



HIDRÁULICA MARÍTIMA **NOTA DE AULA 04**

CONTINUAÇÃO:

VELOCIDADE ORBITAL DAS PARTÍCULAS DE ONDA

A função velocidade potencial das ondas é dada por:

$$\phi = \frac{-ag \cosh[K(d+z)] \sin(Kx - \sigma t)}{\sigma \cosh(Kd)}$$

onde: $\theta = (Kx - \sigma t)$

A velocidade orbital pode ser decomposta em duas componentes: uma velocidade orbital horizontal **u** e uma velocidade orbital vertical **w**.

A componente horizontal **u** do vetor velocidade é dada por:

$$u = \frac{-\partial \phi}{\partial x} \quad \text{ou} \quad u = \frac{agK \cosh[K(d+z)]}{\sigma \cosh(Kd)} \cos(Kx - \sigma t)$$

A componente vertical **w** do vetor velocidade é dada por:

$$w = \frac{-\partial \phi}{\partial z} \quad \text{ou} \quad w = \frac{agK \sinh[K(d+z)]}{\sigma \cosh(Kd)} \sin(Kx - \sigma t)$$

Estas equações nos informam com a velocidade varia com a onda se propagando em direção à costa. Podemos fixar o argumento $\theta = Kx - \sigma t$ e analisar somente a função \cosh ou \sinh .

Podemos demonstrar teoricamente que as trajetórias orbitais das partículas fluidas são elipses de equação:



$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\varepsilon^2}{B^2} = 1$$

na qual os eixos A e B são definidos por:

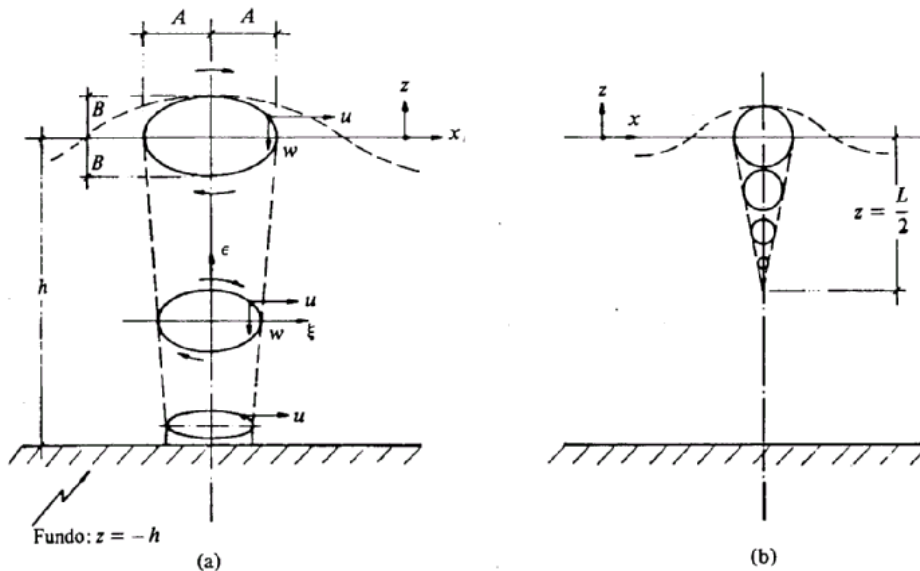


Fig. 2.3

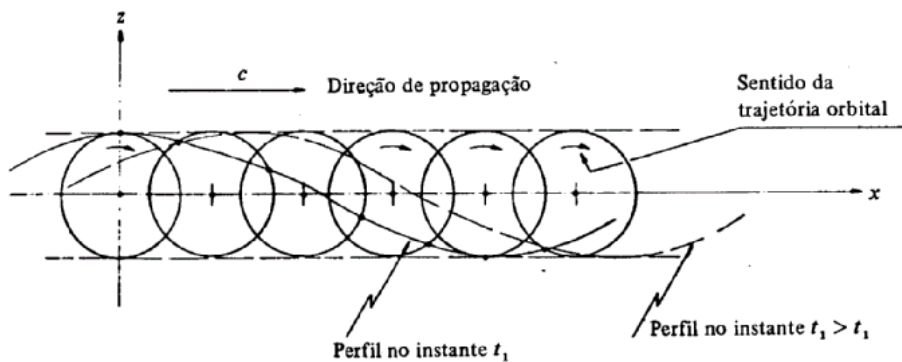


Fig. 2.4

(Fonte: Mason, J., 1984)

$$A = a \frac{\cosh[K(d+z)]}{\sinh(Kd)} \quad \text{e} \quad B = a \frac{\sinh[K(d+z)]}{\sinh(Kd)}$$

No caso de **águas profundas** as elipses se tornam órbitas circulares cujos eixos A e B são dados por:

$$A = ae^{Kz} \quad \text{e} \quad B = ae^{Kz}$$



No caso de **águas rasas**, os eixos das elipses são:

$$A = \frac{a}{Kd} \quad \text{e} \quad B = a \frac{K(d+z)}{Kd}$$

ACELERAÇÕES ORBITAIS DAS PARTÍCULAS DE ONDA

As velocidades orbitais são definidas por:

$$u = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad w = \frac{dz}{dt}$$

Logo, as **acelerações orbitais** serão dadas por:

$$a_x = \frac{du}{dt} \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dw}{dt}$$

Ficando:

$$a_x = \frac{agK \cosh[K(d+z)]}{\cosh(Kd)} \sin(Kx - \sigma t)$$

e

$$a_z = \frac{-agK \sinh[K(d+z)]}{\cosh(Kd)} \cos(Kx - \sigma t)$$

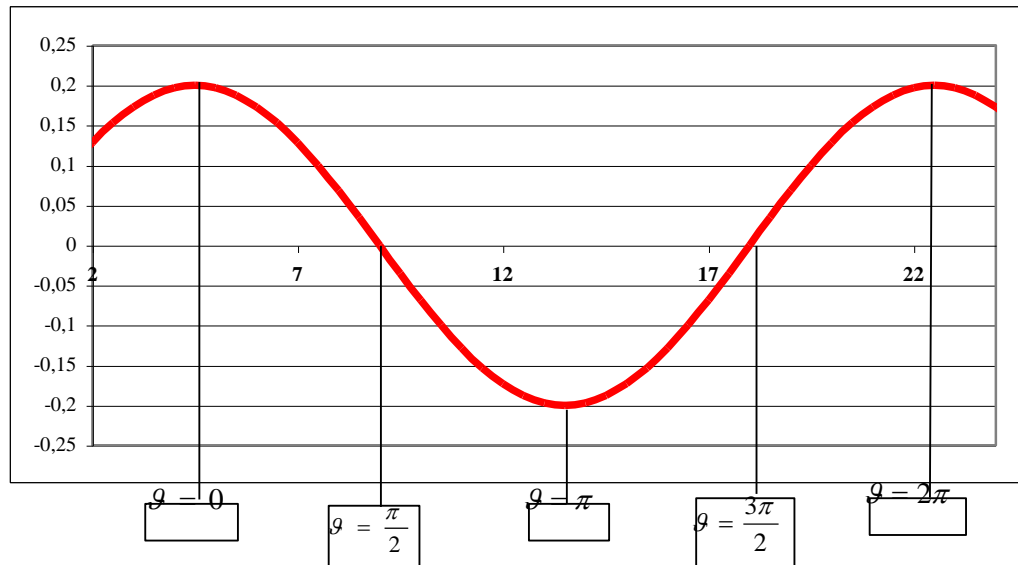
As acelerações orbitais são necessárias para se calcular as pressões nas ondas. A velocidade horizontal **u** está fora de fase com a aceleração horizontal **a_x** da mesma forma que **w** e **a_z**, pois:

$$u = f(\cos\theta) \quad \text{mas} \quad a_x = f(\sin\theta) \quad \text{e} \quad w = f(\sin\theta) \quad \text{mas} \quad a_z = f(\cos\theta)$$













Seja a forma da onda η dada por $\eta = a \cos(\theta)$ onde $\theta = (Kx - \sigma t)$ e as variáveis C_1 e C_2 dadas por:

$$C_1 = \frac{\cosh[K(d+z)]}{\cosh(Kd)} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\sinh[K(d+z)]}{\cosh(Kd)}$$



Ângulo θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos(\theta)$	1	0	-1	0	1
$\sin(\theta)$	0	1	0	-1	0
η	a	0	-a	0	a
Velocidade Horizontal $u=f(\cos\theta)$	$\frac{agK}{\sigma} C_1$	0	$-\frac{agK}{\sigma} C_2$	0	$\frac{agK}{\sigma} C_1$
Velocidade Vertical $w=f(\sin\theta)$	0	$\frac{agK}{\sigma} C_2$	0	$-\frac{agK}{\sigma} C_2$	0
Aceleração Horizontal $a_x=f(\sin\theta)$	0	$agKC_1$	0	$-agKC_1$	0
Aceleração Vertical $a_z=f(\cos\theta)$	$-agkC_2$	0	$agkC_2$	0	$-agkC_2$



Órbita de Velocidades	$u=\max$ $w=0$ 	$u=0$ $w=\max$ 	$u=-\max$ $w=0$ 	$u=0$ $w=-\max$ 	$u=\max$ $w=0$ 
Órbita de Acelerações	$a_x=0$ $a_z=-\max$ 	$a_x=\max$ $a_z=0$ 	$a_x=0$ $a_z=\max$ 	$a_x=-\max$ $a_z=0$ 	$a_x=0$ $a_z=-\max$ 

Observe nestes dois casos que a aceleração vertical está atuando conjuntamente com a gravidade "empurrando" a água para baixo: **Isto altera a PRESSÃO no fundo**

A pressão é alterada porque: $p = \gamma d$, sendo γ = peso específico e d = profundidade do mar. Mas $\gamma = \rho g$, no caso de pressões de fluidos estáticos, sendo g = aceleração da gravidade e ρ = massa específica do fluido.

Acontece que no caso das ondas, o *fluido não é estático*, e a aceleração é dada pela **soma vetorial** entre a aceleração da gravidade e a aceleração do fluido.

Dessa forma, a aceleração resultante no caso observado acima quando a_z aponta para baixo será: $\bar{a} = g + a_z > g$, logo $\gamma = \rho (g + a_z)$ e a pressão p será:

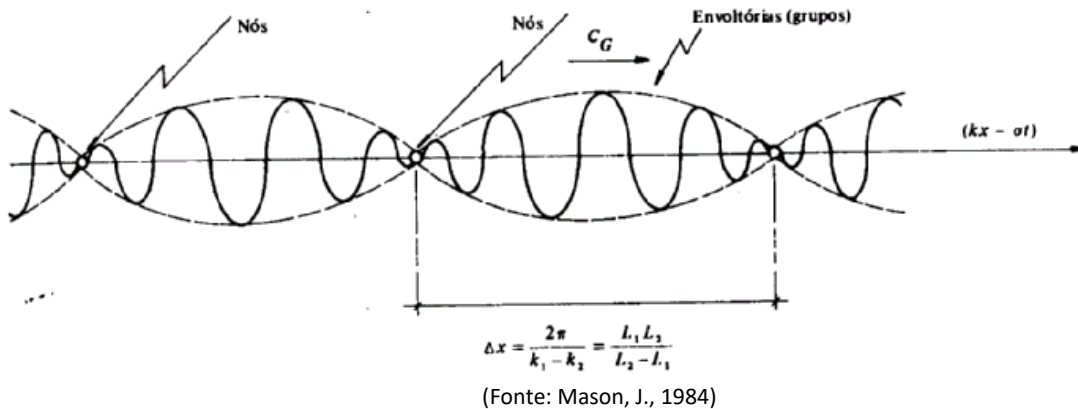
$$p = [\rho(g + a_z)] \times d$$

Portanto, maior do que a pressão hidrostática $p = \rho g d$



GRUPOS DE ONDA

Considere a situação de duas ondas progressivas se propagando com frequências próximas mas diferentes, o que é de fato a realidade em um mar randômico. Veja-se a figura abaixo:



Seja a forma da primeira onda dada por η_1 e a da segunda onda dada por η_2 . A forma da onda resultante será a soma vetorial $\eta = \eta_1 + \eta_2$ sendo:

$$\eta_1 = a_1 \cos \theta_1 \quad \text{e} \quad \eta_2 = a_2 \cos \theta_2$$

A velocidade das partículas orbitais da onda resultante será dada por:

$$u = u_1 - u_2$$

$$\theta_1 = K_1 x - \sigma_1 t + \delta_1$$

$$\theta_2 = K_2 x - \sigma_2 t + \delta_2$$

onde δ_1 e δ_2 são constantes indicando a defasagem (ondas fora de fase).



Daí a forma resultante da onda $\eta = \sum a_i \cos \theta_i$ tendendo para zero ($\rightarrow 0$) nos nós, então $\cos \theta_i = 0$ (em qualquer nó)

Mas $\cos \theta_i = (K_1 x - \sigma_1 t) - (K_2 x - \sigma_2 t) \equiv (2m + 1) \pi/2$ nos nós.

Logo, nos nós $\eta \equiv 0$ pois $\cos \theta_i \equiv 0$ para todos os nós.

Define-se **velocidade de grupo** C_g como a velocidade horizontal dx/dt

Separando-se x e t na equação acima:

$$x = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)t}{(K_1 - K_2)} + \frac{(2m+1)\frac{\pi}{2}}{(K_1 - K_2)}$$

E a forma da envoltória da onda $\eta_{\text{envoltória}}$ poderá ser descrita pela equação abaixo:

$$\eta_{\text{envoltória}} = \pm H \cos \left[\pi x \left(\frac{L_2 - L_1}{L_2 L_1} \right) - \pi t \left(\frac{T_2 - T_1}{T_2 T_1} \right) \right]$$

$$C_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{K_1 - K_2} \quad \text{e no limite } d\sigma/dK \quad \text{tem-se } C_g = d\sigma/dK \quad \text{mas } \sigma = K C$$

e

$$C^2 = g/K \tanh(Kd)$$

$$\text{A solução é: } C_g = C \left[0,5 \left(1 + \frac{2Kd}{\sinh(2Kd)} \right) \right] \quad \text{ou} \quad C_g = n C$$

$$\text{sendo } n = 0,5 \left(1 + \frac{2Kd}{\sinh(2Kd)} \right) \quad \text{equação que será empregada pelo resto do curso!}$$



A **celeridade de Grupo C_g** adquire enorme importância na hidráulica marítima porque é com esta velocidade que se propaga a **energia das ondas** !

PARTICULARIZAÇÕES:

Águas Profundas:

Em águas profundas $\left(\frac{2Kd}{\sinh(2Kd)} \right) \rightarrow 0$ Logo, $n \rightarrow 0,5$

Assim: **$C_g = 0,5 C_0$**

Águas Rasas:

Em águas rasas $\sinh(2Kd) \rightarrow 2Kd$ Logo $n \rightarrow 1,00$

Assim: **$C_g = C$**

Explicação Prática:

Em águas profundas, a celeridade de grupo é apenas metade da celeridade da onda progressiva de Airy considerada nos cálculos. Por isso, em águas profundas, um observador olhando fixo para um grupo de ondas veria sempre uma onda de montante penetrando numa onda de jusante num mar randômico. Em outras palavras, não daria para se acompanhar com os olhos uma única onda se propagando em águas profundas, pois sempre haveria a superposição de uma onda na outra.

Em águas rasas, a celeridade de grupo é igual à própria celeridade individual da onda de Airy, assim, dá para se acompanhar uma única onda desde uma determinada posição antes da linha de arrebentação, até formar-se o tubo de rebentação (aquele em que o surfista faz evoluções) e sua propagação final até a praia.

ENERGIA NO SISTEMA DE ONDAS

ENERGIA TOTAL POR UNIDADE DE ÁREA SUPERFICIAL E_t



$$E_t = \frac{\gamma d^2}{2} + \frac{\gamma \eta^2}{4}$$

ENERGIA CINÉTICA POR UNIDADE DE ÁREA SUPERFICIAL E_c

$$E_c = \frac{\gamma \eta^2}{4}$$

ENERGIA POTENCIAL POR UNIDADE DE ÁREA SUPERFICIAL E_p

$$E_p = \frac{\gamma d^2}{2}$$

ENERGIA MÉDIA PARA UM COMPRIMENTO DE ONDA L (POR UNIDADE DE COMPRIMENTO NA DIREÇÃO Y)

$$\bar{E} = \gamma \frac{a^2}{2} = \frac{\gamma H^2}{8} \quad \text{pois } a = H/2 \quad \text{daí} \quad \bar{E} = \frac{\rho g H^2}{8} \quad (\text{por unidade de área})$$

Unidade: $\text{kg/m}^3 \times \text{m/s}^2 \times \text{m}^2 = \text{N/m}^3 \times \text{m}^2 = \text{N/m}$ por unidade de área,
assim, tendo a área em m^2 fica; $\text{N/m} \times \text{m}^2 = \text{N} \times \text{m}$ que é a unidade de energia Joule

ENERGIA TOTAL PARA 1 COMPRIMENTO DE ONDA L

$$E = \bar{E}L = \frac{\rho g H^2 L}{8} \quad (\text{por unidade de comprimento de crista de onda})$$

Unidade: $\text{N/m}^3 \times \text{m}^2 \times \text{m} = \text{N}$ / unidade de comprimento de crista
assim, tendo o comprimento de onda L em m, fica: $\text{N} \times \text{m} = \text{Joule}$

TAXA DE TRABALHO (POTÊNCIA)



$$dW = dE/dt = \text{Joule/segundo} = \text{watt}$$

POTÊNCIA MÉDIA POR PROFUNDIDADE (FLUXO DE ENERGIA DAS ONDAS)

$$\bar{P} = \bar{E}nC = \bar{E}C_g \quad \text{em kW/m de crista de onda}$$

Águas Profundas:

$$\bar{P}_0 = \bar{E}nC \text{ mas em águas profundas } n \rightarrow 0,5 \quad \text{daí} \quad \bar{P}_0 = 0,5\bar{E}_0C_0$$

Águas Rasas:

$$\bar{P} = \bar{E}nC \quad \text{mas em águas rasas } n \rightarrow 1,00$$

$$\bar{P} = \bar{E}C$$

Mas a taxa de trabalho (potência) de uma onda não se modifica antes de sua completa arrebentação na praia.

$$\text{Logo, } \bar{P}_0 = \bar{P}$$

$$\text{Daí: } 0,5\bar{E}_0C_0 = \bar{E}C$$

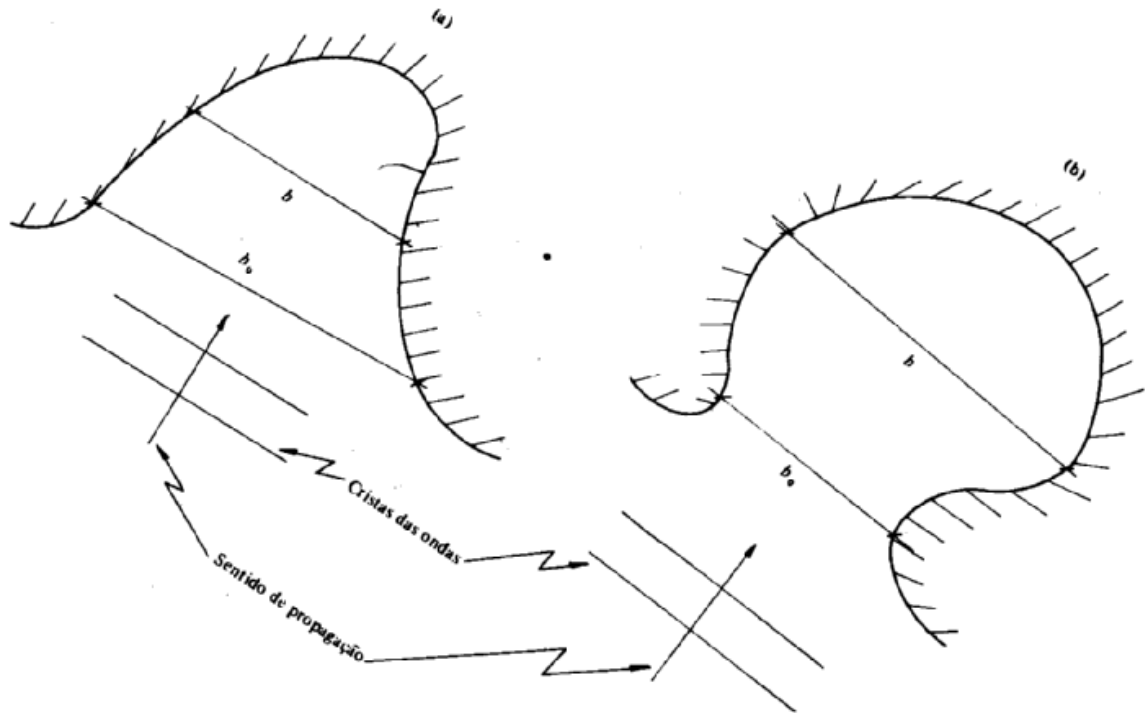
TRANSFORMAÇÃO DE ONDAS

O fato do fluxo de energia (taxa de trabalho) ser constante em todas as seções da frente de propagação de uma onda, nos permite prever de que maneira se transformam as alturas das ondas em regiões de profundidade variáveis e quando as dimensões da frente de propagação sofrem modificações.

Considerando a figura abaixo, relativa a uma frente de onda (equipotenciais) penetrando uma bolsa costeira (enseada), cuja dimensão da frente de onda (distância entre linhas de corrente ou linhas de fluxo) varia de b_0 em águas profundas para b em águas intermediárias ou rasas, o produto da taxa média de trabalho (potência) pela largura da frente de onda é também constante, ou seja:



$$b_0 0,5 \bar{E}_0 C_0 = b \bar{E} n C$$



(Fonte: Mason, J., 1984)

Substituindo-se os valores de $\bar{E}_0 = \gamma H_0^2/8$ e $\bar{E} = \gamma H^2/8$ na equação acima, podemos tirar a relação H/H_0 entre as alturas da onda em águas profundas e águas quaisquer pela equação:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{C_0}{C}}$$

Devendo ser lembrado que:

$$n = 0,5 \left(1 + \frac{2Kd}{\sinh(2Kd)} \right) \text{ e que } \frac{C_0}{C} = \frac{1}{\tanh(Kd)}$$

A fórmula da relação das alturas pode ser resumida na equação:

$$H = K_s H_0$$



sendo que K_s é dado por:

$$K_s = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \sqrt{0,5 \frac{1}{n} \frac{C_0}{C}}$$

sendo K_s denominado *coeficiente de deformação da onda*, ou **shoaling coefficient** na literatura inglesa.

EXEMPLO PARA NTF-4

EXEMPLO Nº 1: Uma onda gravitária, tipo *swell* com **período de 10 segundos** e **altura $H_0 = 4\text{m}$** , **ambos medidos em águas profundas**, se propaga para a costa cuja declividade é uniforme e igual a 5% ($S_0 = 5\%$).

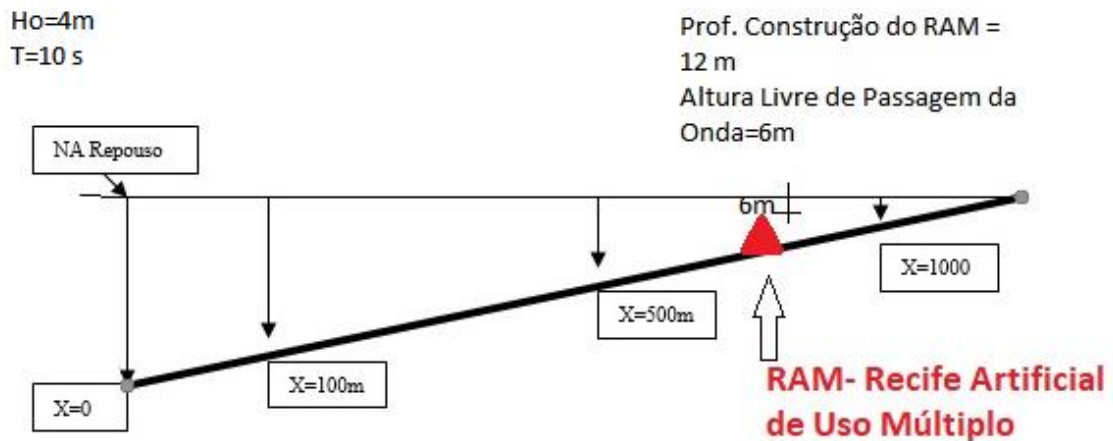
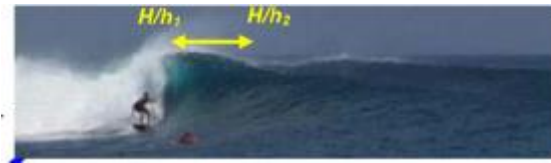
O mar na direção da costa é aberto, o que significa que não há nenhuma restrição de propagação da frente de onda, matematicamente significa que $b=b_0$ ou que $\sqrt{\frac{b_0}{b}} = 1$.

Visando proteger a costa contra a incidências direta das ondas e alavancar o turismo local com campeonatos de surfe, o prefeito local decidiu construir um RAM SUBMERSO – Recife Artificial de Uso Múltiplo submerso, numa profundidade de 12 m, com altura de 6m e deixando um vão livre de passagem da onda de apenas 6 m sobre o topo do RAM.

Considere que a água do mar tem uma massa específica média de 1034 kg/m^3 .

Faça o que se pede:

- Determine a altura da onda ao passar sobre o RAM;
- Determine a energia da onda ao passar sobre o RAM;
- Estime a força de impacto da onda no topo do RAM submerso, para uma área de choque de 1 m^2 .



SOLUÇÃO:

a) Determine a altura da onda ao passar sobre o RAM.

O primeiro passo é determinar as características da onda em águas profundas, tal já foi feito na Nota de Aula 03:

$$L_0 = \frac{g \cdot T^2}{2\pi} = \frac{9,81 \cdot 10^2}{2\pi} = 156,131\text{m}$$

$$C_0 = \frac{L_0}{T} = \frac{156,131}{10} = 15,613\text{m/s}$$

As características da onda na passagem sobre o RAM ($d=12\text{ m}$) devem ser calculados como visto na Nota de Aula 03. Só que neste caso, a profundidade de 12 m na passagem por cima do RAM deixa de ser 12 m e passa a ser 6m para o cálculo :

$$\frac{L}{L_0} = \tanh(Kd)$$

$$\frac{L_6}{L_0} = \tanh\left(\frac{2\pi d}{L_6}\right)$$

$$\frac{L_6}{66} = \tanh\left(\frac{2\pi \cdot 6}{L_6}\right)$$



DICA: Para se determinar o valor de L numa profundidade qualquer diferente de d_0 (águas profundas), pode ser empregada diretamente a aproximação de HUNT:

$$y = \frac{\sigma^2 \cdot h}{g}$$

$$(Kh)^2 = y^2 + \frac{y}{1 + 0,6666666666 \cdot y + 0,3555555555 \cdot y^2 + 0,1608465608 \cdot y^3 + 0,0632098765 \cdot y^4 + 0,0217540484 \cdot y^5 + 0,0065407983 \cdot y^6}$$

Mas pode se usar o processo iterativo, se preferir.

Usando-se a aproximação de HUNT:

T=	10	seg
σ=	0.628319	/ s
h=	6	m
g=	9.81	m/s ²
y=	0.241458	
(Kh)²=	0.262202	
Kh=	0.512057	
K=	0.085343	
L=	73.62295	m

Confira:

$$\frac{73,62295}{156,131} = 0,47154 \quad \tanh\left(\frac{2\pi \cdot 6}{73,62295}\right) = 0,47154$$

Portanto, aproximação satisfatória na 3ª casa decimal. Consideramos então **L_{6m} = 73,62295 m**

Calcula-se:

$$K_6 = \frac{2\pi}{L_6} = \frac{2\pi}{73,62295} = 0,0853/m$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = 0,628/s$$

$$C_6 = \frac{L_6}{T} = \frac{73,62295}{10} = 7,362m/s$$

Calcula-se agora:

$$n = 0,5 \left(1 + \frac{2Kd}{\sinh(2Kd)} \right)$$



$$n = 0,5 \left[1 + \frac{2 \cdot 0,0853 \cdot 6}{\sinh(2 \cdot 0,0853 \cdot 6)} \right] = 0,9222$$

Calcula-se o *coeficiente de deformação da onda*:

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{b_0}{b}} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{n} \frac{C_0}{C}}$$

Mas como o mar é aberto $\sqrt{\frac{b_0}{b}} = 1$

$$\frac{H}{H_0} = 1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \frac{1}{0,9222} \frac{15,613}{7,362}} = 1,0722$$

$$H_6 = 1,0722 \cdot H_0 = 1,0722 \cdot 4 = 4,288m$$

Observe que a onda passando na abertura de 6 m acima do RAM terá uma altura de 4,30 m aproximadamente, ou seja, o RAM não incrementou muito a altura da onda.

b) Determine a energia da onda ao passar sobre o RAM.

$$E = \bar{E}L = \frac{\rho g H^2 L}{8}$$

$$E = \frac{1034 \cdot 9,81 \cdot 4,288^2 \cdot 73,622}{8} = 1.716.392,95 \frac{N}{unidade_de_crista_b}$$

Ou seja, para uma unidade de comprimento de crista $b=1$ m, a energia da onda será:

$$E = 1.716.392,95 N \cdot 1m = 1.716.392,95 \text{ Joules}$$

Considerando que 1 Joule=0,000102 tonelada-força x metro ou 1 tnf=9806,5 J/m, então:

$$1.716.392,95 \text{ Joules} = 175,072 \text{ tnf} \cdot m$$

Por cada metro de “largura” de frente de onda (comprimento de crista).

c)) Estime a força de impacto na onda no topo do RAM submerso, para uma área de 1 m².

A força de um fluido sobre um obstáculo à sua passagem é dada pela expressão vista na NA-02:

$$F = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot g \cdot v^2 \cdot A$$



Neste caso, C = coeficiente hidrodinâmico, é variável com o tipo de estrutura. C varia de 1,1 a 1,4 podemos considerar $C=1,4$. A velocidade v corresponderá á velocidade orbital máxima u_{\max} na profundidade considerada. Assim:

$$u = \frac{agK \cosh[K(d+z)]}{\sigma \cosh(Kd)} \cos(Kx - \sigma t)$$

Nesse caso, para u_{\max} na profundidade do topo do RAM, teremos $\cos(Kx - \sigma t) = 1$ (maior valor do cosseno). A onda deve ser considerada na passagem, onde $d=6$ m e $z=-6$ m, logo:

$$u_{\max \text{ em } z=-6} = \frac{\frac{4,288}{2} \cdot 9,81 \cdot 0,0853 \cdot \cosh[0,0853 \cdot (6 + (-6))]}{0,628 \cdot \cosh(0,0853 \cdot 6)} = 2,519 \text{ m/s}$$

$$F = 0,5 \cdot 1,4 \cdot 9,81 \cdot 1034 \cdot 2,519^2 \cdot 1 = 45.055,096 \text{ N}$$

Como 1 tonelada-força = 9806,65 N, então o impacto da ação da onda numa área de 1 m² na profundidade do topo do RAM é de 4,59 tnf/m², aproximadamente.

O objetivo do presente exercício, foi demonstrar ao aluno de Portos que apenas com uma pequena parte de conhecimento, ainda introdutória do curso, já é possível compreender e estimar esforços sobre obras marítimas e entender algumas nuances dos problemas envolvidos.

REFERÊNCIAS

MASON. J.. (1984). **Obras Portuárias**. Editora Campus. Portobrás. 282p. Rio de Janeiro.RJ

DEAN. R.G., DALRYMPLE, R.A. (1994) **Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists**. World Scientific. New York. 353p

USACE. (1996) **Shore Protection Manual**. Volume I e II. Vicksburg. 1996.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA HIDRÁULICA E AMBIENTAL

