Francisco J. Palmero Moya

Tema 1: Caracteres y reducibilidad completa

Problema 1. *Sea V una representación irreducible compleja de G.*

a) *Demuestra que, salvo escalares, existe un único producto Hermítico G-invariante en V. Utiliza este resultado para dar una demostración alternativa al Teorema de Maschke.*

b) *Sea S_n el grupo simétrico actuando sobre $\mathbb{C}^n$ por permutación de coordenadas:*

$$\sigma \cdot (z_1, \ldots, z_n) = \left(z_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, z_{\sigma^{-1}(n)}\right), \quad \sigma \in S_n.$$

Consideremos el subespacio $V = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1 + \cdots + z_n = 0\right\}$, la llamada representación estándar de S_n sobre $\mathbb{C}$. Construye explícitamente un producto hermítico en V que sea invariante por la acción de S_n. Usa el apartado anterior para encontrar un submódulo complementario al $\langle(1, \ldots, 1)\rangle$.

a) Existencia: Vamos a demostrar que existe al menos un producto Hermítico que sea G-invariante. Sea H_0 un producto Hermítico cualquiera de V. Se puede definir

$$H(u,v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} H_0(g \cdot u, g \cdot v)$$

de forma que $H(u,v)$ es G-invariante. En efecto, si tomamos cualquier $h \in G$ y calculamos $H(h \cdot u, h \cdot v)$ esto no hará más que reordenar los términos del sumatorio, ya que $hg \in G$ por ser G grupo. Además, la linealidad y simetría (Hermítica) se heredan de forma trivial de H_0.

*N.B.: Nótese que la normalización por el orden del grupo no es necesaria para que sea G-invariante.

*N.B.: Nótese que H_0, y por tanto H, deben ser definidos positivos en este contexto

Unicidad: Sean H_1 y H_2 dos productos Hermíticos G-invariantes. A cada uno de ellos, se le hace corresponder una aplicación inducida

$$\hat{H}_i : V \to V^*$$
$$v \mapsto H_i(\cdot, v)$$

La aplicación $\hat{H}_i$ así definida es es

(i) conjugado-lineal: Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y $v \in V$

$$\hat{H}_i(\lambda v) = H_i(\cdot, \lambda v) = \bar{\lambda} H_i(\cdot, v) = \bar{\lambda} \hat{H}_i$$

(ii) G-invariante: Sea $g \in G$ y $u, v \in V$

$$(g \cdot \hat{H}_i(v))(u) = \hat{H}_i(v)(g^{-1} \cdot u) \quad \text{(definición de acción en } V^*)$$
$$= H_i(g^{-1} \cdot u, v) \quad \text{(definición de } \hat{H}_i)$$
$$= H_i(g g^{-1} \cdot u, g \cdot v) \quad (H_i \text{ es } G\text{-invariante})$$
$$= H_i(u, g \cdot v) = \hat{H}_i(g \cdot v)(u)$$

Ahora podemos construir la aplicación

$$\varphi : V \to V$$
$$v \mapsto \hat{H}_2^{-1} \circ \hat{H}_1(v)$$

de forma que esta es un homomorfismo de G-módulos. En efecto, es G-invariante por ser $\{\hat{H}_i\}_{i=1,2}$ G-invariantes y, en este caso, lineal (en lugar de conjugado-lineal).

$$* \quad \hat{H}_2^{-1}(\hat{H}_1(\lambda v)) = \hat{H}_2^{-1}(\bar{\lambda} \hat{H}_1(v)) = \lambda \hat{H}_2^{-1}(\hat{H}_1(v))$$

Aplicando el lema de Schur, como V es una representación irreducible compleja y φ es un homomorfismo de G-módulos V, entonces $\varphi = \lambda \cdot \mathbb{1}$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$. Esto es,

$$\widehat{H}_2^{-1} \circ \widehat{H}_1 = \lambda \cdot \mathbb{1} \Rightarrow \widehat{H}_1 = \lambda \widehat{H}_2 \Rightarrow H_1 = \lambda H_2$$

$\boxtimes$

La demostración alternativa al Teorema de Maschke usando el producto Hérmitico se puede encontrar en la demostración de la Proposición 1.5 en el libro de Fulton-Harris.

El teorema establece que dada W subrepresentación de V, entonces existe W' G-invariante tal que $V = W \oplus W'$. Basta definir

$$W' = \{v \in V : H(v, w) = 0, \forall w \in W\},$$

i.e., W' no es más que el complemento ortogonal de W con respecto al producto Hermítico H y, por tanto, $V = W \oplus W'$. Este subespacio es G-invariante gracias a la G-invarianza del producto H.

Sea $v \in W'$ y $g \in G$, $g \cdot v \in W'$ ya que

$$\begin{aligned} H(g \cdot v, w) &= H(v, g^{-1} w) && (H \text{ es } G\text{-invariante}) \\ &= H(\underset{\substack{\cap \\ W'}}{v}, \underset{\substack{\cap \\ W}}{w'}) && \left(\begin{array}{l} w' = g^{-1} w \in W \\ W \ G\text{-invariante} \end{array}\right) \\ &= 0 && (\text{definición de } W') \end{aligned}$$

b) Se define el producto Hermítico del enunciado como el producto escalar estándar de $\mathbb{C}^n$.

$$H(z,w) = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

y, en particular, en V

Este es trivialmente S_n-invariante en todo S_n, ya que

$$H(\sigma \cdot z, \sigma \cdot w) = \sum_{i=1}^{n} z_{\sigma^{-1}(i)} \overline{w}_{\sigma^{-1}(i)}$$

simplemente reordena los términos. Sea $W = \langle (\underbrace{1, \dots, 1}_{n}) \rangle$ el espacio generado por $\vec{1} \in \mathbb{C}^n$. Veamos quien es

$$W^{\perp} = \{ z \in \mathbb{C}^n : H(z, \vec{1}) = 0 \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{C}^n : z_1 + \dots + z_n = 0 \} \equiv V$$

*Nótese que cualquier elemento $v \in W$ se puede escribir como $v = \lambda \vec{1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Luego, para $\lambda \neq 0$

$$H(z, \lambda \vec{1}) = 0 \iff H(z, \vec{1}) = 0$$

Problema 2. *Comprueba que $[G,G]$ es un subgrupo normal de G, así que puedo considerar el grupo cociente $G/[G,G]$, que es, evidentemente, abeliano.*

a) *¿Qué tiene que cumplir una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ para que V se pueda considerar naturalmente como una representación de $G/[G,G]$? En tal caso, si ρ es irreducible, ¿es irreducible V visto como $G/[G,G]$-módulo?*

b) *Pon un ejemplo concreto de la situación anterior.*

c) *Prueba que el número de irreps complejas de grado uno de G coincide con el cardinal de $G/[G,G]$.*

<u>$[G,G]$ es subgrupo normal</u> Sea $g \in G$ y $h=[x,y] \in [G,G]$. Tenemos que probar que $ghg^{-1} \in [G,G]$.

$$g[x,y]g^{-1} = g(xyx^{-1}y^{-1})g^{-1}$$

(añadimos gg^{-1}) $\quad = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gx^{-1}g^{-1})(gy^{-1}g^{-1})$

(definición de inversa) $\quad = (gxg^{-1})(gyg^{-1})(gxg^{-1})^{-1}(gyg^{-1})^{-1}$

(definición de $[\cdot,\cdot]$) $\quad = [\underbrace{gxg^{-1}}_{x'}, \underbrace{gyg^{-1}}_{y'}] \in [G,G]$

a) Dado el homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ y $[G,G]$ subgrupo normal de G, buscamos una aplicación inducida $\bar{\rho} : G/_{[G,G]} \to GL(V)$ que también sea homomorfismo de grupos. Según el Teorema fundamental de homomorfismos, existe un único $\bar{\rho}$ siempre y cuando $[G,G] \subseteq \ker \rho$. Luego, dado $g = [x,y] \in [G,G]$ se debe cumplir

$$\rho(xyx^{-1}y^{-1}) = \mathbb{1} \Rightarrow \rho(x)\rho(y) = \rho(y)\rho(x)$$

Esto es, la imagen de $[G,G]$ por ρ debe ser subgrupo abeliano de $GL(V)$.

La irreducibilidad de V como $G/_{[G,G]}$-módulo se sigue de forma directa al comprobar que las clases de $G/_{[G,G]}$ actúan igual que sus representantes, por lo que si no existen supespacios propios G-invariantes, tampozo existirán para $G/_{[G,G]}$.

b) Vamos a usar de ejemplo un caso trivial. Tenemos el grupo cíclico de cuatro elementos

$$C_4 = \langle a \mid a^4 = 1 \rangle$$

Puesto que C_4 es abeliano, todos los conmutadores devuelven la identidad, luego $[C_4, C_4] = \{1\}$. Así, el cociente es isomorfo a sí mismo. $C_4/_{\{1\}} \cong C_4$.

Dada cualquier representación del tipo

$$\begin{aligned} \rho_\lambda : C_4 &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ a &\longmapsto \rho(a) = \lambda \in \{1, -1, i, -i\} \end{aligned}$$

Será siempre irreducible ya que $\dim \mathbb{C}^* = 1$. Además, dado que $[C_4, C_4] = \{1\}$, $\rho(1) = 1$ y se cumple la condición impuesta para que $[C_4, C_4] \subseteq \ker \rho$.

c) Toda representación 1-dimensional de G, será de la forma $\rho: G \to \mathbb{C}^*$, siendo $\mathbb{C}^*$ el grupo multiplicativo. Puesto que este grupo es abeliano, cualquier $g \in [G,G]$ tiene por imagen

$$\rho(xyx^{-1}y^{-1}) = \rho(x)\rho(y)\rho(x)^{-1}\rho(y)^{-1} \qquad (\rho \text{ es homomorfismo})$$
$$= \rho(x)\rho(x)^{-1}\rho(y)\rho(y)^{-1} \qquad (\mathbb{C}^* \text{ es abeliano})$$
$$= 1$$

Luego $[G,G] \subseteq \ker \rho$ y se cumple la condición de (a), de forma que toda irrep 1-dimensional de G tiene asociada una <u>única</u> irrep de $G/[G,G]$. Análogamente, si V es irrep en $G/[G,G]$, basta definir $\rho = \bar{\rho} \circ \pi$ mediante su proyección canónica para obtener una irrep de V. Nótese que esta irrep de G es 1-dimensional ya que $G/[G,G]$ es abeliano y toda irrep de un grupo abeliano es 1-dimensional.

Una vez sabemos que el conjunto de irreps 1-dimensionales de G está en una correspondencia 1-1 con el conjunto de irreps de $G/[G,G]$, vamos a ver su cardinalidad. Ahora bien, puesto que el numero de irreps de cualquier grupo es igual al número de clases de conjugación y $G/[G,G]$ es abeliano (cada elemento es una clase), este es igual a $|G/[G,G]|$. $\boxtimes$

Problema 4. *Prueba que, para V una representación de un grupo G, el carácter de la representación $\wedge^2 V$ viene dado por $\chi_{\wedge^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$, para todo $g \in G$.*

Sea $\rho: G \to GL(V)$ una representación con $\dim V = n$. Sea $g \in G$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de autovalores de $\rho(g)$ actuando sobre V. El carácter de V será

$$\chi_V(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Y para g^2 será

$$\chi_V(g^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

La representación $\Lambda^2 V$ tiene como base

$$\{v_i \wedge v_j\}_{1 \leq i < j \leq n},$$

siendo $\lambda_i \lambda_j$ el autovalor correspondiente a cada uno de los vectores de la base. Así,

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

Usando la identidad

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j < n} \lambda_i \lambda_j$$

Tenemos:

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2}_{\chi_V^2(g)} - \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}_{\chi_V(g^2)}\right]$$

* Proposición 2.1 Fulton-Harris

Problema 7. *Si $g, g' \in G$ y $\{V_1, \ldots, V_m\}$ son una colección de representantes de las clases de isomorfía de las representaciones irreducibles de G, probad que*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{m} \chi_{V_i}(g)\chi_{V_i}(g') = \begin{cases} 0 & \text{si } g \text{ y } g' \text{ no son conjugados} \\ \frac{1}{|\text{clase de conjugación de } g|} & \text{si } g \text{ y } g' \text{ son conjugados.} \end{cases}$$

Sean $\{C_i\}_{i=1}^{m}$ las clases de conjugación de G y $\{V_i\}_{i=1}^{m}$ el conjunto de representantes de las clases de isomorfía de las irreps de G. Sabemos que existe la relación de ortogonalidad

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_{V_i}(g)}\,\chi_{V_j}(g) = \delta_{ij}$$

esto es, las filas de la tabla de caracteres son ortogonales.

Puesto que todos los elementos de una misma clase de conjugación tienen el mismo carácter, podemos agrupar los términos simplemente eligiendo un representante g_k de cada clase C_k

$$\frac{1}{|G|}\sum_{k=1}^{m} |C_k|\,\overline{\chi_{V_i}(g_k)}\,\chi_{V_j}(g_k) = \delta_{ij}$$

Si definimos las siguientes matrices

$$D = \frac{1}{|G|}\,\mathrm{diag}\{|C_1|, \ldots, |C_m|\}$$

$$A = \{a_{ij} = \chi_{V_i}(g_j)\}$$

podemos expresar la anterior ecuación matricialmente

$$\overline{A} D A^t = id$$

siendo id la identidad de $M_m(\mathbb{C})$.

Puesto que las matrices son invertibles (det ≠ 0) podemos resolver el sistema de forma que:

$$\overline{A}^t A = D^{-1}$$

Expresando la igualdad en términos de los componentes de las matrices

$$(\overline{A}^t A)_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \overline{\chi_{V_i}(g_j)}\, \chi_{V_i}(g_k) = \frac{|G|}{|C_j|}\, \delta_{jk}$$

Esto es,

$$\sum_{i=1}^{m} \chi_{V_i}(g)\, \chi_{V_i}(g') = \begin{cases} 0 & \text{si } g \not\sim g' \quad (j \neq k) \\ \dfrac{|G|}{|C(g)|} & \text{si } g \sim g' \quad (j = k) \end{cases}$$

siendo $c(g) = |C_k|$ para $g \in C_k$.

* Nótese que hay que dividir por $|G|$ en ambos lados de la igualdad para obtener la expresión del enunciado.

Tema 2: Álgebra de grupo. Representaciones inducidas y restringidas

Problema 13. *Argumenta por qué una representación de un grupo G es irreducible si y sólo si es irreducible como representación para el álgebra grupo $\mathbb{C}[G]$.*

$\Rightarrow$) Si es irreducible para G, entonces lo es para $\mathbb{C}[G]$

Supongamos que V es irreducible para G. Si existiera un subespacio $W < V$ que fuera invariante bajo la acción del álgebra $\mathbb{C}[G]$, entonces W sería, en particular, invariante bajo los elementos de la forma $1 \cdot g \in \mathbb{C}[G]$. Ahora bien, como W es invariante para todo $g \in G$ y V es irreducible para G, entonces W debe ser $\{0\}$ o $\{V\}$.

$\Leftarrow$) Si es irreducible para $\mathbb{C}[G]$, entonces lo es para G.

Sea $W \leq V$ un espacio G-invariante. Así, por linealidad, W también será invariante bajo $\mathbb{C}[G]$. Puesto que V es irreducible para el álgebra, W debe ser $\{0\}$ o V.

N.B: Básicamente hemos probado que si un espacio V es invariante para un grupo G también lo es para el álgebra grupo $\mathbb{C}[G]$ y viceversa, debido a las relaciones que existen entre ellos.

$\mathbb{C}[G]$ está generado por G

G "son" los elementos $1 \cdot g \in \mathbb{C}[G]$

Problema 14. *Explica por qué el álgebra grupo $\mathbb{C}[Q_8]$ es semisimple y di a quiénes son isomorfas sus componentes simples.*

$\mathbb{C}[Q_8]$ es semisimple

El álgebra es semisimple por el Teorema de Maschke, ya que el cuerpo $\mathbb{C}$ tiene característica cero y, por tanto, no divide al orden del grupo $|Q_8| = 8$.

Componentes simples

Según el Teorema de Wedderburn-Artin, toda álgebra semisimple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado ($\mathbb{C}$ lo es) es isomorfa a un producto directo de álgebras de matrices

$$\mathbb{C}[Q_8] \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

donde cada n_i es $\dim V_i$ con V_i irrep de Q_8. Veamos como calcular (i) el numero de irreps r y (ii) las dimensiones de cada una de ellas

(i) El número de irreps coincide con el número de clases de conjugación del grupo. Se puede comprobar que las clases de conjugación de Q_8 son

$$\underbrace{\{1\}, \{-1\}}_{Z(Q_8)}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$$

Luego, hay 5 componentes simples ($r = 5$)

(ii) Sabemos que el número de representaciones de grado 1 es igual al orden del grupo cociente $G/[G,G]$ (Problema 2).

El subgrupo derivado $[Q_8, Q_8] = \{1, -1\}$ de forma más o menos trivial, ya que los elementos complejos desaparecen en cualquier conmutación por aparecer un número par de veces (2 ó 4), y sabemos que tanto 1 como -1 deben aparecer

- $[i, j] = [j, k] = [i, k] = -1$
- 1 es el neutro y $[G, G]$ subgrupo

El número de irreps 1-dimensionales será (T. Lagrange)

$$\left| G/[G,G] \right| = |G| / |[G,G]| = 8/2 = 4$$

Por otro lado, sabemos que $\sum_{i=1}^{r} (\dim V_i)^2 = |G|$, i.e.,

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + n_5^2 = 8$$

Luego $n_5 = \dim V_5 = 2$. Y el ejercicio quedaría resuelto

$$\mathbb{C}[Q_8] \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} + \mathbb{C} \oplus M_2(\mathbb{C})$$

Problema 15. *Comprueba que para cada grupo G, el centro del álgebra grupo tiene dimensión igual al cardinal de las clases de conjugación del grupo. Más aún, si C es una clase de conjugación y $a_C := \sum_{g\in C} g$, entonces $\{a_C : C$ clase de conjugación de $G\}$ es una base del centro $Z(\mathbb{C}[G])$.*

El centro del álgebra $Z(\mathbb{C}[G])$ se define como aquellos elementos $x \in \mathbb{C}[G]$ que conmutan con todos los elementos del álgebra

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \{x \in \mathbb{C}[G] : xy = yx, \forall y \in \mathbb{C}[G]\}$$

Nótese, que es suficiente con que x conmute con los elementos de la base (aquí G es la base de $\mathbb{C}[G]$), luego

$$Z(\mathbb{C}[G]) = \{x \in \mathbb{C}[G] : xg = gx, \forall g \in G\}$$

$$= \{x \in \mathbb{C}[G] : gxg^{-1} = x, \forall g \in G\}$$

Sea $x = \sum_{g\in G} a_g g$, vamos a calcular $hxh^{-1} = x$

$$h\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)h^{-1} = \sum_{g\in G} a_g g$$

$$\sum_{g\in G} a_g (hgh^{-1}) = \sum_{g\in G} a_g g$$

Si expresamos el sumatorio de la izquierda en función de un nuevo $g' = hgh^{-1}$, y queremos que la igualdad se cumpla, entonces por fuerza

$$a_g = a_{hgh^{-1}} \quad \forall g, h \in G$$

Esto significa que cualquier elemento $x \in \mathbb{C}[G]$ que pertenezca al centro $Z(\mathbb{C}[G])$ debe tener los mismos coeficientes a_g para todo g perteneciente a una misma clase de conjugación C de G.

En efecto, tal y como dice el enunciado, si definimos

$$a_C = \sum_{g \in C} g,$$

entonces, $\{a_C : C \text{ clase de conjugación de } G\}$ es una base del centro.

(i) Pertenece al centro: véase que

$$a_C = \sum_{g \in C} g = \sum_{g \in G} a_g g$$

donde

$$a_g = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in C \\ 0 & \text{si } g \notin C \end{cases}$$

luego a_g es el mismo (1) para todos los elementos de la clase (propiedad para pertenecer al centro)

(ii) Independencia lineal: Puesto que el grupo G forma base de $\mathbb{C}[G]$, i.e. son linealmente independientes, y las clases de conjugación forman una partición de G, i.e. son disjuntos, los a_C son linealmente independientes para toda C de G.

(iii) <u>Sistema generador</u>: Sea $x = \sum_{g \in G} a_g g \in Z(\mathbb{C}[G])$.

sólo tenemos que agrupar los coeficientes de los elementos que pertenezcan a la misma clase de conjugación. Sea b_i el coeficiente de los $g \in C_i$, entonces

$$x = \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{i=1}^{N} b_i \underbrace{\left(\sum_{g \in C_i} g\right)}_{a_{C_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} b_i \, a_{C_i}$$

siendo N el número de clases de conjugación de G.

Hemos demostrado que $\{a_C : C \text{ clase de conj. de } G\}$ es base de $Z(\mathbb{C}[G])$ y, además, puesto que tiene N elementos

$$\dim(\mathbb{C}[G]) = \# \text{ clases de conj. de } G$$

Tema 3: Representaciones reales

Problema 25. *Muestra que todas las representaciones irreducibles de S_n son de tipo real.*

★ Indicación: Usa que todo elemento de S_n es conjugado a su inverso, y mira el indicador de Frobenius-Schur.

Sabemos que en S_n las clases de conjugación vienen dadas por los elementos que tienen el mismo tipo de ciclo. Luego, puesto que para todo $\sigma \in S_n$, su inverso σ^{-1} tiene el mismo tipo de ciclo, $\sigma \sim \sigma^{-1}$. Además, sabemos que el carácter el carácter es una función de clase, luego

$$\chi(\sigma) = \chi(\sigma^{-1}) = \overline{\chi(\sigma)} \Rightarrow \chi(\sigma) \in \mathbb{R}$$

Esto prueba que cualquier irrep de S_n no puede ser compleja. Ahora veamos que tampoco puede ser cuaterniónica. Sea

$$N(h) = \# \{ g \in S_n : g^2 = h \}$$

el número de elementos $g = h^2$ de S_n, de forma que el indicador de Frobenius-Schur se puede expresar como

$$\nu(\chi) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \chi(g^2) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{h \in S_n} N(h) \chi(h)$$

La función $N: G \to \mathbb{C}$ es una función de clase ya que si $h' = x h x^{-1}$, entonces $g^2 = h \Leftrightarrow (xhx^{-1})^2 = h'$ y, por tanto $N(h) = N(h')$.

Al ser una función de clase, esta puede ser expresada en función de la base ortonormal formada por los caracteres de las irreps (denotados por $\{\psi\}$ para no confundir con cualquier carácter χ).

$$N = \sum_{\psi \in S_n} \langle N, \psi \rangle \, \psi$$

siendo el producto Hermítico $\nearrow$ La imagen es $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$$\langle N, \psi \rangle = \frac{1}{|S_n|} \sum_{h \in S_n} \overline{N(h)} \, \psi(h) = \nu(\psi)$$

Así

$$N = \sum_{\psi} \nu(\psi) \, \psi$$

siendo $\nu(\psi) \in \{+1, -1\}$ ya que la irrep no puede ser compleja. Ahora podemos evaluar N en el neutro e de forma que contemos las involuciones

$$N(e) = \#\{g \in S_n : g^2 = e\}$$

Tenemos

$$N(e) = \sum_{\psi} \nu(\psi) \underbrace{\psi(e)}_{\dim \psi}$$

Usando el hecho (sin demostración) de que

$$\#\{g \in S_n : g^2 = e\} = \sum_{\psi} \dim \psi \qquad (*)$$

Se obtiene $\nu(\psi) = 1, \ \forall \psi$.

N.B: He intentado usar argumentos relacionados con las indicaciones y lo visto hasta el tema 3 para demostrar el ejercicio, pero me temo que el argumento es circular ya que las demostraciones que he visto para probar a igualdad de las involuciones de S_n hacen uso de que las irreps de S_n son todas reales. Existe una demostración bastante directa del ejercicio a través de los módulos de Specht, basándose en el hecho de que las irreps de S_n se pueden definir con matrices con coeficientes racionales (y, por tanto, reales). Esta puede verse en la demostración de la proposición 5.1.3 de "Teoría de Representaciones de Grupos" el TFG de un alumno de la US que encontré investigando sobre el tema

Problema 26. *Si G es abeliano, entonces*

a) *Toda representación irreducible compleja es unidimensional.*

b) *Existen tantas irrepresentaciones (salvo isomorfismo) como el cardinal de G.*

c) *Encuentra las representaciones irreducibles de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. Clasifica su tipo.*

d) *Descompón la representación regular $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2]$ como suma de representaciones irreducibles.*

e) *Descompón la representación regular $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2]$ como suma de representaciones irreducibles.*

★ Indicación: Para el principio recuerda que ser G abeliano implica que si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación, entonces $\rho(g) \in \mathrm{Hom}_G(V, V)$. En los últimos se piden descomposiciones de verdad, no sólo salvo isomorfismo.

a) Por la definición de representación de un grupo G, a cada elemento $g \in G$ se le hace corresponder una aplicación $\phi_g \in GL(V)$

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho(g) = \phi_g \end{aligned}$$

La aplicación definida a través de la acción de g

$$\begin{aligned} \phi_g : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto \phi_g(v) = g \cdot v, \end{aligned}$$

es un morfismo de G-modulos si G es abeliano

$$h \cdot \phi_g(v) = \phi_g(h \cdot v), \quad \forall h \in G$$

$$h \cdot (g \cdot v) = g \cdot (h \cdot v), \quad \forall h \in G$$

Luego por el Lema de Schur, $\phi_g = \lambda_g \, id$. Esto es, cada subespacio $W \subseteq V$ es G-invariante. Sin embargo, puesto que V es irrep, la única posibilidad es que $\dim V = 1$.

b) Sabemos que el número de irreps es igual al número de clases de conjugación de G, y en un grupo abeliano todo elemento forma su propia clase de conjugación. Por lo tanto, hay $|G|$ clases de conjugación, y en consecuencia, $|G|$ irreps (salvo isomorfismo)

c) Vamos a usar la presentación de $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ a través de sus generadores

$$\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 = \langle a, b \mid a^4 = b^2 = 1,\ ab = ba \rangle,$$

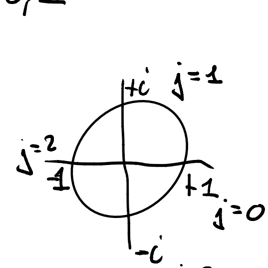
esto es, a genera $\mathbb{Z}_4$ y b genera $\mathbb{Z}_2$. El grupo es abeliano, por lo que cualquier irrep será 1-dimensional

$$\rho : \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

Además, por ser abeliano, tenemos $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2| = 4 \cdot 2 = 8$ irreps. Cualquiera de ellas quedará definida por la imagen de los generadores:

$$(a)\quad \underbrace{\rho(a^4)}_{\rho(a)^4} = \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(a) = \omega^j \text{ con } \begin{cases} \omega = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i \\ j = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$(b)\quad \underbrace{\rho(b^2)}_{\rho(b)^2} = \rho(1) = 1 \Rightarrow \rho(b) = (-1)^k \text{ con } k = 0, 1$$



Esto es, cualquier representación queda definida por

$$\rho_{jk}(a, b) = (-1)^k \omega^j \ ; \quad k \in \{0, 1\},\ j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

ya que cualquier otro elemento $g \in G$ será de la forma $g = a^n b^m$ y

$$\rho_{jk}(a^n, b^m) = (-1)^{km}\, \omega^{nj} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{N}$$

Ahora, vamos a clasificarlas en función de su indicador de Frobenius-Schur

$$\nu(\rho) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2)$$

Nótese que $\chi(g) = \rho(g)$ por ser representaciones 1-dimensionales.

Para nuestro caso, se cumple que

$$g^2 = a^{2n} \cancel{b^{2m}}^{1} = a^{2n} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$

Luego

$$\chi_{j,k}(g^2) = \chi_{j,k}(a^{2n}) = \rho_{j,k}(a^{2n}) = \omega^{2jn}$$

Para cada $j \in \{0,1,2,3\}$ tenemos

(•) $\chi_{0,k}(g^2) = \omega^0 = 1 \Rightarrow \nu(\rho_{0,k}) = 1 \quad \forall k = \{0,1\}$

(•) $\chi_{1,k}(g^2) = \omega^{2n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par } \{0,2\} \quad (4 \text{ veces}) \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar } \{1,3\} \quad (4 \text{ veces}) \end{cases}$

$\Rightarrow \nu(\rho_{1,k}) = 0, \quad \forall k = \{0,1\}$

(•) $\chi_{2,k}(g^2) = \omega^{4n} = 1 \Rightarrow \nu(\rho_{2,k}) = 1, \quad \forall k = \{0,1\}$

(•) $\chi_{3,k}(g^2) = \omega^{6n} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par } \{0,2\} \quad (4 \text{ veces}) \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar } \{1,3\} \quad (4 \text{ veces}) \end{cases}$

$\Rightarrow \nu(\rho_{3,k}) = 0, \quad \forall k = \{0,1\}$

Por lo tanto, tenemos

→ 4 representaciones reales: $\rho_{0,0}, \rho_{0,1}, \rho_{2,0}, \rho_{2,1}$

→ 4 representaciones complejas: $\rho_{1,0}, \rho_{1,1}, \rho_{3,0}, \rho_{3,1}$

d) La descomposición de la representación regular debe contener todas las irreps, siendo todas ellas 1-dimensionales y, por tanto, de la forma $\mathbb{C}\cdot e_{j,k}$. Así, podemos usar la proyección

$$\pi_i = \frac{\dim V}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_{V_i}(g)}\cdot g$$

de la representación $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i^{\oplus a_i}$ en $V_i^{\oplus a_i}$. Para nuestro caso $V = \mathbb{C}[\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2]$, las irreps $V_i = \mathbb{C}\cdot e_{j,k}$, las multiplicidades a_i son todas 1 y $r=8$. Luego

$$e_{j,k} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{3}\sum_{m=0}^{1} (-1)^{-km}\omega^{-jn}\cdot a^n b^m$$

Y la descomposición sería

$$\mathbb{C}[\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2] = \bigoplus_{j=0}^{3}\bigoplus_{k=0}^{1} \mathbb{C}\cdot e_{j,k}$$

Problema 30. *Prueba que no existe representación irreducible cuaterniónica de dimensión impar.*

Una representación (ρ, V) se dice cuaterniónica si existe una forma bilineal no-degenerada $B: V \times V \to \mathbb{C}$ que cumple

(i) G-invariante: $B(gx, gy) = B(x, y) \; \forall g \in G$

(ii) Antisimétrica: $B(x, y) = -B(y, x)$

Si V es una representación cuaterniónica, existe tal B y la podemos escribir en su forma matricial M respecto a una base de V. La antisimetría implica que

$$M^t = -M$$

Aplicando el determinante a ambos lados

$$\det(M^t) = \det(-M)$$

$$\det(M) = (-1)^n \det(M)$$

Al ser B no degenerada, $\det(M) \neq 0$ y, por tanto, la igualdad solo se cumple para n impar.

Tema 4: Representaciones de S_n y diagramas de Young

Problema 37. *Halla las dimensiones de las irreps de S_6 utilizando la regla de los ganchos.*

Sabemos que el conjunto de irreps de S_n está en correspondencia bijectiva con las particiones de n. Para nuestro caso tenemos

$$n=6 \Rightarrow p(6)=11$$

Vamos a calcular la dimensión de V_λ para cada partición λ. Para ello, haremos uso de la regla de los ganchos

$$\dim(V_\lambda)=\frac{n!}{\prod_{(i,j)\in\lambda} h_\lambda(i,j)}$$

siendo $h_\lambda(i,j)$ la longitud del gancho de la celda en la fila i-ésima y columna j-ésima del Diagrama de Young asociado a λ. Aunque existen 11 particiones $\{\lambda_i\}_{i=0}^{10}$, algunas de ellas son conjugadas de otras, reduciendo el número de veces que tenemos que calcular $\dim V_\lambda$ ya que si V_λ es la irrep asociada a λ, entonces la irrep asociada a su conjugada $V_{\lambda'}=V_\lambda\otimes\varepsilon$, donde ε es la irrep 1-dimensional signo.

* No defino la irrep signo porque ya la hemos visto en clase en muchas ocasiones.

Vamos con las particiones

λ	λ'	Diagrama	$\prod h_\lambda$	dim
6	1+1+1+1+1+1	$\begin{array}{l}\boxed{6}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\end{array}$	720	1
5+1	2+1+1+1+1	$\begin{array}{l}\boxed{6}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\\ \boxed{1}\end{array}$	144	5
4+2	2+2+1+1	$\begin{array}{l}\boxed{5}\boxed{4}\boxed{2}\boxed{1}\\ \boxed{2}\boxed{1}\end{array}$	80	9
4+1+1	3+1+1+1	$\begin{array}{l}\boxed{6}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\\ \boxed{2}\\ \boxed{1}\end{array}$	72	10
3+3	2+2+2	$\begin{array}{l}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\\ \boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}\end{array}$	144	5
3+2+1 (autoconjugada)		$\begin{array}{l}\boxed{5}\boxed{3}\boxed{1}\\ \boxed{3}\boxed{1}\\ \boxed{1}\end{array}$	45	16
				+ 720

* Nótese que el diagrama de Young asociado a λ' se consigue simplemente al trasponer (filas $\longleftrightarrow$ columnas) el diagrama asociado a λ.

Problema 38. *Construye dos irreps de S_6 que no sean de dimensión 1: o al menos da sus caracteres.*

Vamos a construir la representación estándar y su alternada. Al igual que en clase, vamos a obtener la representación estándar

$$V_{std} = \{(z_1, \dots, z_6) \in \mathbb{C}^6 : z_1 + \dots + z_6 = 0\}$$

ya que sabemos que la representación permutación $V \cong \mathbb{C}^6$

$$\sigma \cdot (z_1, \dots, z_6) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(6)}),$$

se descompone como $\mathbb{C}^6 \cong V_{std} \oplus V_{trivial}$. La alternada será simplemente $V_{std} \otimes \mathcal{E}$, siendo $\mathcal{E}$ la representación signo

$$\sigma \cdot (z_1, \dots, z_6) = \text{signo}(\sigma)(z_1, \dots, z_6)$$

Vamos a calcular los diferentes caracteres. Sabemos que el número de clases de conjugación de S_n coincide con las particiones de n. Para nuestro caso $p(6) = 11$. Por suerte, ya hemos calculado las particiones en el ejercicio anterior por lo que aquí simplemente escribiremos un representante para cada clase en función de su partición, sabiendo que estos son constantes para cada clase de conjugación.

A partir de la descomposición $\mathbb{C}^6 \cong V_{std} \oplus V_{trivial}$, sabemos que

$$\chi_{\mathbb{C}^6} = \chi_{V_{std}} + \chi_{V_{trivial}}$$

siendo

$$\chi_{V_{trivial}}(g) = 1 \quad \forall g \in S_6$$

$$\chi_{V_{\mathbb{C}^6}}(g) = \# \text{ de puntos fijos de } g \in S_6$$

Por otro lado, del producto tensorial $V_{alt} \cong V_{std} \otimes \varepsilon$, tenemos

$$\chi_{V_{alt}} = \chi_{V_{std}} \cdot \chi_{\varepsilon}$$

siendo $\chi_{\varepsilon}(\sigma) = \text{signo}(\sigma)$.

La tabla de caráteres para estas dos representaciones quedaría

	(1)	(12)	$(12)(34)$	$(12)(34)(56)$	(123)	$(123)(45)$	$(123)(456)$	(1234)	$(1234)(56)$	(123456)
V_{std}	5	3	1	−1	2	0	−1	1	−1	−1
V_{alt}	5	−3	1	1	−2	0	−1	−1	−1	1
ε	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1

Problema 40. *Si λ es una partición de n, demuestra que la representación asociada a la partición obtenida intercambiando filas por columnas es isomorfa a $V_\lambda \otimes \text{sign}$ para* sign *la representación signatura.*

Sea T un tabloide de la partición λ. Tenemos los siguientes operadores vistos en clase

$$a_T = \sum_{p \in P_T} p; \qquad P_T = \{g \in S_n : g \text{ preserva cada fila}\}$$

$$b_T = \sum_{q \in Q_T} \text{signo}(q)\, q; \qquad Q_T = \{g \in S_n : g \text{ preserva cada columna}\}$$

Además, sabemos que podemos construir el llamado simetrizador de Young con $c_T = a_T b_T$, de forma que la representación irreducible V_λ es isomorfa al ideal por la izquierda $\mathbb{C}[S_n]c_T$. Ahora bien, si tomamos la partición conjugada λ', al intercambiar filas por columnas en el nuevo tablero T'

$$P_{T'} = Q_T; \quad Q_{T'} = P_T,$$

de forma que los nuevos operadores se pueden escribir

$$a_{T'} = \sum_{q \in Q_T} q$$

$$b_{T'} = \sum_{p \in P_T} \text{signo}(p)\, p$$

Definimos el automorfismo lineal

* Lo hemos definido sobre la base del álgebra, i.e., G.

$$\varphi : \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$$
$$g \longmapsto \varphi(g) = \text{signo}(g)\, g$$

Así, tenemos que $a \leftrightarrow b$

$$\psi(a_T) = \sum_{p \in P_T} \text{signo}(p)\, p = b_{T'}$$

$$\psi(b_T) = \sum_{q \in Q_T} \underbrace{\text{signo}(q)\, \text{signo}(q)}_{1}\, q = a_{T'}$$

Luego, $\psi(c_T) = \psi(a_T b_T) = \psi(a_T)\,\psi(b_T) = b_{T'} a_{T'}$.

Nótese que los simetrizadores estan cambiados de orden, de forma que el ideal $\mathbb{C}[S_n]\, b_{T'} a_{T'}$ no tiene porqué coincidir con $\mathbb{C}[S_n]\, a_{T'} b_{T'}$ a priori, pero en realidad sí que coinciden en virtud del ejercicio 4.4 del Fulton-Harris.

Para nuestro caso, basta comprobar que los caracteres de la representación resultante de aplicar este automorfismo ψ coinciden con los carácteres de la irrep original V_λ.

En efecto, puesto que ψ solo multipica cada elemento $g \in S_n$ por su signo, el carácter será

$$\chi_{\psi(V_\lambda)}(g) = \text{signo}(g)\, \chi_{V_\lambda}(g)$$

el cual coincide con el caracter $\chi_{V_\lambda \otimes \varepsilon} = \chi_{V_\lambda} \cdot \chi_\varepsilon$.

Tenemos así, dos representaciones irreducibles sobre $\mathbb{C}$ con el mismo carácter y, por tanto, son isomorfas.

$\boxtimes$