

Aula 10: Primitivação de funções racionais (I)

Integração de funções racionais

A seguir vamos ver como integrar funções do tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo.

A este tipo de funções chamamos **função racional**.

(1) Se $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma **fracção própria**.

(2) Se $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$, existem polinómios Q e R tais que $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$ e

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x).$$

$$\begin{array}{r} N(x) \mid D(x) \\ R(x) \quad Q(x) \end{array}$$

Aos polinómios Q e R chamamos, respectivamente, **quociente** e **resto** da divisão de N por D .

Aula 10: Primitivação de funções racionais (II)

Uma vez que D é um polinómio não nulo, resulta da igualdade anterior

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} .$$

Consequentemente,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx .$$

Observação: Como toda a função polinomial tem uma primitiva imediata, a integração de funções racionais reduz-se ao cálculo de primitivas imediatas e à primitivação de fracções próprias.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (III)

Definição: Chamamos **fracção simples** a toda a fracção do tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de fracções simples:

$$\frac{2}{x - 4}, \quad \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad \frac{1}{x^2 + 2x + 1}, \quad \frac{3x + 5}{(x^2 + x + 1)^3}$$

Proposição: Toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (IV)

Decomposição em fracções simples de $\frac{R(x)}{D(x)}$ com $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

1. Decompor o polinómio $D(x)$ em factores irreduzíveis. Isto é, escrever

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_n)^{p_n} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{q_1} \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{q_m}$$

onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

2. Fazer corresponder a cada factor de $D(x)$ uma determinada fracção simples de acordo com o seguinte:

- (i) Ao factor de $D(x)$ do tipo $(x - \alpha)^r$ ($r \in \mathbb{N}$) corresponde

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r}$$

onde A_1, \dots, A_r são constantes reais a determinar.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (V)

(ii) Ao factor de $D(x)$ do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \text{ com } \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ e } s \in \mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $i = 1, \dots, s$.

(coeficientes indeterminados)

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo
$$\frac{x+1}{x(x-1)^2(x^2+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{(x-1)^1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{C_1x + D_1}{(x^2+1)^1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2+1)^2} + \frac{C_3x + D_3}{(x^2+1)^3}$$

Aula 10: Primitivação de funções racionais (VI)

Fracções Simples:

$$\frac{A}{bx^2 + c} \rightsquigarrow \text{imediata} ,$$

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a} \frac{2ax + b + D}{ax^2 + bx + c} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\ \frac{D}{ax^2 + bx + c} = \frac{D}{a[(x + \frac{b}{2a})^2 + k^2]} \rightsquigarrow x + \frac{b}{2a} = k \operatorname{tg} t , \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$

Funções racionais envolvendo funções trigonométricas no seu argumento.

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t , \quad \frac{P(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)}{Q(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

Aula 10: Exercícios 1

Exemplo 5.7. $\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x} dx$

Exemplo 5.8. Como calcular $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)^3} dx$?

Exemplo 5.9. Como calcular $\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x + 1)(x^2 + 1)} dx$?

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$

Exemplo 5.11. $\int \frac{1}{(1 + x^2)^2} dx$

substituição: $x = \operatorname{tg} t$

Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x) dx$

f contém

Substituição

$$\sqrt[k]{a + bx} \rightsquigarrow \sqrt[k]{a + bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$$

$${}^{k_1}\sqrt{(a+bx)^{t_1}}, {}^{k_2}\sqrt{(a+bx)^{t_2}}, \dots, {}^{k_n}\sqrt{(a+bx)^{t_n}} \rightsquigarrow k = \text{mmc}(k_1, k_2, \dots, k_n), \quad \sqrt[k]{a+bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} \rightsquigarrow x = a \operatorname{tg} t$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} \rightsquigarrow x = a \operatorname{sen} t$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} \rightsquigarrow x = a \operatorname{sec} t$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \rightsquigarrow x + \frac{b}{2a} = z \quad \Updownarrow$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + K \right]$$

Fracções Simples: $\frac{A}{bx^2 + c} \rightsquigarrow$ imediata

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t, \quad \frac{P(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)}{Q(\operatorname{sen} x, \operatorname{cos} x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{2a} \frac{2ax + b + D}{ax^2 + bx + c} \rightsquigarrow \begin{cases} \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\ \frac{D}{ax^2 + bx + c} = \frac{D}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + k^2 \right]} \rightsquigarrow x + \frac{b}{2a} = k \operatorname{tg} t, \quad t \in]0, \frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$$\begin{aligned}
 (u^p)' &= p u^{p-1} u' & (\arcsen(u))' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
 (\ln u)' &= \frac{u'}{u} & (\arctg(u))' &= \frac{u'}{1+u^2} \\
 (\cos u)' &= -u' \sen u & (\sec u)' &= u' \sec(u) \tg(u) \\
 (\sen u)' &= u' \cos u & (\csc u)' &= -u' \csc(u) \cotg(u) \\
 (\tg u)' &= u' \sec^2 u & (e^u)' &= u' e^u \\
 (\cotg u)' &= -u' \csc^2 u & (a^u)' &= \frac{u' a^u}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\
 (\sinh^{-1} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} & (uv)' &= u'v + uv' \\
 (\tgh u)' &= u' \sech^2 u & (\sech u)' &= -u' \sech u \tgh u \\
 (\sinh^{-1} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} & (\tgh^{-1} u)' &= \frac{u'}{1-u^2}
 \end{aligned}$$

$$\int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C$$

$$\int u' \sin u dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + C$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + C$$

$$\int u' \csc u \cotg u dx = -\csc u + C$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' \csc^2 u dx = -\cotg u + C$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1} u + C$$

$$\int u'v + uv' dx = uv + C$$

$$\int u' \sech^2 u dx = \tgh u + C$$

$$\int u' \sech u \tgh u dx = -\sech u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2} dx = \tgh^{-1} u + C$$

$$\int u' \sec u dx = \ln |\sec u + \tg u| + C$$