Tercera Clase Métodos Cuantitativos II

Cálculo de intervalos de confianza, Teoría del Límite Central y prueba t

Docente: Francisco Meneses

Retomemos:

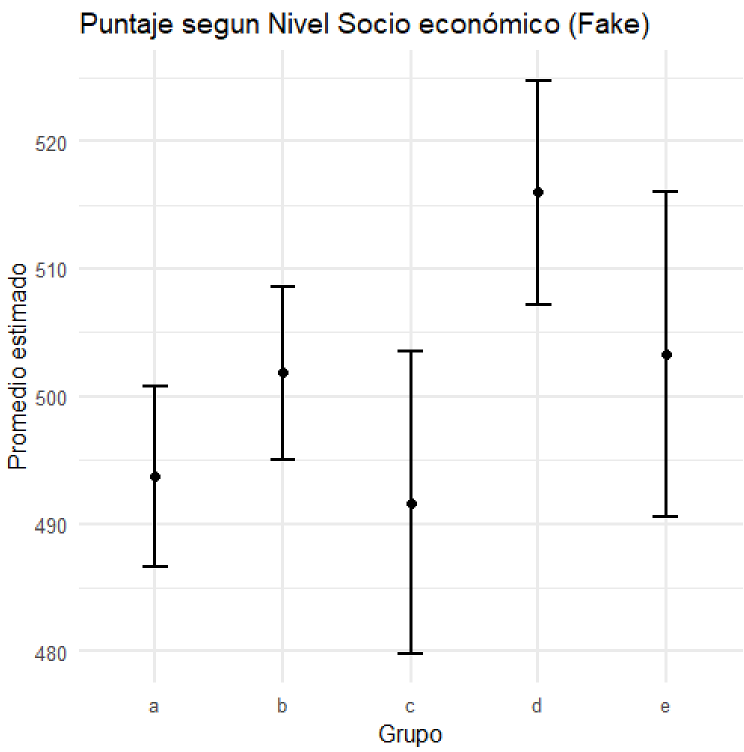
¿Qué es la inferencia estadística?

Intervalo de Confianza (IC)

> Es un **rango** en torno al promedio muestral que contiene al verdadero promedio poblacional con cierta seguridad (confianza).

- Ej: “El promedio estimado es 500 puntos, con un IC del 95% entre 485 y 515”.
- Significa que **si repitiéramos el estudio muchas veces**, el 95% de los intervalos obtenidos contendría el valor real.

¿Cómo se ve un intervalo de confianza?



Nota: Apreciamos 5 grupos socioeconómicos con distintos promedios SIMCE y distintos intervalos de confianza. Algunos intervalos son más grandes que otros. Algunos grupos se solapan y otros no. El grupo c no se solapa con el grupo d

Si los intervalos no se solapan decimos que existen diferencias significativas.

Diferencias significativas: Diferencias que existen más allá de la muestra.

¿Utilidad de los intervalos de confianza?

- Podemos **comparar grupos**: ¿las diferencias son reales o por el azar de la muestra?
- Podríamos evaluar si un programa **funcionó**.
- Ayuda a **comunicar resultados** con transparencia.

¿Cómo se calcula el intervalo de confianza para una media?

Para una **variable continua**, como por ejemplo el puntaje en una prueba, el **intervalo de confianza del 95%** para la media se calcula como:

$$IC = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo:

Supongamos que en una muestra de estudiantes:

- Media = 70
- Desviación estándar = 10
- Tamaño de muestra = 25

$$IC = \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$IC = 70 \pm 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{25}}$$

Margen de error: 3,92; Intervalo de confianza: 66,08 - 73,92

Interpretación: Estamos un 95% confiados de que el promedio real en la población se encuentra entre **66.08 y 73.92 puntos**.

¿Cómo se calcula el intervalo de confianza para una proporción?

Para una **variable dicotómica** (por ejemplo, estar de acuerdo / no estar de acuerdo), el **intervalo de confianza del 95%** para una proporción se calcula como:

$$IC = \hat{p} \pm z \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Donde:

- $\hat{p}$: proporción observada en la muestra
- z: valor crítico (1.96 para un IC del 95%)
- n: tamaño de la muestra

Ejemplo:

Supongamos que en una encuesta:

- 120 personas respondieron y 72 están de acuerdo con una afirmación

Entonces:

- $\hat{p} = \frac{72}{120} = 0.60$
- $n = 120$
- $z = 1.96$

$$IC = 0.60 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.60(1 - 0.60)}{120}}$$

$$IC = (0.5124,\ 0.6876)$$

¿Qué intervalos queremos?

- Intervalos más pequeños son más precisos y útiles

¿De qué depende el tamaño del intervalo?

- Del tamaño de la muestra (n)
    - Muestras más grandes dan intervalos más pequeños (Precisos)
- Nivel de confianza (90%, 95%, 99%, 99.9%)
    - A mayor nivel de confianza más grande es el intervalo (Impreciso pero más confiable)
- Nivel de dispersión de los datos
    - Datos más dispersos implican intervalos más grandes.

Intervalos de confianza para tres muestras

Promedio poblacional (μ):

250

Desviación estándar poblacional (σ):

50

Tamaño de la muestra (n):

30

Nivel de confianza (%):

80 95 99

80 82 84 86 88 90 92 94 96 9899

Generar nuevas muestras

Teoría del Límite Central (TLC)

Es la **base teórica matemática** de la estádistica inferencial y de los Intervalos de confianza

> "Si graficamos la distribución del promedio de muchas muestras tiende a una normal al aumentar el tamaño de la muestra, **sin importar la distribución original**."

Teoría del Límite Central (TLC)

Es la **base teórica matemática** de la estádistica inferencial y de los Intervalos de confianza

Desde aquí nace el número **1.96** en la fórmula para un intervalo de confianza que utiliza el 95% de confianza

Si consideramos la distribución normal de los promedios de “infinitas” muestras, y dejamos +/- 1,96 desviaciones estándar hacia ambos lados del parámetro poblacional, cubrimos el 95% de los promedios obtenidos.

Simulación del Teorema del Límite Central

Selecciona la distribución:

Normal

Media de la población:

6000

Desviación estándar de la población:

200

Tamaño de la muestra (n):

30

Número de muestras:

1000

Generar Muestras

Distribución de la Variable Original

Distribución del Promedio de las Muestras

En suma: el Teoría del Límite Central (TLC)

> Si sacamos una muestra al azar, es altamente improbable que el promedio de la muestra sea muy distinto al obtenido
>
> Podemos calcular un intervalo en torno al promedio muestral en el cual tendremos un % de confianza de que el parámetro poblacional está incluido.

¿Por qué es importante la Teoría del Límite Central?

- Es la base de la estadística inferencial
- Nos permite **estimar la incertidumbre** con herramientas conocidas.
- Hace posible usar la **distribución normal** (z, t, etc.) para construir intervalos y hacer pruebas.

Recapitulación

- El **promedio** resume nuestros datos, pero tiene incertidumbre debido a trabajar con muestras.
- Los **intervalos de confianza** permiten expresar esa incertidumbre.
- Gracias a la **Teoría del Límite Central**, podemos confiar en la forma en que estimamos esa incertidumbre.

Pregunta para pensar 🤔

> ¿Por qué es más útil reportar un promedio **con su intervalo de confianza**, en vez del promedio solo?

- ¿Qué responderías tú como investigador/a?

Actividad breve

- Forma grupos de 2-3 personas.
- Responde:
  - ¿Cómo explicarías el concepto de intervalo de confianza a alguien que no estudia estadísticas?
  - ¿En qué tipo de decisiones crees que sería útil usarlo?
  - ¿Puedes dar un ejemplo en educación, salud o política?

Prueba t

Evaluando diferencia de medias

¿Qué es la prueba *t*?

- Herramienta estadística para comparar **medias**.
- Evalúa si la diferencia observada entre medias de dos grupos estadísticamente significativa.
- Contrasta la evidencia estadística contra H_0 qué supone que **NO** existe diferencia de medias
  - Si rechazamos H_0 asumimos que si existen diferencias de medias (H_0)

¿Cuándo utilizamos la prueba t?

> Cuando queremos evaluar si la *diferencia de los promedios* de *dos* grupos es estadísticamente significativa

- **Variable dependiente**: Escala de medición númerica **intervalar o razón**.
- **Variable independiente**: Categórica (nominal u ordinal) con 2 categorías o grupos

Supuestos para su aplicación

- **Normalidad** de la variable (especialmente importante para n pequeños).
- En muestras independientes: **homogeneidad de varianzas** (prueba de Levene).

Fórmula general

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

donde:

- $\bar{X}_1$ y $\bar{X}_2$ son las medias de los dos grupos.
- s_1^2 y s_2^2 son las varianzas muestrales.
- n_1 y n_2 son los tamaños de muestra.

- Así se distribuye el valor t en una muestra grande donde no hay diferencia de medias (es decir, donde H_0 es real)

Interpretación

- **Valor p < 0.05** → diferencia estadísticamente significativa.
- **Valor p ≥ 0.05** → no hay evidencia suficiente para afirmar que las medias difieran.

> el valor p nos dice que tan improbable es haber encontrado un valor t en una muestra donde H_0 es real (No hay diferencias). Si p < 0.05 descartamos H_0 y asumimos H_1

" Si p < 0.05 Existe menos de un 5% de probabilidad de haber encontrado un valor t tan grande en una muestra donde no existe asociación (H_0), por lo cual, asumimos que si existen diferencias de medias (H_1)"

Ejercicios

p = 0.03 | p = 0.07 | p = 0.4 | p = 0.006

Ejemplo rápido en R

```
t.test(Petal.Width ~ Species, data = iris2)
```

```
##
##     Welch Two Sample t-test
##
## data:  Petal.Width by Species
## t = -42.786, df = 63.123, p-value < 0.00000000000000022
## alternative hypothesis: true difference in means between group setosa and group virginic
## 95 percent confidence interval:
##  -1.863133 -1.696867
## sample estimates:
##    mean in group setosa mean in group virginica
##                   0.246                   2.026
```

En suma: la prueba t

- Nos permite **inferir** si la **diferencia de medias** observada en una muestra entre **dos grupos es significativa** y, por ende, extrapolable a la población

- Nos entrega un valor t, y un valor p. A partir del valor p analizamos la significación

- Si p< 0.05 rechazamos H_0 y asumimos que existe diferencia de medias (H_1)

" Si p < 0.05 Existe menos de un 5% de probabilidad de haber encontrado un valor t tan grande en una muestra donde no existe asociación (H_0), por lo cual, asumimos que las diferencias observadas en la muestra son significativas, es decir, existen a nivel poblacional (H_1)"

Ticket de salida

Tipos principales

1. **Prueba *t* para una muestra**
    - Compara la media de una muestra con un valor conocido o hipotético.

1. **Prueba *t* para muestras independientes**
    - Compara medias de **dos grupos distintos**.

1. **Prueba *t* para muestras relacionadas**
    - Compara medias de **los mismos sujetos** en dos momentos o condiciones.