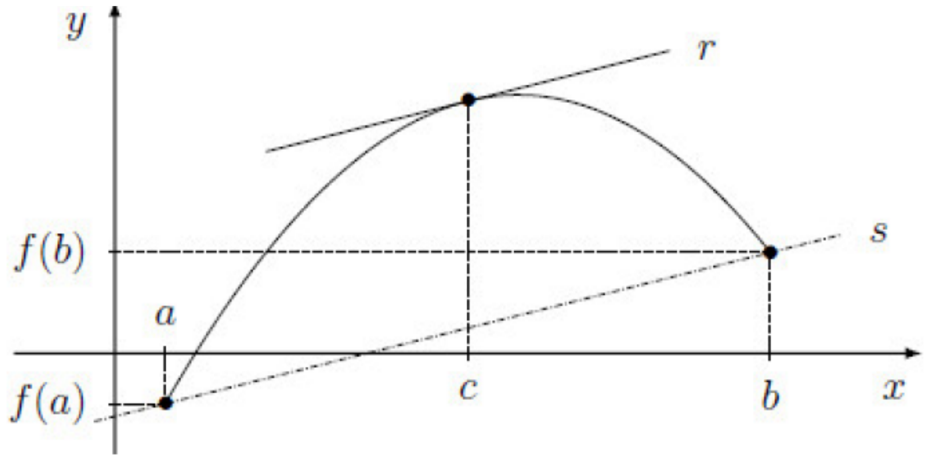
Aula 4: Teoremas sobre funções deriváveis - Teorema de Lagrange

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Exercício 4.5 Seja $f : [3, 2+e] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \ln(x-2)$. Verifique que f satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.

Aula 5: Corolários do teorema de Lagrange

Corolário 3. *Sendo f uma função definida e derivável num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (com mais de um ponto) tal que $f'(x) = 0$, $\forall x \in I$, então f é uma função constante em I.*

Corolário 4. *Se f e g são funções deriváveis em D e $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in D$, então em cada intervalo $I \subseteq D$ existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$, $\forall x \in I$.*

Corolário 5. *Se f é uma função derivável em I e para todo o x pertencente a um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ (com mais de um ponto) se tiver $f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente em I e, se for $f'(x) < 0$, $\forall x \in I$, então f é estritamente decrescente em I.*

Corolário 6. *Dadas duas funções $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deriváveis, então*

$$f(a) \leq g(a) \ \wedge \ f'(x) \leq g'(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x), \ \forall x \in [a, b[.$$

Aula 5: Exercícios 1

Exercício 4.6

1. Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \forall\, x \in [-1, 1]$.

2. Estude o domínio e o gráfico de $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$. (Ajuda: calcule f'!)

3. Estude o domínio e o gráfico de $g(x) = \operatorname{tgh}^{-1} x - \operatorname{cotgh}^{-1} \frac{1}{x}$.

Exemplo 4.3 Mostre que $f(x) = x + k \operatorname{sen} x$ é invertível se e só se $|k| \leq 1$.

Sol. Ex.4.6:

2. $\forall\, x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}, \ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

3. $\forall\, x \in]-1, 1[\backslash \{0\}, \ \operatorname{cotgh}^{-1}(\frac{1}{x}) = \operatorname{tgh}^{-1} x$.