique para que valores de a, b e c, a matriz D é invertível.

6. Considere as seguintes matrizes A e B e o parâmetro real a.

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2+a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2+a & 1-a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Aplicando o teorema de Laplace à terceira linha da matriz A, mostre que $\det(A) = 2a\,(a-2)(a-1)$.

(b) Usando a alínea anterior, indique justificando, para que valores de a, a matriz A não é invertível.

(c) Determine a inversa da matriz B.

Soluções:

1.

(a) $|A| = -2$ e $|B| = 0$.

(b) $c_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

e $c_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

(c) $|C| = -2$.

2. (a) $|A| = 0$. (b) $|B| = 0$. (c) $|C| = -33$. (d) $|D| = 0$. (e) $|E| = -24$. (f) $|F| = 24$.

3.

(a) —

(b)

i. Matriz $A : a \neq 10$; Matriz $B : b \neq 2$ e $a \in \mathbb{R}$; Matriz $C : a \neq 0 \wedge a \neq -\dfrac{1}{2}$; Matriz $D : b \neq 2a - 2$.

ii. Matriz $A : a \neq 10$; Matriz $B : b \neq 2$ e $a \in \mathbb{R}$; Matriz $C : a \neq 0 \wedge a \neq -\dfrac{1}{2}$; Matriz $D : b \neq 2a - 2$.

(c)

i. $A^C = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B^C = \begin{bmatrix} 18 & 5 & -2 \\ -16 & 0 & 4 \\ 18 & -5 & -2 \end{bmatrix}$.

ii. $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ e $\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} 18 & -16 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

iii. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ e $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{4}{5} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$.

4. (a) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{20}{21} & \frac{17}{21} & -\frac{16}{21} \\ \frac{19}{21} & -\frac{13}{21} & \frac{11}{21} \end{bmatrix}$. (d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

5.

(a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $a = -\frac{1}{2} \wedge b = 1$. (c) —

(d) $c \neq 0 \wedge a \neq -b$.

6.

(a) — (b) Para $a = 0 \vee a = 1 \vee a = 2$.

(c) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Folha 15 - Determinantes - Regra de Cramer

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem n. O sistema de equações lineares $AX = B$ tem uma única solução se e só se $\det(A) \neq 0$. Essa solução é dada por $X = A^{-1}B$, ou seja,

$$X = \frac{adj\,(A)}{\det(A)}\; B \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\det(A)} \\ x_2 = \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n}{\det(A)} \\ \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\det(A)} \end{cases},$$

pelo que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)}, \quad \cdots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det(A)}.$$

Assim obtém-se a seguinte regra de extrema importância na resolução de sistemas:

Regra de Cramer:

$$x_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i A_{ij}}{\det(A)} = \frac{|A_j|}{\det(A)},\; j = 1, \ldots, n,$$

onde A_j é a matriz que se obtém da matriz A substituindo $a_{1j} \ldots a_{nj}$ (coluna j) por $b_1 \ldots b_n$.

Exercícios

1. Utilize, se possível, a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} 3y + 2x = -z + 1 \\ 3x + 2z = 8 - 5y \\ 3z + x + 2y = 1 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 4 \\ -2x - y - 3z = -3 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x - w = 0 \\ 2y + 3z = 1 \\ -y - w = -1 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$.

2. Usando a Regra de Cramer resolva os seguintes sistemas de equações:

(a) $\begin{cases} x + y &= 2 \\ 2x - y &= 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y + z &= 4 \\ 3x - y - 2z &= 0 \\ -x - y + 3z &= 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} 3x + y + z + t &= 0 \\ 2x - y + 2t &= 1 \\ x + y - 2z - t &= -3 \\ 3x - y + 5z &= 5 \end{cases}$

3. Determine para que valores dos parâmetros reais a e b os seguintes sistemas de equações lineares são possíveis e determinados.

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ 3x - 3y + bz = 3 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} (2-a)x + y + z = 1 \\ 2ax + 3y + 2z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

Soluções:

1.

(a) Não é possível resolver utilizando a regra de Cramer. (b) $x = -22$, $y = 16$ e $z = -3$.

(c) $x = \dfrac{3}{2}$, $y = -\dfrac{3}{8}$ e $z = \dfrac{1}{8}$. (d) $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ e $w = 2$.

2. (a) $x = 1$, $y = 1$; (b) $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ e (c) $x = -\dfrac{7}{53}$, $y = -\dfrac{41}{53}$, $z = \dfrac{49}{53}$, $t = \dfrac{13}{53}$.

3.

(a) $a \neq 1 \wedge b \neq 3$. (b) $a \neq 1$.

Espaço vetorial

Seja E um conjunto não vazio ($E \neq \varnothing$). Diz-se que $(E, +, .)$ é um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre o corpo $\mathbb{R}$ quando estão definidas duas operações:

⇝ uma operação designada por adição definida por:

$$\begin{array}{rccc} + : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & (u,v) & \longmapsto & u+v, \end{array}$$

que goza das propriedades de grupo comutativo:

A_1 *Comutatividade*:

$\forall u, v \in E,\ u + v = v + u,$

A_2 *Associatividade*:

$\forall u, v, w \in E,\ (u + v) + w = u + (v + w),$

A_3 *Existência de elemento neutro* (0_E):

$\forall u \in E : u + 0_E = u,$

A_4 *Existência de elemento simétrico*:

$\forall u \in E,\ \exists u' = -u \in E : u + (-u) = 0_E;$

⇝ e outra operação designada por multiplicação por um escalar definida por:

$$\begin{array}{rccc} . : & \mathbb{R} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\alpha,u) & \longmapsto & \alpha.u, \end{array}$$

e que goza das seguintes propriedades:

M_1 *Distributividade em relação à adição de* E:

$\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v,$

M_2 *Distributividade em relação à adição de* $\mathbb{R}$:

$\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u,$

M_3 *Associatividade mista*:

$\forall u \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha.(\beta.u) = (\alpha.\beta).u,$

M_4 *Existência de elemento unidade de* $\mathbb{R}$ (1):

$\forall u \in E,\ 1.u = u.$

Definições: Os elementos do espaço vetorial E designam-se vetores e os elementos de $\mathbb{R}$ designam-se escalares.

Exemplos de espaços vetoriais

1. O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ com as operações adição e multiplicação por um escalar definidas por

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\lambda\,.\,(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

2. O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1, ..., n\}$ com as operações adição e multiplicação por um escalar definidas por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$
$$\lambda\,.\,(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

é um espaço vetorial real.

3. O conjunto dos polinómios de grau ≤ 2, $\mathbb{P}_2 = \left\{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 :\ a_2,\ a_1,\ a_0 \in \mathbb{R}\right\}$ é um espaço vetorial real com as operações adição e multiplicação por um escalar definidas por

$$(p+q)(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$
$$(\lambda\,.\,p)(x) = (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_1)x + (\lambda a_0), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

com

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0.$$

4. O conjunto dos polinómios de grau $\leq n$

$$\mathbb{P}_n = \left\{p(x) = a_nx^n + \cdots a_2x^2 + a_1x + a_0 : \ a_n, \ldots a_2, \ a_1, \ a_0 \in \mathbb{R}\right\}$$

é um espaço vetorial real com as operações usuais de adição de polinómios e multiplicação de um polinómio por um escalar.

5. O conjunto das matrizes reais do tipo $m \times n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial real com as operações adição e multiplicação por um escalar definidas por

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$
$$\lambda \,.\, A = \lambda\,(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

para $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, é um espaço vetorial real se $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. (Não estudamos) O conjunto das funções reais de variável real

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f\,(x) \end{array} \right\}$$

com as operações adição e multiplicação por um escalar definidas por

$$(f + g)\,(x) = f\,(x) + g\,(x)$$
$$(\lambda \,.\, f)\,(x) = \lambda f\,(x)\,,$$

é um espaço vetorial real se $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposições: Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Sejam $u \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se:

- O elemento neutro 0_E é único.
- Para cada $u \in E$ existe um e um só elemento simétrico, $(-u) \in E$.
- $\alpha 0_E = 0_E$.
- $0u = 0_E$.
- $\alpha u = 0_E \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee u = 0_E$.

Subespaço vetorial

Definição: Seja S um subconjunto não vazio de um espaço vetorial E. Diz-se que S é um subespaço vetorial de E quando S é um espaço vetorial em relação ao mesmo corpo de escalares $\mathbb{R}$ e para as mesmas operações definidas em E.

Proposições: Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

- Se S é um subespaço vetorial de E então $0_E \in S$.
- Se $0_E \notin S$ então S não é um subespaço vetorial de E.

Teorema: S é um subespaço vetorial de espaço vetorial E se, e só se, satisfaz cada uma das condições seguintes:

- $S \subseteq E$
- $S \neq \emptyset$
- $\forall u, v \in S, \quad u + v \in S$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \, \forall u \in S, \quad \alpha u \in S.$

Exemplo 1:

$S = \{0_E\}$ é um subespaço vetorial de E designado por subespaço nulo. (Este subespaço diz-se trivial.)

Exemplo 2: E é um subespaço vetorial de E (este subespaço diz-se trivial).

Exemplo 3:

$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\right\}$ (reta de equação $y = 2x$) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 4:

$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}$ (plano de equação $z = 0$) é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

NOTAS

➤ O conjunto de pontos de uma qualquer reta que passa pela origem forma uma subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

➤ O conjunto de pontos de um qualquer plano que passe pela origem forma uma subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

➤ O conjunto $\mathbb{R}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. (Porquê?)

Lista de subespaços de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (ver [AR2001], pág. 163)

Subespaços de $\mathbb{R}^2$	**Subespaços de $\mathbb{R}^3$**
▸ $\{(0,0)\}$	▸ $\{(0,0,0)\}$
▸ Retas que passam pela origem	▸ Retas que passam pela origem
▸ $\mathbb{R}^2$	▸ Planos que passam pela origem
	▸ $\mathbb{R}^3$

Alguns subespaços vetoriais de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (ver [AR2001], pág. 163):

- Matrizes simétricas
- Matrizes triangulares superiores
- Matrizes triangulares inferiores
- Matrizes diagonais

Referências

[AR2001] Howard Anton & Chris Rorres (2001). *Álgebra Linear com Aplicações*, Bookman.

Exercícios

1. ($*$ Facultativo) Considere $\mathbb{R}^3$ com as operações

   adição: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

   multiplicação por escalar: $\alpha(x, y, z) = (2\alpha x, 2\alpha y, 2\alpha z)$

   Mostre que o axioma da associatividade mista de $\mathbb{R}$ não se verifica.

2. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais reais do espaço vetorial indicado.

   (a) $S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\right\}$ em $\mathbb{R}^2$.

   (b) $S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\right\}$ em $\mathbb{R}^2$.

   (c) $S_3 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\right\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (d) $S_4 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \wedge y = 2z\right\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (e) $S_5 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y = 2z = 4w\right\}$ em $\mathbb{R}^4$.

   (f) $S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0 \vee y = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

   (g) $S_7 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \wedge d = 2a\right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (h) $S_8 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c = 1\right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (i) $S_9 = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = d = f = 0\right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   (j) $S_{10} = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R}) : a \geq 0 \wedge b = 0\right\}$ em $\mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$.

   (k) $S_{11} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) = 0\}$ em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (l) $S_{12} = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é invertível}\}$ em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3. Considere em $\mathbb{R}^4$ o subconjunto $A = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y = a \wedge z = x + w,\ a \in \mathbb{R}\right\}$. Determine a de modo que A seja subespaço vetorial real de $\mathbb{R}^4$.

Soluções:

1. --

2. (a) S_1 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

   (b) S_2 não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

   (c) S_3 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   (d) S_4 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   (e) S_5 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

   (f) S_6 não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

   (g) S_7 é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (h) S_8 não é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (i) S_9 é subespaço vetorial de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

   (j) S_{10} não é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$.

   (k) S_{11} não é subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

   (l) S_{12} não é subespaço vetorial de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

3. $a = 0$.

Combinação linear de vetores

Seja $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto de m vetores de um espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$. Diz-se que o vetor $u \in E$ é **combinação linear dos vetores** $v_1, v_2, ..., v_m$ quando existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m$.

Subespaços vetoriais gerados

Proposição: Seja $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset E$ um conjunto de vetores do espaço vetorial E sobre $\mathbb{R}$. O conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de V

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço vetorial de E ao qual pertencem os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$.

Definições:

- O subespaço vetorial S de E formado por todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ representa-se por

$$S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m : \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}\} = [v_1, v_2, ..., v_m] = \text{ger}\{v_1, v_2, ..., v_m\}$$

  e designa-se por **subespaço vetorial gerado** por $v_1, v_2, ..., v_m$.

- Os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ são designados por **vetores geradores** de S.

Observações:

1. O subespaço vetorial gerado por $v_1, v_2, ..., v_m$ é o menor de todos os subespaços vetoriais de E que contém os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$.

2. Afirmar que $u \in [v_1, v_2, ..., v_m]$ é equivalente a dizer que, $\forall u \in S$, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m$.

Exercícios

1. Escreva o vetor $(2,-3)$ de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores:

   (a) $(1,0)$ e $(0,1)$; (b) $(1,1)$ e $(1,2)$; (c) $(0,1)$ e $(2,-3)$.

2. Quais dos seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ são combinação linear de $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ e $u_3 = (0,1,1)$?

   (a) $u = (5,-3,3)$.

   (b) $u = (1,-1,0)$.

3. Averigue se o vetor:

   (a) $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é combinação linear de $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é combinação linear de $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $u_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Determine o subespaço vetorial gerado por cada um dos conjuntos de vetores.

   (a) $u_1 = (1,1,0)$ e $u_2 = (2,1,1)$.

   (b) $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (-2,1,1)$ e $u_3 = (1,0,-1)$.

   (c) $u_1 = (1,-1,1,0)$, $u_2 = (2,-1,2,1)$, $u_3 = (0,1,0,1)$ e $u_4 = (-1,0,-1,-1)$.

   (d) $u_1 = (1,0,-1,0)$, $u_2 = (1,-1,1,0)$, $u_3 = (-1,1,0,-1)$ e $u_4 = (1,0,0,-1)$.

5. Determine o subespaço vetorial gerado por cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $C_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   (b) $C_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

6. Diga se o vetor $(1, 3)$ pertence ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Visualize geometricamente.

7. Diga se o vetor $(2, 5, -3)$ pertence ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1, 4, -2)$ e $(-2, 1, 3)$.

8. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 0, 2), \quad v_2 = (1, -1, 1), \quad v_3 = (0, -1, -1), \quad v_4 = \left(1, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Prove que o subespaço gerado por v_1 e v_2 coincide com o subespaço gerado por v_3 e v_4.

9. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$a = (1, -1, 1, -1), \quad b = (1, 2, 3, 4), \quad c = (2, 1, 0, 3), \quad d = (0, -3, -2, -5).$$

Seja F o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado por a e b. Diga se c e d são elementos de F.

10. Determine α e β de modo que o vetor $(1, 1, \alpha, \beta)$ pertença ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1, 0, 2, 1)$ e $(1, -1, 2, 2)$.

Soluções:

1. (a) $(2, -3) = 2(1, 0) - 3(0, 1)$ (b) $(2, -3) = 7(1, 1) - 5(1, 2)$ (c) $(2, -3) = 0(0, 1) + (2, -3)$

2. (a) Não é c.l., porque $\nexists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : (5, -3, 3) = \alpha\,(1, 0, 1) + \beta\,(-1, 1, 0) + \gamma\,(0, 1, 1)$.

   (b) É c.l., porque $(1, -1, 0) = -\gamma\,(1, 0, 1) + (-1-\gamma)\,(-1, 1, 0) + \gamma\,(0, 1, 1)\,, \gamma \in \mathbb{R}$.

3. (a) Sim, porque $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   (b) Não é c.l., porque $\nexists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} : u = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$.

4. (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - x + z = 0\}$

   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$

   (c) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -x + z = 0 \wedge w - x - y = 0\}$

(d) $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + w = 0\}$

5. (a) $[C_1] = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \right\}$,

   (b) $[C_6] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & c \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$,

6. Sim.

7. Não.

8. —.

9. O vetor d é elemento de F e o vetor c não é elemento de F.

10. $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Vetores linearmente independentes

Seja $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\} \subset E$ onde E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Note-se que a equação

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m = 0_E, \tag{1}$$

admite **sempre** a solução **trivial**(**solução nula**):

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ \dots \ = \alpha_m = 0. \tag{2}$$

- Quando (2) é a única solução da equação (1), os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ dizem-se **linearmente independentes (L.I.).**
- Quando existem **outras** soluções (existe pelo menos um escalar não nulo) para além da solução (2), os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ dizem-se **linearmente dependentes (L.D.).**

Propriedades de independência linear

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Então:

1. O vetor nulo de E é um vetor linearmente dependente.
2. Todo o vetor único v não-nulo de E é linearmente independente.
3. Se um conjunto de vetores de E contém o vetor nulo de E então os vetores são linearmente dependentes.
4. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ um conjunto de vetores de E. Os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$, são linearmente dependentes se e só se um deles se puder escrever como combinação linear dos restantes.

5. Se algum subconjunto do conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é constituído por vetores linearmente dependentes então os vetores $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ são linearmente dependentes.

6. Todo o subconjunto de um conjunto de vetores linearmente independentes é ainda um conjunto de vetores linearmente independentes.

7. Se os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ de E são linearmente independentes e $v_1, v_2, ..., v_m, v$ são vetores de E linearmente dependentes então o vetor v é uma combinação linear dos restantes.

8. Os vetores $v_1, ..., v_i, ..., v_m$, de E são linearmente independentes (dependentes) se e só se os vetores $v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_m$ de E, com $\alpha \neq 0$, forem linearmente independentes (dependentes).

9. Os vetores $v_1, ..., v_i, ..., v_k, ..., v_m$ de E são linearmente independentes (dependentes) se e só se os vetores $v_1, ..., v_i + \alpha v_k, ..., v_k, ..., v_m$, de E, $\alpha \in \mathbb{R}$, forem linearmente independentes (dependentes).

Exercícios

1. (a) Escreva o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores $(2, -3)$ e $(-4, 6)$ de duas maneiras diferentes.

   (b) Pode o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ escrever-se como combinação linear dos vetores $(2, -3)$ e $(4, 6)$ de mais que uma maneira?

2. Diga quais dos seguintes conjuntos são constituídos por vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ (e no caso de dependência escreva um dos vetores como combinação linear dos outros):

   (a) $\{(1, -2, 3), (3, -6, 9)\}$;

   (b) $\{(1, -2, -3), (3, 2, 1)\}$;

   (c) $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$;

   (d) $\{(0, 2, -4), (1, -2, -1), (1, -4, 3)\}$;

   (e) $\{(1, -1, -1), (2, 3, 1), (-1, -4, -2), (3, 1, 2)\}$.

3. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

   $v_1 = (1, 0, 1, 0), \quad v_2 = (1, -1, 1, -1), \quad v_3 = (-2, 0, 1, 2) \quad \text{e} \quad v_4 = (3, -1, 3, -1).$

   (a) Mostre que v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes.

   (b) Mostre que v_1, v_2, v_4 são linearmente dependentes.

4. Discuta, segundo os valores de μ, a dependência ou independência linear dos vetores de $\mathbb{R}^4$:

   $v_1 = (1, -2, -5, 8), \quad v_2 = (-1, 1, 1, 5) \quad \text{e} \quad v_3 = (1, 2, 11, \mu).$

5. Considere os seguintes conjuntos:

   $$C_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

   $$C_2 = \{(1, 1, -1), (0, 0, 0)\},$$

   $$C_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \right\},$$

   $$C_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

   $$C_5 = \{(0, 2, 0, -4), (0, 0, 1, -1), (0, 1, -2, 0), (1, 1, -1, 0)\},$$

   $$C_6 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

   $$C_7 = \{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 3, 0), (1, 0, 0, 0)\}.$$

   Justifique quais dos conjuntos são constituídos por vetores linearmente dependentes.

6. Sejam v_1, v_2, v_3 vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$. Diga quais dos seguintes conjuntos são constituídos por vetores linearmente independentes.

   (a) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$;

   (b) $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$;

   (c) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1\}$.

Soluções:

1. (a) $(0,0) = 0(2,-3) + 0(-4,6)$ e $(0,0) = 2(2,-3) + 1(-4,6)$ (b) Sim.

2.
   (a) $3(1,-2,3) = (3,-6,9)$;
   (b) $L.I.$;
   (c) $L.I.$;
   (d) $(0,2,-4) = (1,-2,-1) - (1,-4,3)$;
   (e) $(1,-1,-1) = (2,3,1) + (-1,-4,-2) + 0.(3,1,2)$.

3.
   (a) —
   (b) —

4. Se $\mu = -44$ então o sistema associado $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ verifica $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 2 <$ num. variáveis $= 3$. Logo, o sistema é possível indeterminado. Portanto, os vetores são L.D..

   Se $\mu \neq -44$ então o sistema associado $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ verifica $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3 =$ num. variáveis. Logo, o sistema é possível determinado. Portanto, os vetores são L.I. .

5. C_2, C_3, C_4 e C_5.

6. (a) São L.I.
   (b) São L.I.
   (c) São L.D.

Base de um espaço vetorial

Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Designa-se por **base de um espaço vetorial** todo o conjunto de geradores independentes, ou seja, $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é uma base do espaço vetorial E quando:

- os vetores $v_1, v_2, ..., v_m$ são linearmente independentes e
- $[v_1, v_2, ..., v_m] = E$.

Nota: O espaço vetorial nulo $E = \{0_E\}$ tem como base o conjunto vazio.

Teorema: Se $B = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ é uma base do espaço vetorial E então todo o vetor $v \in E$ se pode escrever de forma única como combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_m$.

Teorema: Todo o espaço vetorial E não nulo admite uma base.

Exemplos de bases

Base canónica de $\mathbb{R}^n$: É constituída pela sequência de vetores

$$u_1 = (1, 0, \ldots, 0)\,,\ u_2 = (0, 1, \ldots, 0)\,,\ \ldots,\ u_n = (0, 0, \ldots, 1)\,.$$

Base canónica de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: É o conjunto com $m \times n$ vetores definido por

$C = \{C_{lc} : l = 1, \ldots, m \wedge c = 1, \ldots, n;\}$, onde

$$C_{lc} = (c_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = l \wedge j = c \\ 0 & \text{se} \quad i \neq l \vee j \neq c \end{cases}.$$

Dimensão de um espaço vetorial

Diz-se que o espaço vetorial E tem **dimensão** n quando admite uma base B com n elementos $(\#B = n)$ e representa-se por $\dim E = n$.

Proposições: Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- Se E é de dimensão n então quaisquer $n+1$ vetores são linearmente dependentes.
- Todas as bases de E têm o mesmo número de elementos.
- Tem-se que $\dim\{0_E\} = 0$ pois a base é o conjunto vazio.

Proposições: Sejam S um subespaço vetorial de E tal que $\dim S = n$, A um conjunto de vetores de S e r o número de elementos de A. Tem-se que:

- Se $r > n$ então os vetores de A são linearmente dependentes. Logo A não é base de S.
- Se $r < n$ então A não gera S. Logo A não é base de S.
- Se $r = n$ e os vetores de A são linearmente independentes então A é base de S.
- Se $r = n$ e A gera S então A é base de S.

Definição: Se $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ é uma base de um subespaço vetorial $S \subseteq E$ então qualquer vetor $v \in S$ escreve-se, de forma única, como combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m,$$

com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$.

Os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ são designados de **coordenadas** ou **componentes** de v na base B e escreve-se $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)_B$.

Exercícios

1. Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços vetoriais reais:

   (a) $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2y\}$.

   (b) $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$.

   (c) $S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

(d) $S_4 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 2z = -w\right\}$.

(e) $S_5 = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = -z\right\}$.

(f) $S_6 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = d \wedge c = -2b \right\}$.

(g) $S_7 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d = 0 \right\}$.

2. Justifique porque as seguintes sequências de vetores não formam uma base do espaço vetorial indicado.

   (a) $u_1 = (1, -1)$ e $u_2 = (-2, 2)$ em $\mathbb{R}^2$.

   (b) $u_1 = (1, 2)$, $u_2 = (1, 1)$ e $u_3 = (3, 0)$ em $\mathbb{R}^2$.

   (c) $u_1 = (1, 1, 0)$ e $u_2 = (-2, 1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$.

   (d) $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ e $u_3 = (2, 1, 0)$ em $\mathbb{R}^3$.

   (e) $u_1 = (1, -1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 2, -1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 0, 2)$ e $u_4 = (1, -3, 1, -3)$ em $\mathbb{R}^4$.

   (f) $u_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $u_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

3. Considere em $\mathbb{R}^4$ o subespaço vetorial $S = ger\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, -1), (-1, 0, -1, -1), (0, 2, 2, -2)\}$.

   (a) Determine S e a sua dimensão.

   (b) Determine uma base de S.

   (c) Indique, se existir, uma base de S que contenha o vetor $(1, 2, 3, -1)$.

   (d) Determine k de modo que o vetor $u = \left(1, k^2, 2, 0\right) \in S$.

4. Considere no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a base canónica $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e a base $B = \{(1, 1), (-2, 2)\}$. Determine, em relação à base B, as coordenadas dos seguintes vetores.

   (a) $u = (1, 3)_C$.

   (b) $\mathbf{v} = (1, -3)_C$.

5. Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z = 0\}$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Calcule uma base e a dimensão de S.

   (b) Considere a base B determinada na alínea anterior. Determine:

      i. as componentes de $u = (3, 1, 2, -4)$ na base B.

      ii. vetor de S representado por $(3, 1, -4)_B$.

<u>Soluções:</u>

1. (a) base de S_1: $\{(2,1)\}$; $\dim S_1 = 1$

   (b) base de S_2: $\{(1,1,-1)\}$; $\dim S_2 = 1$

   (c) base de S_3: $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$; $\dim S_3 = 2$

   (d) base de S_4: $\{(0,1,0,0), (2,0,1,-2)\}$; $\dim S_4 = 2$

   (e) base de S_5: $\{(0,1,0,0), (-1,0,1,0), (0,0,0,1)\}$; $\dim S_5 = 3$

   (f) base de S_6: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim S_6 = 2$

   (g) base de S_7: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; $\dim S_7 = 3$

2. (a) u_1 e u_2 são linearmente dependentes pois u_2 é múltiplo de u_1.

   (b) O conjunto de $\mathbb{R}^2$ com mais do que dois vetores constituem um conjunto de vetorees linearmente dependentes. Logo u_1, u_2 e u_3 são linearmente dependentes.

   (c) O espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ tem dimensão igual a 3, logo qualquer base de $\mathbb{R}^3$ é constituída obrigatoriamente por 3 vetores.

   (d) Os vetores u_1, u_2 e u_3 são linearmente dependentes pois pode verificar-se que $u_3 = \frac{3}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$. Ou, pode verificar-se que o sistema de equações $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = \mathbf{0}$ de 3 equações e 3 incógnitas, α, β e γ, tem matriz ampliada $[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\text{car}(A) = \text{car}\,[A|B] = 2 <$ núm. de incógnitas $= 3$. Donde o sistema é possível indeterminado, $g.i. = 1$ e a solução não é única.

(e) O sistema de equações $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3+\delta u_4=\mathbf{0}$ de 4 equações e 4 incógnitas, α, β,γ e δ, tem matriz ampliada $[A|B]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\operatorname{car}(A)=\operatorname{car}[A|B]=2<$ núm. de incógnitas $=4$. Donde o sistema é possível indeterminado, $g.i.=2$ e a solução não é única.

Observação: como $g.i.=2$, dois dos vetores podem ser escritos em termos dos outros dois. Por exemplo: $u_3=u_1+u_2$ e $u_4=-u_1-2u_2$.

(f) Os vetores são linearmente dependentes porque, por exemplo, $u_2=u_1+u_4$.

3.

(a) $[A|B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y \\ 1 & 1 & -1 & 2 & z \\ 1 & -1 & -1 & -2 & w \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w+y-x \end{bmatrix}$

$S=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : -x-y+z=0\wedge -x+y+w=0\right\}$; $\dim S=2$.

(b) Base de S: $\{(1,0,1,1),(0,1,1,-1)\}$.

(c) Base de S que contém $(1,2,3,-1)$: $\{(1,2,3,-1),(1,0,1,1)\}$.

(d) $k=\pm 1$.

4. $u=\left(2,\frac{1}{2}\right)_B$; $v=(-1,-1)_B$.

5.

(a) $B=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

(b)

i. $u=(3,1,2,4)=(1,2,-4)_B$.

ii. $v=(3,1,-4)_B=(4,3,1,-4)$.

Folha 20 - Espaços Vetoriais - Valores e Vetores Próprios

No que se segue, considera-se que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Valor e vetor próprio de uma matriz

Diz-se que $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ é um **vetor próprio** de A associado ao **valor próprio** $\lambda \in \mathbb{R}$ quando $Av = \lambda v$.

Uma vez que

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = O_{n\times 1} \Leftrightarrow Av - \lambda I_n v = O_{n\times 1} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)\, v = O_{n\times 1}$$

então o vetor v é um vetor próprio de A se e só se v é uma solução não nula do sistema homogéneo $(A-\lambda I_n)v = O_{n\times 1}$. Como o sistema admite a solução nula e a solução v então é possível e indeterminado, pelo que $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Deste modo, pode concluir-se que:

Proposições

- λ é solução da equação $\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ é um valor próprio de A.
- v é solução não nula do sistema $(A - \lambda I_n)\, v = 0_{n\times 1} \Leftrightarrow v$ é um vetor próprio de A associado a λ.

Definições

- Designa-se por **polinómio característico** o polinómio em λ de grau n, definido por

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

- A equação $\det(A - \lambda I_n) = 0$ é designada por **equação característica**.

Cálculo dos valores e vetores próprios

Para calcular os valores próprios basta resolver a equação característica $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$. Uma vez calculados os valores próprios, os vetores próprios que lhe estão associados são obtidos substituindo cada valor de λ no sistema de equações lineares homogéneo, $(A - \lambda I_n)v = O_{n\times 1}$.

Resolvendo o sistema de equações anterior em ordem a v obtém-se um sistema possível e indeterminado, de onde se extraem todas as soluções não nulas, que originam o conjunto de todos os vetores próprios associados ao valor próprio λ.

Multiplicidade algébrica

Diz-se que λ é um valor próprio de **multiplicidade algébrica** k, quando λ é raiz de multiplicidade k do polinómio característico, e denota-se por $m_a(\lambda) = k$.

Exemplos de aplicação

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   Cálculo dos valores próprios:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 3. \end{aligned}$$

   Valores próprios: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$.

   Cálculo dos vetores próprios:

   - Para $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} (A - 1I_2)\,v = 0_{2\times 1} \quad &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = -y. \end{aligned}$$

   Vetores próprios associados a $\lambda_1 = 1$:

$$(-y, y) = y(-1, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

- Para $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3I_2)\, v = 0_{2\times 1} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

  Vetores próprios associados a $\lambda_2 = 3$:

$$(x, x) = x\,(1, 1) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}.$$

Repare-se que:

- $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$;
- $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$,

onde $\operatorname{tr}(A)$ representa o traço de A que é a soma dos elementos principais da matriz A.

Estas propriedades serão referidas para o caso geral na próxima folha.

Exercícios

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique se:

      i. $u = (x, -x) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ é vetor próprio da matriz A.

      ii. $u = (-2, 2, 0)$ é vetor próprio da matriz B.

      iii. $u = (-x, x, 0) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ é vetor próprio da matriz B.

      iv. $u = (-3x, y, y) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ é vetor próprio da matriz C.

   (b) Para cada uma das matrizes, determine os valores próprios, vetores próprios e as respetivas multiplicidades algébricas.

2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $a + b = c + d$.

   (a) Mostre que $(1, 1)$ é vetor próprio de A.

   (b) Determine os valores próprios de A.

3. Para cada uma das seguintes matrizes calcule os valores próprios, os vetores próprios e as respetivas multiplicidades algébricas.

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(g)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. Seja A uma matriz de ordem n. Mostre que:

   (a) A e A^T têm os mesmos valores próprios.

   (b) Se $\lambda = 0$ é valor próprio de A se e só se A não é invertível.

Soluções:

1. (a) i. Sim. ii. Sim. iii. Sim. iv. Não.

   (b)

   Para A :

Valores próprios:	$\lambda = 2$	$\lambda = 8$
Multiplicidade algébrica:	1	1
Vetores próprios:	$x(-1,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$	$x(1,1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

   Para B :

Val. próp.:	$\lambda = 0$	$\lambda = 2$	$\lambda = 5$
Mult. alg.:	1	1	1
Vec. próp.:	$x(-1,1,0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$	$x(0,-1,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$	$x\,(6,4,5) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

   Para C :

Valores próprios:	$\lambda = 1$	$\lambda = 4$
Multiplicidade algébrica:	2	1
Vetores próprios:	$x(1,0,0) + y(0,-1,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$	$x(1,1,2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

2. (a) — . (b) $a + b$ e $a - c$.

3. Para (a)

Valores próprios:	$\lambda = -1$	$\lambda = 2$
Multiplicidade algébrica:	1	1
Vetores próprios:	$x(1, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$	$x(\frac{5}{2}, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Para (b)

Valores próprios:	$\lambda = 1$
Multiplicidade algébrica:	2
Vetores próprios:	$x(-1, 1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Para (c)

Valores próprios:	$\lambda = 1$
Multiplicidade algébrica:	2
Vetores próprios:	$x(1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Para (d)

Valores próprios:	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$
Multiplicidade algébrica:	1	1	1
Vetores próprios:	$x(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$	$x(-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$	$x(1, -2, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Para (e)

Valores próprios:	$\lambda = -1$	$\lambda = 8$
Multiplicidade algébrica:	2	1
Vetores próprios:	$x(-1, 0, 1) + y(-\frac{1}{2}, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$	$x(1, \frac{1}{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Para (f)

Valores próprios:	$\lambda = -2$	$\lambda = 4$
Multiplicidade algébrica:	2	1
Vetores próprios:	$x(1, 1, 0), \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$	$x(0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

Para (g)

Valores próprios:	$\lambda = 1$	$\lambda = 7$
Multiplicidade algébrica:	2	1
Vetores próprios:	$x(-1,1,0) + y(-1,0,1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$	$x(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

4. (a) $(A + \lambda I)^T = A^T + \lambda I^T = A^T + \lambda I$, donde

$$\det(A^T + \lambda I) = \det(A + \lambda I)^T = \det(A + \lambda I).$$

(b) Seja A uma matriz $n \times n$ que admite o valor próprio $\lambda = 0$. Então

$$\det(A - 0I_n) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

e a matriz A não é invertível. Inversamente, se A não é invertível, $\mathrm{car}(A) < n$ e o sistema $A\mathbf{x} = 0_n$ tem soluções não nulas, ou seja, existe $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = 0\mathbf{x}$ e 0 é valor próprio de A.

No que se segue, considera-se que $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Proposição: Os vetores próprios de A, associados a um mesmo valor próprio, juntamente com o vetor nulo, constituem um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Subespaço próprio e multiplicidade geométrica

- O conjunto formado pelo vetor nulo e por todos os vetores próprios de A associados ao valor próprio λ,

  $S(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\}$ designa-se por **subespaço próprio** associado a λ.

- A dimensão de $S(\lambda)$ é designada por **multiplicidade geométrica** de λ e representa-se por $m_g(\lambda)$.

Sabendo que os valores próprios são as raízes do polinómio característico, como este é um polinómio de grau n, então possui n raízes (contando multiplicidades) e portanto, a matriz A possui também n valores próprios (não necessariamente todos distintos).

Nota: As multiplicidades algébrica e geométrica de λ podem ser diferentes, sendo
$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Exemplo de aplicação:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Valores próprios de A:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 4 \vee \lambda = -2.$$

Multiplicidades algébricas: $m_a(4) = 1$ e $m_a(-2) = 1$.

Vetores próprios:

- Para $\lambda_1 = 4$:

$$(A - 4I_2)v = 0_{2\times 1} \quad \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

$S(4) = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, 1)].$

Como $(1, 1) \neq (0, 0)$ então é linearmente independente.

Assim, $B = \{(1, 1)\}$ é uma base de $S(4)$ e $\dim(S(4)) = 1$.

Multiplicidade geométrica: $m_g(4) = 1$.

- Para $\lambda_2 = -2$:

$$(A + 2I_2)v = 0_{2\times 1} \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x = -y.$$

$S(-2) = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$

Como $(1, -1) \neq (0, 0)$ então é linearmente independente.

Assim, $B = \{(1, -1)\}$ é uma base de $S(-2)$ e $\dim(S(-2)) = 1$.

Multiplicidade geométrica: $m_g(-2) = 1$.

Proposição: Sejam v_1 e v_2 vetores próprios associados, respetivamente, aos valores próprios λ_1 e λ_2.

Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Propriedades:

- Os valores próprios de uma matriz A diagonal são os elementos da diagonal.

- Os valores próprios de uma matriz A triangular são os elementos da diagonal.

- Uma matriz A de ordem n possui exatamente n valores próprios.

- A soma das multiplicidades algébricas de todos os valores próprios distintos é igual à ordem da matriz A.

- O traço de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem n é igual à soma dos n valores próprios, isto é, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = tr\,(A)\,.$

- O determinante de uma matriz A de ordem n é igual ao produto dos n valores próprios, isto é, $\lambda_1 \times \lambda_2 \times \ldots \times \lambda_n = \det(A)$.

Exercícios

1. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique se:

      i. $u = (0, -3, 2, 1)$ é vetor próprio de B.

      ii. $v = (-1, 2, 0, 0)$ é vetor próprio de B.

   (b) Determine os valores próprios e as respetivas multiplicidades algébricas das matrizes A e B.

   (c) Relativamente às matrizes A e B calcule a multiplicidade geométrica e o subespaço próprio associado ao maior valor próprio.

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ a \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Para todos os valores de a e b determine a natureza do sistema $AX = B$.

   (b) Considere $a = 3 \wedge b = 1$.

      i. Calcule Au e Av, sendo $u = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

ii. Sabendo que $\lambda = 0$ é um valor próprio de A, determine a multiplicidade geométrica e o subespaço próprio associado a $\lambda = 0$.

iii. Indique, justificando, os valores próprios de A.

iv. A matriz A é invertível? Justifique.

3. Seja $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $\operatorname{tr}(A) = 8$ e $\det(A) = 12$. Determine os valores próprios de A.

4. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ satisfaz as condições:

   1) $\operatorname{tr}(A) = -2$ 2) $\lambda = 2$ é valor próprio de A 3) A não é invertível

   4) $S = \{v \in \mathbb{R}^6 : (A + I_6)v = 0_{6\times 1}\}$ tem dimensão igual a 3

   Determine os valores próprios de A e as suas multiplicidades algébricas.

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Seja λ um valor próprio de A, mostre que:

   (a) λ^m (com $m \in \mathbb{N}$) é valor próprio de A^m, com os mesmos vetores próprios.

   (b) $\dfrac{1}{\lambda}$ é valor próprio de A^{-1} com os mesmos vetores próprios se $\det(A) \neq 0$.

   (c) $\lambda + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é valor próprio de $A + \alpha I_n$, com os mesmos vetores próprios.

Soluções:

1.

(a) i. Sim. ii. Não.

(b)

Matriz	A		B		
Valores próprios:	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 2$	$\lambda = 4$
Multiplicidade algébrica:	1	2	1	2	1

(c)

Matriz	A	B
Valores próprios:	$\lambda = 1$	$\lambda = 4$
Multiplicidade geométrica:	1	1
Subespaço próprio:	$S(1) = \{(0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$	$S(4) = \{(x, 2x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

2.

(a) Se $a \neq 4 \vee b = 0$ o sistema é impossível. Se $a = 4 \wedge b \neq 0$ o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

(b)

i. $Au = (6, 12, 18, 0)$ e $Av = (0, 0, 0, 1)$.

ii. $S(0) = \{(x, y, -x-y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. $dim\, S(0) = 2$.

iii. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 6$.

iv. A matriz A não é invertível pois admite $\lambda = 0$ como valor próprio.

3. 2 e 6.

4. $m_a(-1) = 4$, $m_a(0) = 1$ e $m_a(2) = 1$.

5.

(a) $\lambda \mathbf{v} = A\mathbf{v} \Leftrightarrow A(\lambda \mathbf{v}) = A^2\mathbf{v} \Leftrightarrow \lambda^2\mathbf{v} = A^2\mathbf{v} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \lambda^m\mathbf{v} = A^m\mathbf{v}$.

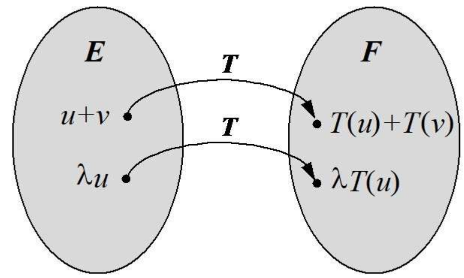
(b) Se $\det(A) \neq 0$ então A é invertível e $\lambda \neq 0$. Além disso,

$$\lambda \mathbf{v} = A\mathbf{v} \Leftrightarrow A^{-1}(\lambda \mathbf{v}) = A^{-1}A\mathbf{v} \Leftrightarrow \lambda A^{-1}\mathbf{v} = I\mathbf{v} \Leftrightarrow A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}.$$

(c) $(A + \alpha I_n)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + \alpha I_n\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} = (\lambda + \alpha)\mathbf{v}$.

Uma aplicação $T : E \longrightarrow F$ designa-se por **transformação linear** quando satisfaz as seguintes condições:

- E e F são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$,
- aditividade: $T(u+v) = T(u) + T(v)\,, \forall u, v \in E$,
- homogeneidade: $T(\lambda u) = \lambda T(u)\,, \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.



As duas últimas condições anteriores são equivalentes a uma única condição:

- $T(\lambda u + \beta v) = \lambda T(u) + \beta T(v)\,, \forall u, v \in E, \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposição: Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear. Então a imagem do vetor nulo de E é o vetor nulo de F, ou seja, $T(0_E) = 0_F$.

Proposição: Se $T(0_E) \neq 0_F$ então T não é linear. Esta proposição constitui um critério para a não linearidade de T.

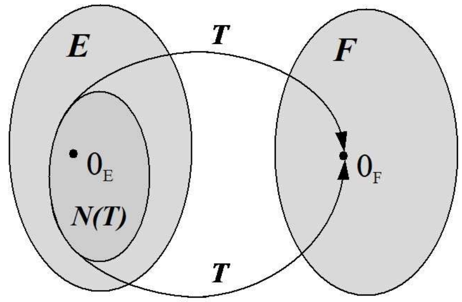
Exemplos de transformações

1. A **transformação nula** $T_0 : E \longrightarrow F$ definida por $T_0(u) = 0_F, \forall u \in E$ é uma transformação linear.

2. A transformação **Identidade** $I : E \longrightarrow E$ definida por $I(u) = u, \forall u \in E$ é uma transformação linear.

Núcleo

Designa-se por **núcleo** da transformação linear $T : E \longrightarrow F$, e denota-se por $N(T)$, o conjunto de todos os vetores $u \in E$ tais que $T(u) = 0_F$ definido por:



$N(T) = \{u \in E : T(u) = 0_F\}.$

Proposição: Se $T : E \longrightarrow F$ é uma transformação linear então $N(T)$ é um subespaço vetorial de E.

Injetividade

Uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ diz-se injetiva quando para $\forall u, v \in E : T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$.

Teorema: Seja $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear.

T é injetiva $\Leftrightarrow$ $N(T) = \{0_E\}$ $\Leftrightarrow$ $\dim N(T) = 0$.

Exercícios

1. Determine quais das seguintes tranformações são lineares:

   (a) $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, 1, x) \end{array}$

   (b) $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y^2) \end{array}$

   (c) $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, 2y) \end{array}$

   (d) $\begin{array}{rcl} T : M_{1\times 3}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} a & b - c \\ c & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

   (e) $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y, x - y) \end{array}$

   (f) $\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (0, z, y) \end{array}$

2. Considere a transformação vetorial $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, w) = (x + z + k, x + y, z - y)$.

   (a) Determine o valor de k para o qual T é uma transformação linear.

   Considere nas alíneas seguintes $k = 0$.

   (b) Quais dos seguintes vetores pertencem a $N(T)$?

   i. $(1, -1, -1, 4)$; ii. $(1, 0, -1, 4)$.

   (c) Determine uma base e a dimensão de $N(T)$.

(d) Verifique se T é injetiva.

3. Para cada uma das transformações lineares seguintes determine o núcleo e indique se é injetiva:

   (a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (y,-x)$.

   (b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x+y, x-y)$.

   (c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (0,0,y)$.

4. Considere a transformação $T: \mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x-y \end{bmatrix}$.

   (a) Prove que T é uma transformação linear.

   (b) Determine o núcleo, $N(T)$, da transformação linear T.

   (c) A transformação linear T é injetiva? Justifique.

<u>Soluções:</u>

1. (a) Não. (b) Não. (c) Sim. (d) Sim. (e) Sim. (f) Sim.

2.

   (a) $k = 0$.

   (b) i. $(1,-1,-1,4) \in N(T)$ ii. $(1,0,-1,4) \notin N(T)$.

   (c) $B_{N(T)} = \{(1,-1,-1,0), (0,0,0,1)\}$ e $\dim N(T) = 2$.

   (d) T não é injetiva.

3. (a) $N(T) = \{(0,0)\}$, logo T é injetiva.

   (b) $N(T) = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0)\}$, logo T não é injetiva.

   (c) $N(T) = \{(x,0,z),\ x,\ z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0,0,0)\}$, logo T não é injetiva.

4. (a) —— (b) $N(T) = \{(0,0)\}$. Uma vez que $N(T) = \{(0,0)\}$, T é injetiva.

Departamento de Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática

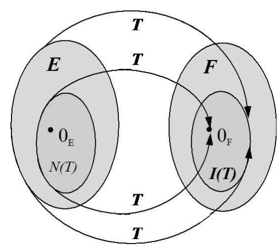
Álgebra Linear - 1^o ano / 1^o sem.

Folha 23 - Transformações Lineares - Imagem e Sobrejetividade

Imagem

Designa-se por **imagem** ou **contradomínio** de uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$, e denota-se por $Im(T)$, o conjunto dos vetores $w \in F$ que são imagens de vetores $u \in E$, isto é:

$$\begin{aligned} Im\,(T) &= \{w \in F : T\,(u) = w, \text{ com } u \in E\} \\ &= \{T\,(u) : u \in E\}. \end{aligned}$$



Proposição: Se $T : E \longrightarrow F$ é uma transformação linear então $Im(T)$ é um subespaço vetorial de F.

Sobrejetividade

Uma transformação linear $T : E \longrightarrow F$ diz-se **sobrejetiva** quando a imagem (ou contradomínio) de T é igual ao conjunto de chegada F.

Teorema: $T : E \longrightarrow F$ é sobrejetiva se e só se $Im(T) = F$ se e só se $\dim\, Im(T) = \dim\, F$.

Teorema das dimensões: Seja E um espaço vetorial de dimensão finita.

Se $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear, então $\dim\, E = \dim\, N(T) + \dim\, Im(T)$.

Exercícios

1. Considere a transformação vetorial $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\,(x, y, z, w) = (x + z, x + y, z - y)$.

   (a) Quais dos seguintes vetores pertencem a $Im(T)$?

   i. $(1, 1, 1)$; ii. $(2, 1, 1)$.

   (b) Calcule $Im\,(T)$.

(c) Verifique se T é sobrejetiva.

2. Considere a transformação linear $T : M_{2\times2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b).$$

(a) Determine o núcleo de T, uma base para esse subespaço e a sua dimensão.

(b) T é injetiva? Justifique.

(c) Determine a imagem de T, uma base para esse subespaço e a sua dimensão.

(d) T é sobrejetiva? Justifique.

3. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T\,(x, y, z, w) = (x, x)$.

(a) Determine uma base e a dimensão de $N(T)$.

(b) T é injetiva? Justifique.

(c) Determine uma base e a dimensão de $Im(T)$.

(d) T é sobrejetiva? Justifique.

(e) Verifique o teorema das dimensões.

4. Considere a transformação linear $T : M_{1\times3}\,(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}\right) = (x, x, 3z)$$

(a) Determine o núcleo de T.

(b) Sabendo que dim $N(T) = 1$, justifique se T é sobrejetiva.

5. Sejam $T : E \to F$ uma transformação linear, $A = \{u, v, w\}$ uma base de E e $B = \{a, b, c\}$ uma base de F.

(a) Mostre que:

i. T é injetiva se e só se T for sobrejetiva.

ii. se $T\,(u) = T\,(v)$ então T não é sobrejetiva.

iii. se T for injetiva então $\{T(u), T(v), T(w)\}$ é uma base de F.

(b) Verifique se $\{u-v, v+w, w\}$ é uma base de E.

<u>Soluções:</u>

1.

(a) i. $(1,1,1) \notin Im(T)$. ii. $(2,1,1) \in Im(T)$.

(b) $Im(T) = \{(a,b,a-b) \in \mathbb{R}^3 : a,b \in \mathbb{R}\}$.

(c) T não é sobrejetiva.

2. (a) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c,d \in \mathbb{R} \right\}$. $B_{N(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. $\dim N(T) = 2$.

(b) Como $\dim N(T) = 2 \neq 0$, T não é injetiva.

(c) $Im(T) = \mathbb{R}^2$. $B_{Im(T)} = \{(1,0), (0,1)\}$. $\dim Im(T) = 2$.

(d) Uma vez que, $\dim Im(T) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, T é sobrejetiva.

3. (a) Base de $N(T) = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$; dim $N(T) = 3$.

(b) T não é injetiva porque $\dim N(T) = 3 \neq 0$.

(c) Base de $Im(T) = \{(1,1)\}$; dim $Im(T) = 1$.

(d) T não é sobrejetiva porque dim $Im(T) \neq \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

(e) $\dim \mathbb{R}^4 = \dim N(T) + \dim Im(T)$, ou seja, $4 = 3 + 1$.

4.

(a) $N(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & 0 \end{bmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}) : y \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) Tendo em conta o teorema das dimensões, como $\dim Im(T) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$, T não é sobrejetiva.

5. (a) —.

(b) É uma base.

Matriz de uma Transformação Linear

Sejam $T : E \longrightarrow F$ uma transformação linear, $A = \{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E, $B = \{f_1, \ldots, f_m\}$ uma base de F. O transformado de um vetor $u = \sum\limits_{j=1}^{n} u_j e_j$ é

$$u' = T(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j T(e_j). \tag{1}$$

Note-se que $u' = \sum\limits_{j=1}^{m} u'_j f_j$ pois B é base de F.

Visto que T é uma transformação linear, a imagem de qualquer vetor de E fica conhecida desde que se conheçam as imagens dos vetores da base de E.

Como $T(e_j) \in F$, $\forall j = 1, \ldots, m$ então podemos escrever

$$\begin{aligned} T(e_1) &= \alpha_{11} f_1 + \cdots + \alpha_{m1} f_m = (\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1})_B \\ &\vdots \\ T(e_n) &= \alpha_{1n} f_1 + \cdots + \alpha_{mn} f_m = (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn})_B. \end{aligned}$$

Substituindo em 1 vem:

$$\begin{aligned} & u' = u_1 (\alpha_{11} f_1 + \cdots + \alpha_{m1} f_m) + \cdots + u_n (\alpha_{1n} f_1 + \cdots + \alpha_{mn} f_m) \\ \Leftrightarrow \quad & u' = (\alpha_{11} u_1 + \cdots + \alpha_{1n} u_n) f_1 + \cdots + (\alpha_{m1} u_1 + \cdots + \alpha_{mn} u_n) f_m. \end{aligned}$$

Assim, a relação entre as coordenadas de u' na base de F e as coordenadas de u na base de E fica estabelecida pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} u'_1 = \alpha_{11} u_1 + \ldots + \alpha_{1n} u_n \\ \vdots \\ u'_m = \alpha_{m1} u_1 + \ldots + \alpha_{mn} u_n \end{cases}$$

que, em notação indicial, escreve-se

$$u_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} u_j, \ i = 1, \ldots, m.$$

Conclui-se assim que, sendo fixadas bases em E e F, a transformação linear fica plenamente determinada pelos $m \times n$ escalares α_{ij} que são as coordenadas dos transformados dos vetores de base A na base B.

A matriz $m \times n$ da transformação linear T para as bases de E e F, designa-se por matriz de T relativamente às bases A e B e escreve-se:

$$M_{(T,A,B)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}.$$

Observação: Note-se que os elementos das colunas desta matriz são as coordenadas dos transformados dos vetores da base A na base B.

Matriz canónica associada a uma transformação linear

Designa-se por **matriz canónica associada** à transformação linear $T : E \longrightarrow F$, a matriz que representa T nas bases canónicas de E e F, e representa-se por M_T ou $M(T)$.

Exemplos:

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$. A matriz canónica associada a T é:

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

onde a primeira coluna representa $T(1, 0)$ e a segunda $T(0, 1)$.

2. Seja $U : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $U(x, y) = (x + y, x - y, x)$. A matriz canónica associada a U é:

$$M_U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $V : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $V(x, y, z) = (x + z, y + z)$. A matriz canónica associada a V é:

$$M_V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x, x + y)$ em que A e B são bases de $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ e $B = \{(1, 2), (2, -1)\}$.

   Tem-se que

   $T(1, 1) = (1, 2) = \mathbf{1}(1, 2) + \mathbf{0}(2, -1) = (\mathbf{1}, \mathbf{0})_B$ e

   $T(-1, 1) = (-1, 0) = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(1, 2) - \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}(2, -1) = \left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}, -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\right)_B.$

   A matriz da transformação T da base A para a base B é: $M_{(T,A,B)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

Proposição: Se $T_1 : E \to F$ e $T_2 : F \to G$ são transformações lineares então a matriz da composição $T_2 \circ T_1$ é dada por

$$M[T_2 \circ T_1] = M(T_2)M(T1),$$

para as bases fixadas nos espaços E, F e G.

Note que, não gozando o produto de matrizes da propriedade comutativa, pode concluir-se que, em geral, $T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2$.

Transformação Inversa

$T : E \to E$ diz-se **invertível** se existe uma transformação linear $T^{-1} : E \to E$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$, onde I é a transformação identidade. Ou seja, $(T \circ T^{-1})(u) = (T^{-1} \circ T)(u) = u$.

Proposição: São equivalentes as seguintes afirmações:

- T é linear invertível.
- T^{-1} é linear invertível.
- T é bijetiva.
- $N(T) = \{0_E\}$.

- $\det M(T) \neq 0$.

Proposição: $M(T^{-1}) = (M(T))^{-1}$.

Exercícios

1. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por

$$T(1,0,0) = (1,3), \quad T(0,1,0) = (3,1) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (1,-1).$$

   (a) Determine $T(1,2,3)$.

   (b) Determine os vetores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tais que $T(x,y,z) = (1,2)$.

2. Considere a transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (2x - y - z, 2y - x - z, 2z - x - y).$$

   (a) Determine a matriz canónica associada à transformação T.

   (b) Calcule $T(v)$ para:

      (i) $v = (1,1,1)$; (ii) $v = (2,1,1)$; (iii) $v = (-5,3,2)$.

3. Determine a matriz que representa cada uma das transformações lineares em relação às bases canónicas dos subespaços considerados.

   (a) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ com $(x,y,z) \mapsto (2x, y+z)$;

   (b) $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com $(x,y,z) \mapsto (x, 3x - y + z, 0)$.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial na base canónica C é dada por $M(T) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Seja $B = \{(1,0), (-1,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$.

   (a) Defina analiticamente T.

   (b) Determine

      i. $M(T, B, C)$.

ii. $M(T, C, B)$.

iii. $M(T, B, B)$.

iv. $T(-1,2)$ utilizando cada uma das matrizes obtidas nas alíneas anteriores.

5. Sejam $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ operadores lineares definidos por

   $T_1(x, y) = (x + 2y, y)$ e $T_2(x, y) = (-x, y)$.

   (a) Caracterize $T_2 \circ T_1$ e $T_1 \circ T_2$.

   (b) Caracterize T_1^{-1} e T_2^{-1}.

6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear. Determine $T^{-1}(x', y')$, caso seja possível, quando T está definida por

   (a) $T(x, y) = (2x + 2y, 3x + 4y)$.

   (b) $T(x, y) = (x + 2y, x + y)$.

   (c) $T(x, y) = (-x + 2y, x - 2y)$.

7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que $T(1,0,0) = (1,2)$, $T(0,1,2) = (-1,1)$ e $T(0,0,1) = (0,-1)$. Determine:

   (a) a matriz canónica associada a T. (b) $T(1,2,3)$. (c) $T(x,y,z)$.

8. Considere a aplicação $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + k,\ d + b,\ -a),$$

   onde k é um parâmetro real.

   (a) Determine o valor de k para o qual T é uma transformação linear.

   Nas alíneas seguintes considere $k = 0$.

   (b) Verifique se $u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in N(T)$.

(c) Determine uma base e a dimensão de $N(T)$.

(d) T é injetiva? Justifique.

(e) Verifique se $w_1 = (-1, 0, -1)\,,\ w_2 = (1, 2, -1) \in \operatorname{Im}(T)\,.$

(f) Determine uma base e a dimensão de $\operatorname{Im}(T)\,.$

(g) T é sobrejetiva? Justifique.

(h) Determine a matriz da transformação linear T nas bases
$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $B_2 = \{(1,0,0)\,,(1,1,0)\,,(1,1,1)\}$.

(i) Determine a matriz canónica de T.

(j) A transformação linear T é invertível?

Soluções:

1.

(a) Usando a linearidade da transformação T:

$$T(1,2,3) = T\left(1\,(1,0,0) + 2\,(0,1,0) + 3\,(0,0,1)\right) = 1\,T(1,0,0) + 2\,T(0,1,0) + 3\,T(0,0,1) = (10,2).$$

Em alternativa:

Matriz canónica $M_T = [T(1,0,0)\ T(0,1,0)\ T(0,0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

e $T(1,2,3) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{M_T} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$

(b) Todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ da forma $\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{2}z, \frac{1}{8} - \frac{1}{2}z, z\right)$ têm como imagem o vetor $(1,2)$.

2.

(a) Matriz canónica $M_T = [T(1,0,0)\ T(0,1,0)\ T(0,0,1)] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

(b)

(i) $T(1,1,1) = (0,0,0)$. (Que conclusões pode tirar sobre a transformação T, tendo em conta este resultado?)

(ii) $T(2,1,1) = (2,-1,-1)$.

(iii) $T(-5,3,2) = (-15,9,6)$.

3.

(a) $M_T = [T(1,0,0)\ T(0,1,0)\ T(0,0,1)] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $M_T = [T(1,0,0)\ T(0,1,0)\ T(0,0,1)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x,y) = (4x+y, 3y)$

(b) $M(T,B,C) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$M(T,C,B) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$M(T,B,B) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, donde $T(-1,2) = (-2,6)_C$

$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, donde $T(-1,2) = T((1,2)_B) = (-2,6)_C$

$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, donde $T(-1,2) = (4,6)_B$

$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, donde $T(-1,2) = T((1,2)_B) = (4,6)_B$

5.

(a) $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-x-2y, y)$;

$T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(T_1 \circ T_2)(x,y) = (-x+2y, y)$

(b) $T_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\left(T_1^{-1}\right)(x',y') = (x'-2y', y')$; $T_2^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $\left(T_2^{-1}\right)(x',y') =$ $(-x', y')$

6.

(a) $\det M(T) = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ logo T é invertível. Tem-se

$$\begin{cases} x' = 2x+2y \\ y' = 3x+4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x'-y' \\ y'-\frac{3}{2}x' \end{bmatrix}$. Logo $T^{-1}(x',y') = \left(2x'-y', y'-\frac{3}{2}x'\right)$.

(b) $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$, logo T é invertível ; $T^{-1}(x',y') = (-x'+2y', x'-y')$.

(c) $\det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 0$, logo T não é invertível e T^{-1} não está definida.

7.

(a) $M_T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$. (b) $T(1,2,3) = (-1,5)$. (c) $T(x,y,z) = (x-y, 2x+3y-z)$.

8.

(a) Com $k=0$, T é transformação linear.

(b) $u_1 \notin N(T)$ e $u_2 \in N(T)$.

(c) Núcleo de T: $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a = 0 \wedge d = -b \right\}$.

Base de $N(T)$: $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Dimensão de $N(T)$: $\dim N(T) = 2$.

(d) Como $\dim N(T) = 2 \neq 0$ então a transformação T não é injetiva.

Resolução alternativa: como $u_2 \in N(T)$ e $u_2 \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, então $N(T) \neq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e, consequentemente, T não é injetiva.

(e) $w_1 \notin \mathrm{Im}(T)$ e $w_2 \in \mathrm{Im}(T)$.

(f) Base de $\mathrm{Im}(T)$: $\{(1, 0, -1),\ (0, 1, 0)\}$.

Dimensão de $\mathrm{Im}(T)$: $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$.

(g) Como $\dim \mathrm{Im}(T) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$. Logo, T não é sobrejetiva.

Resolução alternativa: como $w_1 \in \mathbb{R}^3$ e $w_1 \notin \mathrm{Im}(T)$, então $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}^3$. Logo, T não é sobrejetiva.

(h) A matriz da transformação T da base B_1 para a base B_2 é $M_{(T,B_1,B_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(i) A matriz canónica da transformação T é $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(j) Como a matriz da transformação T não é quadrada, não tem inversa e a transformação T não é invertível.

Resolução alternativa: como a transformação T não é bijetiva, então não é invertível.

Definição: Uma **transformação linear plana** é toda a aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. As transformações mais importantes são:

1. **Reflexões ou simetrias**

   (a) Reflexão em relação ao eixo dos xx:

   $$S_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ S_x(x,y) = (x,-y) \ , \ M(S_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (b) Reflexão em relação ao eixo dos yy:

   $$S_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ S_y(x,y) = (-x,y) \ , \ M(S_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (c) Reflexão em relação à origem O:

   $$S_O : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ S_O(x,y) = (-x,-y) \ , \ M(S_O) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (d) Reflexão em relação à reta $y = x$:

   $$S_{y=x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ S_{y=x}(x,y) = (y,x) \ , \ M(S_{y=x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (e) Reflexão em relação à reta $y = -x$:

   $$S_{y=-x} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \ S_{y=-x}(x,y) = (-y,-x) \ , \ M(S_{y=-x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. **Mudança de escalas de fator k ou homotetias**

   No que se segue, se

   - $0 < k < 1$ a transformação designa-se por Contração, Redução ou Compressão,
   - $k = 1$ a transformação designa-se por Identidade,
   - $k > 1$ a transformação designa-se por Dilatação, Ampliação ou Expansão,

sendo definidas:

(a) Em relação à origem:

$$H_O : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ H_O(x,y) = (kx, ky),\ M(H_O) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

(b) Em relação ao eixo dos xx:

$$H_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ H_x(x,y) = (kx, y),\ M(H_x) = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Em relação ao eixo dos yy:

$$H_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ H_y(x,y) = (x, ky),\ M(H_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

3. **Projeções**

(a) Sobre o eixo dos xx :

$$P_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ P_x(x,y) = (x, 0)\ ,\ M(P_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Sobre o eixo dos yy:

$$P_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ P_y(x,y) = (0, y)\ ,\ M(P_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. **Rotação no plano de um ângulo θ (no sentido anti-horário) em torno da origem**:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ R_\theta(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)\ ,\ M(R_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

5. **Cortes ou cisalhamentos**

(a) Na direção do eixo dos xx de um fator k:

$$C_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ C_x(x,y) = (x + ky, y)\ ,\ M(C_x) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Na direção do eixo dos yy de um fator k:

$$C_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2\ ,\ C_y(x,y) = (x, kx + y)\ ,\ M(C_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios

1. Caracterize a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que representa a sequência de transformações:

   (a) Contração de fator $\frac{1}{2}$ na direção dos xx e a seguir uma dilatação de fator 3 na direção dos yy.

   (b) Rotação de 90^o e a seguir uma reflexão em relação à reta $y = x$.

   (c) Reflexão em relação ao eixo dos yy e a seguir um corte de fator 2 na direção dos xx.

   (d) Projeção sobre o eixo dos yy e a seguir uma contração de fator $\frac{1}{2}$ em relação à origem.

   (e) Rotação de 60^o e a seguir uma projeção sobre o eixo dos xx, e posteriormente, uma reflexão em relação à reta $y = x$.

   (f) Reflexão em relação à reta $y = -x$ e a seguir uma dilatação de fator 2 em relação ao eixo dos xx, e posteriormente, um corte de fator 3 na direção dos yy.

2. Considere a transformação linear plana $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Para cada T, represente geometricamente o quadrado Q definido de vértices $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ e $C = (0, 1)$ e a sua imagem por T, e classifique T.

   (a) $T(x, y) = (0, 2y)$.

   (b) $T(x, y) = (x, 2y)$.

   (c) $T(x, y) = \left(-2x, \frac{1}{2}y\right)$.

   (d) $T(x, y) = (-2y, 2x)$.

   (e) $T(x, y) = (x + 2y, y)$.

3. Seja $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que define a reflexão em relação à reta $y = -x$ e seja $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear que define uma dilatação de fator 2 na direção do eixo dos xx. Mostre que $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$.

4. Mostre que

   (a) a transformação inversa de uma reflexão em relação ao eixo dos xx é uma reflexão em relação ao eixo dos xx.

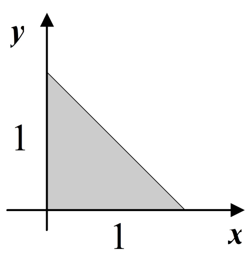
   (b) a transformação inversa de uma redução de fator $\frac{1}{k}$ na direção do eixo dos xx é uma dilatação de fator k na direção do eixo dos xx.

   (c) a transformação inversa de uma rotação do plano de um ângulo α é a rotação do plano do ângulo $-\alpha$.

5. Considere as transformações lineares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$f(x, y) = (y, x) \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = (2x, -y).$$

   Considere a seguinte figura geométrica:



   (a) Defina, se possível, as transformações lineares $f \circ g$ e $g \circ f$.

   (b) Determine a imagem geométrica resultante da transformação do subconjunto de $\mathbb{R}^2$ representado na figura, através de:

      i. $f \circ g$;

      ii. $g \circ f$.

   (c) Com base nos resultados obtidos na alínea anterior diga se a composta de transformações lineares é comutativa.

   (d) Determine o núcleo de g e justifique que g é invertível.

   (e) Defina a transformação linear g^{-1}.

<u>**Soluções:**</u>

1.

(a) Matriz canónica: $M(H_y \circ H_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Caracterização: $H_y \circ H_x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(H_y \circ H_x)(x,y) = (\frac{1}{2}x, 3y)$

Matriz canónica: $M(S_r \circ R_{90^o}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Caracterização: $S_r \circ R_{90^o} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(S_r \circ R_{90^o})(x,y) = (x, -y)$

Matriz canónica: $M(C_x \circ R_y) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Caracterização: $C_x \circ R_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(C_x \circ R_y)(x,y) = (2y - x, y)$

Matriz canónica: $M(H_O \circ P_y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Caracterização: $H_O \circ P_y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(H_O \circ P_y)(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}y\right)$

Matriz canónica: $M(S_r \circ P_x \circ R_{60^o}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

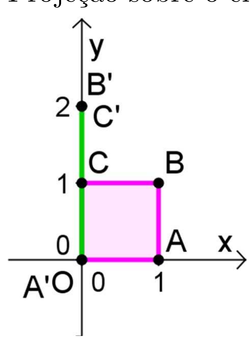
Caracterização: $S_r \circ P_x \circ R_{60^o} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(S_r \circ P_x \circ R_{60^o})(x,y) = \left(0, \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

Matriz canónica: $M(C_{yy} \circ H_x \circ S_r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

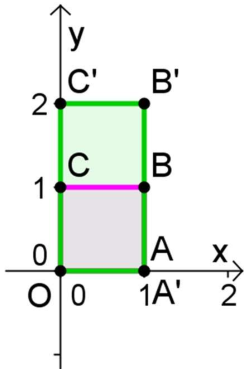
Caracterização: $C_{yy} \circ H_x \circ S_r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(C_{yy} \circ H_x \circ S_r)(x,y) = (-2y, -x - 6y)$

2.

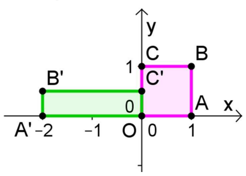
(a) Projeção sobre o eixo dos yy e a seguir uma dilatação de fator 2 na direção dos yy.



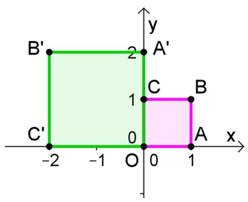
(b) Dilatação de fator 2 na direção dos yy.



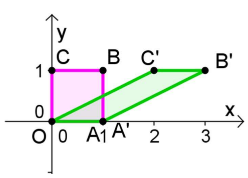
(c) Contração de fator $\frac{1}{2}$ na direção na direção dos yy e a seguir uma dilatação de fator 2 na direção dos xx, e posteriormente, uma reflexão em relação a yy.



(d) Dilatação de fator 2 em relação à origem O e a seguir uma rotação de 90^o.



(e) Corte de fator 2 na direção dos xx.



3. —.

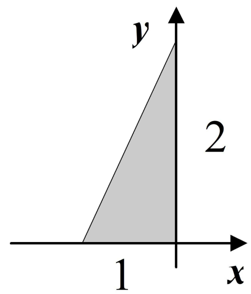
4. —.

5.

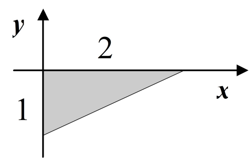
(a) $$\begin{array}{rccc} f \circ g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-y, 2x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g \circ f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (2y, -x) \end{array} .$$

(b)

i.



ii.



(c) A composição de transformações lineares não é comutativa.

(d) $N(g) = \{(0,0)\}$. g é uma transformação invertível, pois g é injetiva.

(e)
$$\begin{array}{rccc} g^{-1}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x, -y\right) \end{array}.$$