

Cinemática direta e inversa de um robô FANUC

- Robótica Industrial
 - Trabalho 5
- Francisco Power nº84706
 - Pedro Rolo nº84803



Tabela de Denavit-Hartenberg

Elo	theta	alfa	L	D
A	θ_1	$-\pi/2$	LB	LA
B	$\theta_2 - \pi/2$	π	LC	0
C	θ_3	$-\pi/2$	LD	0
C ₁	0	0	0	-LE
D	θ_4	$\pi/2$	0	0
E	θ_5	$-\pi/2$	0	0
F	θ_6	π	0	-LF

A partir dos dados desta tabela, é possível calcular as matrizes de transformação entre referenciais:

$${}^O T_a = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta C_\alpha & S_\theta S_\alpha & LC_\theta \\ S_\theta & C_\theta C_\alpha & -S_\alpha C_\theta & LS_\theta \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

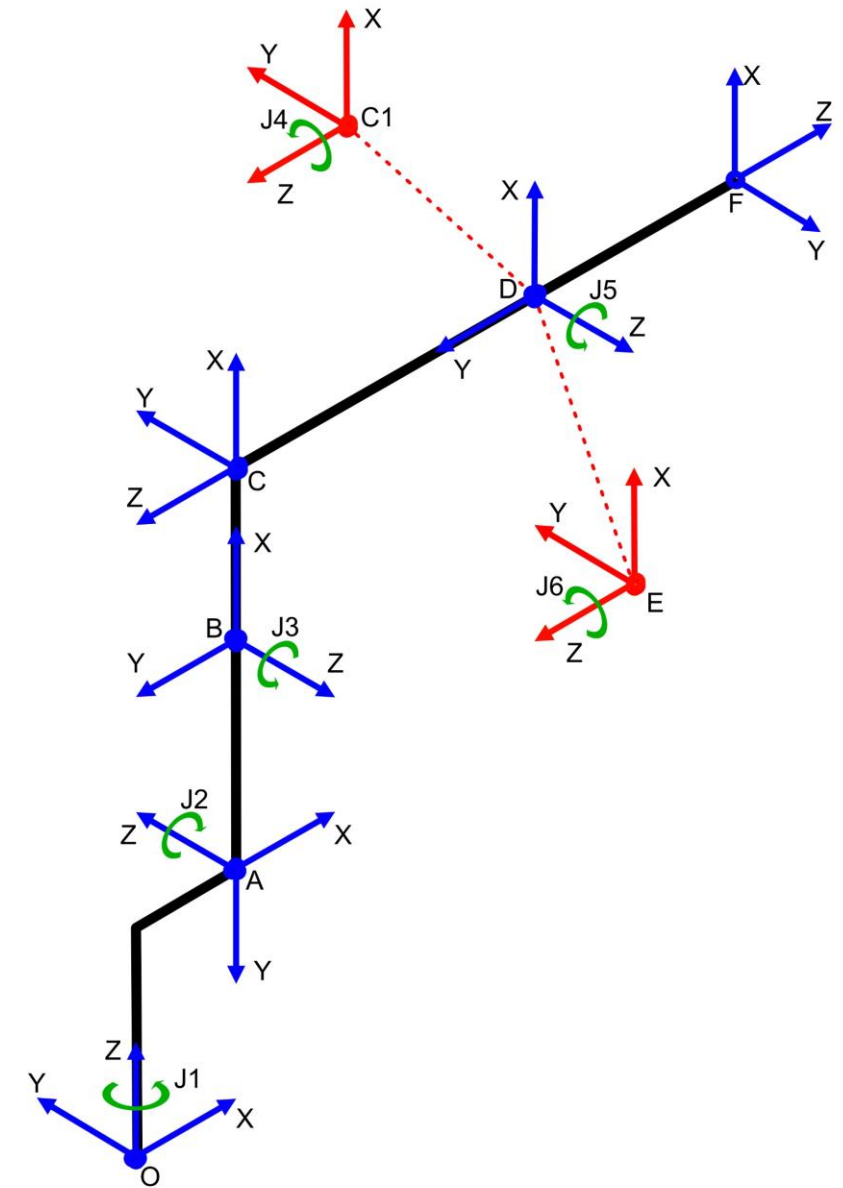


Fig.1 sistemas de coordenadas.

Cinemática Inversa

- Matriz de transformação genérica:

$${}^O T_f = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi C_\psi S_\theta - C_\phi S_\psi & C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi & p_x \\ C_\theta S_\psi & C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi S_\theta & -S_\phi C_\psi + C_\phi S_\psi S_\theta & p_y \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\phi C_\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do Pw:

$$\vec{P}_w = \vec{P} - L_F \cdot \vec{a}$$

$$\vec{P}_w = \begin{bmatrix} P_{wx} \\ P_{wy} \\ P_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - LF(S_\phi S_\psi + C_\phi C_\psi S_\theta) \\ y + LF(C_\psi S_\phi - C_\phi S_\psi S_\theta) \\ z - LFC_\phi C_\theta \end{bmatrix}$$

- Matriz de transformação até Pw:

$${}^O T_w = {}^O T_a \cdot {}^a T_b \cdot {}^b T_c \cdot {}^c T_{c1}$$

$${}^O T_w = \begin{bmatrix} S_{2-3}C_1 & -S_1 & -C_{2-3}C_1 & C_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3}) \\ S_{2-3}S_1 & C_1 & -C_{2-3}S_1 & S_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3}) \\ C_{2-3} & 0 & S_{2-3} & L_A + L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculo dos valores dos ângulos relativos á posição

- Calculo do θ_1 :

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{C_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3})}{S_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3})} \right) = \arctan \left(\frac{P_{wy}}{P_{wx}} \right)$$

- Calculo do θ_3 :

$$(\sqrt{P_{wx}^2 + P_{wy}^2} - L_B)^2 + P_{wz}^2 = d^2$$

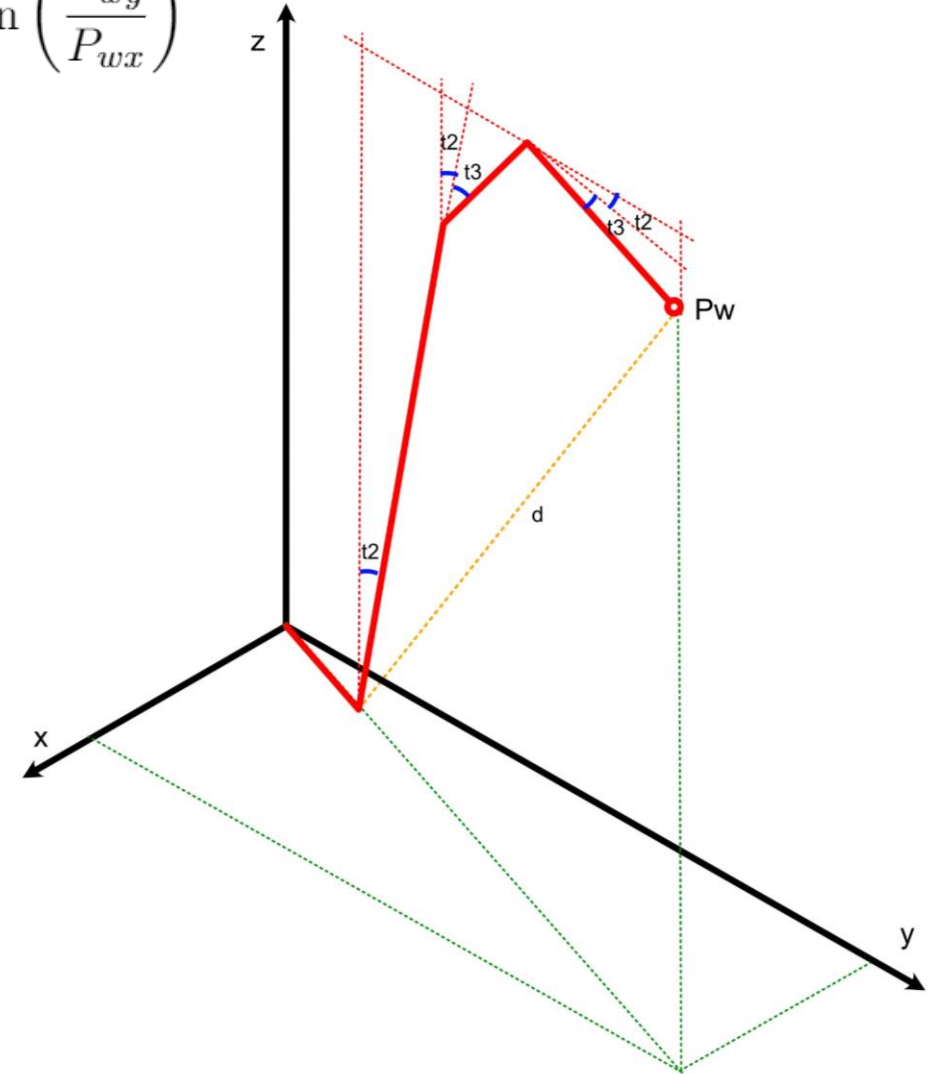
$$d^2 = (L_C S_2 + L_D S_{2-3} + L_E C_{2-3})^2 + (L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3})^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = L_C^2 + L_D^2 + L_E^2 + 2L_C L_D C_3 + 2L_C L_E S_3$$

$$\Leftrightarrow d^2 - L_C^2 - L_D^2 - L_E^2 = 2L_C L_D C_3 + 2L_C L_E S_3$$

$$\Leftrightarrow K_3 = K_1 C_3 + K_2 S_3$$

$$\Leftrightarrow \theta_3 = 2 \cdot \arctan \left(\frac{K_2 \pm \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - K_3^2}}{K_1 + K_3} \right)$$



- Cálculo do θ_2 :

$$\begin{aligned} \sqrt{P_{wx}^2 + P_{wy}^2} - L_B &= d_1 \\ d_1 &= L_C S_2 + L_D S_{2-3} + L_E C_{2-3} \\ \Leftrightarrow d_1 &= L_C S_2 + L_D S_2 C_3 - L_D S_3 C_2 + L_E C_2 C_3 + L_E S_2 S_3 \\ \Leftrightarrow d_1 &= S_2(L_C + L_D C_3 + L_E S_3) + C_2(L_E C_3 - L_D S_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{wz} &= d_2 \\ d_2 &= L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3} \\ \Leftrightarrow d_2 &= L_C C_2 + L_D C_2 C_3 + L_D S_2 S_3 - L_E S_2 C_3 + L_E C_2 S_3 \\ \Leftrightarrow d_2 &= -S_2(L_E C_3 - L_D S_3) + C_2(L_C + L_D C_3 + L_D S_3) \end{aligned}$$

Das equações ao lado sai:

$$\begin{aligned} l_1 &= L_C + L_D C_3 + L_D S_3 \\ l_2 &= L_E C_3 - L_D S_3 \end{aligned}$$

Resolvendo em ordem a C_2 e S_2 , chega-se a uma expressão para θ_2 :

$$\begin{cases} C_2 = \frac{d_1 - l_1 S_2}{l_2} \\ S_2 = \frac{l_1 C_2 - d_2}{l_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{l_2 d_1 + l_1 d_2}{l_1^2 + l_2^2} \\ \theta_2 = \arcsin\left(\frac{l_1 C_2 - d_2}{l_2}\right) \end{cases}$$

Calculo dos valores dos ângulos relativos à orientação

$${}^wT_f = {}^{c1}T_d \cdot {}^dT_e \cdot {}^eT_f = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & C_6S_4 + C_4C_5S_6 & C_4S_5 & L_fC_4S_5 \\ C_4S_6 + C_5C_6S_4 - 4 & C_5S_4S_6 - C_4C_6 & S_4S_5 & L_fS_4S_5 \\ C_6S_5 & S_6S_5 & -C_5 & -L_fC_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta matriz podemos deduzir as expressões para θ_4 , θ_5 e θ_6

$$\theta_5 = \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{(C_4S_5)^2 + (S_4S_5)^2}}{C_5} \right) = \arctan \left(\frac{\pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{-a_3} \right)$$

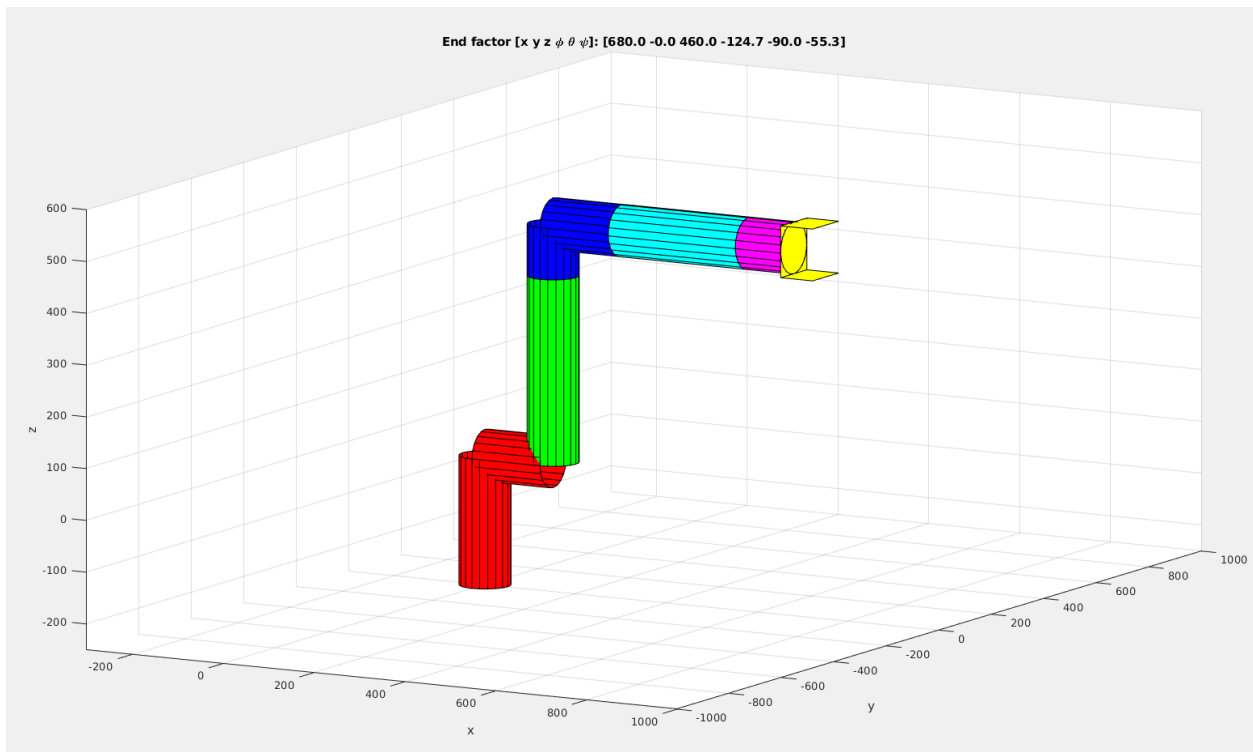
$$\theta_4 = \arctan \left(\frac{S_4S_5}{C_4S_5} \right) = \arctan \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$$

$$\theta_6 = \arctan \left(\frac{S_6S_5}{C_6S_5} \right) = \arctan \left(\frac{s_3}{n_3} \right)$$

Onde os valores de n , s e a são retirados da matriz calculada da seguinte forma:

$${}^wT_f = ({}^OT_w)^{-1} \cdot ({}^OT_f) = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 & a_1 & x \\ n_2 & s_2 & a_2 & y \\ n_3 & s_3 & a_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultados obtidos



Espaço de juntas fornecido

$$q_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

End factor lido no manipulador Fanuc

$$r_0 = [680.0 \ 0.0 \ 459.9 \ 154.1 \ -89.9 \ 24.5]$$

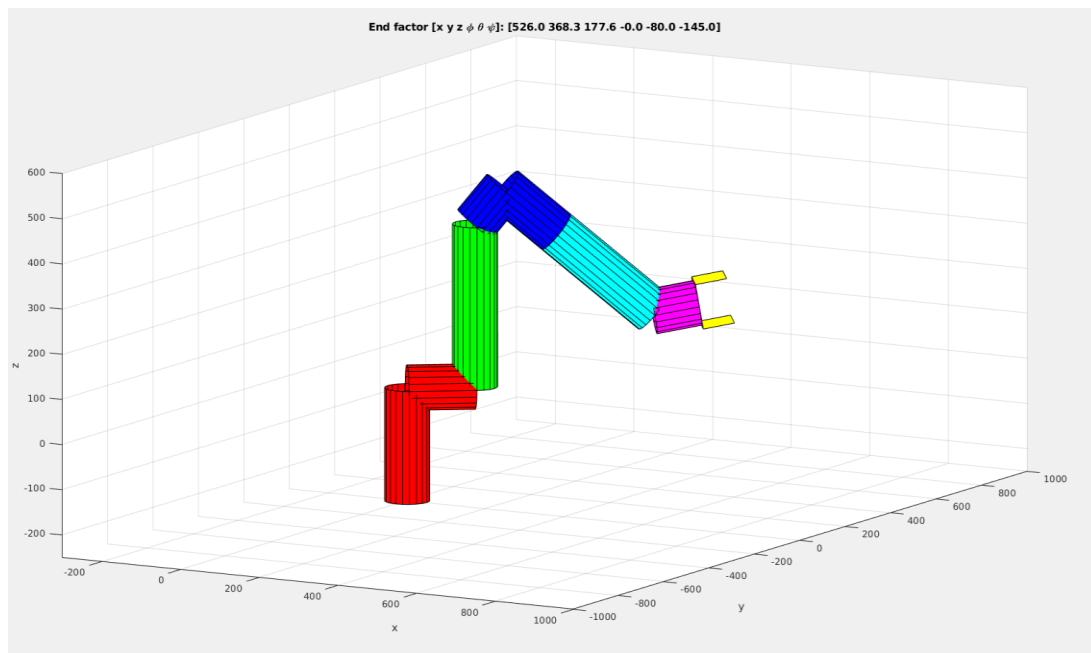
End factor simulado

$$r_0 = [680.0 \ 0 \ 460 \ -135.0 \ -90.0 \ -45]$$

Espaço de juntas calculado com cinemática inversa
(espaço de redundâncias [1,-1,1])

$$q_0 = [0.0 \ 0 \ 0 \ 86.8077 \ 0.0000 \ -86.8077]$$

NOTA: os valores de θ_3 apresentados não são os introduzidos no robô Fanuc.
Esses são iguais a $\theta_3 - \theta_2$, tendo sido esses os fornecidos no enunciado.



Espaço de juntas fornecido

$$q_1 = [35 \quad 0 \quad -40 \quad 0 \quad 50 \quad 0]$$

End factor lido no manipulador Fanuc

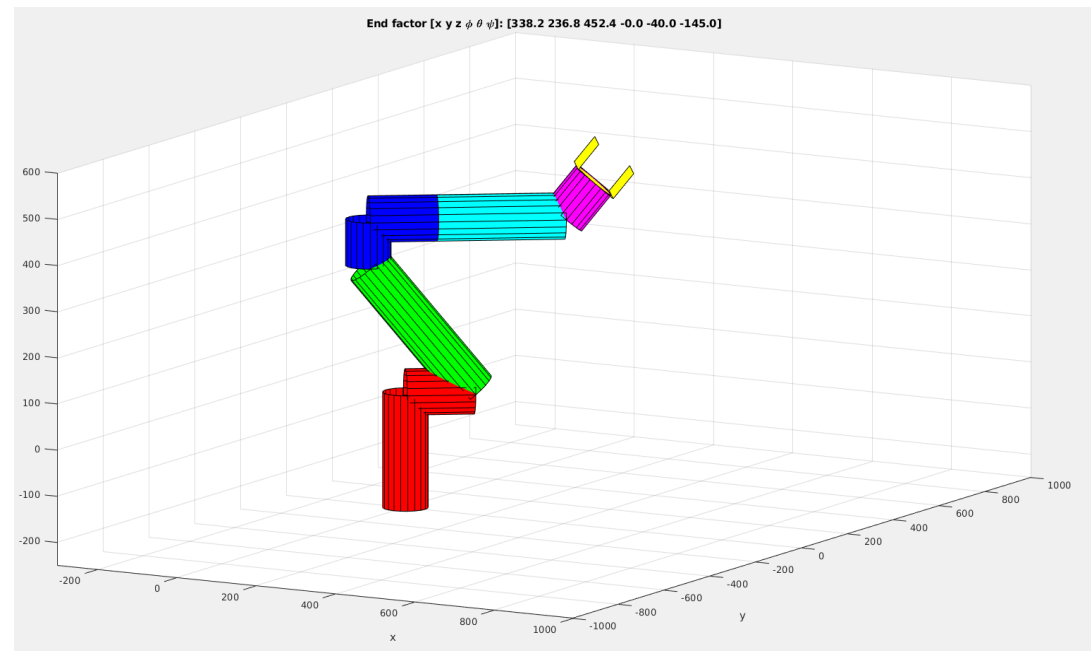
$$r_1 = [526.0 \quad 368.3 \quad 177.6 \quad 0.0 \quad -80.0 \quad -145]$$

End factor simulado

$$r_1 = [526.0 \quad 368.3 \quad 177.6 \quad 0 \quad -80.0 \quad -145.0]$$

Espaço de juntas calculado com cinemática inversa
(espaço de redundâncias [1,-1,1])

$$q_1 = [34.9991 \quad -0.0024 \quad -39.9982 \quad 0.0011 \quad 49.9957 \quad -0.0009]$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_2 = [35 \quad -40 \quad 0 \quad 0 \quad 50 \quad 0]$$

End factor lido no manipulador Fanuc

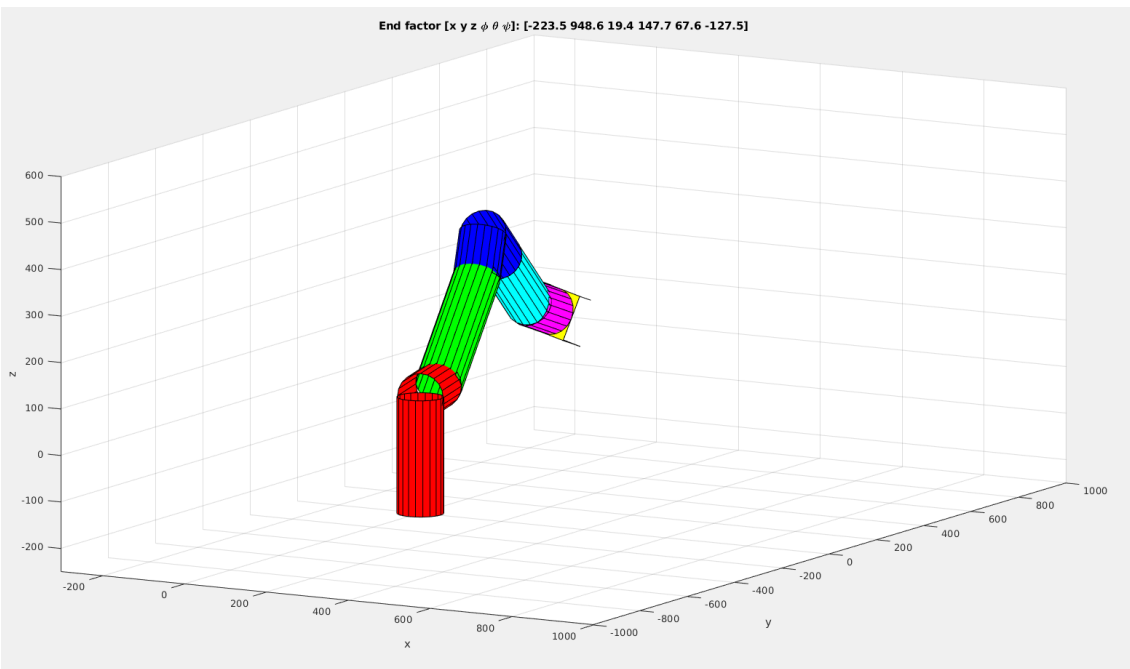
$$r_2 = [338.2 \quad 236.8 \quad 452.4 \quad 0 \quad -40.0 \quad -145.0]$$

End factor simulado

$$r_2 = [338.2 \quad 236.8 \quad 452.4 \quad 0 \quad -40.0 \quad -145.0]$$

Espaço de juntas calculado com cinemática inversa
(espaço de redundâncias [1,-1,1])

$$q_2 = [35.0004 \quad -39.9992 \quad -39.9997 \quad -0.0003 \quad 50.0005 \quad 0.0005]$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_i = [105 \quad 60 \quad -30 \quad 120 \quad -20 \quad 40]$$

End factor lido no manipulador Fanuc

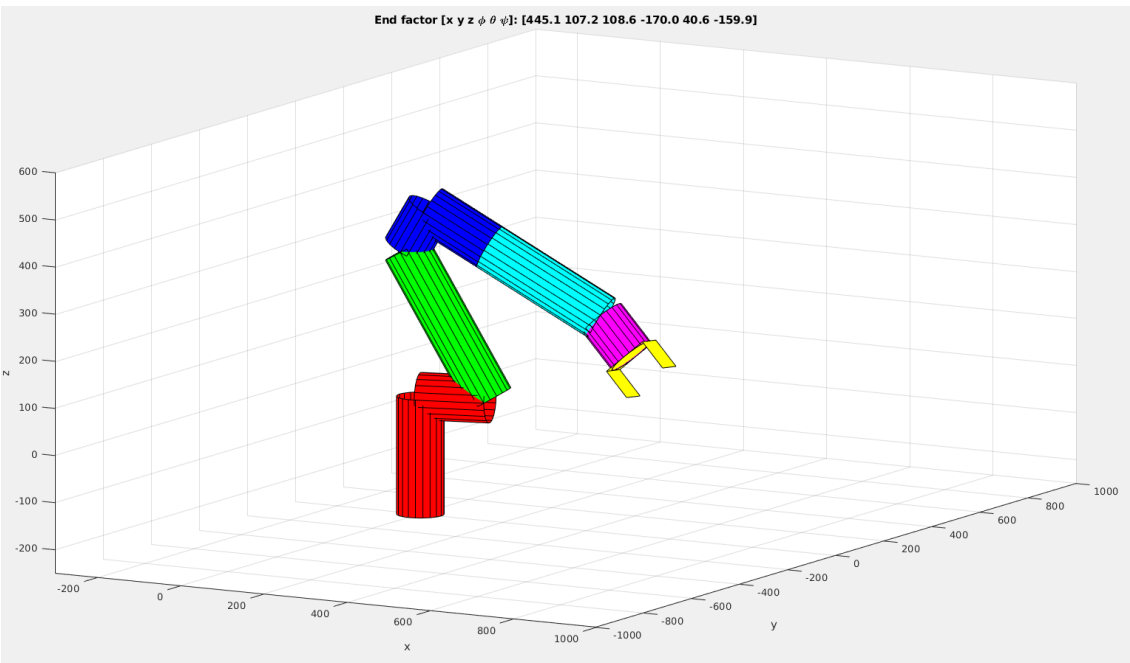
$$r_i = [-223.5 \quad 948.6 \quad 19.4 \quad 147.7 \quad 67.6 \quad -127.5]$$

End factor simulado

$$r_i = [-223 \quad 948.6 \quad 19.4 \quad 147.7 \quad 67.6 \quad -127.5]$$

Espaço de juntas calculado com cinemática inversa
(espaço de redundâncias [1,-1,1])

$$q_i = [104.9895 \quad 59.9988 \quad 29.9989 \quad -59.8751 \quad 19.9091 \quad -140.1207]$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_f = [15 \quad -30 \quad -30 \quad 20 \quad -20 \quad 165]$$

End factor lido no manipulador Fanuc

$$r_f = [445.1 \quad 107.2 \quad 108.5 \quad -169.9 \quad 40.6 \quad -159.9]$$

End factor simulado

$$r_f = [445.1 \quad 107.2 \quad 108.6 \quad -170.0 \quad 40.6 \quad -159.9]$$

Espaço de juntas calculado com cinemática inversa
(espaço de redundâncias [1,-1,1])

$$q_f = [14.9921 \quad -30.0203 \quad -60.0114 \quad -160.1363 \quad 19.9438 \quad -14.8556]$$

Espaço de redundancias admissíveis

Redundância do ombro	Redundância do cotovelo	Redundância do punho	solução
-1	-1	-1	Inadmissível
-1	-1	1	Inadmissível
-1	1	-1	Inadmissível
-1	1	1	Inadmissível
1	-1	-1	Admissível
1	-1	1	Admissível
1	1	-1	Inadmissível
1	1	1	Inadmissível