Cinemática direta e inversa de um robô FANUC

- Robótica Industrial
- Trabalho 5

- Francisco Power nº84706
- Pedro Rolo nº84803

Tabela de Denavit-Hartenberg

Elo	theta	alfa	L	D
A	θ_1	$-\pi/2$	LB	LA
B	$\theta_2-\pi/2$	π	LC	0
C	θ_3	$-\pi/2$	LD	0
C_1	0	0	0	-LE
D	θ_4	$\pi/2$	0	0
E	θ_5	$-\pi/2$	0	0
F	θ_6	π	0	-LF

A partir dos dados desta tabela, é possível calcular as matrizes de transformação entre referenciais:

$$^{O}T_a = \begin{bmatrix} C_\theta & -S_\theta C_\alpha & S_\theta S_\alpha & LC_\theta \\ S_\theta & C_\theta C_\alpha & -S_\alpha C_\theta & LS_\theta \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha & D \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

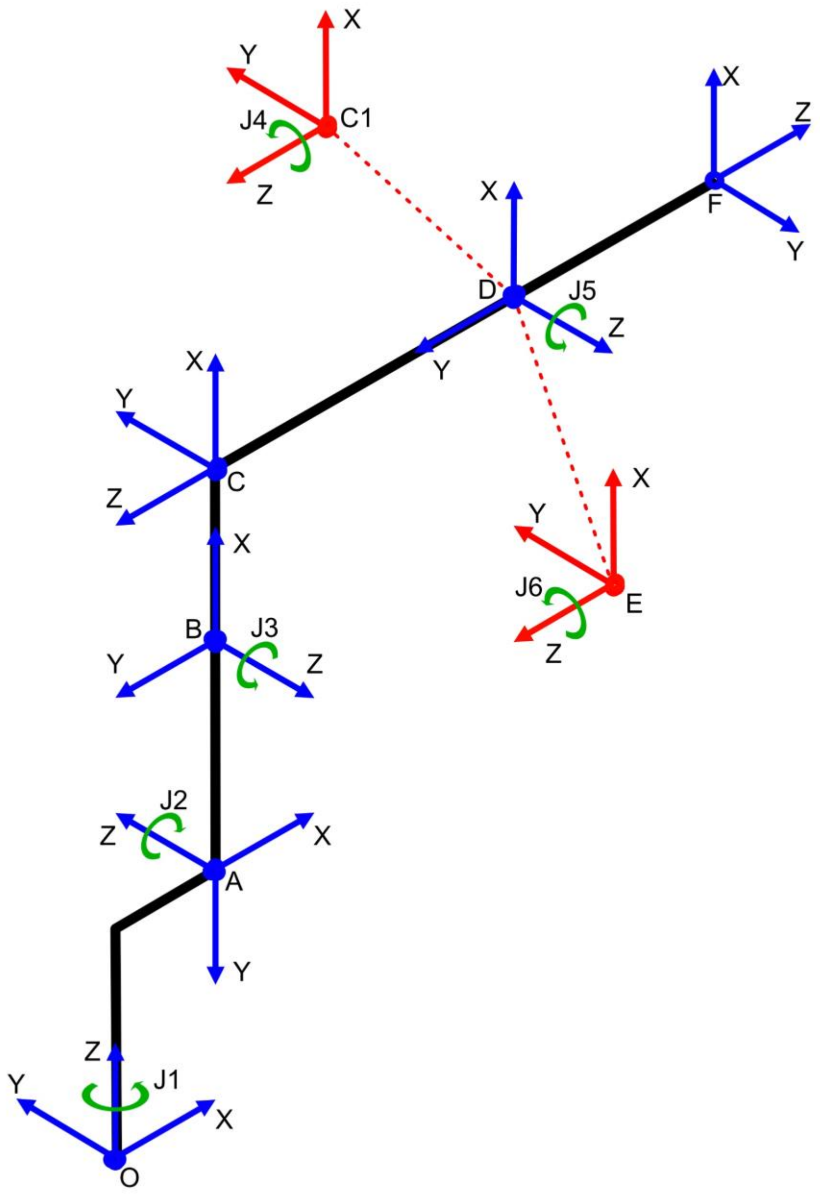


Fig.1 sistemas de coordenadas.

Cinemática Inversa

- Matriz de transformação genérica:

$$
{}^{O}T_f = \begin{bmatrix} C_\theta C_\psi & S_\phi C_\psi S_\theta - C_\phi S_\psi & C_\phi C_\psi S_\theta + S_\phi S_\psi & p_x \\ C_\theta S_\psi & C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi S_\theta & -S_\phi C_\psi + C_\phi S_\psi S_\theta & p_y \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\phi C_\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Calculo do Pw:

$$
\vec{P_w} = \vec{P} - L_F \cdot \vec{a}
$$

$$
\vec{P_w} = \begin{bmatrix} P_{wx} \\ P_{wy} \\ P_{wz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - LF(S_\phi S_\psi + C_\phi C_\psi S_\theta) \\ y + LF(C_\psi S_\phi - C_\phi S_\psi S_\theta) \\ z - LF C_\phi C_\theta \end{bmatrix}
$$

- Matriz de transformação até Pw:

$$
{}^{O}T_w = {}^{O}T_a \cdot {}^{a}T_b \cdot {}^{b}T_c \cdot {}^{c}T_{c1}
$$

$$
{}^{O}T_w = \begin{bmatrix} S_{2-3}C_1 & -S_1 & -C_{2-3}C_1 & C_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3}) \\ S_{2-3}S_1 & C_1 & -C_{2-3}S_1 & S_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3}) \\ C_{2-3} & 0 & S_{2-3} & L_A + L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Calculo dos valores dos ângulos relativos á posição

- Calculo do θ_1 :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{C_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3})}{S_1(L_B + L_C S_2 + L_E C_{2-3} + L_D S_{2-3})}\right) = \arctan\left(\frac{P_{wy}}{P_{wx}}\right)$$

- Calculo do θ_3 :

$$(\sqrt{P_{wx}^2 + P_{wy}^2} - L_B)^2 + {P_{wz}}^2 = d^2$$

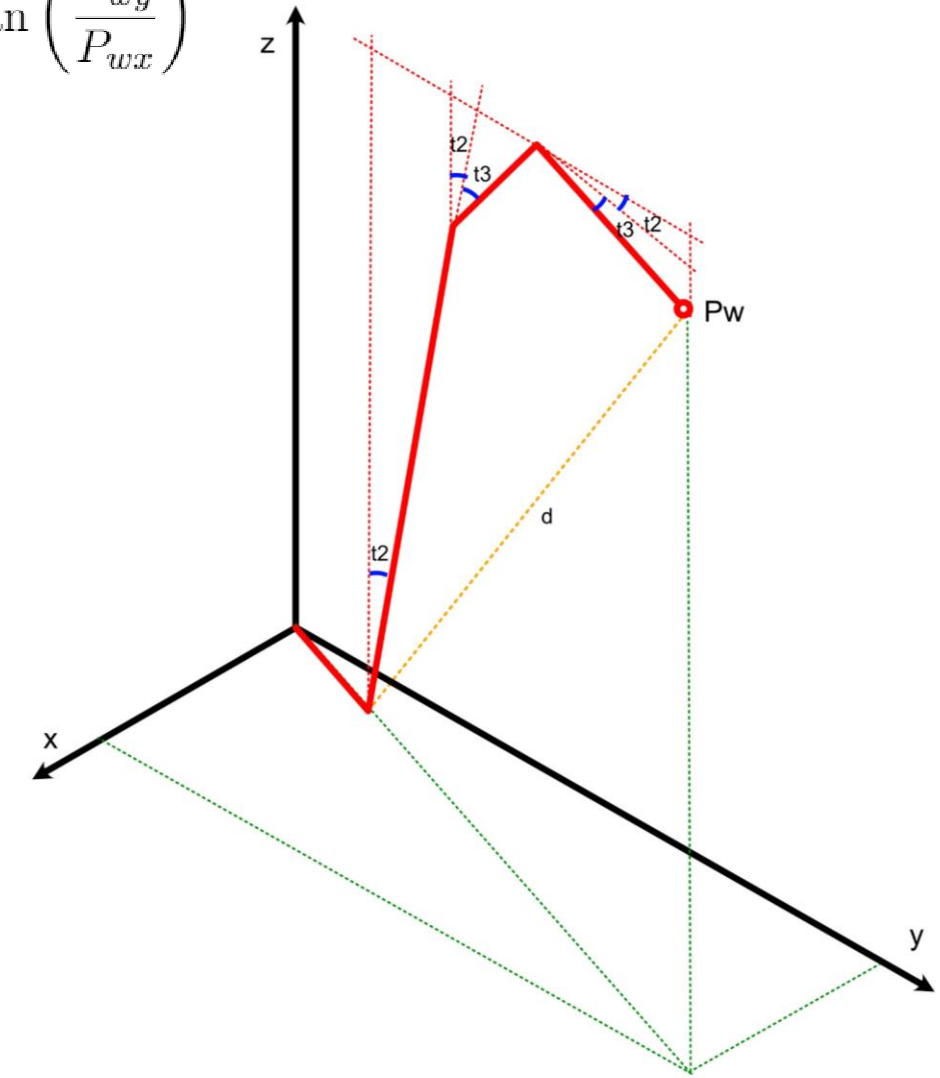
$$d^2 = (L_C S_2 + L_D S_{2-3} + L_E C_{2-3})^2 + (L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3})^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = L_C^2 + L_D^2 + L_E^2 + 2L_C L_D C_3 + 2L_C L_E S_3$$

$$\Leftrightarrow d^2 - L_C^2 - L_D^2 - L_E^2 = 2L_C L_D C_3 + 2L_C L_E S_3$$

$$\Leftrightarrow K_3 = K_1 C_3 + K_2 S_3$$

$$\Leftrightarrow \theta_3 = 2 \cdot \arctan\left(\frac{K_2 \pm \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2 - {K_3}^2}}{K_1 + K_3}\right)$$



- Calculo do θ_2:

$$\sqrt{P_{wx}^2 + P_{wy}^2} - L_B = d_1$$

$$d_1 = L_C S_2 + L_D S_{2-3} + L_E C_{2-3}$$

$$\Leftrightarrow d_1 = L_C S_2 + L_D S_2 C_3 - L_D S_3 C_2 + L_E C_2 C_3 + L_E S_2 S_3$$

$$\Leftrightarrow d_1 = S_2(L_C + L_D C_3 + L_E S_3) + C_2(L_E C_3 - L_D S_3)$$

$$\mathrm{P}_{wz} = d_2$$

$$d_2 = L_C C_2 + L_D C_{2-3} - L_E S_{2-3}$$

$$\Leftrightarrow d_2 = L_C C_2 + L_D C_2 C_3 + L_D S_2 S_3 - L_E S_2 C_3 + L_E C_2 S_3$$

$$\Leftrightarrow d_2 = -S_2(L_E C_3 - L_D S_3) + C_2(L_C + L_D C_3 + L_D S_3)$$

Das equações ao lado sai:

$$l1 = L_C + L_D C_3 + L_D S_3$$
$$l2 = L_E C_3 - L_D S_3$$

Resolvendo em ordem a C_2 e S_2, chega-se a uma expressão para θ_2 :

$$\begin{cases} C_2 = \frac{d_1 - l_1 S_2}{l_2} \\ S_2 = \frac{l_1 C_2 - d_2}{l_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{l_2 d_1 + l_1 d_2}{l_1^2 + l_2^2} \\ \theta_2 = \arcsin\left(\frac{l_1 C_2 - d_2}{l_2}\right) \end{cases}$$

Calculo dos valores dos ângulos relativos à orientação

$$ {}^{w}T_f = {}^{c1}T_d \cdot {}^{d}T_e \cdot {}^{e}T_f \; = \begin{bmatrix} C_4C_5C_5 - S_4S_6 & C_6S_4 + C_4C_5S_6 & C_4S_5 & L_fC_4S_5 \\ C_4S_6 + C_5C_6S - 4 & C_5S_4S_6 - C_4C_6 & S_4S_5 & L_fS_4S_5 \\ C_6S_5 & S_6S_5 & -C_5 & -L_fC_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Desta matriz podemos deduzir as expressões para θ_4 , θ_5 e θ_6

$$ \theta_5 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{(C_4S_5)^2 + (S_4S_5)^2}}{C_5}\right) = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}}{-a_3}\right) $$

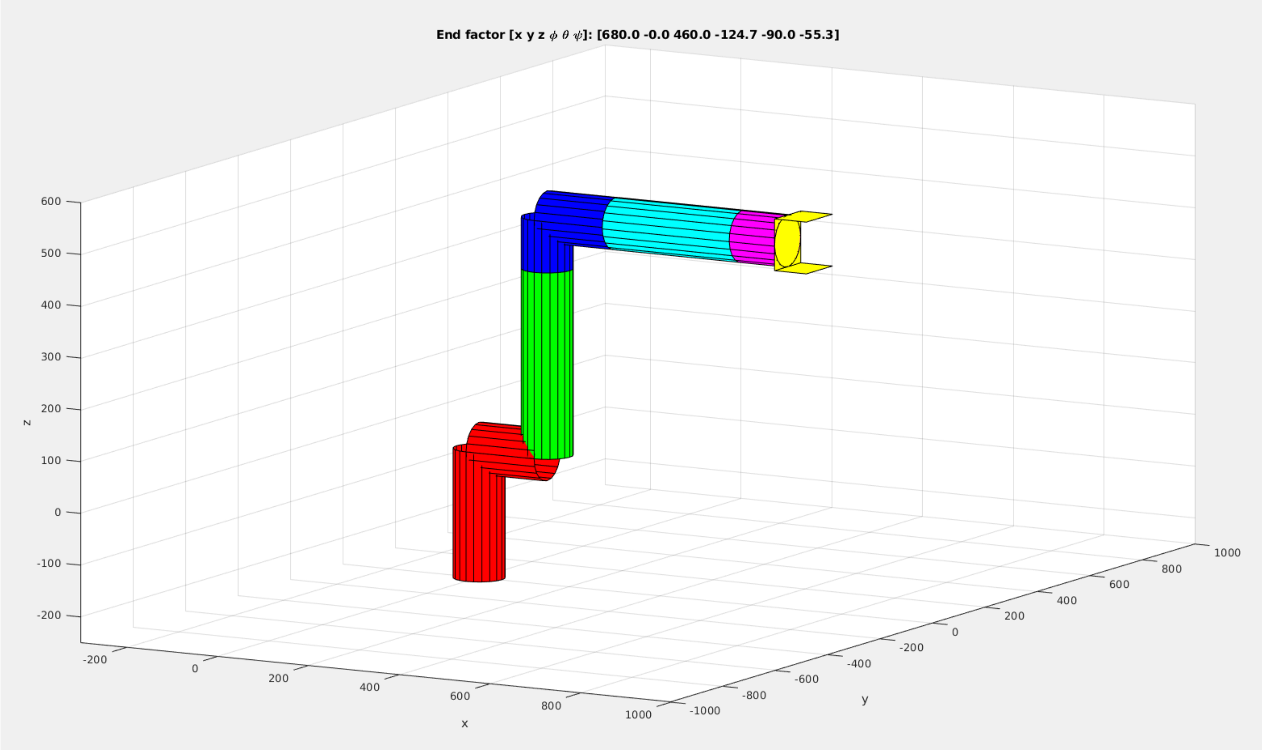
$$ \theta_4 = \arctan\left(\frac{S_4S_5}{C_4S_5}\right) = \arctan\left(\frac{a_2}{a_1}\right) $$

$$ \theta_6 = \arctan\left(\frac{S_6S_5}{C_6S_5}\right) = \arctan\left(\frac{s_3}{n_3}\right) $$

Onde os valores de *n, s* e *a* são retirados da matriz calculada da seguinte forma:

$$ {}^{w}T_f = ({}^{O}T_w)^{-1} \cdot ({}^{O}T_f) = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 & a_1 & x \\ n_2 & s_2 & a_2 & y \\ n_3 & s_3 & a_3 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Resultados obtidos



Espaço de juntas fornecido

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

End factor lido no manipulador Fanuc

$$r_0 = \begin{bmatrix} 680.0 & 0.0 & 459.9 & 154.1 & -89.9 & 24.5 \end{bmatrix}$$

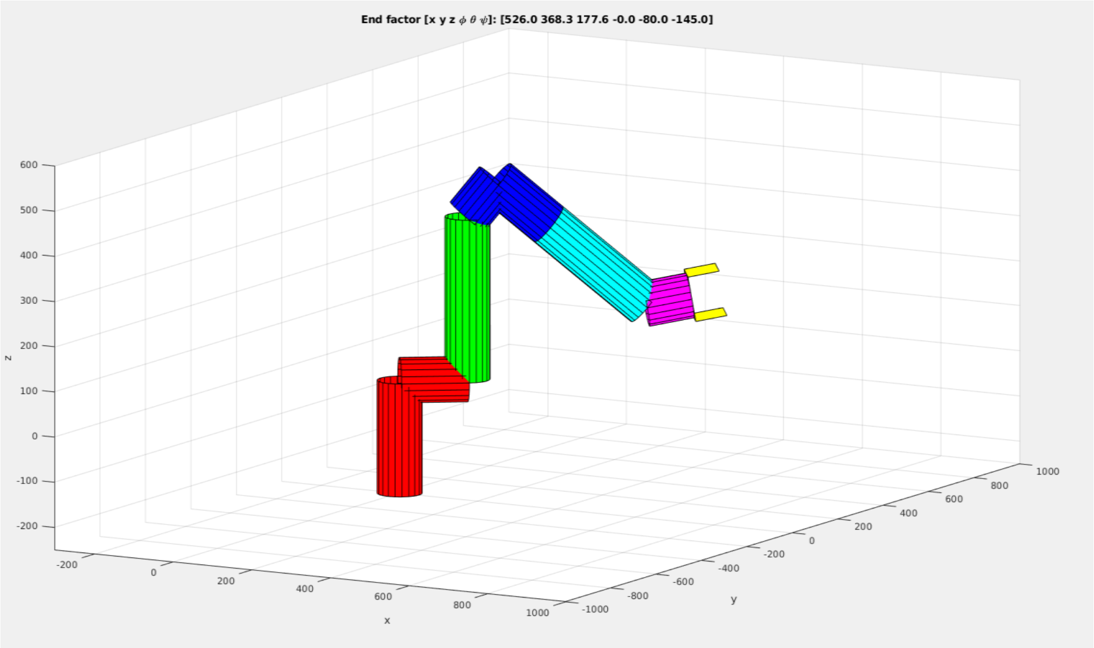
End factor simulado

$$r_0 = \begin{bmatrix} 680.0 & 0 & 460 & -135.0 & -90.0 & -45 \end{bmatrix}$$

Espaço de juntas calculado com cinematica inversa (espaço de redundancias [1,-1,1]

$$q_0 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0 & 0 & 86.8077 & 0.0000 & -86.8077 \end{bmatrix}$$

NOTA: os valores de θ_3 apresentados não são os introduzidos no robô Fanuc.
Esses são iguais a θ_3 - θ_2 , tendo sido esses os fornecidos no enunciado.



Espaço de juntas fornecido

$$q_1 = \begin{bmatrix} 35 & 0 & -40 & 0 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$

End factor lido no manipulador Fanuc

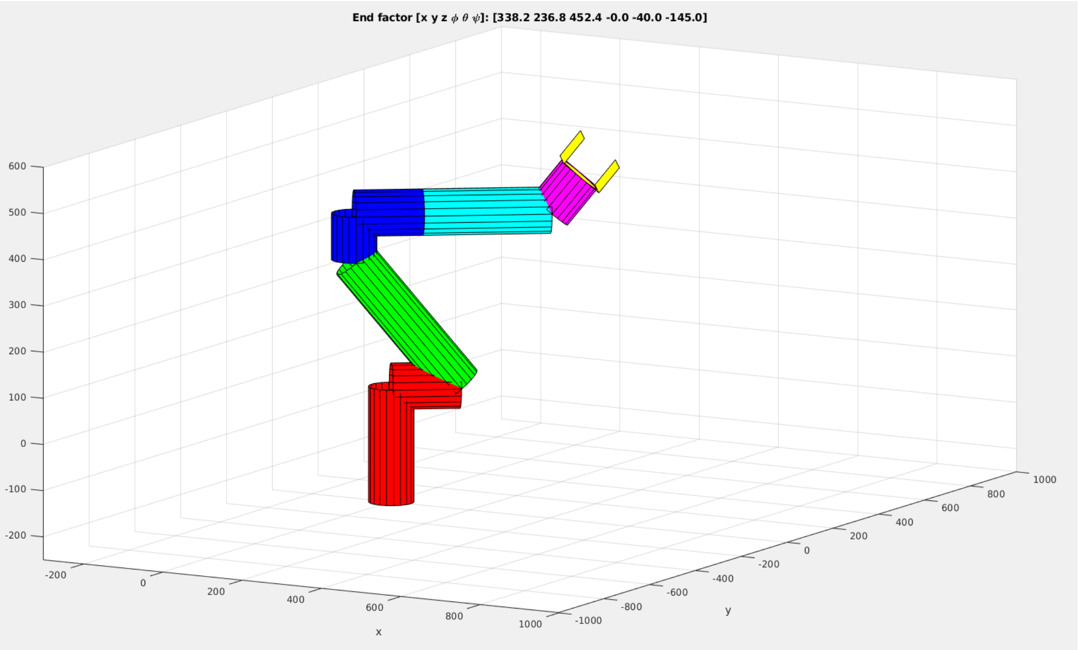
$$r_1 = \begin{bmatrix} 526.0 & 368.3 & 177.6 & 0.0 & -80.0 & -145 \end{bmatrix}$$

End factor simulado

$$r_1 = \begin{bmatrix} 526.0 & 368.3 & 177.6 & 0 & -80.0 & -145.0 & \end{bmatrix}$$

Espaço de juntas calculado com cinematica inversa (espaço de redundancias [1,-1,1]

$$q_1 = \begin{bmatrix} 34.9991 & -0.0024 & -39.9982 & 0.0011 & 49.9957 & -0.0009 & \end{bmatrix}$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_2 = \begin{bmatrix} 35 & -40 & 0 & 0 & -40.0 & -145.0 & \end{bmatrix}$$

End factor lido no manipulador Fanuc

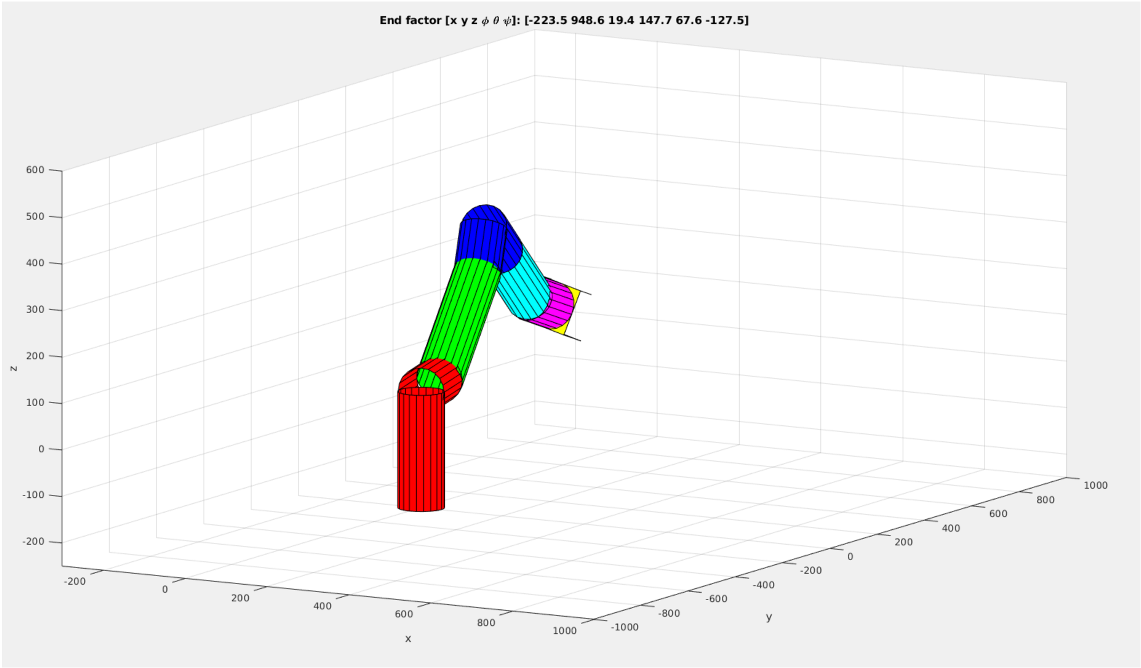
$$r_2 = \begin{bmatrix} 338.2 & 236.8 & 452.37 & 0.0 & 50 & 0 & \end{bmatrix}$$

End factor simulado

$$r_2 = \begin{bmatrix} 338.2 & 236.8 & 452.4 & 0 & -40.0 & -145.0 \end{bmatrix}$$

Espaço de juntas calculado com cinematica inversa (espaço de redundancias [1,-1,1]

$$q_2 = \begin{bmatrix} 35.0004 & -39.9992 & -39.9997 & -0.0003 & 50.0005 & 0.0005 & \end{bmatrix}$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_i = \begin{bmatrix} 105 & 60 & -30 & 120 & -20 & 40 \end{bmatrix}$$

End factor lido no manipulador Fanuc

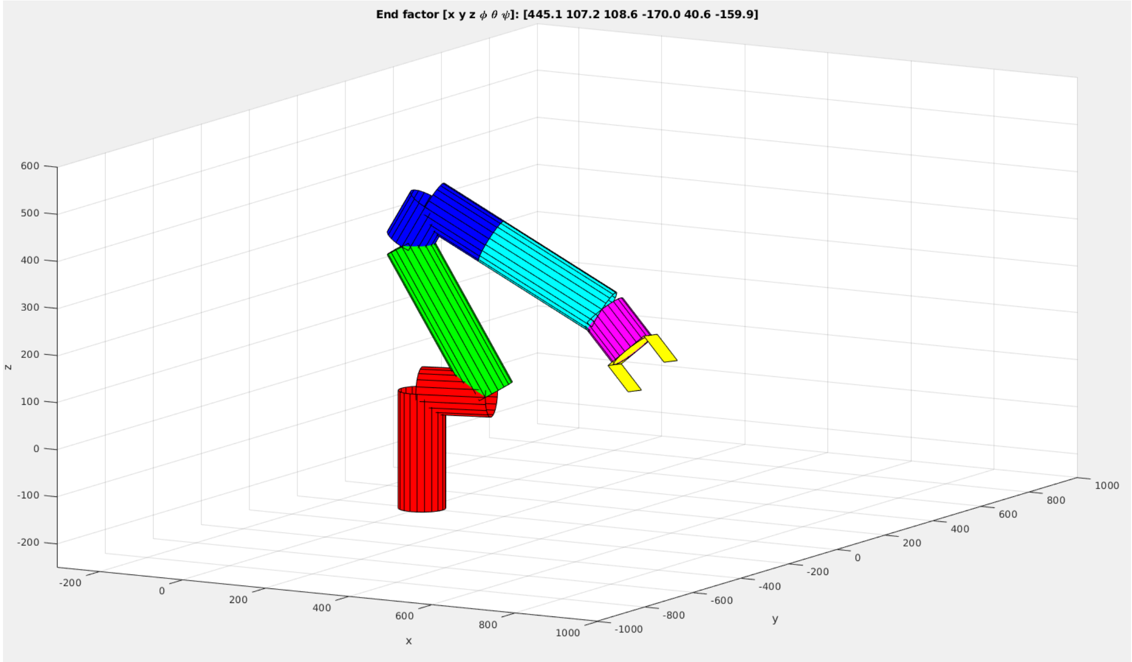
$$r_i = \begin{bmatrix} -223.5 & 948.6 & 19.4 & 147.7 & 67.6 & -127.5 \end{bmatrix}$$

End factor simulado

$$r_i = \begin{bmatrix} -223 & 948.6 & 19.4 & 147.7 & 67.6 & -127.5 \end{bmatrix}$$

Espaço de juntas calculado com cinematica inversa (espaço de redundancias [1,-1,1]

$$q_i = \begin{bmatrix} 104.9895 & 59.9988 & 29.9989 & -59.8751 & 19.9091 & -140.1207 \end{bmatrix}$$



Espaço de juntas fornecido

$$q_f = \begin{bmatrix} 15 & -30 & -30 & 20 & -20 & 165 \end{bmatrix}$$

End factor lido no manipulador Fanuc

$$r_f = \begin{bmatrix} 445.1 & 107.2 & 108.5 & -169.9 & 40.6 & -159.9 \end{bmatrix}$$

End factor simulado

$$r_f = \begin{bmatrix} 445.1 & 107.2 & 108.6 & -170.0 & 40.6 & -159.9 \end{bmatrix}$$

Espaço de juntas calculado com cinematica inversa (espaço de redundancias [1,-1,1]

$$q_f = \begin{bmatrix} 14.9921 & -30.0203 & -60.0114 & -160.1363 & 19.9438 & -14.8556 \end{bmatrix}$$

Espaço de redundancias admissíveis

Redundância do ombro	Redundância do cotovelo	Redundância do punho	solução
-1	-1	-1	Inadmissível
-1	-1	1	Inadmissível
-1	1	-1	Inadmissível
-1	1	1	Inadmissível
1	-1	-1	Admissível
1	-1	1	Admissível
1	1	-1	Inadmissível
1	1	1	Inadmissível