

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA

Facultad de Ciencias

Grado de Física

Trabajo Fin de Grado

Introducción a las variedades diferenciables y grupos de Lie

Código del TFG: **FS21-49-MTM**

Tipo de TFG: **Teórico-práctico**

Autor: Francisco José Palmero Moya



19/07/2022

«Er sieht den Wald vor lauter Bäumen nicht»

Índice general

Índice general	1
Índice de figuras	2
Resumen. Palabras clave	3
Abstract. Keywords	4
1. Introducción	5
1.1. Objetivos	5
2. Topología	6
2.1. Introducción	6
2.2. Espacios topológicos	7
2.3. Aplicaciones continuas. Homeomorfismos	12
2.4. Topología cociente	14
2.5. Espacios conexos. Espacios compactos	16
2.6. Grupo fundamental	20
2.7. Espacios recubridores	24
3. Variedades diferenciables	26
3.1. Introducción	26
3.2. El concepto de variedad diferenciable	27
3.3. Espacio tangente	31
3.4. Espacio cotangente	33
3.5. Campos vectoriales	34
3.6. Curvas integrales. Flujos	36
3.7. Grupo uniparamétrico de difeomorfismos	37
4. Grupos de Lie	39
4.1. Introducción	39
4.2. El concepto de grupo de Lie	40
4.3. Álgebra de Lie de un grupo de Lie	40

4.4. Grupos de Lie de matrices	42
4.5. Aplicación exponencial	46
5. Teoría de representación de grupos	48
5.1. Introducción	48
5.2. Acciones de grupos sobre conjuntos	49
5.3. Representación lineal de un grupo	50
5.4. Representación de grupos de Lie	51
6. Espinores cuánticos	52
6.1. Introducción	52
6.2. Descripción física de un estado cuántico	53
6.3. ¿Qué significa espín 1/2?	56
6.4. Formalismo espinorial	57
6.5. Comportamiento de las partículas con otro espín	59
7. Conclusiones	61
Bibliografía	63

Índice de figuras

2.1. Ejemplos que constituyen una topología	8
2.2. Ejemplos que no forman una topología	8
2.3. Toroide como espacio cociente	15
3.1. Entorno coordinado en una variedad topológica (Q, \mathcal{T})	27
3.2. Cambio de coordenadas en una variedad topológica	28
3.3. Aplicación diferenciable entre variedades	31
6.1. Espacio de rotaciones como una bola de radio π	57
6.2. $SU(2)$ como espacio recubridor de $SO(3)$	58

Resumen

La teoría de grupos de Lie juega un papel crucial en física y matemáticas. Un grupo de Lie es un grupo que además tiene estructura de variedad diferenciable y verifica que las operaciones de grupo son diferenciables. Comenzamos este trabajo introduciendo conceptos topológicos que nos servirán para definir las variedades diferenciales como un tipo de variedad topológica a la que se dota de una estructura diferencial.

Un concepto importante en el estudio de los grupos de Lie es su álgebra de Lie asociada: a cada grupo de Lie se le puede asociar un espacio vectorial de dimensión finita, formado por los campos de vectores invariantes por la izquierda. La aplicación exponencial nos permitirá establecer una relación entre un grupo de Lie y su álgebra de Lie. Durante nuestro estudio, nos centraremos en los grupos de Lie de matrices que tienen mayor importancia en física, especialmente $SO(3)$ y $SU(2)$.

Las representaciones lineales de grupos jugarán un papel clave para comprender el formalismo espinorial. Este nos permite describir correctamente los fermiones, partículas de espín semientero. Un espinor es básicamente un elemento de un espacio vectorial complejo que transforma bajo representaciones de $SU(2)$.

Palabras clave: Grupo de Lie; representación de grupos; espinores; fermiones;

Abstract

Lie group theory plays an important role in physics and mathematics. Lie groups are groups endowed with a differentiable structure and smooth group operations. We start our memory by introducing some topological concepts needed to define differentiable manifolds as topological manifolds given with a differentiable structure.

A typical topic in the study of Lie groups is the concept of its Lie algebra: each Lie group can be associated with a finite-dimensional vectorial space, given by the left-invariant vector fields. The exponential map led us to set a relation between the Lie group and its Lie algebra. During the document, we will focus on the most important Lie groups in Physics, namely, matrix Lie groups. Especially the groups of rotations $SO(3)$ and $SU(2)$.

Lineal group representations led us to understand spinorial formalism. Spinors are absolutely indispensable in describing the behavior of fermions. They are basically complex vector-like objects that transform under $SU(2)$ representations.

Keywords: Lie group; group representations; spinors; fermions

CAPÍTULO 1

Introducción

La teoría de grupos, en especial la teoría de grupos de Lie, juega un papel muy importante en física y matemáticas. Muchos físicos excelentes, de la talla de Sokolov, Salam, Lipkin y Slater, parecían estar preocupados por la aparición de la teoría de grupos en física y expresaban su descontento con esta teoría. Durante las décadas de 1930 a 1950, indignación y disgusto, designando a la teoría de grupos como una plaga o llamándola directamente «Gruppenpest» eran reacciones típicas de los físicos al uso de la teoría de grupos en física. El ganador del premio Nobel de Física A. Salam llegó a decir en Trieste durante su discurso de apertura «Seminars on Theoretical Physics» en 1962

In 1951, I had the good fortune of listening to Professor Racah's lecture on Lie groups at Princeton. After attending these lectures, I thought, «This is really too hard. I cannot learn all this ... All this is too damned hard and unphysical».

A pesar de estos comentarios realizados hace ya unas décadas, y dado que la teoría de grupos ha llegado a ser mucho más común a día de hoy en la física, el presente trabajo aborda un estudio de los grupos de Lie a partir del concepto de variedad diferenciable

1.1. OBJETIVOS

El objetivo de la memoria consiste en cubrir los fundamentos matemáticos básicos, no estudiados en el Grado de Física, para poder llevar a cabo un estudio de los espinores. Esto nos permitirá comprender cómo se comportan las partículas de espín semientero bajo rotaciones.

CAPÍTULO 2

Topología

2.1. INTRODUCCIÓN

La topología consigue definir una idea de proximidad entre los puntos de un conjunto sin necesidad de haber definido previamente una distancia entre ellos. Así, se abordan conceptos como límites, continuidad, etc. que parecen estar ligados con la geometría ordinaria pero que, en realidad, no dependen de la determinación de las medidas ni del cálculo de las cantidades. La topología surge entonces como una generalización de la geometría, razón por la cual en un comienzo se le daba el nombre de «*Geometria situs*» cuya traducción viene a ser *Geometría de la situación o de la posición*.

Históricamente, se suele situar su comienzo con el famoso problema de los puentes de Königsber. Esta ciudad, actualmente Kaliningrado, está atravesada por el río Pregel formando una isla a partir de la cual el río continua con dos brazos. El terreno queda dividido en cuatro regiones distintas, unidas por siete puentes. El problema consistía en determinar si una persona que partiera de un lugar determinado de la ciudad podría regresar al punto de partida tras cruzar cada puente una sola vez. Fue resuelto por Euler en 1736, mediante argumentos puramente topológicos y cuya resolución nos lleva a la característica de Euler, primer invariante de la topología algebraica.

El presente capítulo¹ recoge algunos de los conceptos fundamentales de los espacios topológicos y aplicaciones continuas, las nociones de conexión y compacidad, tan relevantes en este contexto, y una breve introducción a temas más propios de la topología algebraica como grupo fundamental y espacios recubridores.

¹Muchos resultados no incluyen demostración por falta de espacio, estas pueden comprobarse en [4]

2.2. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Definición 2.2.1. Una topología sobre un conjunto X es una colección \mathcal{T} de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(P1). \emptyset y X están en \mathcal{T} .

(P2). La unión de los elementos de cualquier subcolección de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

(P3). La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de \mathcal{T} está en \mathcal{T} .

Definición 2.2.2. Un espacio topológico es un par ordenado (X, \mathcal{T}) , formado por un conjunto X y una topología \mathcal{T} sobre X .

Observación. A menudo omitiremos hacer mención específica de \mathcal{T} si no existe confusión. Así, diremos que un conjunto X para el que se ha definido una topología \mathcal{T} es un espacio topológico.

Si X es un espacio topológico con una topología \mathcal{T} , diremos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a la colección \mathcal{T} . Usando esta terminología, se puede decir que un espacio topológico es un conjunto X junto a una colección de subconjuntos de X , llamados conjuntos abiertos, tales que \emptyset y X son ambos abiertos, y tal que las uniones arbitrarias y las intersecciones finitas de conjuntos abiertos son abiertos.

Ejemplos 2.2.3. Algunos ejemplos son:

- (1). Sea X un conjunto de tres elementos, $X = \{a, b, c\}$. Hay muchas topologías posibles sobre X , algunas de las cuales se indican esquemáticamente en la Figura 2.1. Se puede ver que incluso un conjunto de tres elementos tiene muchas topologías distintas, pero no toda colección de subconjuntos de X es una topología sobre X . Ninguna de las colecciones indicadas en la Figura 2.2 es una topología, por ejemplo.
- (2). Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todos los subconjuntos de X es una topología sobre X y se denomina topología discreta. La colección compuesta únicamente por X y \emptyset es también una topología sobre X y la llamaremos topología indiscreta, o topología trivial.

Los ejemplos anteriores definen una topología especificando la colección completa \mathcal{T} de conjuntos abiertos. Generalmente, esto es bastante complicado y se utiliza una colección más pequeña de subconjuntos de X que es capaz de definir dicha topología.

Definición 2.2.4. Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X (llamados elementos básicos) tales que:

- (1). Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x .
- (2). Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2 , entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cup B_2$.

Observación. Si \mathcal{B} satisface estas dos condiciones, se define la topología \mathcal{T} generada por \mathcal{B} como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X , si para cada $x \in U$, existe un elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de \mathcal{T} .

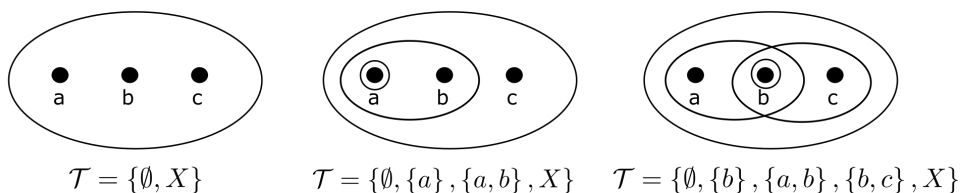


Figura 2.1. Ejemplos que constituyen una topología

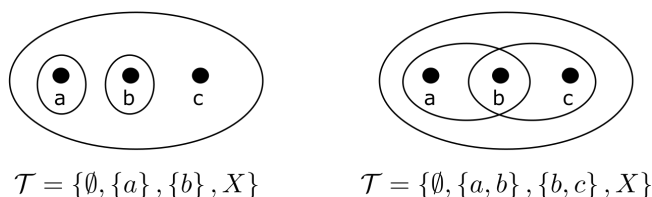


Figura 2.2. Ejemplos que no forman una topología

Otro modo para describir la topología generada por una base es la dada por el siguiente lema:

Lema 2.2.5. Sean X un conjunto y \mathcal{B} una base para una topología \mathcal{T} sobre X . Entonces \mathcal{T} es igual a la colección de todas las uniones de elementos de \mathcal{B} .

Demostración. Dada una colección de elementos de \mathcal{B} , también son elementos de \mathcal{T} . Puesto que \mathcal{T} es una topología, la unión de ellos pertenece a \mathcal{T} . Recíprocamente, dado $U \in \mathcal{T}$, elijamos para cada $x \in U$ un elemento B_x de \mathcal{B} tal que $x \in B_x \subset U$. Entonces $U = \bigcup_{x \in U} B_x$, por lo que U es igual a la unión de elementos de \mathcal{B} . \square

Observación. Este lema establece que cada conjunto abierto U de X se puede expresar como una unión de elementos básicos. Esta expresión para U no es, sin embargo, única. Evidentemente si \mathcal{B} es base de una topología \mathcal{T} , cualquier subfamilia de \mathcal{T} que contenga a \mathcal{B} también es base de la topología \mathcal{T} .

Ejemplo 2.2.6. Si \mathcal{B} es la colección de todos los intervalos abiertos de la recta real,

$$(a, b) = \{x : a < x < b\},$$

la topología generada por \mathcal{B} se denomina topología usual sobre la recta real. Siempre que estudiemos \mathbb{R} supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Si \mathcal{B}' es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología generada por \mathcal{B}' se llama topología del límite inferior sobre \mathbb{R} .

Si X e Y son espacios topológicos, existe un método natural de definir una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

Definición 2.2.7. Sean X e Y espacios topológicos. La topología producto sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección \mathcal{B} de todos los conjuntos de la forma $U \times V$, donde U es un subconjunto abierto de X y V es un subconjunto abierto de Y .

Demostración. Vamos a comprobar que \mathcal{B} es una base. La primera condición es trivial, puesto que $X \times Y$ es ya un elemento básico. La segunda condición es casi igual de obvia, ya que la intersección de cualesquiera dos elementos básicos $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ es otro elemento básico. Tenemos

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

y el último es un elemento básico porque $U_1 \cap U_2$ y $V_1 \cap V_2$ son abiertos de X e Y , respectivamente. \square

Si las topologías de X e Y están dadas mediante bases, definimos la base de la topología producto como sigue.

Proposición 2.2.8. Si \mathcal{B} es una base para la topología de X y \mathcal{C} es una base para la topología de Y , entonces la colección

$$\mathcal{D} = \{B \times C : B \in \mathcal{B} \text{ y } C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología sobre $X \times Y$.

Ejemplo 2.2.9. La topología usual de \mathbb{R}^2 tiene como base la colección de todos los intervalos abiertos de la forma $(a \times b, c \times d)$ para $a < c$, y para $a = c$ y $b < d$. Sin embargo, la proposición que acabamos de mostrar nos dice que la colección mucho más pequeña de todos los productos $(a, b) \times (c, d)$ de intervalos abiertos en \mathbb{R} también sirve como base para la topología de \mathbb{R}^2 . Ambas dan lugar a la misma topología, y por tanto, son equivalentes.

Otro forma bastante común de construir espacios topológicos es mediante los subconjuntos de un conjunto.

Definición 2.2.10. Sea X un espacio topológico con topología \mathcal{T} . Si Y es un subconjunto de X , la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$$

es una topología sobre Y , denominada topología de subespacio o topología relativa. Con esta topología, Y se denomina subespacio de X ; sus conjuntos abiertos son todas las intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y .

Lema 2.2.11. *Si \mathcal{B} es una base para la topología de X , entonces la colección*

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y .

Observaciones. Debemos especificar siempre que se trabaje con conjuntos abiertos si nos referimos a abiertos de la topología de Y o de X . Diremos que un conjunto U es abierto en Y si pertenece a la topología de Y . Se puede dar el caso en el que cada conjunto abierto en Y también es abierto en X , en particular, si U es abierto en Y e Y es abierto en X , entonces U es abierto en X . En efecto, puesto que U es abierto en Y , $U = Y \cap V$ para algún V abierto en X . Dado que Y y V son ambos abiertos en X , también lo es $Y \cap V$.

Ahora que ya hemos visto ejemplos de espacios topológicos, podemos introducir algunos de los conceptos básicos asociados a estos. Estos nos llevarán de modo natural a la consideración de un axioma llamado axioma de Hausdorff.

Definición 2.2.12. Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es cerrado si el conjunto $X - A$ es abierto.

La colección de subconjuntos cerrados de un espacio X tiene propiedades similares a aquellas satisfechas por la colección de subconjuntos abiertos de X .

Proposición 2.2.13. *Sea X un espacio topológico. Se cumple que:*

- (1). \emptyset y X son cerrados.
- (2). Las intersecciones arbitrarias de conjuntos cerrados son cerradas.
- (3). Las uniones finitas de conjuntos cerrados son cerradas.

Demostración. Tenemos que

- (1). \emptyset y X son cerrados porque son los complementos de los conjuntos abiertos X y \emptyset , respectivamente.
- (2). Dada una colección de conjuntos cerrados $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$, aplicamos la ley de De Morgan²,

$$X - \bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in J} (X - A_\alpha)$$

Puesto que los conjuntos $X - A_\alpha$ son abiertos por definición, la parte derecha de la ecuación representa una unión arbitraria de conjuntos abiertos, y así, es abierto. Por tanto, $\bigcap A_\alpha$ es cerrado.

²Véase el Capítulo 1 de [4]

(3). De manera similar, si A_i es cerrado para $i = 1, \dots, n$, consideramos la ecuación

$$X - \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X - A_i).$$

El conjunto de la parte derecha de esta ecuación es una intersección finita de conjuntos abiertos y es, consiguientemente, abierto. De aquí, $\bigcup A_i$ es cerrado.

□

Observación. Se podría especificar perfectamente una topología sobre un espacio dando una colección de conjuntos (llamados «conjuntos cerrados») satisfaciendo las tres propiedades de esta proposición, siendo los conjuntos abiertos los complementos de conjuntos cerrados y proceder exactamente igual que antes. Este procedimiento no tiene ninguna ventaja sobre el que adoptamos y la mayoría de matemáticos prefieren usar conjuntos abiertos para definir topologías.

Definición 2.2.14. Dado un subconjunto A de un espacio topológico X , el interior de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos contenidos en A , y la clausura de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A . El interior de A se denota por A° y la clausura de A se denota mediante \bar{A} .

Observaciones. Obviamente, A° es un conjunto abierto y \bar{A} es un conjunto cerrado, más aún,

$$A^\circ \subset A \subset \bar{A}$$

Si A es abierto, $A = A^\circ$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$.

Comentario. A partir de ahora usaremos una terminología especial para la frase « U es un conjunto abierto que contiene a x », en su lugar, diremos que « U es un entorno de x ».

Definición 2.2.15. Si A es un subconjunto del espacio topológico X y si x es un punto de X , diremos que x es un punto límite de A si cada entorno de x interseca a A en algún punto distinto del propio x . El punto x puede o no pertenecer a A , no importa para esta definición.

Definición 2.2.16. Sea X un espacio topológico. Se dice que una sucesión x_1, x_2, \dots de puntos del espacio X converge al punto x de X siempre que, para cada entorno U de x , exista un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$.

Observaciones. Sabemos que en \mathbb{R}^n , una sucesión no puede converger a más de un punto, pero sí puede en un espacio arbitrario. Estas topologías no son tan interesantes, puesto que raras veces se dan en otras ramas de las matemáticas y los teoremas que podemos probar sobre estos espacios topológicos están bastante limitados. Por lo tanto, a menudo se impone una condición adicional, llevando la clase de espacios bajo

consideración más cerca de aquellos a los que se aplica nuestra intuición geométrica. La condición fue sugerida por el matemático Félix Hausdorff, por lo que los matemáticos le han dado su nombre.

Definición 2.2.17. Un espacio topológico X se denomina espacio de Hausdorff si para cada par x_1, x_2 de puntos distintos de X , existen entornos U_1 y U_2 de x_1 y x_2 , respectivamente, que son disjuntos.

Observación. La condición de que los conjuntos con un número finito de puntos sean cerrados tiene su propio nombre: se denomina axioma T_1 . Esta condición es, de hecho, más débil que la condición de Hausdorff.

Proposición 2.2.18. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces una sucesión de puntos de X converge a lo sumo a un punto de X .

Demostración. Supongamos que x_n es una sucesión de puntos de X que converge a x . Si $y \neq x$, sean U y V entornos disjuntos de x e y , respectivamente. Puesto que U contiene a x_n para todo n , excepto para un número finito de valores de n , el conjunto V no puede cumplir lo mismo. Por lo tanto, x_n no puede converger a y . \square

Observación. Si la sucesión x_n de puntos del espacio de Hausdorff X converge al punto x de X , a menudo escribiremos $x_n \rightarrow x$, y diremos que x es el límite de la sucesión x_n .

2.3. APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

Las aplicaciones continuas son fundamentales para una gran parte de las matemáticas. En esta sección, formularemos una definición de continuidad que será una generalización de conceptos que se aprendieron en cálculo y análisis.

Definición 2.3.1. Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Observaciones. Recuérdese que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos x de X para los que $f(x) \in V$; es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f .

La continuidad de una aplicación depende no sólo de la propia aplicación f , sino también de las topologías especificadas para su dominio y recorrido.

Nótese que si la topología del espacio de llegada Y está dada por una base \mathcal{B} , entonces para probar la continuidad de f es suficiente mostrar que la imagen inversa de cada elemento básico es abierta: el conjunto abierto arbitrario V de Y se puede escribir como una unión de elementos básicos $V = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$. Entonces

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha)$$

por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto.

Si la topología sobre Y está dada por una subbase \mathcal{S} , para probar la continuidad de f será suficiente demostrar que la imagen inversa de cada elemento de la subbase es abierto: el elemento básico arbitrario B de Y se puede escribir como una intersección finita $S_1 \cap \dots \cap S_n$ de elementos de la subbase; se deduce la ecuación

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \dots \cap f^{-1}(S_n)$$

que la imagen inversa de cada elemento básico es abierta.

Ejemplo 2.3.2. Consideremos una función como las estudiadas en análisis, una función de variable real con valores reales

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Veamos que nuestra definición de continuidad implica la definición usual. Dado x_0 en \mathbb{R} , y dado $\epsilon > 0$, el intervalo $V = (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ es un conjunto abierto del espacio de llegada. Por tanto, $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en el espacio de salida. Puesto que $f^{-1}(V)$ contiene al punto x_0 , contiene algún elemento básico (a, b) alrededor de x_0 . Elegimos δ para que sea el más pequeño de los dos números $x_0 - a$ y $b - x_0$. Entonces, si $|x - x_0| < \delta$, el punto x debe estar en (a, b) , por lo que $f(x) \in V$, y $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, como se deseaba. Se puede comprobar que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 2.3.3. Sean X e Y espacios topológicos; sea $f : X \rightarrow Y$ una biyección. Si la aplicación f y la aplicación inversa

$$f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

son ambas continuas, entonces f se dice que es un homeomorfismo.

Observaciones. La condición de que f^{-1} sea continua significa que, para cada conjunto abierto U de X , la imagen inversa de U mediante la aplicación $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es abierta en Y . Sin embargo, la imagen inversa de U mediante la aplicación f^{-1} es la misma que la imagen de U mediante la aplicación f . Por tanto, un homeomorfismo proporciona una correspondencia biyectiva, no solo entre X e Y , sino entre las colecciones de conjuntos abiertos de X y las de Y .

El concepto de homeomorfismo es análogo al de isomorfismo. Mientras que un isomorfismo es una correspondencia biyectiva que conserva la estructura algebraica implicada, un homeomorfismo es una correspondencia biyectiva que respeta la estructura topológica implicada.

Proposición 2.3.4 (Lema del pegamiento). *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X . Sean $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h : X \rightarrow Y$, definida mediante*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de Y . Tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

por teoría de conjuntos elemental. Puesto que f es continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y, por tanto, cerrado en X . De modo similar, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y por ello cerrado en X . Su unión $h^{-1}(C)$ es, de este modo, cerrada en X . \square

Proposición 2.3.5 (Aplicaciones en productos). Sea $f : A \rightarrow X \times Y$ dada por la ecuación

$$f(a) = (f_1(a), f_2(a))$$

Entonces f es continua si, y sólo si, las aplicaciones

$$f_1 : A \rightarrow X \quad \text{y} \quad f_2 : A \rightarrow Y$$

son continuas.

Las aplicaciones f_1 y f_2 se llaman aplicaciones coordenadas de f .

Ejemplo 2.3.6. Una curva parametrizada en el plano se define como una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se expresa a menudo en la forma $f(t) = (x(t), y(t))$, y se usa frecuentemente el hecho de que f es una función continua de t si tanto x como y lo son. Esto no es más que un caso concreto de la proposición anterior.

2.4. TOPOLOGÍA COCIENTE

El espacio cociente responde a nuestra idea intuitiva de formar un nuevo espacio topológico identificando ciertos puntos de un espacio topológico dado. Corresponde a la idea de «pegar» juntos dos o más espacios.

Definición 2.4.1. Sean X e Y espacios topológicos y sea $p : X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. La aplicación p se dice que es una aplicación cociente siempre que un subconjunto U de Y es abierto en Y si, y sólo si, $p^{-1}(U)$ es abierto en X .

Definición 2.4.2. Si X es un espacio topológico, A un conjunto y $p : X \rightarrow A$ es una aplicación sobreyectiva, entonces existe exactamente una topología \mathcal{T} sobre A relativa a la cual p es una aplicación cociente; se denomina topología cociente inducida por p .

Demostración. Veamos que \mathcal{T} , así definida, forma una topología para A . La topología \mathcal{T} está definida reuniendo aquellos subconjuntos U de A tales que $p^{-1}(U)$ es abierto en X . Los conjuntos \emptyset y A son abiertos porque $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ y $p^{-1}(A) = X$. Las otras dos condiciones se siguen de las ecuaciones

$$\begin{aligned} p^{-1} \left(\bigcup_{\alpha \in J} U_{\alpha} \right) &= \bigcup_{\alpha \in J} p^{-1}(U_{\alpha}) \\ p^{-1} \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) &= \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \end{aligned}$$

Hay una situación especial en la que la topología cociente es particularmente frecuente de encontrar.

Definición 2.4.3. Sea X un espacio topológico y sea X^* una partición de X en subconjuntos disjuntos cuya unión es X . Sea $p : X \rightarrow X^*$ la aplicación sobreyectiva que lleva cada punto de X al elemento de X^* que lo contiene. En la topología cociente inducida por p , el espacio X^* se denomina espacio cociente de X .

Observación. Dado X^* , hay una relación de equivalencia sobre X en la que los elementos de X^* son las clases de equivalencia. Se puede pensar en X^* como obtenido al identificar cada par de puntos equivalentes. Por este motivo, el espacio cociente X^* se denomina a menudo espacio de identificación, o espacio de descomposición, del espacio X .

Ejemplos 2.4.4. Algunos ejemplos son:

- (1). Sea X el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$. Definimos una partición X^* de X como sigue: consiste en todos los conjuntos unipuntuales $\{x \times y\}$ donde $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$, los siguientes tipos de conjuntos de dos puntos:

$$\begin{aligned} \{x \times 0, x \times 1\} & \quad \text{donde } 0 < x < 1, \\ \{0 \times y, 1 \times y\} & \quad \text{donde } 0 < y < 1, \end{aligned}$$

y el conjunto de cuatro puntos $\{0 \times 0, 0 \times 1, 1 \times 0, 1 \times 1\}$

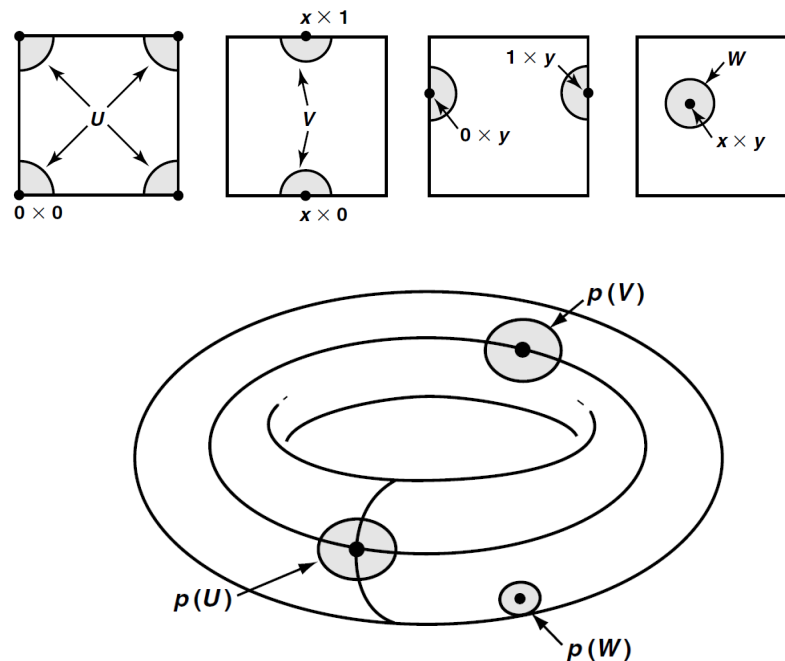


Figura 2.3. Toroide como espacio cociente

(2). Sea X el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$ y sea A la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$. Definimos

$$p : X \rightarrow A$$

$$x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

Se comprueba fácilmente que la topología usual de la circunferencia A es la topología cociente determinada por p . Este ejemplo corresponde al hecho de que si soldamos los dos extremos de un trozo de alambre delgado, obtenemos un anillo circular.

2.5. ESPACIOS CONEXOS. ESPACIOS COMPACTOS

ESPACIOS CONEXOS Un espacio topológico que no es conexo está formado por subespacios sin ninguna relación de tipo topológico entre sí; estos son los subespacios cuyo conjunto subyacente es abierto y cerrado a la vez en el espacio total.

Definición 2.5.1. Un espacio topológico X es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos de X que son abiertos y cerrados en X son el conjunto vacío y el propio X .

Observación. Obsérvese que si A es un subconjunto propio no vacío de X que es a la vez abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X . Esto es, un par de abiertos disjuntos no triviales de X cuya unión es X . Recíprocamente, si U y V forman una separación de X , entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado. Así, diremos que un espacio topológico es conexo si no existe una separación de X .

Lema 2.5.2. Si los conjuntos C y D forman una separación de X , y además Y es un subespacio conexo de X , entonces Y está contenido bien en C , bien en D .

Demostración. Como C y D son abiertos en X , los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y . Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y ; si fueran ambos no vacíos, constituirían una separación de Y . De esta forma, alguno de ellos es vacío. Por tanto, Y está contenido enteramente en C o en D . \square

Proposición 2.5.3. Sea A un subespacio conexo de X . Si $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es también conexo.

Demostración. Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \bar{A}$. Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B , por lo tanto el conjunto A verifica $A \subset C$ o $A \subset D$; supongamos que $A \subset C$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{C}$. Como \bar{C} y D son disjuntos, B no puede intersectar a D . Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B . \square

Proposición 2.5.4. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

Demostración. Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\cap A_\alpha$. Probemos que el espacio $Y = \cup A_\alpha$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y . El punto p está, bien en C bien en D ; supongamos que $p \in C$. Como A_α es conexo, o $A_\alpha \subset C$, o $A_\alpha \subset D$, aunque esta última posibilidad se descarta pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$. Por tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α , y así $\cup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. \square

Proposición 2.5.5. *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es un espacio conexo.*

Demostración. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y supongamos que X es conexo. Queremos probar que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la aplicación obtenida de f al restringir su rango al espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva $g : X \rightarrow Z$. Supongamos que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Z . Entonces $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X . Además, son abiertos en X , pues g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X , contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. \square

Definición 2.5.6. Dados dos puntos x e y del espacio X , un camino en X que une x con y es una aplicación continua $f : [a, b] \rightarrow X$ de algún intervalo de la recta real en X , de modo que $f(a) = x$ y $f(b) = y$. Un espacio X se dice que es conexo por caminos si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X .

Proposición 2.5.7. *Todo espacio topológico conexo por caminos es un espacio conexo.*

Demostración. Supongamos que $X = A \cup B$ es una separación de X . Sea $f : [a, b] \rightarrow X$ un camino en X . Como $[a, b]$ es conexo, entonces el conjunto $f([a, b])$ debe estar contenido o en A o en B . Por tanto, no existen caminos en X que unan puntos de A con puntos de B lo cual es contradictorio al hecho de que X sea conexo por caminos. \square

Observación. El recíproco de esta implicación no es cierto; un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.5.8. Sea S el siguiente subconjunto del plano

$$S = \{x \times \sin(1/x) : 0 < x \leq 1\}$$

Este conjunto es la imagen del conjunto conexo $(0, 1]$ bajo una aplicación continua, luego S es conexo. De esta forma, su adherencia \bar{S} en \mathbb{R}^2 también es conexa. El conjunto \bar{S} es un ejemplo clásico en topología que se conoce como curva seno del

topólogo y es simplemente la unión del conjunto inicial S con el intervalo vertical del plano $0 \times [-1, 1]$. Se puede demostrar que \tilde{S} no es conexo por caminos

Dado un espacio arbitrario X , existe una manera natural de dividirlo en varios trozos que son conexos (o conexos por caminos). Vamos a considerar este proceso a continuación.

Definición 2.5.9. Dado X , se define la siguiente relación de equivalencia en X : $x \sim y$ si existe un subespacio conexo de X que contiene a ambos puntos. Las clases de equivalencia se denominan componentes o componentes conexas de X .

Observación. La simetría y la reflexividad de la relación son obvias. La transitividad se sigue del hecho: si A es un subespacio conexo que contiene a x y a y , y B es un subespacio conexo que contiene a y y a z , entonces $A \cup B$ es un subespacio que contiene a x y a z que además es conexo pues A y B tienen el punto y en común.

Proposición 2.5.10. Las componentes de X son subespacios disjuntos y conexos de X cuya unión es X de forma que cada subespacio conexo de X no trivial interseca sólo a una de ellas.

Demostración. Por tratarse de una relación de equivalencia y ser cada componente una clase, está claro que son disjuntas y que su unión es el espacio X . Además, cada subespacio conexo A de X interseca únicamente a una de ellas. Pues si A interseca a las componentes C_1 y C_2 en X , tomando $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$ se tiene que $x_1 \sim x_2$ por definición y esto no puede ocurrir a menos que $C_1 = C_2$.

Para demostrar que cada componente C es conexa, elijamos un punto x_0 de C . Para cada punto x de C , sabemos que $x \sim x_0$, luego existe un subespacio A_x que contiene a ambos puntos. Tal y como acabamos de probar, $A_x \subset C$ y así

$$C = \bigcup_{x \in C} A_x.$$

Como los subespacios A_x son conexos y contienen al punto x_0 en común, se tiene que C es conexo. □

Definición 2.5.11. Definimos otra relación de equivalencia en el espacio X dada por: $x \sim y$ si existe un camino en X uniendo x con y . Las clases de equivalencia se denominan componentes conexas por caminos de X .

Observación. Veamos que se trata de una relación de equivalencia. Primero, observemos que si existe un camino $f : [a, b] \rightarrow X$ que une x con y y cuyo dominio es el intervalo $[a, b]$, entonces también existe un camino g uniendo x con y y con dominio $[c, d]$ (cualquier pareja de intervalos cerrados en \mathbb{R} son homeomorfos). El hecho de que $x \sim x$ es claro pues basta considerar el camino constante $f : [a, b] \rightarrow X$ dado por $f(t) = x$ para todo t . La simetría se tiene por el siguiente motivo: si $f : [0, 1] \rightarrow X$ es un camino que une x con y , entonces el camino contrario $g : [0, 1] \rightarrow X$ dado por

$g(t) = f(1-t)$ es un camino que une y con x . Finalmente la transitividad de la relación se prueba así: sea $f : [0, 1] \rightarrow X$ un camino que une x con y y sea $g : [1, 2] \rightarrow X$ un camino que une y con z . Podemos «pegar» los caminos f y g y obtener un nuevo camino $h : [0, 2] \rightarrow X$ que une x con z ; el camino h será una aplicación continua por el lema del pegamiento, Proposición 2.3.4.

La conexión es una propiedad muy deseable para un espacio topológico, aunque para ciertos propósitos es más importante que el espacio satisfaga una condición de conexión localmente.

Definición 2.5.12. Un espacio X se dice que es localmente conexo en x si para cada entorno U de x , existe un entorno conexo V de x contenido en U . Si X es localmente conexo en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo. De manera análoga, se dice que un espacio X es localmente conexo por caminos en x si para cada entorno U de x , existe un entorno conexo por caminos V de x contenido en U . Si X es localmente conexo por caminos en cada uno de sus puntos, se dice que X es localmente conexo por caminos.

Proposición 2.5.13. Si X es un espacio topológico, cada componente conexa por caminos de X está contenida en una componente de X . Si X es localmente conexo por caminos, entonces las componentes y las componentes conexas por caminos de X coinciden.

Demostración. Sean C una componente conexa de X , x un punto de C y P la componente conexa por caminos de X que contiene a x . Como P es conexa, $P \subset C$. Queremos demostrar que si X es localmente conexo por caminos, entonces $P = C$. Supongamos que $P \subsetneq C$. Denotamos por Q a la unión de todas las componentes conexas por caminos de X que son distintas de P y que intersecan a C ; cada una de ellas está contenida necesariamente en C , así que $C = P \cup Q$. Como X es localmente conexo por caminos, cada componente conexa por caminos de X es un abierto de X . Así P (que es una componente conexa por caminos) y Q (que es unión de componentes conexas por caminos) son abiertos en X y, por tanto, constituyen una separación de C , lo cual contradice la conexión de C . \square

ESPACIOS COMPACTOS La noción de compacidad no nos es tan cercana y natural como la de conexión. Desde los inicios de la topología, se ha admitido que el intervalo cerrado $[a, b]$ de la recta real gozaba de una cierta propiedad que era crucial en la demostración de teoremas tales como el teorema del valor máximo y el teorema de la continuidad uniforme. Sin embargo, tal propiedad ha tardado mucho en poder ser formulada para un espacio topológico arbitrario.

Definición 2.5.14. Una colección \mathcal{A} de subconjuntos del espacio X se dice que cubre X , o que es un recubrimiento de X , si la unión de los elementos de \mathcal{A} coincide con X .

Se dice que \mathcal{A} es un recubrimiento abierto de X si es un recubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X .

Definición 2.5.15. Un espacio X se dice que es compacto si de cada recubrimiento abierto \mathcal{A} de X podemos extraer una subcolección finita que también cubre X .

Proposición 2.5.16. *Cada subespacio cerrado de un espacio compacto es compacto.*

Demostración. Sea Y un subespacio cerrado del espacio compacto X . Dado un recubrimiento \mathcal{A} de Y por conjuntos abiertos en X , podemos considerar el recubrimiento abierto \mathcal{B} de X uniendo \mathcal{A} el conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}.$$

Como X es compacto, alguna subcolección finita cubre X . Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, lo dejamos como está. La colección resultante en cualquier caso es una subcolección finita de \mathcal{A} que cubre Y . \square

Proposición 2.5.17. *Cada subespacio compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado.*

Demostración. Sea Y un subespacio compacto del espacio de Hausdorff X . Probaremos que $X - Y$ es abierto, luego Y será cerrado.

Sea x_0 un punto de $X - Y$. Vamos a demostrar que existe un entorno de x_0 que no interseca a Y . Para cada punto y de Y , elijamos entornos disjuntos U_y y V_y de los puntos x_0 e y , respectivamente (utilizando la condición de Hausdorff). La colección $\{V_y : y \in Y\}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de X ; por tanto, podemos cubrir Y con un número finito de estos conjuntos, por ejemplo V_{y_1}, \dots, V_{y_n} . El conjunto abierto

$$V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

contiene a Y , y es disjunto del abierto

$$U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$$

que se forma al tomar la intersección de los correspondientes entornos de x_0 , ya que si z es un punto de V , entonces $z \in V_{y_i}$, para algún i , por tanto, $z \notin U_{y_i}$, y así $z \notin U$. Por tanto, U es un entorno de x_0 que no interseca a Y . \square

2.6. GRUPO FUNDAMENTAL

Usando el grupo fundamental, podemos reducir algunos problemas topológicos sobre espacios y aplicaciones continuas a problemas puramente algebraicos sobre espacios y homomorfismos. Esta es la estrategia fundamental de la topología algebraica: encontrar métodos para reducir problemas topológicos a cuestiones de pura álgebra, y esperar entonces que éstas puedan ser resueltas por los algebraistas.

HOMOTOPÍA DE CAMINOS Antes de definir el grupo fundamental de un espacio X , vamos a considerar caminos sobre X y una relación de equivalencia entre ellos conocida como homotopía de caminos. Posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de clases de equivalencia que la convierte en lo que en álgebra se conoce como grupoide.

Definición 2.6.1. Sean f y f' dos caminos, que aplican el intervalo $I = [0, 1]$ en X , se dice que son homotópicos por caminos si tienen el mismo punto inicial x_0 y el mismo punto final x_1 , y si existe una aplicación continua $F : I \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= f(s) \quad \text{y} \quad F(s, 1) = f'(s) \\ F(0, t) &= x_0 \quad \text{y} \quad F(1, t) = x_1 \end{aligned}$$

para cada $s \in I$ y cada $t \in I$. La aplicación F recibe el nombre de homotopía de caminos entre f y f' . Si f es homotópico por caminos a f' , escribimos $f \simeq f'$.

Observaciones. La primera condición dice que F representa una forma continua de deformar el camino f en el camino f' , y la segunda dice que los puntos extremos del camino permanecen fijos durante la deformación. Por otro lado, hemos supuesto $I = [0, 1]$ por simplicidad, aunque podría ser cualquier otro intervalo. Este será el utilizado en el resto del capítulo.

Lema 2.6.2. La relación \simeq es una relación de equivalencia y denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por $[f]$.

Demostración. Dado f , es trivial que $f \simeq f$; la aplicación $F(x, t) = f(x)$ es la homotopía requerida. Sea $f \simeq f'$ y demostremos que $f' \simeq f$. Sea F una homotopía entre f y f' , entonces $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ es una homotopía entre f' y f . Supongamos que $f \simeq f'$ y $f' \simeq f''$. Probemos que $f \simeq f''$. Sean F una homotopía entre f y f' , y F' una homotopía entre f' y f'' . Definamos $G : X \times I \rightarrow Y$ por la ecuación

$$G(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{para } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(x, 2t - 1) & \text{para } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La aplicación G está bien definida ya que, para $t = \frac{1}{2}$, tenemos $F(x, 2t) = f'(x) = F'(x, 2t - 1)$. Dado que G es continua en los dos subconjuntos cerrados $X \times [0, \frac{1}{2}]$ y $X \times [\frac{1}{2}, 1]$ de $X \times I$, entonces G es continua en todo $X \times I$, por el lema del pegamiento. Por lo tanto, G es la homotopía requerida. \square

Introduzcamos ahora un poco de álgebra en nuestra situación geométrica. Definamos cierta operación sobre las clases de homotopía de caminos como sigue:

Definición 2.6.3. Si f es un camino en X de x_0 a x_1 , y g es un camino en X de x_1 a x_2 , definimos el producto $f * g$ de f y g como el camino h dado por las ecuaciones

$$h(s) = \begin{cases} f(2s) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

La aplicación h está bien definida y es continua, por el lema del pegamiento; es un camino en X de x_0 a x_2 . Pensamos en h como el camino cuya primera mitad es el camino f y cuya segunda mitad es el camino g .

Observaciones. La operación producto sobre caminos induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la expresión

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Sea F una homotopía de caminos entre f y f' y sea G una homotopía de caminos entre g y g' . Definamos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{para } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ F'(2s - 1, t) & \text{para } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Dado que $F(1, t) = x_1 = G(0, t)$, para todo t , la aplicación H está bien definida; es continua por el lema del pegamiento. El lector puede comprobar que H es la homotopía de caminos requerida.

La operación $*$ sobre clases de homotopía de caminos satisface propiedades muy parecidas a los axiomas de grupo. Estas se conocen como propiedades de grupoide de $*$. Una diferencia respecto de las propiedades de grupo es que $[f] * [g]$ no está definida para cualquier par de clases, si no únicamente para aquellos pares $[f], [g]$ para los que $f(1) = g(0)$.

Teorema 2.6.4. *La operación $*$ tiene las siguientes propiedades:*

(P1). *Si $[f] * ([g] * [h])$ está definida, también lo está $([f] * [g]) * [h]$, y son iguales.*

(P2). *Dado $x \in X$, denotemos por e_x el camino constante $e_x : I \rightarrow X$ que lleva todo I al punto x . Si f es un camino en X desde x_0 hasta x_1 , entonces*

$$[f] * [e_{x_1}] = [f] \quad \text{y} \quad [e_{x_0}] * [f] = [f].$$

(P3). *Dado el camino f en X desde x_0 hasta x_1 , sea \bar{f} el camino definido por $\bar{f}(s) = f(1 - s)$, el cual se conoce como inverso de f . Entonces*

$$[f] * [\bar{f}] = [e_{x_0}] \quad \text{y} \quad [\bar{f}] * [f] = [e_{x_0}].$$

EL GRUPO FUNDAMENTAL El conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio X no es un grupo con la operación $*$ porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido. Pero supongamos que cogemos un punto x_0 de X que nos sirva como punto base y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en x_0 . EL conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación $*$. Este será denominado grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 .

Definición 2.6.5. Sea X un espacio topológico y x_0 un punto de X . Un camino en X que comienza y acaba en x_0 se llama lazo basado en x_0 . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociadas a los lazos basados en x_0 , con la operación $*$, se denomina grupo fundamental de X relativo al punto base x_0 . Se denota por $\pi_1(X, x_0)$.

Definición 2.6.6. Sea α un camino en X de x_0 a x_1 . Definimos la aplicación

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [f] &\mapsto [\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]\end{aligned}$$

Observación. La aplicación $\hat{\alpha}$, que denominaremos " α -gorro", está bien definida porque la operación $*$ está bien definida. Si f es un lazo basado en x_0 , entonces $\bar{\alpha} * (f * \alpha)$ es un lazo basado en x_1 . Por tanto, $\hat{\alpha}$ aplica $\pi_1(X, x_0)$ en $\pi_1(X, x_1)$, como deseábamos; observemos que esta aplicación depende sólo de la clase de homotopía de caminos de α .

Teorema 2.6.7. La aplicación $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Para ver que $\hat{\alpha}$ es un homomorfismo, calculemos $\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g])$,

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}([f]) * \hat{\alpha}([g]) &= ([\bar{\alpha}] * [f] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [g] * [\alpha]) \\ &= [\bar{\alpha}] * [f] * [g] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([f] * [g])\end{aligned}$$

Para ver que $\hat{\alpha}$ es un isomorfismo, vamos a probar que si β denota el camino $\bar{\alpha}$, que es el inverso de α , entonces $\hat{\beta}$ es el inverso para $\hat{\alpha}$. Calculamos, para cada elemento $[h]$ de $\pi_1(X, x_1)$,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}([h]) &= [\bar{\beta}] * [h] * [\beta] = [\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}] \\ \hat{\alpha}(\hat{\beta}([h])) &= [\bar{\alpha}] * ([\alpha] * [h] * [\bar{\alpha}]) * [\alpha] = [h]\end{aligned}$$

Un cálculo similar demuestra que $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([f])) = [f]$, para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. □

Corolario 2.6.8. Si X es conexo por caminos, y x_0 y x_1 son dos puntos de X , entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Observaciones. Supongamos que X es un espacio topológico. Sea C una componente por caminos de X conteniendo a x_0 , es fácil ver que $\pi_1(C, x_0) = \pi_1(X, x_0)$, ya que todos los lazos y homotopías en X que están basados en x_0 deben permanecer en el subespacio C . De este modo, $\pi_1(X, x_0)$ depende sólo de la componente por caminos de X conteniendo a x_0 , y no nos ofrece información del resto de X . Cabe destacar que no hay una forma natural de identificar $\pi_1(X, x_0)$ con $\pi_1(X, x_1)$, puesto que caminos diferentes pueden darnos isomorfismos diferentes entre estos grupos³.

³Sin embargo, resulta que el isomorfismo es independiente del camino si, y sólo si, el grupo fundamental es abeliano.

Definición 2.6.9. Un espacio X se dice que es simplemente conexo si es conexo por caminos y $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial (un elemento) para algún $x_0 \in X$ y, por tanto, para todo $x_0 \in X$. Usaremos la notación $\pi_1(X, x_0) = 0$ para expresar que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo trivial.

Definición 2.6.10. Sea $h : X \rightarrow Y$ una aplicación continua tal que $h(x_0) = y_0$. Definimos

$$h_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, y_0) \\ [f] \mapsto [h \circ f]$$

La aplicación h_* se denomina homomorfismo inducido por h , relativo al punto base x_0 .

Observación. La aplicación h_* está bien definida ya que si F es una homotopía de caminos entre los caminos f y f' , entonces $h \circ F$ es una homotopía de caminos entre los caminos $h \circ f$ y $h \circ f'$. El hecho de que h_* sea un homomorfismo se deduce de la expresión

$$(h \circ f) * (h \circ g) = h \circ (f * g).$$

2.7. ESPACIOS RECUBRIDORES

Una de las herramientas más usuales para calcular algunos grupos fundamentales que no son triviales es la noción de espacio recubridor.

Definición 2.7.1. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Un conjunto abierto U de B se dice que está regularmente cubierto por p si la imagen inversa $p^{-1}(U)$ puede escribirse como una unión disjunta de conjuntos abiertos V_α de E tales que, para cada α , la restricción de p a V_α es un homeomorfismo de V_α en U . La colección $\{V_\alpha\}$ será denominada una partición de $p^{-1}(U)$ en rebanadas.

Definición 2.7.2. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si todo punto b de B tiene un entorno U que está regularmente cubierto por p , entonces p se dice que es una aplicación recubridora y E un espacio recubridor de B .

Ejemplo 2.7.3. La aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por la ecuación

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

es una aplicación recubridora. Podemos representar p como una aplicación que enrolla la recta real \mathbb{R} alrededor del círculo S^1 y, en el proceso, aplica cada intervalo $[n, n+1]$ sobre S^1 .

Definición 2.7.4. Se denomina recubridor universal de un espacio X al único espacio recubridor (salvo homeomorfismos) de X que es simplemente conexo.

Definición 2.7.5. Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación. Si f es una aplicación continua de algún espacio X en B , un levantamiento de f es una aplicación $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

Sobre levantamientos en espacios recubridores

Vamos a dar un resultado, sin demostración, que será de gran utilidad en el Capítulo 6 cuando consideremos los lazos de unos espacios topológicos con unas propiedades especiales, a saber, los grupos de Lie⁴ $SU(2)$ y $SO(3)$.

Teorema 2.7.6. *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora de un espacio topológico X . Sean $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ dos curvas continuas con $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Sea $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ una homotopía de α a β . Si $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ son los levantamientos de α y β , con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$, entonces existe una homotopía $\tilde{F} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$, con $p \circ \tilde{F} = F$. En particular, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$*

El Ejemplo 4.4.4 de la Sección 4.4, muestra una aplicación directa de este resultado.

⁴Un estudio detallado de estos grupos se encuentra en la Sección 4.4

Variedades diferenciables

3.1. INTRODUCCIÓN

Los posibles estados de un sistema físico, no cuántico y discreto, tienen intrínsecamente una estructura de variedad diferenciable de dimensión d igual al número de grados de libertad del sistema. Siempre se supone, al menos implícitamente, que el conjunto X de los estados de un sistema físico admite para cada estado un subconjunto $U \subseteq X$ que contiene a dicho estado y una aplicación biyectiva que permita describir ese estado en función de coordenadas en un abierto de \mathbb{R}^d . Más aún, se supone que los cambios de coordenadas son diferenciables.

El ejemplo más conocido es el péndulo doble, estudiado en Mecánica Clásica. Se trata de un sistema con dos grados de libertad, siendo sus coordenadas los ángulos formados por cada una de las masas respecto a la vertical. La variedad asociada será su espacio de configuraciones, concretamente el péndulo doble estará descrito por $S^1 \times S^1$ (toro). Las diferentes elecciones de coordenadas, darán lugar a diferentes cartas, concepto que introduciremos en el capítulo.

Las variedades diferenciables en Geometría Diferencial van más allá de la geometría extrínseca de curvas y superficies, de forma que nos centramos en la geometría intrínseca de esta. Asociado a una variedad diferenciable está el concepto de espacio tangente que también estudiaremos en este capítulo. Por último, se introduce el concepto de campos vectoriales que nos será de utilidad en los próximos capítulos para definir el álgebra de Lie de un grupo de Lie.

3.2. EL CONCEPTO DE VARIEDAD DIFERENCIABLE

VARIEDAD TOPOLÓGICA Aunque el concepto de variedad diferenciable pueda introducirse de manera bastante más directa como un conjunto dotado de un atlas diferenciable maximal, preferimos detenernos primero en el de variedad topológica. La topología que subyace a toda variedad diferenciable origina muchas de sus propiedades, y el capítulo anterior permite entenderlas con rigor.

Definición 3.2.1. Una variedad topológica de dimensión $d \in \mathbb{N}$ es un espacio topológico Hausdorff Q y ANII ($\equiv (Q, \mathcal{T})$), $Q \neq \emptyset$, que es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^d . Esto es, para cada punto $p \in Q$ existen un entorno abierto U de p y un abierto A de \mathbb{R}^d que son homeomorfos, i.e., tales que existe un homeomorfismo $\psi : U \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definición 3.2.2. Sea Q una variedad topológica

- Sea $p \in Q$, diremos que (U, ψ) es un entorno coordenado de p .
- Sea $\pi^i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi^i(x^1, \dots, x^d) = x^i$, entonces a $q^i \equiv \pi^i \circ \psi : U \subseteq Q \rightarrow \mathbb{R}$ le llamaremos coordenada i -ésima.
- Una colección de entornos coordenados $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in I\}$ es un atlas topológico si $Q = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

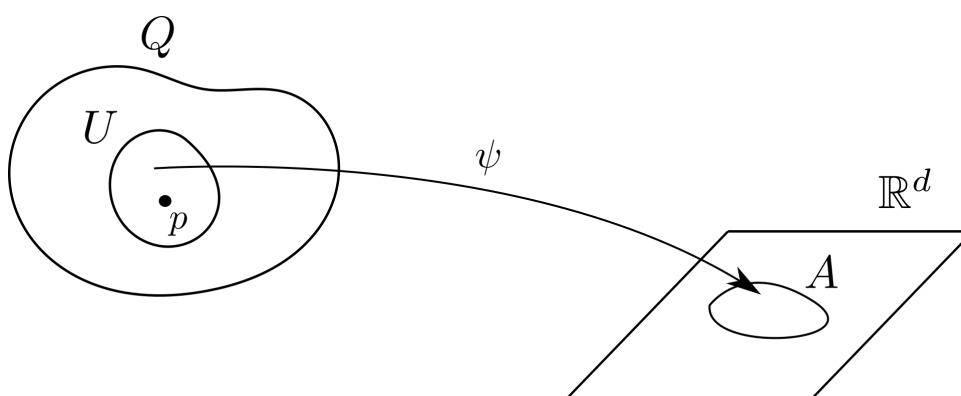


Figura 3.1. Entorno coordenado en una variedad topológica (Q, \mathcal{T})

Observaciones. Dadas las definiciones anteriores:

- (1). Se ha supuesto que la dimensión es un número natural $d \geq 1$. Sin embargo, también admitiremos $d = 0$ como caso límite asumiendo $\mathbb{R}^0 := \{1\}$. Nótese que si Q es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^0 entonces tendrá la topología discreta.
- (2). Un espacio topológico que sea localmente homeomorfo a \mathbb{R}^d puede no ser Hausdorff. Se puede comprobar este resultado dado algún contraejemplo.

(3). La hipótesis relativa al axioma ANII puede no imponerse en principio, si bien otras hipótesis pueden acabar implicándolo.

Ejemplo 3.2.3. Obviamente \mathbb{R}^d (o cualquier abierto suyo) es una variedad topológica d -dimensional. Basta considerar como atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^d, Id)\}$ (Id : aplicación identidad). Sin embargo, en ocasiones resulta útil usar otros entornos como, por ejemplo, las coordenadas polares sobre \mathbb{R}^2 , las coordenadas esféricas o bien cilíndricas sobre \mathbb{R}^3 , etc.

Definición 3.2.4. Sea (Q, \mathcal{T}) una variedad topológica, consideremos dos cartas (U, ψ) , $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$ tales que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ y tomemos $p \in U \cap \tilde{U}$. A partir de los homeomorfismos

$$\psi|_{U \cap \tilde{U}} : U \cap \tilde{U} \rightarrow \psi(U \cap \tilde{U})$$

$$\tilde{\psi}|_{U \cap \tilde{U}} : U \cap \tilde{U} \rightarrow \tilde{\psi}(U \cap \tilde{U})$$

podemos construir los homeomorfismos

$$\tilde{\psi} \circ (\psi|_{U \cap \tilde{U}})^{-1} : \psi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{\psi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d$$

$$\psi \circ (\tilde{\psi}|_{U \cap \tilde{U}})^{-1} : \tilde{\psi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \psi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d$$

A estos homeomorfismos se les llama cambios de carta o de coordenadas

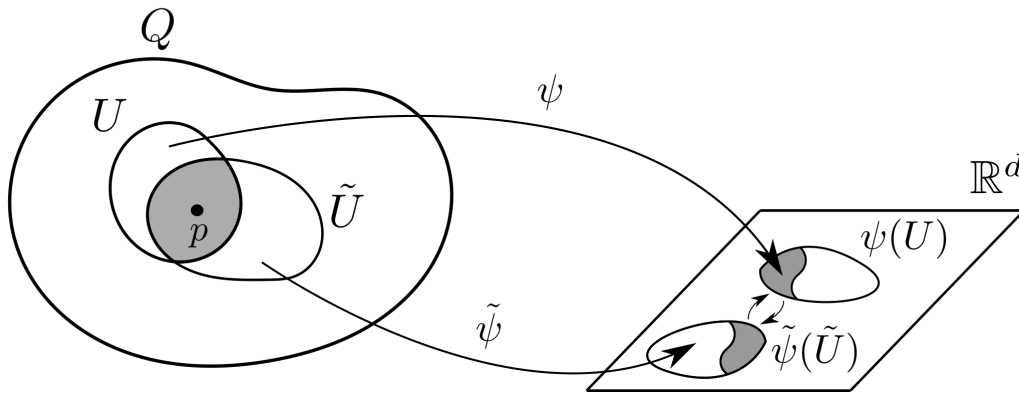


Figura 3.2. Cambio de coordenadas en una variedad topológica

Ejemplo 3.2.5. Un ejemplo sencillo sería el cambio de coordenadas entre cartesianas y polares en \mathbb{R}^2

$$\psi := (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) : x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta, y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$$

$$\tilde{\psi} := (\rho(x, y), \theta(x, y)) : \rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta(x, y) = 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

VARIEDADES DIFERENCIABLES Una vez definido el concepto de variedad topológica, vamos a definir las variedades diferenciables a partir de estas.

Definición 3.2.6. Sea (Q, \mathcal{T}) una variedad topológica de dimensión d

- (1). Diremos que un cambio entre entornos coordenados (U, ψ) y $(\tilde{U}, \tilde{\psi})$ es diferenciable C^k , $0 < k \leq \infty$, si las aplicaciones

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} \circ (\psi|_{U \cap \tilde{U}})^{-1} : \psi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d &\rightarrow \tilde{\psi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d \\ \psi \circ (\tilde{\psi}|_{U \cap \tilde{U}})^{-1} : \tilde{\psi}(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d &\rightarrow \psi(U \cap \tilde{U}) \subseteq \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

son diferenciables C^k . Si $U \cap \tilde{U} = \emptyset$ el correspondiente cambio de coordenadas será diferenciable C^∞ por definición.

- (2). Diremos que un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha) : \alpha \in I\}$ es diferenciable C^k si todos sus cambios de carta son diferenciables C^k .

Observación. Por simplicidad del lenguaje, de ahora en adelante por «diferenciable» entenderemos diferenciable de clase C^∞ para los cambios de carta.

Definición 3.2.7. Un atlas \mathcal{D} de Q es una estructura diferenciable si es un atlas diferenciable (C^∞) tal que si (U, ψ) es un entorno coordenado de Q cuyos cambios de cartas con todos los elementos de \mathcal{D} son diferenciables, entonces $(U, \psi) \in \mathcal{D}$

Observación. Cualquier atlas diferenciable \mathcal{A} determina una única estructura diferenciable $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ tal que $\mathcal{A} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Definición 3.2.8. Una variedad diferenciable de dimensión d es una terna $(Q, \mathcal{T}, \mathcal{D})$ donde (Q, \mathcal{T}) es una variedad topológica de dimensión d y \mathcal{D} una estructura diferenciable.

Observación. Una misma variedad topológica puede admitir más de una estructura diferenciable.

Ejemplos 3.2.9. Algunos ejemplos de variedades diferenciables son:

- (1). Se puede construir una estructura de variedad diferenciable en cualquier espacio vectorial real de dimensión d , $V^d(\mathbb{R})$, definiendo tanto la topología como la estructura diferenciable. Sea $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordenada cualquiera de V^d . Consideremos la aplicación biyectiva F_B que a cada vector le hace corresponder sus coordenadas en B , esto es

$$\begin{aligned}F_B^{-1} : \mathbb{R}^d &\rightarrow V^d \\ (a^1, \dots, a^d) &\mapsto \sum_{i=1}^d a^i v_i\end{aligned}$$

Si tomamos otra base distinta $\tilde{B} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_d)$ podemos considerar igualmente la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned}F_{\tilde{B}}^{-1} : \mathbb{R}^d &\rightarrow V^d \\ (a^1, \dots, a^d) &\mapsto \sum_{i=1}^d a^i \tilde{v}_i\end{aligned}$$

La aplicación $F_B \circ F_{\tilde{B}}^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ será entonces biyectiva y lineal; en particular, continua y diferenciable. Dado que ocurre lo mismo con su inversa $F_{\tilde{B}} \circ F_B^{-1}$, se trata de un homeomorfismo. Diremos que $U \subseteq V^d$ es un abierto de V^d si $F_B(U)$ es un abierto de \mathbb{R}^d . Así queda definida una topología sobre V^d , que resulta independiente de la base escogida. Por construcción, V^d es homeomorfo a \mathbb{R}^d y, por tanto, Hausdorff y ANII, además de una variedad topológica de dimensión d . Si tomamos como entornos coordinados $\mathcal{A} = \{(V^d, F_B) : B \text{ base de } V^d\}$ entonces los cambios de carta son las aplicaciones $F_B \circ F_{\tilde{B}}^{-1}$ que son diferenciables. Por tanto, \mathcal{A} es un atlas diferenciable que genera una estructura diferenciable para V^d .

- (2). El conjunto de las matrices reales de orden $m \times n$, $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de orden $m \cdot n$. Basta dotarla de la estructura diferenciable de $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ bajo la identificación natural $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n \cdot m}$.
- (3). Si tenemos dos espacios vectoriales reales $V^n(\mathbb{R})$, $V^m(\mathbb{R})$ entonces el conjunto de todas las aplicaciones lineales $\mathcal{L}(V^n, V^m) = \{f : V^n \rightarrow V^m : f \text{ es lineal}\}$ es una variedad diferenciable de dimensión $n \cdot m$. Esto es inmediato de (1) y de que $\mathcal{L}(V^n, V^m)$ tiene dimensión $n \cdot m$. Una forma natural de definir un atlas es fijar dos bases B y B' de V^n y V^m , respectivamente, y considerar la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(V^n, V^m) &\rightarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto M(f, B' \leftarrow B) \end{aligned}$$

que asocia a cada aplicación lineal f su representación matricial con respecto a las bases B y B' . Esta aplicación permite definir una topología y una estructura diferenciable para $\mathcal{L}(V^n, V^m)$ a partir de las de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal y como se hizo en (1) a partir de \mathbb{R}^d .

- (4). Un abierto $U \neq \emptyset$ de una variedad diferenciable Q de dimensión d es también una variedad diferenciable de dimensión d . Basta tomar la restricción a U de la topología y los elementos de la estructura diferenciable de Q .
Por ejemplo, el grupo lineal general de orden n sobre \mathbb{R} ,

$$Gl(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\} \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$$

es un abierto de $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. De hecho, $Gl(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - 0)$ siendo

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

una aplicación continua. Por tanto, $Gl(n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable de dimensión n^2 .

APLICACIONES DIFERENCIABLES ENTRE VARIEDADES

Definición 3.2.10. Sean Q y Q' dos variedades diferenciables de dimensiones d y n , respectivamente. Diremos que una aplicación $f : Q \rightarrow Q'$ continua en $p \in Q$ es diferenciable en este punto si para cualesquiera entornos coordenados (U, ψ) y (U', ψ') de p y $f(p)$, respectivamente, tales que $f(U) \subseteq U'$ se tiene que la aplicación $\psi' \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $\psi(p)$.

Definición 3.2.11. Sean Q y Q' dos variedades diferenciables. Se dice que una aplicación $f : Q \rightarrow Q'$ es un difeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son diferenciables.

Observación. El nombre difeomorfismo local se extiende al caso de que sólo se pueda asegurar sobre f que, para cada $p \in Q$, existen entornos abiertos U de p y $U' = f(U)$ de $f(p)$, tales que la restricción de f a U y U' sea un difeomorfismo.

Definición 3.2.12. Dos variedades diferenciables Q y Q' son difeomorfas si existe un difeomorfismo $f : Q \rightarrow Q'$.

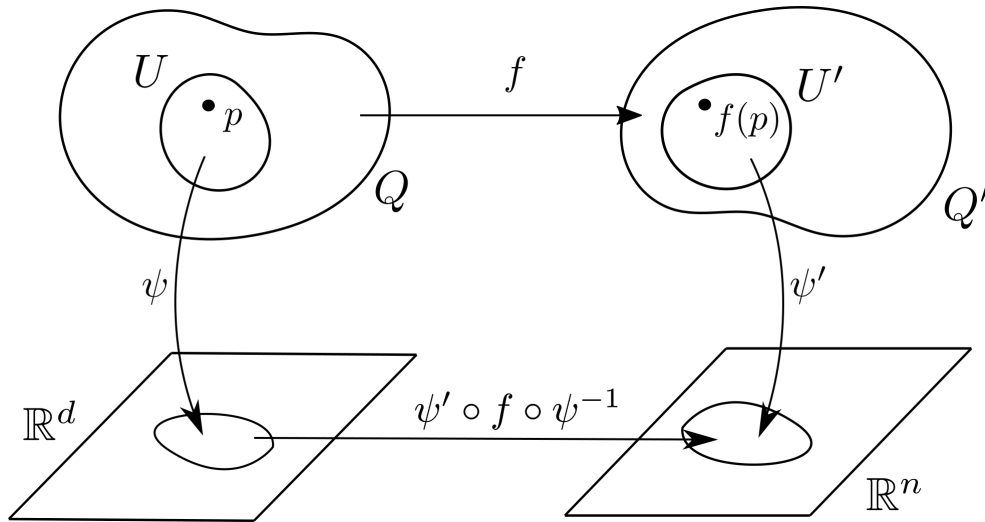


Figura 3.3. Aplicación diferenciable entre variedades

3.3. ESPACIO TANGENTE

Consideremos una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y una curva diferenciable $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset S$. Obviamente, podemos definir la velocidad de la curva $\gamma(t)$ en $t = 0$ como $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) \in \mathbb{R}^3$. De este modo, si $\gamma(0) = p$ entonces el vector $\gamma'(0)$ será tangente a la superficie S en p . Esto es, la velocidad de la curva en p está contenida en el plano tangente a S en p , si pensamos en $\gamma(0)'$ como un vector con origen en el punto p .

CURVAS Y ESPACIO TANGENTE Consideremos en adelante una variedad diferenciable Q de dimensión d y fijemos un punto $p \in Q$. Sea

$$C_p = \{\gamma :]-\epsilon_\gamma, \epsilon_\gamma[\rightarrow Q : \epsilon_\gamma > 0, \gamma(0) = p, \gamma \text{ diferenciable}\}$$

esto es, C_p es el conjunto de curvas contenidas en Q que pasan por p donde, para simplificar el lenguaje, suponemos que cada curva pasa por p en 0 y está definida en algún entorno abierto simétrico de 0. Establecemos en C_p una relación de equivalencia \sim como sigue: diremos que dos curvas $\gamma, \beta \in C_p$ son equivalentes si para algún entorno coordinado $(U, \psi = (q^1, \dots, q^d))$ de p se verifica

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi \circ \gamma)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi \circ \beta)(t)$$

Esto es, las curvas son equivalentes si coinciden los vectores tangentes en \mathbb{R}^d de ambas curvas vistas en coordenadas.

Observación. Vemos de forma inmediata que el concepto de curvas equivalentes proporciona una relación de equivalencia. Estamos pues en condiciones de establecer una definición de vector tangente.

Definición 3.3.1. Llamaremos vector tangente a Q en p a cada una de las clases de equivalencia definidas por \sim en C_p . Así, notaremos por $[\gamma]$ al vector tangente representado por la curva γ , esto es, la clase de equivalencia de γ .

Definición 3.3.2. Llamaremos espacio tangente a Q en p al conjunto C_p / \sim .

Denotaremos de aquí en adelante por $T_p Q$ al espacio tangente en p a Q .

VECTOR TANGENTE COMO DERIVACIÓN Introducimos ahora un nuevo concepto de vector tangente basándonos en la existencia de un modo de derivar funciones para cada vector tangente a Q en p ; esto es, se generaliza la derivada direccional de \mathbb{R}^n .

Definición 3.3.3. Sea $p : C_p \rightarrow T_p M$ la aplicación que a cada curva le asigna su clase de equivalencia. Llamaremos a esta aplicación proyección natural.

Observación. Sea $\gamma \in C_p$ y consideremos su vector tangente asociado $[\gamma]$. Si $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable entonces podemos considerar $f \circ \gamma :]-\epsilon_\gamma, \epsilon_\gamma[\rightarrow \mathbb{R}$ y calcular su derivada $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$. A este número real lo llamaremos derivada direccional de f en la dirección del vector tangente $[\gamma]$. Se comprueba fácilmente que esta derivada es independiente del representante escogido. Por tanto, cada clase de equivalencia proporciona una única derivada direccional en p .

Consideremos el conjunto $C^\infty(Q) = \{f : Q \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es diferenciable } C^\infty\}$. Si fijamos un vector tangente en p , $[\gamma] = v_p$, podemos definir la aplicación

$$D_{v_p} : C^\infty(Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto D_{v_p}(f) \equiv v_p(f) \quad \text{con} \quad v_p(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$$

La aplicación anterior es lineal y verifica la regla de Leibnitz del producto

$$v_p(af) = av_p(f), \quad v_p(f+g) = v_p(f) + v_p(g) \quad (\text{linealidad})$$

$$v_p(fg) = f(p)v_p(g) + g(p)v_p(f) \quad (\text{regla de Leibnitz})$$

La demostración de estas propiedades es bastante sencilla dada la definición anterior de derivada de f respecto a v .

ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL DE $T_p Q$ Vamos a dotar a $T_p Q$ de estructura de espacio vectorial.

Sea Q una variedad d -dimensional y consideremos un punto $p \in Q$. Existe una forma natural de asociar a cada entorno coordinado $(U, \psi = (q^1, \dots, q^d))$ d vectores tangentes a Q en p . Fijado $i \in \{1, \dots, d\}$ consideremos el vector $e_i = (0, \dots, 1^{(i)}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Definimos la recta r_i

$$\begin{aligned} r_i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ t &\mapsto \psi(p) + te_i \end{aligned}$$

A continuación, tomemos la preimagen por ψ de la recta r_i anterior

$$\begin{aligned} \gamma_i :]-\epsilon, \epsilon[&\rightarrow Q \\ t &\mapsto \psi^{-1}(\psi(p) + te_i) \end{aligned}$$

Obtenemos así d vectores tangentes en p , $[\gamma_i], i = 1, \dots, d$, para cada entorno coordinado.

Observación. Observemos que en este caso la derivación $v_p = [\gamma_i]$ es

$$\begin{aligned} D_{v_p} : C^\infty(Q) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial q^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}(\psi(p)), \end{aligned}$$

donde recordemos $q^i = x^i \circ \psi$. Esto justifica que de ahora en adelante utilicemos la notación $D_{v_p} = \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_p$ siempre que $v_p = [\gamma_i]$.

La estructura de espacio vectorial será entonces obvia tratando los vectores tangentes como derivaciones. En efecto, si $v_p, w_p \in T_p Q$ entonces la suma y el producto por escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ verifica todas las propiedades de espacio vectorial.

3.4. ESPACIO COTANGENTE

Definición 3.4.1. Llamamos espacio cotangente a Q en $p \in Q$, y lo denotamos por $T_p^* Q$, al espacio vectorial dual de $T_p Q$, es decir $T_p^* Q = \text{Hom}(T_p Q; \mathbb{R})$. Sabemos que entonces $\dim(T_p^* Q) = \dim(T_p Q)$. A los elementos de $T_p^* Q$ se les denomina 1-formas en p .

Definición 3.4.2. Sea $v_p = [\gamma]$ un vector tangente a Q en p . Se tiene que para cada $f \in C^\infty(Q)$

$$\begin{aligned} df_p : T_p Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_p &\mapsto v_p(f) \end{aligned}$$

a la que denominaremos diferencial de f en p .

Observación. La aplicación df_p es lineal, esto es, $df_p \in T_p^* Q$. En efecto,

$$df_p(av_p + bw_p) = (av_p + bw_p)(f) = av_p(f) + bw_p(f) = a df_p(v_p) + b df_p(w_p)$$

para todo $v_p, w_p \in T_p Q$ y todo $a, b \in \mathbb{R}$.

3.5. CAMPOS VECTORIALES

Definición 3.5.1. Sean Q una variedad diferenciable, TQ su variedad tangente y $\pi : TQ \rightarrow Q$ la proyección canónica. Un campo vectorial X sobre Q es una aplicación que asigna a cada punto $p \in Q$ un vector tangente a Q en ese punto, $X_p \in T_p Q$. Esto es, una aplicación $X : Q \rightarrow TQ$ tal que $\pi \circ X = Id_Q$.

Definición 3.5.2. Un campo X se dice diferenciable (resp. continuo) si X es diferenciable (resp. continua) como aplicación entre variedades. Así, si tomamos coordenadas $(U, \psi = (q^1, \dots, q^d))$ entonces X , que puede escribirse

$$X_p \equiv X(p) = X^1(p) \frac{\partial}{\partial q^1} \Big|_p + \dots + X^d(p) \frac{\partial}{\partial q^d} \Big|_p, \quad \forall p \in U \quad (3.1)$$

será diferenciable en $p_0 \in U$ si y sólo si X^1, \dots, X^d son aplicaciones diferenciables en p_0 .

Ejemplos 3.5.3. Algunos ejemplos de campos vectoriales son:

- (1). Campos vectoriales sobre \mathbb{R}^n . Todo campo vectorial X sobre \mathbb{R}^n se puede escribir cómo

$$X = \sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

donde $f^i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ son los campos coordenados asociados a las coordenadas usuales (x^1, \dots, x^n) .

- (2). Campos vectoriales sobre la esfera S^n . $T_p S^n$ puede verse como un hiperplano de \mathbb{R}^{n+1} ortogonal a p con el producto escalar usual $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Por lo tanto, dar un campo vectorial sobre S^n equivale a dar una aplicación diferenciable $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\langle p | X(p) \rangle = 0$ para todo $p \in S^n$.

Denotaremos por $\mathfrak{X}(Q)$ al conjunto de todos los campos vectoriales sobre Q . Veamos cuáles son las operaciones naturales en $\mathfrak{X}(Q)$.

(1). Suma:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(Q) \times \mathfrak{X}(Q) &\rightarrow \mathfrak{X}(Q) \\ (X, Y) &\mapsto X + Y,\end{aligned}$$

definida por $(X, Y)_p = X_p + Y_p$ para todo $p \in Q$.

(2). Producto por escalares (reales):

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \mathfrak{X}(Q) &\rightarrow \mathfrak{X}(Q) \\ (a, X) &\mapsto aX,\end{aligned}$$

definido por $(aX)_p = aX_p$ para todo $p \in Q$.

(3). Producto por funciones

$$\begin{aligned}C^\infty(Q) \times \mathfrak{X}(Q) &\rightarrow \mathfrak{X}(Q) \\ (f, X) &\mapsto fX,\end{aligned}$$

definido por $(fX)_p = f(p)X_p$ para todo $p \in Q$.

Observación. El conjunto $\mathfrak{X}(Q)$ dotado de las dos primeras operaciones tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión ∞ (salvo para $\dim Q = 0$, en cuyo caso $\mathfrak{X}(Q) \equiv 0$). Por otra parte, $\mathfrak{X}(Q)$ con la primera y la tercera operación verifica propiedades formalmente análogas a las de un espacio vectorial sobre $C^\infty(Q)$.

Fijado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(Q)$, para cada función $f \in C^\infty(Q)$ podemos definir la aplicación

$$\begin{aligned}X(f) : Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto X_p(f).\end{aligned}$$

Si tomamos coordenadas $(U, \psi = (q^1, \dots, q^n))$ y $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial q^i}$

$$X(f) = \left(\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial q^i} \right) (f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial q^i} \in C^\infty(Q).$$

Por lo tanto, para cada $X \in \mathfrak{X}(Q)$ tenemos la aplicación

$$\begin{aligned}C^\infty(Q) &\rightarrow C^\infty(Q) \\ f &\mapsto X(f)\end{aligned}$$

que es lineal y verifica la regla de Leibnitz, esto es

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

3.6. CURVAS INTEGRALES. FLUJOS

Definición 3.6.1. Sea Q una variedad diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo vectorial y $\gamma : I \rightarrow Q$, $I =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ una curva diferenciable. Diremos que γ es una curva integral de X si $\gamma'(t) = X_{\gamma(t)}$ para todo $t \in I$.

Observaciones. Toda curva integral de X se puede extender como una curva integral hasta un único dominio máximo. Más formalmente, la curva integral $\gamma : I \rightarrow Q$ es inextensible o maximal si no existe otra curva integral $\tilde{\gamma} : J \rightarrow Q$ tal que $I \subsetneq J$ y $\gamma = \tilde{\gamma}|_I$. Toda curva integral determinará una única maximal por lo que, en adelante, consideraremos siempre curvas integrales inextensibles.

Una curva integral de X (inextensible) $\gamma : I \rightarrow Q$ es completa si $I = \mathbb{R}$, e incompleta en caso contrario. En el primer caso, diremos que X es completo a lo largo de γ . Diremos que X es completo si es completo a lo largo de todas sus curvas integrales.

Sea $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo vectorial y $(U, \psi = (q^1, \dots, q^n))$ un entorno coordinado de Q . Nuestro objetivo es encontrar una curva integral $\gamma : I \rightarrow Q$ de X . Ahora bien, si componemos con ψ , esto equivale a encontrar una solución del sistema de ecuaciones diferenciales sobre U de primer orden

$$\frac{dq^i}{dt} = X^i(\gamma(t)), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ejemplo 3.6.2. Consideremos sobre \mathbb{R}^2 el campo vectorial $X = xy \frac{\partial}{\partial x}$. Si imponemos que $\gamma(t)$ sea una curva integral de X entonces obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)y(t) \\ y'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Si suponemos $\gamma(0) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ entonces este sistema tiene por solución

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{y_0 t} \\ y(t) &= y_0 \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Se deduce que X es completo.

Definición 3.6.3. Consideramos un campo vectorial completo $X \in \mathfrak{X}(Q)$. Definimos el flujo de ϕ de X como la aplicación

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times Q &\rightarrow Q \\ (t, p) &\mapsto \phi_t(p) = \gamma_p(t), \end{aligned}$$

donde γ es la curva integral maximal de X .

Observaciones. El flujo ϕ_t de X para cada t consiste por tanto en desplazar cada punto a lo largo de sus curvas integrales en un valor t de su parámetro. Si visualizamos el campo vectorial como el campo de velocidades de un fluido, ϕ_t determina hacia dónde se mueve cada partícula del fluido tras un tiempo t .

Debido a la variación diferenciable de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, tanto ϕ_t como la aplicación flujo ϕ son diferenciables. Más aún, se verifican las siguientes propiedades

- (1). $\phi_0 = \mathbb{1}$
- (2). $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}, \forall s, t \in \mathbb{R}$
- (3). $\phi_{-t} = (\phi_t)^{-1}, \forall t \in \mathbb{R}$

3.7. GRUPO UNIPARAMÉTRICO DE DIFEOMORFISMOS

Sea $X \in \mathfrak{X}(Q)$ un campo completo y consideremos su flujo global ϕ , así $G = \{\phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto de difeomorfismos de Q que con la operación de composición tiene estructura de grupo conmutativo.

Definición 3.7.1. Sea Q una variedad diferenciable. Llamaremos grupo uniparamétrico de difeomorfismos de Q a toda aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times Q &\rightarrow Q \\ (t, p) &\mapsto \Phi_t(p) \end{aligned}$$

que verifique:

- (i) $\Phi_0 = \mathbb{1}_Q$,
- (ii) $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$

Observación. Obsérvese que de (i) y (ii) se tiene que $\mathbb{1}_Q = \Phi_{t-t} = \Phi_t \circ \Phi_{-t}$, por tanto, $\Phi_t : Q \rightarrow Q$ es biyectiva con inversa Φ_{-t} . Así, el conjunto de difeomorfismos $G^\Phi = \{\Phi_t : t \in \mathbb{R}\}$ tiene estructura de grupo respecto a la composición.

Obviamente, el flujo ϕ de un campo completo X es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de Q . Es más, el recíproco también se verifica.

Teorema 3.7.2. *Fijado un grupo uniparamétrico de difeomorfismos Φ en Q , existe un campo vectorial completo X sobre Q cuyo flujo asociado ϕ coincide con Φ . Al campo X así definido se le llamará generador infinitesimal del grupo Φ .*

Demostración. Todo se reduce a definir sobre Q un campo vectorial X cuyas curvas integrales sean del tipo $\Phi_t(p)$. Consideremos pues el campo X determinado en cada punto p por

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(p)$$

Basta comprobar que

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \Phi_t(p) = X_{\Phi_{t_0}(p)}, \quad \forall t_0 \in \mathbb{R}.$$

En efecto,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \Phi_t(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{t+t_0}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(\Phi_{t_0}(p)) = X_{\Phi_{t_0}(p)}$$

□

Observación. El generador infinitesimal X de Φ es invariante por Φ , i.e., verifica la propiedad $X_{\Phi_{t_0}(p)} = (d\Phi_{t_0})_p X_p$ para todo $t_0 \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$X_{\Phi_{t_0}(p)} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{t+t_0}(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_t(\Phi_{t_0}(p)) = (d\Phi_{t_0})_p X_p.$$

Ejemplo 3.7.3. Consideremos en $Q = \mathbb{R}^3$ o $Q = S^2$ las rotaciones con respecto al eje z , $\Phi : \mathbb{R} \times Q \rightarrow Q$

$$\left(\theta, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se comprueba fácilmente que se trata de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos de Q . Su generador infinitesimal es

$$\begin{aligned} X_{(x,y,z)} &= \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \Phi_\theta(x,y,z) \\ &= \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \in T_{(x,y,z)}Q, \end{aligned}$$

es decir el campo vectorial $X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$.

Vemos que podemos relacionar X con el operador L_z de Mecánica Cuántica en la representación coordenada. Este es, cómo sabemos, el generador de las rotaciones respecto al eje z . Esto nos sugiere que podemos estudiar las rotaciones y sus generadores utilizando el formalismo de las variedades diferenciables y su espacio tangente. En concreto, introduciremos en el siguiente capítulo un formalismo más completo que nos permitirá añadir estructura de grupo a las variedades, a saber, los grupos de Lie.

Grupos de Lie

4.1. INTRODUCCIÓN

Los grupos de Lie son importantes en Análisis Matemático, Física y Geometría porque sirven para describir la simetría de estructuras analíticas. Fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales. Uno de los primeros éxitos de la teoría de grupos de Lie fue que permitió un estudio sistemático de la relación entre la geometría euclídea y las nuevas geometrías emergentes (geometría lobachevskiana, geometría riemanniana y geometría proyectiva) que surgieron en el siglo XIX. Esto permitió a Felix Klein proponer el uso de esta teoría para el estudio de simetrías en el conocido como Erlanger Program. La idea principal del programa consistía en entender la geometría como el estudio de aquello que permanece invariante bajo un grupo de simetrías.

Un importante progreso en la teoría se debió a la invención de la Teoría de la Relatividad Especial por parte de Albert Einstein y su propuesta de las transformaciones de Lorentz como una propiedad fundamental de la cinemática del espacio-tiempo. La idea intuitiva de Einstein fue seguidamente formalizada por su antiguo profesor Hermann Minkowski. El formalismo de Minkowski parecía mostrar que las transformaciones de Lorentz constituían un cierto grupo de Lie. No mucho después, cuando Heisenberg introdujo sus famosas relaciones de conmutación en Mecánica Cuántica, Hermann Weyl mostró que podían ser interpretadas como las relaciones de estructura de un álgebra de Lie. Fue entonces cuando algunos físicos, especialmente Wigner, abogaron por extender el Erlanger Program de Klein a la Física. A día de hoy, en efecto, los principios de simetría basados en los grupos de Lie son una herramienta fundamental en la física teórica. La teoría Quark, en particular, es una construcción basada en estos grupos.

4.2. EL CONCEPTO DE GRUPO DE LIE

Definición 4.2.1. Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable dotada con una estructura de grupo tal que la aplicación $G \times G \rightarrow G$ definida por $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ es C^∞ .

Observaciones. Nótese que:

- (1). Sea G un grupo de Lie, entonces la aplicación $\tau \mapsto \tau^{-1}$ es C^∞ dado que es la composición $\tau \mapsto (e, \tau) \mapsto \tau^{-1}$ de aplicaciones C^∞ . Además, la aplicación $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau$ de $G \times G \rightarrow G$ es C^∞ dado que es la composición $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma, \tau^{-1}) \mapsto \sigma\tau$ de aplicaciones C^∞ .
- (2). La componente conexa que contiene al elemento identidad e de G es *per se* un grupo de Lie.

Ejemplos 4.2.2. Algunos ejemplos son

- (1). El espacio euclídeo \mathbb{R}^n dotado con la suma de vectores.
- (2). Los números complejos no nulos \mathbb{C}^* forman un grupo de Lie para el producto.
- (3). El círculo unidad $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ con la multiplicación inducida por \mathbb{C}^* .
- (4). La variedad $Gl(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales y determinante distinto de cero con la multiplicación de matrices.

4.3. ÁLGEBRA DE LIE DE UN GRUPO DE LIE

Definición 4.3.1. Un álgebra de Lie \mathfrak{g} sobre \mathbb{R} es un espacio vectorial real \mathfrak{g} junto con un operador bilineal $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ (llamado corchete) tal que para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

- (1). $[x, y] = -[y, x]$ (antisimétrico)
- (2). $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (identidad de Jacobi)

La importancia del concepto de algebra de Lie es que hay una álgebra de Lie especial de dimensión finita asociado con cada grupo de Lie, estando reflejadas las propiedades del grupo de Lie en su álgebra de Lie. Veremos que los grupos de Lie simplemente conexos están completamente determinados por su álgebra de Lie.

Ejemplos 4.3.2. Algunos ejemplos son

- (1). Sea Q una variedad diferenciable. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(Q)$, definimos su corchete de Lie en un punto $p \in Q$ como la aplicación

$$[X, Y]_p : C^\infty(Q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Observemos que de esta definición se puede deducir fácilmente que la operación es antisimétrica y cumple la identidad de Jacobi. El espacio vectorial $\mathfrak{X}(Q)$ dotado con la operación del corchete de Lie será entonces un álgebra de Lie.

- (2). El espacio vectorial $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ de todas las matrices $n \times n$ con coeficientes reales forma un álgebra de Lie con la operación del conmutador de matrices

$$[A, B] = AB - BA$$

Definición 4.3.3. Sea G un grupo de Lie y $\sigma \in G$. Las traslaciones a izquierda y traslaciones a derecha por σ son, respectivamente, los difeomorfismos l_σ y r_σ de G definidos por

$$l_\sigma(\tau) = \sigma\tau$$

$$r_\sigma(\tau) = \tau\sigma$$

para todo $\tau \in G$. Diremos que un campo vectorial X de G es invariante a izquierda si para cada $\sigma \in G$, X está l_σ -relacionado consigo mismo, i.e.,

$$dl_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma$$

El conjunto de todos los campos vectoriales invariantes a izquierda de un grupo de Lie G será denotado por \mathfrak{g}

Teorema 4.3.4. Sea G un grupo de Lie y sea \mathfrak{g} su conjunto de campos vectoriales invariantes a izquierda

- (1). \mathfrak{g} es un espacio vectorial real, y la aplicación $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ definida por $\alpha(X) = X(e)$ es un isomorfismo de \mathfrak{g} con el espacio tangente $T_e G$ de G en la identidad. Por lo tanto, $\dim \mathfrak{g} = \dim T_e G = \dim G$.
- (2). Los campos vectoriales invariantes a izquierda son diferenciables.
- (3). El corchete de Lie de dos campos vectoriales invariantes a izquierda es también un campo vectorial invariante a izquierda.
- (4). \mathfrak{g} forma un álgebra de Lie con la operación del corchete de Lie sobre los campos vectoriales.

Definición 4.3.5. Definimos el álgebra de Lie de un grupo de Lie G como el álgebra de Lie \mathfrak{g} formada por los campos vectoriales invariantes a izquierda.

Observación. A partir del resultado (1) del Teorema 4.3.4 anterior, vemos que una definición alternativa para el álgebra de Lie de un grupo de Lie podría ser tomando el espacio tangente $T_e G$ en la identidad con la estructura inducida por el isomorfismo de espacios vectoriales $\alpha : \mathfrak{g} \rightarrow T_e G$ tal que $\alpha(X) = X(e)$.

4.4. GRUPOS DE LIE DE MATRICES

GRUPO LINEAL GENERAL Un grupo de Lie de matrices es cualquier subgrupo de $Gl(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$ que sea también una variedad diferenciable. El primer ejemplo que se nos ocurre es el grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R})$, cuyo álgebra de Lie vamos a probar que es $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. El conjunto $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ está formado por las matrices reales $n \times n$ y es un espacio vectorial de dimensión n^2 . Tal y como hemos comentado, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ forma un álgebra de Lie con la operación de conmutación usual de matrices.

El grupo lineal general $Gl(n, \mathbb{R})$ hereda de forma natural la estructura de variedad diferenciable de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ como subconjunto abierto de dicho espacio, $Gl(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$. La función $\det : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ es no nula y diferenciable. Sea x_{ij} la función coordenada sobre $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ que asigna a cada matriz su coeficiente ij -ésimo, el determinante es un polinomio con coeficientes reales, obviamente C^∞ . Por lo tanto, si $\tau, \sigma \in Gl(n, \mathbb{R})$, $x_{ij}(\sigma\tau^{-1})$ es una función racional con denominador no nulo ($\det \tau \neq 0$), lo que prueba que la aplicación $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma\tau^{-1}$ es C^∞ y, en consecuencia, $Gl(n, \mathbb{R})$ un grupo de Lie.

Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$. Sea $\pi : T_e \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ la proyección canónica del espacio tangente a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ en el neutro e (matriz identidad) con el propio $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Recordemos que $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial y, por tanto, tiene estructura diferenciable ¹. Así para $v \in T_e \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \pi : T_e \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ v = v^{ij} \frac{\partial}{\partial x^{ij}} &\mapsto \pi(v) = (v^{ij})_{i,j=1,\dots,n} \end{aligned}$$

Esto es, π envía los coeficientes del vector v en la base de las derivadas parciales a una matriz con dichos coeficientes. Sabemos que $T_e Gl(n, \mathbb{R}) = T_e \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, luego tenemos la aplicación $\beta : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ definida por

$$\begin{aligned} \beta : \mathfrak{g} &\xrightarrow{\alpha} T_e Gl(n, \mathbb{R}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ X &\mapsto \beta(X) = \pi(X(e)) \end{aligned}$$

siendo α la aplicación definida en (1) del Teorema 4.3.4. β es un isomorfismo de álgebras de Lie, lo cual nos permite considerar $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ como álgebra de Lie de $Gl(n, \mathbb{R})$.

¹Esto, en realidad, es un resultado más general: todo espacio tangente tiene estructura de espacio vectorial y, por tanto, se puede dotar de estructura diferenciable tal y como vimos en Ejemplos 3.2.9, (1)

β es un isomorfismo de espacios vectoriales trivialmente. La demostración de que β respeta la estructura de álgebra de Lie puede verse en Warner [8].

GRUPO ESPECIAL ORTOGONAL $SO(3)$ Sea $SO(3) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AA^t = 1, \det A = 1\}$. Los elementos de $SO(3)$ representan en bases ortonormales transformaciones lineales de $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ conocidas como giros. Rigurosamente

Definición 4.4.1. Sea $\varphi \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|\vec{u}\| = 1$, definimos la matriz

$$R(\varphi, \vec{u}) = \mathbb{1} + (\sin \varphi)N + (1 - \cos \varphi)N^2, \quad \text{con } N = \begin{pmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo algunas consideraciones geométricas, se puede ver que $R(\varphi, \vec{u})$ es la matriz en la base canónica de un rotación de eje \vec{u} y ángulo positivamente orientado φ .

Observación. Un cálculo elemental prueba que $R(\varphi, \vec{u}) = \exp(\varphi N)$. Basta desarrollar la exponencial de matrices y darse cuenta de que $N^3 = -N$, $N^4 = -N^2$, $N^5 = N$. A partir de la expresión anterior es fácil ver que $R(\varphi, \vec{u}) \in SO(3)$, por lo que podemos establecer el siguiente resultado.

Proposición 4.4.2. *Todo elemento de $SO(3)$ se escribe con algún $R(\varphi, \vec{u})$ tal que*

- (1). *Si $0 < \varphi < \pi$, entonces \vec{u} es único.*
- (2). *Si $\varphi = 0$, vale cualquier \vec{u} unitario. Obviamente, $R(0, \vec{u}) = \mathbb{1}$.*
- (3). *Si $\varphi = \pi$, $R(\pi, \vec{u}) = R(\pi, -\vec{u})$*

Veamos², de forma heurística, que $SO(3)$ es homeomorfo al espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^3$ formado por el conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{R}^3 . Tomemos la bola cerrada $\bar{B}(0, \pi)$ de radio π centrada en $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$. Cada punto $p \in \bar{B}(0, \pi)$, distinto del origen, determina un vector unitario $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ y un escalar $0 < \varphi \leq \pi$, tal que $p = \varphi \vec{u}$. Si p es el origen, tenemos que $p = 0 \cdot \vec{u}$ para todo \vec{u} unitario. Podemos definir la aplicación

$$f : \bar{B}(0, \pi) \rightarrow SO(3)$$

$$p \mapsto f(p) = \begin{cases} R(\varphi, \vec{u}) & \text{si } p \neq \vec{0} \\ \mathbb{1} & \text{si } p = \vec{0} \end{cases}$$

Identificando los puntos antipodales del borde de $\bar{B}(0, \pi)$ obtenemos un modelo de $\mathbb{R}P^3$ y la aplicación definida se restringe a $\mathbb{R}P^3$ de forma natural. Se puede probar que se trata de un homeomorfismo.

²El último capítulo incluye un estudio mucho más visual.

Álgebra de Lie de $SO(3)$

El álgebra de Lie de $SO(3)$ se obtiene a partir del álgebra de Lie de $O(3)$, siendo el grupo $O(3) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AA^t = \mathbb{1}\}$. En efecto, $SO(3)$ es un subgrupo abierto de $O(3)$ y, por tanto, sus espacios tangentes coinciden.

Generalizamos a n dimensiones. Evidentemente, el álgebra de Lie de $O(n)$ denotado por $\mathfrak{o}(n)$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Un elemento de $T_e O(n)$ viene dado por la derivada $A'(0)$ de alguna curva $A :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow O(n)$, con $A(0) = e$. Si expresamos $A(0) \in T_e O(n)$ en coordenadas y derivamos, vemos que

$$[A'(0)]^t + A'(0) = 0$$

el álgebra de Lie de $SO(n)$ está contenida en el subespacio de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de matrices antisimétricas. Ahora un estudio de dimensiones asegura la igualdad, simplemente vemos que coinciden $\dim \mathfrak{so}(n) = \dim SO(n) = n(n-1)/2$.

Particularmente para el caso $n = 3$, dónde cada elemento de $SO(3)$ representa una rotación, vemos que una posible elección para una base de $\mathfrak{so}(3)$ es la siguiente

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cualquier elemento se podrá escribir cómo combinación lineal de los elementos de la base

$$J = \theta^1 J_1 + \theta^2 J_2 + \theta^3 J_3 \equiv \theta^i J_i \in \mathfrak{so}(3)$$

La relación de conmutación de los elementos de la base es

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k$$

siendo ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita.

GRUPO ESPECIAL UNITARIO $SU(2)$ Sea $SU(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : UU^\dagger = 1, \det A = 1\}$.

La estructura de $SU(2)$ se puede estudiar a partir de un modelo matricial, ya que para una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Si $A \in SU(2)$ se tiene que $AA^\dagger = 1$ y, por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C} : \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$. Definimos,

$$\mathcal{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

Tomando $\alpha := y^0 + y^1 i, \beta := y^2 + y^3 i$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0 + y^1 i & y^2 + y^3 i \\ y^2 + y^3 i & y^0 - y^1 i \end{pmatrix} \\ &= y^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \underbrace{iy^1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\sigma_3} + \underbrace{iy^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} + \underbrace{iy^3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_1} \end{aligned}$$

donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in SU(2)$ son las matrices de Pauli.

Si denotamos por³.

$$\mathbb{1}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

se puede ver de inmediato que la base $\{\mathbb{1}_2, i, j, k\}$ forma una base de \mathcal{R}^4 . Además, determina su isomorfismo natural como espacio vectorial con \mathbb{R}^4 .

Este isomorfismo se convierte en una isometría si consideramos en \mathcal{R}^4 el producto escalar que se obtiene al imponer que $\{\mathbb{1}_2, i, j, k\}$ sea una base ortonormal. Nótese que con dicho producto $\|A\|^2 = \det A$. Por tanto, $SU(2)$ es isométrico a S^3 . La estructura de grupo de Lie de $SU(2)$ es la heredada de \mathcal{R}^4 , el cual es un subgrupo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Finalmente, veamos que $SU(2)$ es un espacio recubridor de $SO(3)$. La aplicación recubridora es la aplicación espinorial

$$Spin : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

$$U \mapsto \mathcal{R}_U$$

donde $\mathcal{R}_U : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^3$ se define como $\mathcal{R}_U(X) = UXU^\dagger$, siendo \mathcal{R}^3 el subespacio vectorial de \mathcal{R}^4 generado por $\{i, j, k\}$ (matrices hermíticas sin traza). Este subespacio, con el producto escalar inducido, es isométrico a \mathbb{R}^3 y $\|\mathcal{R}_U(X)\| = \det X = \|X\|$, por lo que \mathcal{R}_U es una transformación ortogonal. Si calculásemos el determinante de su matriz respecto de la base $\{i, j, k\}$, veríamos que sale 1, por lo que \mathcal{R}_U es un giro.

Teorema 4.4.3. *La aplicación $Spin : SU(2) \rightarrow SO(3)$ es un homomorfismo diferenciable y sobreyectivo de grupos, cuyo núcleo es*

$$\ker(Spin) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

³Los elementos $\{1, i, j, k\}$ nos recuerdan a los cuaterniones, una generalización de los números complejos introducida por Rowan Hamilton. En efecto, si consideramos cómo se relacionan entre ellos, hemos obtenido una construcción de los cuaterniones como espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^4

Observaciones. Si identificamos $\ker(\text{Spin})$ con \mathbb{Z}_2 tenemos que algebraicamente $SU(2)/\mathbb{Z}_2$ es isomorfo a $SO(3)$. Además, dada la sobreyectividad de la aplicación espinorial, tenemos que para cada rotación $R(\varphi, \vec{u})$ debe existir un elemento $U \in SU(2)$ tal que $\text{Spin}(U) = R(\varphi, \vec{u})$. Se tiene que

$$U = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\mathbb{1}_2 - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)(u^1\sigma_1 + u^2\sigma_2 + u^3\sigma_3)$$

Ejemplo 4.4.4. Sea $SU(2)$ el espacio recubridor de $SO(3)$ y sea $\text{Spin} : SU(2) \rightarrow SO(3)$ aplicación recubridora. Tomemos una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow SO(3)$ dada por

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & -\sin 2\pi t & 0 \\ \sin 2\pi t & \cos 2\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de un lazo con $\alpha(0) = \alpha(1) = \mathbb{1} \in SO(3)$, que para cada t define una rotación de ángulo $2\pi t$ sobre el eje z . Además, $\alpha^2 : [0, 1] \rightarrow SO(3)$ viene dada por

$$\alpha^2(t) = \begin{pmatrix} \cos 4\pi t & -\sin 4\pi t & 0 \\ \sin 4\pi t & \cos 4\pi t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que también es cerrada con el mismo origen y final.

El levantamiento se obtiene a través de la aplicación espinorial, se comprueba que

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi t} & 0 \\ 0 & e^{i\pi t} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}^2(t) = \begin{pmatrix} e^{-i2\pi t} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi t} \end{pmatrix}$$

Ahora resulta trivial ver que α^2 es homotópica a la identidad, pero no es el caso de α . En efecto, $\tilde{\alpha}^2(1) = \mathbb{1}$ mientras que $\tilde{\alpha}(1) = -\mathbb{1}$.

4.5. APLICACIÓN EXPONENCIAL

Todo campo vectorial en un grupo de Lie compacto es completo. Un resultado muy importante en la teoría de grupos de Lie es el siguiente

Proposición 4.5.1. Si X es un campo vectorial invariante a izquierda en un grupo de Lie G , entonces X es completo.

Este resultado que acabamos de mostrar sin demostración, nos lleva directamente a la idea de aplicación exponencial

Definición 4.5.2. (Aplicación exponencial)

- (1). La única curva integral γ de un campo vectorial invariante a izquierda X , tal que $\gamma(0) = e$ que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$ es

$$t \mapsto \exp tX$$

donde $X \in T_e G$ y $\exp = \exp_e$.

(2). La aplicación exponencial $\exp : T_e G \rightarrow G$ está definida por

$$\exp A := \exp tA \Big|_{t=1}$$

(3). Un subgrupo uniparamétrico de un grupo de Lie G es un homomorfismo diferenciable $\chi(t)$ entre el grupo aditivo de la recta real $(\mathbb{R}, +)$ y G , i.e., para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

$$\chi(t_1 + t_2) = \chi(t_1)\chi(t_2)$$

Observaciones. Se puede probar que la aplicación exponencial es un difeomorfismo local entre el espacio tangente $T_e G$ en el neutro $e \in G$ y G . Así, existe un entorno abierto U de $0 \in T_e G$ tal que (i) La aplicación exponencial restringida a U es abierta, y (ii) Tanto la aplicación como su inversa son diferenciables.

Se sigue de (1) que toda curva integral $[\gamma]$ de un campo invariante a izquierda X es un subgrupo uniparamétrico de G . Se puede probar que el recíproco también es cierto, i.e., todo subgrupo uniparamétrico de G es de la forma $t \mapsto \exp tX$ para algún $X \in T_e G$. Por lo tanto, existe una relación 1 – 1 entre los subgrupos uniparamétricos de un grupo de Lie G y su álgebra de Lie.

Ejemplo 4.5.3. La aplicación exponencial manda elementos de $\mathfrak{so}(3)$ al espacio $SO(3)$. Vemos así como los elementos de la base de $\mathfrak{so}(3)$, a saber, $J_i, i = 1, 2, 3$, son los generadores de las rotaciones $R(\theta, \vec{u})$ a través de la aplicación exponencial. Así una rotación de ángulo φ sobre el eje x será

$$R(\varphi, \hat{x}) = \exp(\varphi J_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

utilizando la exponencial de matrices usual.

Observación. Los físicos suelen considerar la aplicación exponencial compleja $\exp iX$ en lugar de $\exp X$. La literatura física suele hacer referencia del álgebra de Lie como espacio de elementos infinitesimales del grupo.

CAPÍTULO 5

Teoría de representación de grupos

5.1. INTRODUCCIÓN

Aunque la teoría de grupos juega un papel importante en Física, y es una de las herramientas principales a día de hoy, la teoría de representación de grupos cuenta aún con muchas dificultades que no han podido ser superadas. El primer problema al que nos enfrentamos al estudiarla es que se trata de una teoría no física. Nos referimos con esto a que la teoría de representación de grupos ha sido desarrollada por matemáticos, para cuestiones matemáticas y sin una aplicación física en mente. La teoría de grupos fue introducida en las matemáticas al comienzo de 1810, y la teoría de representaciones durante 1920, incluso antes de que se formulara la Mecánica Cuántica. A este respecto, se diferencia de otras ramas de las matemáticas como el cálculo que fue desarrollado al mismo tiempo que la mecánica newtoniana.

Además, no existe un método sistemático para estudiar algunos tipos de problemas de representación de grupos. Una técnica de resolución cualquiera suele ser válida sólo para un problema específico. Por lo tanto, estos métodos suelen ser más un arte que una ciencia. Sin embargo, durante este breve capítulo vamos a introducir las representaciones de grupo de una forma muy sencilla y sin entrar demasiado en detalle. De esta forma, cubriremos tan sólo los resultados generales y algunos específicos que nos serán de utilidad para entender con mayor detalle el próximo capítulo.

Comenzamos definiendo la acción de un grupo sobre un conjunto y algunas de sus propiedades básicas. A partir de las acciones, podemos definir las representaciones lineales de grupos. Finalmente, nos centraremos en los grupos de matrices que son de mayor importancia en la física, estos son $SO(3)$ y $SU(2)$.

5.2. ACCIONES DE GRUPOS SOBRE CONJUNTOS

Definición 5.2.1. Una acción de un grupo G sobre un conjunto X es una aplicación

$$G \times X \rightarrow X$$

que denotaremos por

$$(g, x) \mapsto g(x), \quad \forall g \in G, x \in X$$

que cumple

(i) $(gh)(x) = g(h(x))$ para cada $g, h \in G, x \in X$.

(ii) $1_G(x) = x$ para cada $x \in X$

Diremos que el grupo G actúa sobre el conjunto X .

Observación. La notación empleada ayuda a pensar en los elementos de G como aplicaciones de X en X . De hecho, dado $g \in G$, la aplicación

$$X \rightarrow X : x \mapsto g(x)$$

es biyectiva.

En efecto, dados $x, y \in X$, con $g(x) = g(y)$, se tiene

$$x = 1_G(x) = (g^{-1}g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(g(y)) = (g^{-1}g)(y) = 1_G(y) = y$$

luego es inyectiva.

Por otro lado, dado $x \in X$ existe $g^{-1}(x) = y \in X$ que tiene por imagen

$$g(y) = g(g^{-1}(x)) = (gg^{-1})(x) = 1_G(x) = x$$

Esto prueba la sobreyectividad.

Definición 5.2.2. cada $g \in G$ nos permite definir una biyección de X . Hemos construido una aplicación

$$\theta : G \rightarrow \text{Biy}(X) : g \mapsto \theta(g)$$

siendo

$$\theta(g) : X \rightarrow X : x \mapsto g(x)$$

la biyección anterior.

Proposición 5.2.3. La aplicación $\theta : G \rightarrow \text{Biy}(X) : g \mapsto \theta(g)$ es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $g, h \in G$ y $x \in X$ se tiene

$$\theta(gh)(x) = (gh)(x) = g(h(x)) = \theta(g)(h(x)) = \theta(g)(\theta(h)(x)) = (\theta(g) \circ \theta(h))(x)$$

□

Observación. El núcleo de θ está formado por aquellos $g \in G$ tales que $\theta(g) = 1_X$, esto es, $g(x) = x$ para cada $x \in X$.

$$\ker \theta = \{g \in G : g(x) = x, \forall x \in X\}$$

5.3. REPRESENTACIÓN LINEAL DE UN GRUPO

Definición 5.3.1. Sea G un grupo y $X = V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Se dice que $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ es una representación de G sobre V si ρ es un homomorfismo de grupos.

$$\begin{aligned} g &\mapsto \rho(g) : V \rightarrow V \\ v &\mapsto \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Observación. Nótese que a partir de la representación de un grupo, se puede definir la acción

$$\begin{aligned} G \times V &\rightarrow V \\ (g, v) &\mapsto \rho(g)(v) \equiv gv \end{aligned}$$

Dado que en Mecánica Cuántica los vectores de estado están definidos salvo un factor de fase, podremos tratar con representaciones de grupos salvo este factor de fase.

Definición 5.3.2. Sea G un grupo y $X = V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} . Se dice que $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ es una representación proyectiva de G sobre V si ρ es un homomorfismo proyectivo de grupos, esto es,

$$\rho(gh) = \eta(g, h)\rho(g)\rho(h)$$

con $\|\eta(g, h)\| = 1$.

Definición 5.3.3. Supongamos (V, \mathbb{C}) dotado de algún producto interno $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Una representación se dice unitaria si respeta dicho producto interno

$$\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$$

Definición 5.3.4. Una representación $\rho : G \rightarrow Gl(V)$ se dice que es irreducible si no existe ningún subespacio propio $W \subset V$ tal que $\rho|_W$ sea una representación.

5.4. REPRESENTACIÓN DE GRUPOS DE LIE

El próximo capítulo contiene un estudio detallado de las representaciones del grupo de rotaciones $SO(3)$ y su recubridor universal $SU(2)$ (sabemos que ambos son grupos de Lie), en concreto veremos los tres tipos de representaciones más comunes en física: rep. escalar, rep. vectorial y rep. espinorial. El estudio de las representaciones del álgebra de Lie suele ser más sencillo que el estudio de las representaciones de grupos, sin embargo las representaciones del álgebra no corresponden necesariamente a las representaciones de grupos. Se tiene que para un grupo G

Definición 5.4.1. Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de G . Recordemos que \mathfrak{g} tiene estructura de espacio vectorial. La representación adjunta (Ad, \mathfrak{g}) viene dada por el homomorfismo

$$Ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$$

donde $Ad(g)$ actúa en $X \in \mathfrak{g}$ tal que

$$(Ad(g))(X) = gXg^{-1}$$

Ocurre algo especial para el caso $SO(3)$, ya que la representación vectorial es isomorfa a la representación adjunta. Recordemos que $\mathfrak{so}(n)$ puede ser identificado como el conjunto de matrices antisimétricas $n \times n$, obteniendo una dimensión $n(n-1)/2$. Esta sólo coincidirá con n para el caso $n = 3$. El isomorfismo entre la representación vectorial (π, \mathbb{R}^3) de vectores columnas y la representación adjunta $(Ad, \mathfrak{so}(3))$ de matrices antisimétricas está dada por¹

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3) : v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por último, introducimos un tipo especial de representación de álgebra de Lie.

Definición 5.4.2. Sea \mathfrak{g} el álgebra de Lie de un grupo G . Se define la representación adjunta del álgebra de Lie por

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g} &\mapsto ad(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\mapsto [X, Y] \end{aligned}$$

¹Recordemos cómo identificamos $SO(3)$ con las rotaciones propias en la Sección 4.4

CAPÍTULO 6

Espinores cuánticos

6.1. INTRODUCCIÓN

Los fermiones, que son las partículas que constituyen toda la materia ordinaria del universo, no quedan descritas por escalares, vectores o tensores, sino por unos objetos matemáticos llamados espinores. Los espinores fueron introducidos originalmente por el matemático francés Élie Cartan en 1913 y posteriormente se descubrió que eran absolutamente indispensable para describir el comportamiento de los fermiones. Básicamente, se trata de elementos de un espacio vectorial complejo en los cuales las rotaciones y las transformaciones de Lorentz están integrados en el formalismo general. Además, los espinores parecen estar íntimamente relacionados con los números complejos que aparecen en Mecánica Cuántica. Si fuesen de interés puramente matemático, los espinores podrían haber sido fácilmente ignorados.

La noción del espín del electrón tuvo aparición por primera vez en 1922 cuando los físicos alemanes Otto Stern y Walther Gerlach encontraron que un haz de átomos de plata podía ser dividido en dos haces por un campo magnético no uniforme. Por entonces, nadie conocía las causas de este extraño comportamiento, pero tres años después George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit propusieron que los electrones podían existir en dos estados de espín. El concepto del espín del electrón se debatía entre una simple rotación sobre algún eje y una especie de momento angular intrínseco. A día de hoy, podemos interpretar el comportamiento de los electrones y otros fermiones considerando un momento angular intrínseco sin analogía clásica. Esto nos lleva a la idea de que tales partículas viven en un «espacio espinorial», un espacio interno bidimensional que requiere una descripción más allá de los escalares, vectores y tensores. El formalismo de espinores de Cartan parece ser apropiado para esta descripción.

6.2. DESCRIPCIÓN FÍSICA DE UN ESTADO CUÁNTICO

POSTULADOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA CUÁNTICA Comenzamos el estudio de la descripción física de un estado en Mecánica Cuántica (MC) con el primero de los postulados

Postulado I La descripción de un sistema físico en MC está determinada en términos de los elementos de un espacio de Hilbert¹ complejo y separable asociado con el sistema físico. Dado un instante de tiempo t , un estado puro del sistema físico está representado por un rayo unitario² $|\psi(t)\rangle_R$ en el correspondiente espacio de Hilbert. Un elemento $|\psi(t)\rangle$ del rayo $|\psi(t)\rangle_R$ se denomina vector de estado o ket.

Obsérvese que no todo vector del espacio de Hilbert es un estado puro. El hecho de que los estados estén identificados con rayos unitarios, implica que $|\psi(t)\rangle$ y $\lambda|\psi(t)\rangle$, para cualquier número complejo $\|\lambda\| = 1$, son el mismo estado físico. Esto es una consecuencia directa de la forma que utilizamos para medir observables en MC.

Postulado II Todo observable de un sistema físico está representado por un operador lineal autoadjunto actuando sobre el espacio de Hilbert asociado, cuyos autovalores son los únicos posibles valores del observable.

Postulado III Si un sistema físico está en un estado puro descrito por el ket $|\psi(t)\rangle$, la probabilidad de obtener un autovalor a de un observable representado por el operador A es

$$p_a = \langle \psi(t) | P_{A,a} | \psi(t) \rangle$$

donde $P_{A,a}$ es el proyector al subespacio del autovalor a .

Dado que estamos interesados en el módulo al cuadrado de los números complejos que aparecen en las ecuaciones, los desfases totales no influyen en nuestras medidas. Así, por consideraciones físicas, no estamos interesados en buscar exactamente representaciones de un grupo, pero sí representaciones proyectivas de los mismos.

EL ESPACIO DE ROTACIONES Las rotaciones propias del espacio euclídeo tridimensional están descritas por $SO(3)$. La misma variedad diferenciable puede ser utilizada para describir las diferentes orientaciones de un objeto en el espacio. Una vez elegida una orientación inicial, representada por el elemento identidad de $SO(3)$, cualquier otro

¹También llamado en Física, espacio de estados. Sobre espacios de Hilbert y operadores véase [19]

²Un rayo unitario es un vector del espacio de Hilbert con fase arbitraria

elemento representa la orientación obtenida tras actuar con una rotación sobre esta. Toda rotación queda completamente definida por un eje \vec{u} y una rotación positiva de ángulo φ . Por tanto, cada elemento de $SO(3)$ puede ser representado³ por un vector de longitud φ (rad) en la dirección dada por \vec{u} . Sin embargo, esta correspondencia no es única, dado que una rotación sobre \vec{u} de ángulo π equivale a una rotación sobre $-\vec{u}$ de ángulo π . Así puntos opuestos de la frontera $\partial\bar{B}(0, \pi)$ de $\bar{B}(0, \pi)$ deben ser identificados, dando lugar a un espacio que representa las rotaciones de forma unívocamente y continua. Se puede comprobar que en este sentido $SO(3)$ es un espacio proyectivo real $\mathbb{RP}(3)$, tal y como podemos ver en la Figura 6.1.

Propiedades topológicas

Nos interesamos ahora en las propiedades topológicas, especialmente en la conectividad de $SO(3)$. El espacio $SO(3)$ no es simplemente conexo. Los lazos de $SO(3)$ se dividen en dos clases distintas, I y II, dependiendo si tienen un número impar o par, respectivamente, de intersecciones con la frontera $\partial\bar{B}(0, \pi)$. Una intersección ocurre cuando un camino llega a $\partial\bar{B}(0, \pi)$ y, por identificación de puntos, aparece en su punto diametralmente opuesto. La clase I contiene, por ejemplo, todos los diámetros de $\bar{B}(0, \pi)$. La clase II contiene todos los lazos internos, y particularmente, los lazos triviales que constan de un único punto. Obviamente ningún lazo de clase I puede ser deformado de forma continua a un lazo de clase II, ya que las intersecciones con la frontera sólo ocurren a pares. Por otro lado, todos los lazos de clase I pueden ser deformados de forma continua entre ellos, y lo mismo ocurre para los de clase II. Esta es una propiedad particular de $SO(3)$ relacionada con su grupo fundamental $\pi_1(SO(3))$. Vemos que este grupo tiene dos elementos, por lo que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$. Consideremos ahora una rotación continua de un objeto en el espacio euclídeo tridimensional que toma un objeto de vuelta a su orientación original. Esta correspondería a un lazo en $SO(3)$, que puede ser de clase I o II. Para el caso de una rotación simple de ángulo 2π obtenemos evidentemente un lazo de clase I, mientras que una rotación de 4π corresponde a la clase II. Así queda claro que una rotación de 2π no puede ser deformada de forma continua hasta la rotación trivial (sin movimiento), mientras que una rotación de 4π sí podría. Hay muchas formas de ilustrar este resultado, una de ellas es el «truco del cinturón de Dirac».

TEORÍA DEL MOMENTO ANGULAR Dada una rotación R , caracterizada por una matriz ortogonal 3×3 , le asociamos un operador $\mathcal{D}(R)$ en el espacio de Hilbert \mathcal{H} asociado a nuestro sistema tal que

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{D}(R) |\alpha\rangle, \quad |\alpha\rangle, |\alpha'\rangle \in \mathcal{H}$$

³Véase Proposición 4.4.2

donde $|\alpha'\rangle, |\alpha\rangle$ corresponde a los estados del sistema rotado y original, respectivamente. Nótese que R actúa sobre las componentes de un vector ordinario del espacio euclídeo mientras que $\mathcal{D}(R)$ actúa sobre los kets del espacio de estados.

Sabemos de la Mecánica Clásica que el momento angular es el generador de las rotaciones, de igual forma que el momento y el Hamiltoniano son los generadores de las traslaciones y evolución temporal, respectivamente. Definimos el momento angular total J , como el generador de las rotaciones. Particularmente, podemos definir sus componentes J_k como las generadoras de las rotaciones sobre el eje k -ésimo. Satisfacen la relación

$$[J_i, J_k] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

siendo ϵ_{ijk} el símbolo de Levi-Civita y estableciendo $\hbar = 1$. A partir de ahora usaremos siempre esta elección de unidades. El momento angular total tiene dos contribuciones diferentes, momento angular y espín

$$J = L \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes S \equiv L + S$$

Ambas satisfaciendo la misma relaciones de conmutación

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k, \quad [L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k$$

Nótese que esta es la relación que satisface el álgebra de Lie de $\mathfrak{so}(3)$. Por lo tanto, además del momento angular mecánico L , existe otra contribución dada por el operador espín S . El espín describe grados de libertad internos del sistema y es independiente de la posición en el espacio. Así, el espacio de Hilbert asociado a un sistema que involucre el espín

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$$

donde el espín s es el número cuántico asociado⁴ con el operador S . Vemos que queda dividido en una parte espacial $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$, de las funciones cuadrado integrable⁵ y una parte espinorial \mathbb{C}^{2s+1} .

Finalmente, podemos ver que el operador $\mathcal{D}(R)$ antes mencionado será

$$\mathcal{D}(R) = \exp(iJ_k\theta^k) \in SU(2), J_k \in \mathfrak{so}(3)$$

donde θ^k es el ángulo de rotación sobre el eje k -ésimo. Lo importante aquí es que al exponenciar los elementos del álgebra de Lie no generamos el grupo en el que estamos interesados, en su lugar, estamos generando su recubridor universal. Dado que $SU(2)$ y $SO(3)$ tienen el mismo álgebra de Lie, al exponenciar los elementos de $\mathfrak{so}(3)$ lo que obtenemos es $SU(2)$, i.e., el recubridor universal de $SO(3)$. Esta es la razón por la cual el algebra de Lie no determina unívocamente su grupo de Lie.

⁴Un estudio detallado de cómo se obtiene este valor se puede ver en el Capítulo 3 de [5]

⁵La parte espacial queda descrita por una función de onda que necesitamos que tenga una densidad de probabilidad normalizable, $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) = \{\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \int \|\psi(x)\|^2 d^3x < \infty\}$

6.3. ¿QUÉ SIGNIFICA ESPÍN 1/2?

Una vez sabemos cómo funciona el momento angular en MC, estamos preparados para empezar nuestra discusión sobre las partículas de espín 1/2. Este tipo de partículas son denominadas fermiones en Física de Partículas. Tal y como hemos visto, el espacio de Hilbert asociado a este tipo de partículas es

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x) \otimes \mathbb{C}^2$$

donde $s = 1/2$. Las rotaciones son generadas por el momento angular que puede ser escrito en términos de los siguientes operadores, conocidos como matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad J_k = \frac{\sigma_k}{2}$$

las cuales son muy utilizadas en Física. Estas satisfacen las mismas relaciones de conmutación que las componentes de J y, por tanto, corresponden a otra representación⁶ del álgebra $\mathfrak{so}(3)$. La acción de una rotación $R \in SO(3)$ en cualquier estado fermiónico $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ sobre el eje z dada por un ángulo θ usando estas matrices será

$$\mathcal{D}[R_z(\theta)]|\psi\rangle = \exp\left(-i\sigma_3\frac{\theta}{2}\right)|\psi\rangle$$

Nótese que hay un factor 1/2 en el exponente. Este es, de hecho, una de las propiedades más importantes de los fermiones y está estrechamente relacionada con la conexión entre el espín y la estadística⁷. Comencemos mirando qué ocurre cuando rotamos un ángulo de 2π en esta representación

$$\mathcal{D}[R_z(2\pi)] = \exp(-i\sigma_3\pi) = \exp\left[-i\pi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

La forma más sencilla de exponenciar una matriz consiste en diagonalizarla con transformaciones unitarias, exponenciar sus autovalores, y transformar de vuelta. Dado que la matriz ya es diagonal

$$\mathcal{D}[R_z(2\pi)] = \exp\left[-i\pi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y esto no es más que $-\mathbb{1}$. Así, una rotación de 2π no nos devuelve al estado inicial. Si realizamos una rotación de 4π sí lo haría, pero si es tan sólo de 2π obtenemos un factor de -1 . Los objetos que se transforman como $|\psi\rangle \rightarrow -|\psi\rangle$ bajo rotaciones de 2π parecen estar correctamente descritos por el formalismo espinorial tal y como veremos en la siguiente sección.

⁶Esta corresponde al formalismo de Pauli

⁷Spin-Statistics Theorem. Véase [17]

6.4. FORMALISMO ESPINORIAL

Los espinores están caracterizados por la forma específica en la que se comportan bajo rotaciones. Estos cambian de forma distinta dependiendo no sólo del resultado final de la rotación, sino de cómo ha sido obtenida esta mediante un camino continuo en el espacio de rotaciones. La Figura 6.1 muestra dos tipos de caminos.

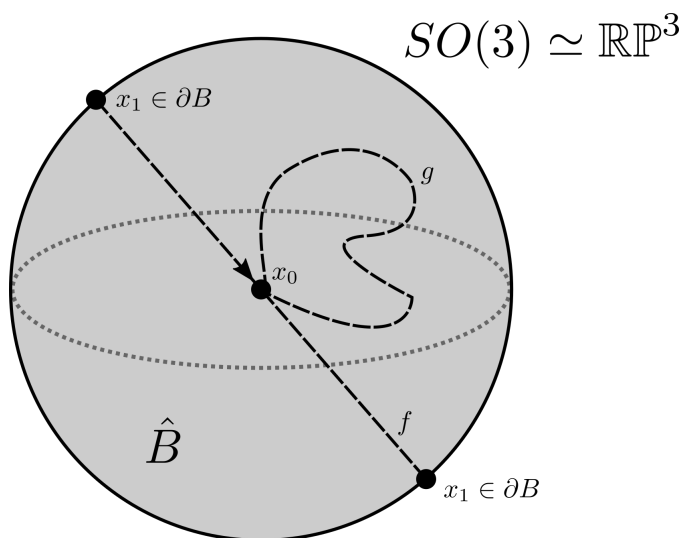


Figura 6.1. Espacio de rotaciones como una bola de radio π .

El camino $f : [0, 1] \rightarrow SO(3)$ es un lazo simple en el espacio de rotaciones $SO(3)$. Este representa una rotación de 2π sobre un eje dado por la dirección del camino dentro de la bola cerrada $\bar{B}(0, \pi)$. El lazo tiene su punto base en el elemento identidad $f(0) = f(1) = x_0$ y pertenece a la clase I dado que tiene un número impar de intersecciones con la frontera, a saber, los puntos x_1 . Por otro lado, $g : [0, 1] \rightarrow SO(3)$ es un lazo de clase II, por no tener intersección con la frontera. Por lo tanto, ninguno de los dos caminos puede ser deformado continuamente en el otro. La rotación que definimos anteriormente puede ser considerada como un lazo en el espacio de rotaciones también. Si queremos obtener el mismo estado inicial tras la rotación, el lazo debe ser homotópico al lazo trivial x_0 . Se comprueba fácilmente que ninguno de los caminos en $SO(3)$ correspondiente a una rotación de 2π puede ser deformado continuamente a la identidad. Pertenecen a dos clases de homotopía de caminos distintas.

Veamos que ocurre si usamos la representación de $SU(2)$ para el espacio de rotaciones tridimensional. Dado que se trata del espacio recubridor de $SO(3)$, debemos elevar el camino desde $SO(3)$ hasta $SU(2)$. Interpretamos $SU(2)$, siendo el doble recubridor de $SO(3)$, como dos bolas cerradas identificando los puntos de su frontera. Ahora, es más sencillo entender por qué una rotación de 2π no puede ser deformada continuamente a la identidad, el punto inicial y final no coinciden. Véase la Figura 6.2.

$$SU(2) \simeq SO(3)/\mathbb{Z}_2$$

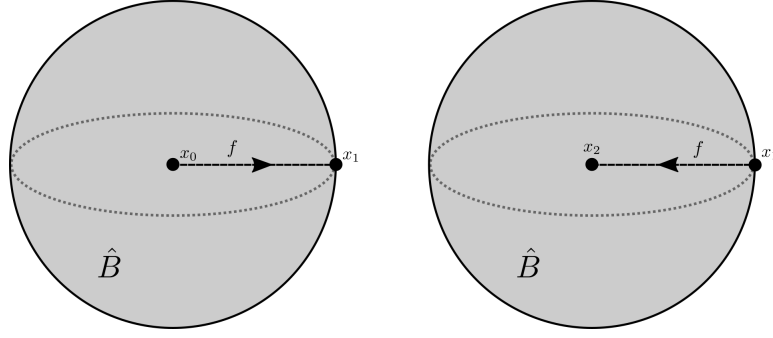


Figura 6.2. $SU(2)$ como espacio recubridor de $SO(3)$

Si queremos obtener un lazo, debemos hacer otra rotación de 2π , completando una rotación de 4π al final. Así, el punto inicial y final coinciden y, dado que $SU(2)$ es simplemente conexo, puede ser deformado continuamente a la identidad. Este es un resultado que probamos de forma rigurosa en la Sección 4.4. Resumiendo, para el caso de $SU(2)$, existe una representación irreducible distinta de la vectorial que no es trivial: la representación de las matrices complejas 2×2 en $SU(2)$ actuando sobre vectores de \mathbb{C}^2 mediante multiplicación de matrices. Podemos definir formalmente dicha representación

Definición (Representación espinorial). La representación espinorial de $SU(2)$ es la representación en \mathbb{C}^2 dada por .

$$\begin{aligned} \rho : SU(2) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ U &\mapsto \rho(U) = U \end{aligned}$$

Los elementos del espacio de representación \mathbb{C}^2 son llamados espinores.

Observaciones. La representación espinorial de $SU(2)$ no es una representación de $SO(3)$. Dada una representación de $SO(3)$

$$\pi : SO(3) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

Si componemos con la aplicación espinorial definida en capítulos anteriores

$$Spin : SU(2) \rightarrow SO(3)$$

Automáticamente obtenemos una representación de $SU(2)$

$$\rho = \pi \circ Spin : SU(2) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

Así, cada representación de $SO(3)$ dará lugar a una representación de $SU(2)$. El recíproco no es cierto, si tenemos $\tilde{\rho} : SU(2) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ una representación de $SU(2)$, puede no inducir una representación de $SO(3)$.

Un intento podría llevarse a cabo mediante

$$\begin{aligned}\pi : SO(3) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ R &\mapsto \pi(R) = \tilde{\rho}(U)\end{aligned}$$

donde U es cualquier elemento de $SU(2)$ satisfaciendo $Spin(U) = R$. El problema con este intento de representación es que no es un homomorfismo. Cambiando la elección de $U \in SU(2)$ introduciría un cambio de signo, por lo que π sería un homomorfismo salvo un cambio de signo

$$\pi(R_1)\pi(R_2) = \pm\pi(R_1R_2)$$

Así, la representación espinorial puede ser usada para construir una representación proyectiva de $SO(3)$ pero no una representación ordinaria.

La representación espinorial es más fundamental que la vectorial, en el sentido de que esta representación no puede ser obtenida conociendo únicamente la representación vectorial, pero si al contrario. Nótese que tomando los espinores como constituyentes fundamentales abandonamos la descripción de la geometría tridimensional puramente en función de los números reales. Mientras que la representación vectorial es una representación real de $SO(3)$, la representación espinorial es una representación compleja.

6.5. COMPORTAMIENTO DE LAS PARTÍCULAS CON OTRO ESPÍN

Hemos visto en la sección anterior que el número cuántico de espín s está fuertemente relacionado con la forma en que los estados cuánticos rotan. Existen partículas en MC que necesitan de una rotación de $2\pi/s$ radianes para volver a su estado original. Si $s = 1/2$, como el electrón, la partícula volverá a su estado inicial tras una rotación de 4π . Por otro lado, si $s = 1$, como para el fotón, la partícula volverá a su estado inicial tras una rotación de 2π . Si $s = 0$, como para el bosón de Higgs, la partícula siempre parecerá la misma sin importar la rotación, i.e., tiene simetría esférica.

Matemáticamente, el número cuántico de espín puede ser utilizado para clasificar las diferentes representaciones irreducibles de $SU(2)$. Cada una de esas representaciones en \mathbb{C}^{n+1} viene dada por

$$\rho_n : SU(2) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

donde $n = 2s$. Se tiene que sólo para n par, esta se corresponde con una representación irreducible π_n de $SO(3)$ en el sentido

$$\rho_n = \pi_n \circ Spin$$

pero no será una representación ordinaria para n impar.

Ya hemos estudiado los tres primeros ejemplos

$s = 0$ Ambas representaciones π_0 o ρ_0 son la representación trivial de $SO(3)$ o $SU(2)$. Los físicos suelen llamar a esta: representación escalar. Decir que los estados transforman bajo rotaciones mediante la representación escalar significa que estos son invariantes bajo rotaciones.

$s = 1/2$ Tomando

$$\begin{aligned}\rho_1 : SU(2) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ U &\mapsto \rho_1(U) = U\end{aligned}$$

obtenemos la representación espinorial en \mathbb{C}^2 estudiada anteriormente. Esta, recordamos, no se corresponde con ninguna representación de $SO(3)$

$s = 1$ Dado que $SO(3)$ es un grupo de matrices 3×3 , este actúa sobre elementos de \mathbb{R}^3 . Esta es la acción usual sobre vectores de las rotaciones. Dicho de otro modo, la representación es (π_2, \mathbb{R}^3) , con π_2 el homomorfismo identidad

$$\begin{aligned}\pi_2 : SO(3) &\rightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ R &\mapsto \pi_2(R) = R\end{aligned}$$

Esta representación se suele denotar por representación vectorial y es isomorfa a la representación adjunta. Componiendo con la aplicación espinorial

$$\rho_2 = \pi_2 \circ \text{Spin} : SU(2) \rightarrow GL(3, \mathbb{R})$$

obtenemos una representación de $SU(2)$, la representación adjunta.

Conclusiones

Todo el desarrollo matemático expuesto en los primeros capítulos nos ha permitido conocer la estructura matemática que subyace al concepto de espín. El espín es una idea un poco confusa por no tener una interpretación física clara, aunque mediante un estudio detenido podemos sacar algunas conclusiones.

En primer lugar, parece claro que la teoría de grupos de Lie resulta una herramienta indispensable para el estudio del comportamiento de las partículas. Hemos comprobado que el grupo $SO(3)$ juega un papel importante en las teorías físicas que deban ser invariantes bajo rotaciones. Particularmente, cobrará importancia en aquellas «cantidades» de dicha teoría que deban ser modeladas por los elementos de un espacio vectorial sobre el cual actúa alguna representación de $SO(3)$. Este es el caso de los vectores y tensores de la física clásica. Sin embargo, hemos encontrado un grupo $SU(2)$ que es localmente indistinguible de $SO(3)$ y que presenta notables ventajas debido a su estructura topológica global y la existencia de la aplicación espinorial entre ambos grupos.

Los fermiones, que no son más que partículas de espín semientero, parecen estar descritos correctamente mediante el uso de espinores. Los espinores se definen como elementos de un espacio vectorial complejo que transforman bajo representaciones del grupo $SU(2)$. Un punto importante aquí consiste en percatarse de que este tipo de representaciones de $SU(2)$ no son representaciones de $SO(3)$. Este resultado, mostrado en la Sección 6.4, se debe a que $SU(2)$ es el espacio recubridor de $SO(3)$ y, por tanto, existen representaciones de $SU(2)$ que no son representaciones de $SO(3)$. El grupo $SU(2)$ parece adecuado para tratar con la estructura, basada en los números complejos, de la Mecánica Cuántica. Las medidas de los observables dentro de esta teoría no se ven afectadas por cambios globales de fase, así las representaciones proyectivas cobran mayor importancia.

Las rotaciones o cambios de orientación de un sistema físico se corresponden con caminos de $SO(3)$, sin embargo para rotar un fermión, debemos elevar dicho camino desde $SO(3)$ a $SU(2)$ mediante la aplicación espinorial. Al realizar dicha elevación, vemos cómo una rotación de 2π rad acaba en un elemento diferente del inicial. Esta es la razón por la cual una rotación de 2π sobre el vector estado de un electrón da como resultado $|\psi\rangle \rightarrow -|\psi\rangle$, mientras que una rotación de 4π rad nos devuelve al estado inicial. Este resultado ha sido demostrado mediante dos métodos distintos: una representación visual en la Sección 6.4 y una demostración formal en la Sección 2.7.

Finalmente, aclarar que un estudio mucho más riguroso y amplio de los temas aquí tratados nos obligaría a extendernos demasiado de forma que nos perderíamos fácilmente entre el formalismo matemático de este tipo de teorías. Lo que aquí se ha expuesto se puede considerar simplemente como una introducción a los conceptos matemáticos utilizamos día a día en física casi sin saberlo. Un esfuerzo por comprender la estructura matemática que subyace nos permite tener una idea más profunda de la realidad, sirviendo de faro en teorías físicas donde la intuición a veces no resulta tan útil.

Bibliografía

- [1] Bujalance, E., Etayo, J.J., Gamboa, J.M. *Teoría elemental de grupos*, 3ª edición, Madrid: UNED, 2002. 978-84-362-4436-6
- [2] Margalef, J., Otourello, E. *Introducción a la Topología*, Ed. Complutense, 1993
- [3] Arregui, J., *Topología*, Segunda Edición, Madrid: UNED, 1988
- [4] Munkres, J. R., *Topología*, Segunda Edición, Prentice Hall, 2002
- [5] Sakurai, J., Napolitano, J. *Modern Quantum Mechanics*, Second Edition, Cambridge University Press, 2017. 978-1-108-42241-3
- [6] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002. 978-0-521-79540-1
- [7] Massey, W. S., *Introducción a la topología algebraica*, Editorial Reverté, 1972
- [8] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983
- [9] Woit, P., *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer-Verlag, New York, 2017
- [10] Takhtajan, L. A., *Quantum Mechanics for Mathematicians*, American mathematical Society, Providence, 2008
- [11] Isham, C. J., *Modern Differential Geometry for Physicist*, Second Edition, World Scientific, 1999
- [12] Sánchez Caja, M., *Introducción a la Geometría Diferencial de Variedades*, Depto. Geometría y Topología, Universidad de Granada, 2003
- [13] Howe, R., *Very Basic Lie Theory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 90, No. 9, 1983
- [14] Stillwell, J., *Naive Lie Theory*, Springer-Verlag, San Francisco, 2008
- [15] Hall, B. C., *An Elementary Introduction to Groups and Representations*, University of Notre Dame, 200

- [16] Penrose, R., Wolgang, R., *Spinors and Space Time*, Volume 1, Cambridge University Press, 1984.
- [17] Schwartz, M.D., *Quantum Field Theory and the Standard Model*
- [18] Straub O. W., *A Child's Guide to Spinors*, California, 2016
- [19] García, A., Muñoz, M. J., *Espacios de Hilbert y Análisis de Fourier*, Segunda Edición, Editorial Sanz y Torres, 2014