Introdução aos Sistemas Digitais

Parte I (4 aulas)

2021/2022

Introdução

Sistemas Numéricos e Princípios de Design

de Lógica Combinacional de Códigos

Arnaldo Oliveira, Augusto Silva, Iouliia Skliarova

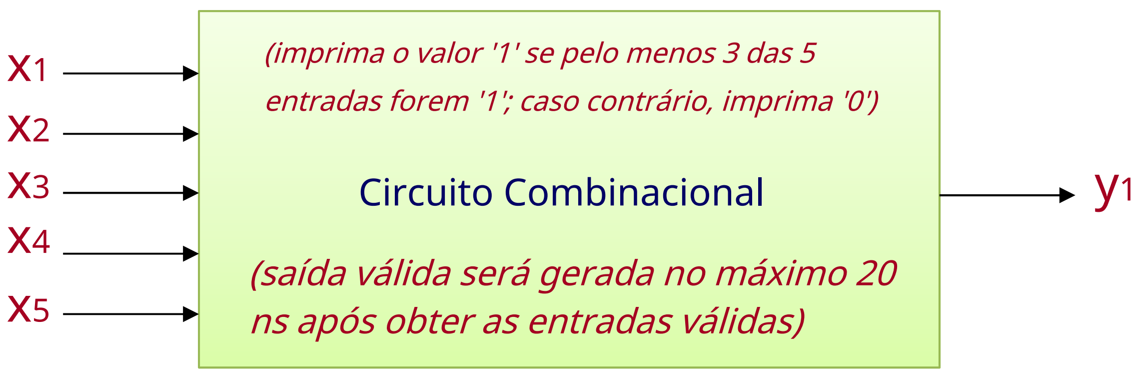
Universidade de Aveiro

Conteúdo da aula 3

- Circuitos combinacionais
- álgebra booleana
  - axiomas
  - teoremas
  - dualidade
  - simplificação algébrica de funções lógicas
  - formas canônicas
- Representações padrão de funções lógicas

Circuitos Combinacionais

- Um circuito lógico cujas saídas <u>depende apenas</u> em suas entradas atuais é chamado de **circuito combinacional**.
- Um circuito combinacional é caracterizado por
  - uma ou mais entradas
  - uma ou mais saídas
  - uma especificação funcional que descreve cada saída como uma função das entradas
  - uma especificação de tempo que inclui pelo menos o tempo máximo que o circuito levará para produzir valores de saída válidos para um conjunto arbitrário de valores de entrada -> **atraso de propagação**.



Álgebra booleana

- As técnicas de análise formal para circuitos digitais têm suas raízes no trabalho de um matemático inglês, George Boole.
- Em 1854, ele inventou um sistema algébrico de dois valores, agora chamado **álgebra booleana**.
- Em 1938, o pesquisador do Bell Labs Claude E. Shannon mostrou como adaptar a álgebra booleana para analisar e descrever o comportamento dos circuitos.
- Na troca de álgebra, usamos uma variável simbólica, como *x*, para representar a condição de um sinal lógico.
- Um sinal lógico está em uma das duas condições possíveis: baixo ou alto, desligado ou ligado e assim por diante, dependendo da tecnologia.
- Nós dizemos isso *x* tem o valor “0" para uma dessas condições e "1" para a outra.

Universidade de Aveiro

Axiomas

- o **axiomas** (ou **postulados**) de um sistema matemático são um conjunto mínimo de definições básicas que assumimos como verdadeiras, a partir do qual todas as outras informações sobre o sistema podem ser derivadas.
- Uma variável *x* pode assumir apenas um de dois valores:
  - $0 \quad 1$
  - $1 \quad 0$
- Inversão (definição de NOT):
  - $0 \; h \; ?\overline{?} \quad 1$
  - $1 \; h \; ?\overline{?} \quad 0$
- Definição das operações AND e OR:
  - $0 \cdot 0\; 0, \qquad 1 \cdot 1 \quad 1, \qquad 0 \cdot 1 \quad 1 \cdot 0 \quad 0$
  - $1\; 1\; 1, \qquad 0\; 0 \quad 0 \qquad 1\; 0 \quad 0\; 1 \quad 1$
- Esses pares de axiomas definem completamente a álgebra de comutação.
- Todos os outros fatos sobre o sistema podem ser provados usando esses axiomas como ponto de partida.

operador precedente

- **Operador precedente** é uma ordenação de operadores lógicos projetados para permitir a eliminação de parênteses em expressões lógicas.
- A lista a seguir fornece uma hierarquia de precedências para os operadores booleanos (do mais alto ao mais baixo):
  - NÃO
  - E
  - OU

Exemplo:

$\cdot \quad \cdot \quad z$

Teoremas de Variável Única

- Mudança de álgebra **teoremas** são afirmações, sabidamente verdadeiras, que nos permitem manipular expressões algébricas para permitir uma análise mais simples ou uma síntese mais eficiente dos circuitos correspondentes.

- Identidades:
  - 0
  - · 1

- Elementos nulos:
  - 1 1
  - · 0 0

- Idempotência:
  -
  - ·

- Involução:
  - -?$\overline{\overline{?}}$

- Complementos:
  - ?$\overline{?}$ 1
  - ·?$\overline{?}$ 0

Teoremas de duas e três variáveis

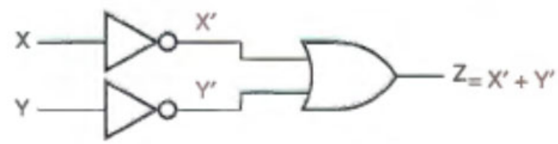
- Comutatividade:
  - -
  - - · ·
- Associatividade:
  - - (
  - - (· · · ·
- Distributividade:
  - - · · ·
  - - (· ( ) ·
- Cobertura:
  - - ·
  - - · ( )
- Combinando:
  - - · ·
  - - ( ) · ( )
- Simplificação:
  - - ?? ·
  - - · ?? ·
- Consenso:
  - - · ?? · · · ?? ·
  - - ·?(?) ( ) (·??) ( )

Resumo dos Teoremas

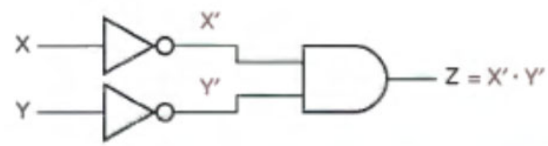
- A maioria dos teoremas na álgebra de comutação são extremamente simples de provar usando uma técnica chamada **indução perfeita**:
  - provar um teorema provando que ele é verdadeiro para todos os valores possíveis ("0" e "1") de todas as variáveis
- Em todos os teoremas, **é possível substituir cada variável por uma expressão lógica arbitrária**:
  - · · · ·‾
- Ao realizar a operação AND (OR), podemos conectar as entradas de porta em qualquer ordem: uma porta de n entradas ou (*n* - 1) portas de 2 entradas alternadamente, embora o atraso de propagação e o custo sejam provavelmente maiores com várias portas de 2 entradas:
  - · · · · · ·( ) ( ) (· ·(· ( ))) ...
- Na álgebra booleana, a adição lógica distribui sobre a multiplicação lógica:
  - (· · ( )

Teoremas de DeMorgan

- Um *n*- Entrada AND porta cuja saída é complementada é equivalente a um*n*- Entrada OU porta cujas entradas são complementadas:
  - $\overline{\cdot\ ??}$
  - $\overline{\prod\ \sum}$



- Um *n*- Entrada OU porta cuja saída é complementada é equivalente a um*n*- Entrada AND gate cujas entradas são complementadas:
  - $\overline{??\ \cdot}$
  - $\overline{\sum\ \prod}$



Universidade de Aveiro

Teorema Generalizado de DeMorgan

- Dado qualquer *n*-variável totalmente entre parênteses expressão lógica, seu complemento pode ser obtido trocando + e · e complementando todas as variáveis:

$$- \ \overline{F(x\ \ ,x\ \ ,\ldots,x\ \ \ \ ,+,\ \cdot)} = F(\overline{x\ \ },\overline{x\ \ },\ldots,\overline{x\ \ \ \ },\ \ \cdot,+)$$

Exemplo:

, (, ,) · · · ?? ‾

$\overline{\ ,(,\ ,\ \ \ \ )}$??·?? · ·

Princípio da Dualidade

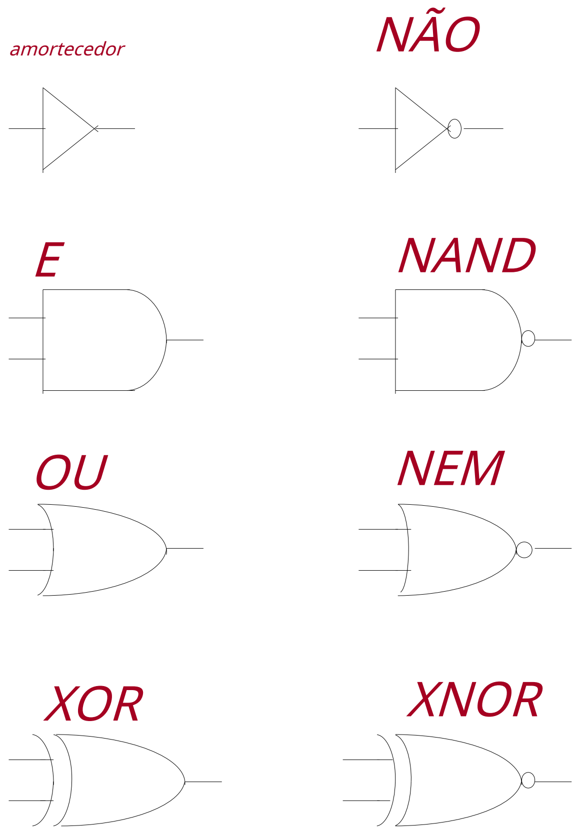
- o **princípio da dualidade** afirma que qualquer teorema ou identidade na álgebra de comutação permanece verdadeira se 0 e 1 são trocados e · e + são trocados completamente.
  - Os duplos de todos os axiomas são verdadeiros.
  - Os duais de todos os teoremas da álgebra de comutação são verdadeiros.

- Se , , ..., ,, · é uma expressão lógica totalmente entre parênteses envolvendo as variáveis , , ...,, e os operadores + e ·, então o dual de F, escrito é a mesma expressão com + e · trocados:
  - , ,..., ,, · , ,..., , ·,

- O teorema de DeMorgan generalizado pode agora ser reformulado da seguinte forma:
  - , , ..., , , ...,

Universidade de Aveiro

Portões NAND e NOR



$$\overline{x \cdot y}$$

x	y	x NAND y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\overline{x + y}$$

x	y	x NEM y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Completude Funcional

- UMA **conjunto funcionalmente completo** de operadores booleanos é aquele que pode ser usado para descrever o comportamento de qualquer circuito digital.
- Exemplos:
  - {AND, OR, NOT}
  - {E NÃO}
  - {OU NÃO}
  - {NAND}
  - {NEM}

Universidade de Aveiro

Portões NAND e NOR

- Para escrever uma expressão booleana apenas com os operadores **NAND**, primeiro coloque a expressão no **soma de produtos** formulário e, em seguida, aplique a **involução** teorema (?̿?) seguido pelo **DeMorgan's** teorema (∑ ∏).

- Para escrever uma expressão booleana apenas com os operadores **NEM**, primeiro coloque a expressão no **produto das somas** formulário e, em seguida, aplique a **faturalution** teorema (?̿?) seguido pelo **DeMorgan's** teorema (∏ ∑).

- Sempre assuma que versões complementadas de variáveis de entrada estão disponíveis.

Exemplos:

$$x - (y - z) - \overline{\overline{x - (y - z)}} - \overline{\overline{x} - \overline{y - z}}$$

$$x - (y - z) - (x - y) - (x - z) - \overline{\overline{(x - y) - (x - z)}} - \overline{\overline{x - y} - \overline{x - z}}$$

Universidade de Aveiro

Funções Booleanas

- Uma função booleana , , ..., é uma combinação que associa um elemento do conjunto {0,1} com cada um dos 2^n combinações possíveis que as variáveis podem assumir.
- Existem 2 diferentes funções booleanas que podem ser implementadas em um sistema digital com *n* entradas e *m* saídas.

Exemplos:

Para *n*= 1, *m*= 1: $2^{1 \times 2^1} = 4$

x	constante '0'	x	-x	constante '1'
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Para *n*= 4, *m*= 3: $2^{3 \times 2^4} = 2^{48}$= 281 474 976 710 656

Mesa da Verdade

- A representação mais básica de uma função lógica é a **mesa da verdade**.
- Uma tabela verdade simplesmente lista a saída do circuito para cada combinação de entrada possível.
- Tradicionalmente, as combinações de entrada são organizadas em linhas em ordem de contagem binária crescente e os valores de saída correspondentes são escritos em uma coluna próxima às linhas.
- A tabela de verdade para um *n*Função lógica variável tem 2^n linhas.

Exemplo *(n*= 3*):*

	x	y	z	f (x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Universidade de Aveiro

Mintermos e Maxtermos

- UMA **literal** é uma variável ou o complemento de uma variável. Exemplos:x, y, $\bar{}$.
- UMA **termo do produto** é um único literal ou um produto lógico de dois ou mais literais. Exemplos: ,$\bar{}$ · , · · .
- UMA **termo de soma** é um único literal ou uma soma lógica de dois ou mais literais. Exemplos: ,$\bar{}$, .
- UMA **termo normal** é um produto ou termo de soma em que nenhuma variável aparece mais de uma vez.
- Um *n*-variável **mintermo** é um termo de produto normal com *n* literais. Há 2_n tais termos do produto.
  - Um mintermo m_{eu} corresponde a linha *eu* da tabela verdade.
  - Em mintermo m_{eu}, uma variável particular aparece complementada se o bit correspondente na representação binária de *eu* é 0; caso contrário, não é complementado.
- Um *n*-variável **maxterm** é um termo de soma normal com *n* literais. Há 2_n tais termos de soma.
  - Um maxtermo M_{eu} corresponde a linha *eu* da tabela verdade.
  - No maxterm M_{eu}, uma variável particular aparece complementada se o bit correspondente na representação binária de *eu* é 1; caso contrário, não é complementado.

Exemplo*:*

	x	yy	zz	fff (((xxx ,,, yyy ,,, zzz)))
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

$m_0 - \bar{x} - \bar{y} - \bar{z}$ $\quad$ $M_0 - x - y - z$

$m_5 - x - \bar{y} - z$ $\quad$ $M_5 - \bar{x} - y - z\,\bar{}$

$m_{eu} - \overline{M_{eu}}$ $\quad$ $eu - 0,1, \ldots, 2_n-1$

Representações Algébricas

- Qualquer função booleana pode ser apresentada como:
  - uma soma dos mintermos correspondentes às linhas da tabela de verdade (combinações de entrada) para as quais a função produz um 1 -> **soma canônica**
  - um produto dos maxtermos correspondentes às linhas da tabela de verdade (combinações de entrada) para as quais a função produz um 0 -> **produto canônico**

Exemplo*:*

	x	y	z	f (x, y, z)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

,(,)
?? · · · · · · · · · ·

1,4,5,6,7

,(,) · ·

0,2,3

Teoremas de expansão de Shannon

- Qualquer função booleana $f(x\ \ ,x\ \ ,\dots,x\ \ \ \ \ )$ pode ser apresentada nas seguintes formas:
  - $\overline{x\ \ } \cdot f(0,x\ \ ,\dots,x\ \ \ \ \ )+x\ \ \cdot\ f(1,x\ \ ,\dots,x\ \ \ \ \ )$
  - $(x\ \ +f(1,x\ \ ,\dots,x\ \ \ \ \ ))\cdot(\overline{x\ \ }+\ f(0,x\ \ ,\dots,x\ \ \ \ \ ))$

Indução perfeita:

Se $x_0 = 0$ então: $f(0, x_1, \dots, x_{n-1})$ -1- $f(0, x_1, \dots, x_{n-1})$ - 0- $f(1, x_1, \dots, x_{n-1})f(1,$

Se $x_0 = 1$ então: $x_1, \dots, x_{n-1})$ - 0- $f(0, x_1, \dots, x_{n-1})$ -1- $f(1, x_1, \dots, x_{n-1})$

Soma Canônica

- Extensão para 2 variáveis:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overline{x}_0 - f(0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - x_0 - f(1, x_1, \ldots, x_{n-1}) -$$

$$- \overline{x}_0 - \overline{x}_1 - f(0,0, x_2, .., x_{n-1}) - x_0 \overline{-} x_1 - f(0,1, x_2, .., x_{n-1}) -$$

$$- x_0 - \overline{x}_1 - f(1,0, x_2, .., x_{n-1}) - x_0 - x_1 - f(1,1, x_2, .., x_{n-1})$$

- Estendendo para *n* variáveis:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overset{2n-1}{\underset{eu-0}{-}} m_{eu} - f_{eu} \qquad f_{eu} - f((x_0, x_1, .., x_{n-1}) - eu)$$

Produto Canônico

- Estenda o teorema de expansão de Shannon (,) ,(..., 1, ,..., ·) 0(,..., ( )) para *n* variáveis:

  - ,(, ...,) ∏

3_{rd} e 4_{o} Formas Canônicas

- 3_{rd} Forma canônica:

$$f(x_0 , x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overline{\overline{f(x_0 , x_1, \ldots, x_{n-1})}} - - \overline{\overline{\mathop{}\limits_{eu-0}^{2n-1} f_{eu} - m_{eu}}} - - \overline{\mathop{}\limits_{eu-0}^{2n-1} \overline{f_{eu} - m_{eu}}}$$

- 4_{o} Forma canônica:

$$f(x_0 , x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overline{\overline{f(x_0 , x_1, \ldots, x_{n-1})}} - - \overline{\overline{\mathop{}\limits_{eu-0}^{2n-1} f_{eu} - M_{eu}}} - - \overline{\mathop{}\limits_{eu-0}^{2n-1} \overline{f_{eu} - M_{eu}}}$$

Formas Canônicas

soma canônica de produtos:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \mathop{-}\limits_{eu-0}^{2n-1} m_{eu} - f_{eu}$$

E-OU

produto canônico de somas:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \mathop{-}\limits_{eu-0}^{2n-1} (f_{eu} - M \quad eu)$$

OU E

3rd Forma canônica:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overline{\mathop{-}\limits_{eu-0}^{2n-1} \overline{f_{eu} - m_{eu}}}$$

NAND - NAND

4º Forma canônica :

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - \overline{\mathop{-}\limits_{eu-0}^{2n-1} \overline{f_{eu} - M \quad eu}}$$

NOR-NOR

Formas canônicas (cont.)

Exemplo: Derive as formas canônicas da função f (x, y, z):

$$f(x, y, z) = x \cdot y + \overline{z}$$

	x	y	z	f (x, y, z)
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

1st: $f(x, y, z) = \sum m(0,2,4,6,7)$

2nd: $f(x, y, z) = \prod M(1,3,5)$

3rd: $f(x, y, z) = \overline{\overline{\sum m(0,2,4,6,7)}}$

4º: $f(x, y, z) = \overline{\overline{\prod M(1,3,5)}}$

Universidade de Aveiro

Representações padrão da lógica
Funções

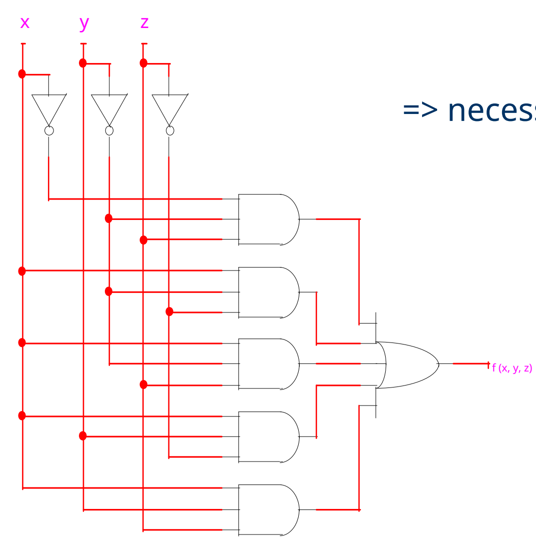
- Uma mesa de verdade
- Algébrico
- Circuito lógico

Uma representação algébrica frequentemente inclui termos redundantes:

$$f(x, y, z) - \bar{x} - \bar{y} - z - x - \bar{y} - \bar{z} -$$
$$- x - \bar{y} - z - x - y - \bar{z} - x - y - z$$

Uma representação de tabela verdade é única:

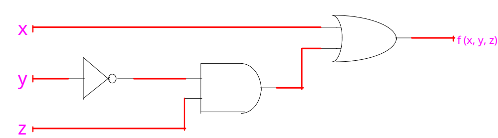
xx	y	z	ff ((x, yy ,, zz))
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Circuito lógico:

=> necessidade de simplificação

$$f(x, y, z) - x - \bar{y} z$$



Exercícios

- As seguintes expressões estão corretas?

$[x - y - z]_D - x - y - z [x -$

$y - z]_D - x - (y - z)$

- Uma função lógica auto-dual é uma função f de tal modo que $f = f_D$. Quais das seguintes funções são autoduais?

$f_1(x, y, z) - x - y - x - z - y - z f_2$

$(x, y) - x - \bar{y} - x - y$

Exercícios (cont.)

- Expresse a função *y* da forma mais simples, usando apenas o operador NAND.

$$y - x_1 - (x_2 - \bar{x}_3 - x_4) - x_2$$

$$y - x_1 - x_2 - x_1 - \bar{x}_3 - x_4 - x_2 - x_2 - x_1 - \bar{x}_3 - x_4$$

$$y - \overline{\overline{x_2 - x_1 - \bar{x}_3 - x_4}} - \overline{x_2 - \overline{x_1 - \bar{x}_3 - x_4}}$$

- Expresse a função *y* da forma mais simples usando apenas o operador NOR.

$$y - x_1 - (x_2 - \bar{x}_3 - x_4) - x_2$$

$$y - (x_1 - x_2) - (x_2 - \bar{x}_3 - x_4 - x_2) - (x_1 - x_2) - (x_2 - x_3 - \bar{x}_4) y -$$

$$(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3) - \bar{(}x_2 - x_4)$$

$$y - \overline{\overline{(x_1 - x_2) - (x_2 - \bar{x}_3) - (x_2 - x_4)}} - \overline{\overline{(x_1 - x_2)}} - \overline{\overline{(x_2 - x_3)}} - \overline{\overline{(x_2 - x_4)}}$$

Exercícios (cont.)

- Determine todas as formas canônicas da função *f*:

$f(x, y, z) - x - y - x - z - y - z$

$f(x, y, z) - m(0,2,3,6,7) - x - y - z - x - y - z - x - y - z - x - y - z - x - y - z f(x,$

$y, z) - M(1,4,5) - (x - y - z) - (x - y - z) - (x - y - z)$

$f(x, y, z) - m(0,2,3,6,7) - (x - y - z) - (x - y - z) - (x - y - z) - (x - y - z) - (x - y - z) f$

$(x, y, z) - M(1,4,5) - (x - y - z) - (x - y - z) - (x - y - z)$

- Minimize esta função.
- Minimize as seguintes funções:

$f(uma, b, c) - uma - b - uma - c - uma - c - uma - b - b - c f(uma, b, c) -$

$uma - b - c - uma - b - c - uma - b - c - uma - b - c$

Universidade de Aveiro