Aula 6: Exercícios 1

Lema Seja f contínua em c e derivável numa vizinhança própria de c (i.e., sem c). Aplicando a Regra de Cauchy temos:

- Se $\lim\limits_{x\to c^-} f'(x)=k$, então $f'_-(c)=k$.
- Se $\lim\limits_{x\to c^+} f'(x)=k$, então $f'_+(c)=k$.
- *Se* $\lim\limits_{x\to c} f'(x)=k$, então $f'(c)=k$.
- $f'_-(c) = f'_+(c)=k$ se e só se $f'(c) = k$.

Exemplo 4.7, 4.20 Caracterize a derivada das funções definidas por

$$\mathrm{h}(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad g(x)=\begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad f(x)=\begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que (1) f é contínua em R; (2) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$

(3) não existe o $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ (4) f é derivável em $x = 0$

Aula 7: Polinómio de Taylor

Seja f uma função com derivadas finitas até ordem n num intervalo (aberto) I contendo c. O polinómio de Taylor de f de grau n em $x = c$, é o polinómio $P(x) = a_0 + a_2 x + a_2 x^2 + \dot{+} a_n x^n$ que satifaz: $P(c) = f(c)$, $P'(c) = f'(c)$, $P''(c) = f''(c), \cdots, P^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$. O polinómio solução deste sistema é

$$T_c^n f = P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Portanto, $T_c^1 f = f(c) + f'(c)(x-c)\,,\ T_c^2 f = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2.$

Exemplos:

$T_0^2 \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2}$, $T_0^3 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$, $T_0^2 \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2$

$T_0^1 \operatorname{sen} x = T_0^2 \operatorname{sen} x = x\,,\ T_0^3 \operatorname{sen} x = T_0^4 \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!}\,,\ T_0^5 \operatorname{sen} x = T_0^6 \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$T_0^2 \operatorname{senh} x = x\,,\ T_0^3 \operatorname{senh} x = T_0^4 \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!}\,,\ T_0^5 \operatorname{senh} x = T_0^6 \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

$T_0^2 \cos x = T_0^3 \cos x = x - \frac{x^2}{2!}$, $T_0^4 \cos x = T_0^5 \cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

$T_0^2 \cosh x = T_0^3 \cosh x = x + \frac{x^2}{2!}$, $T_0^4 \cosh x = T_0^5 \cosh x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$

Aula 7: Utilidade do polinómio de Taylor

O polinómio de Taylor de f de grau n em $x = c$,

$$T_c^n f = P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

é um polinómio cujo gráfico é tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Logo o polinómio de Taylor aproxima os valores de f numa vizinhança de c. Quanto maior for o grau, maior é a aproximação (em geral - funções analíticas). O pol. de Taylor de grau 1, $T_c^1 f = f(c) + f'(c)(x-c)$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, enquanto que o pol. de Taylor de grau 2, $T_c^2 f = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$ é a parábola tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.
A maior utilidade do polinómio de Taylor é calcular valores aproximados da função f em pontos x_0 que não conseguimos saber o seu valor exato.

Exemplo: Calcule o valor aproximado de: **1.** $\operatorname{sen}(1)$ **2.** $e = 2,7....$

Se uma função f for derivável até a segunda ordem e $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, então $(c, f(c))$ é extremo local da função. Neste caso o pol. de Taylor de grau 1 em c (reta tangente) é horizontal e o pol. de Taylor de grau 2 em c é uma parábola com vértice em $(c, f(c))$, logo mínimo se tiver concavidade para cima $f''(c) > 0$ e máximo se a concavidade for para baixo $f''(c) < 0$. Útil se conseguirmos apenas calcular a 1^a e a 2^a derivada de f em c.

$$\begin{cases} f'(c) = 0; \\ f''(c) < 0. \end{cases} \Rightarrow (c, f(c)) \text{ é máximo local.} \qquad \begin{cases} f'(c) = 0; \\ f''(c) > 0. \end{cases} \Rightarrow (c, f(c)) \text{ é mínimo local.}$$

Primitivas

Aula 7: Primitiva de uma função

De ora em diante I designa um intervalo não degenerado.

Definição: Dada uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função $F : I \to \mathbb{R}$ derivável em I diz-se uma **primitiva** de f em I se $F'(x) = f(x), \forall\, x \in I$.

Note-se que F, por ser derivável, é uma função contínua em I.
Se $f'(x) = g(x)$, então $f(x)$ é uma primitiva de $g(x)$. Logo da tabela das derivadas obtemos uma tabela das primitivas. Exemplo: $\operatorname{sen}' x = \cos x$, logo $\operatorname{sen} x$ é uma primitiva de $\cos x$. Como $(\operatorname{sen} x + c)' = \operatorname{sen}' x = \cos x$, então para qualquer constante c, $\operatorname{sen} x + c$ é uma primitiva de $\cos x$. Quantas mais primitivas diferente podemos ter?

Teorema 5.1 Se $F : I \to \mathbb{R}$ e $G := I \to \mathbb{R}$ são duas primitivas de $f : I \to \mathbb{R}$, então existe uma constante C tal que $G(x) = F(x) + C, \forall\, x \in I$.

De facto, $(F(x) - G(x))' = 0, \forall\, x \in I$, logo $F(x) - G(x) = C$ é constante em I.
Portanto, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de todas as primitivas de $f(x)$. Designaremos este conjunto por $\int f(x)dx$ mas na prática escrevemos:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Aula 7: Função primitivável (exemplos)

Seja f uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se f admite uma primitiva F em I, dizemos que f é primitivável em I.

- Se F é uma primitiva de f em $I \subset \mathbb{R}$, então F é contínua em I.
- Se f é primitivável em I, f pode não ser contínua em I.
  Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ não é contínua em 0, no entanto é primitivável em $\mathbb{R}$, uma primitiva é $F(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.
- Nem toda a função é primitivável em I. Exemplo: a função $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ não é primitivável em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.2 Toda a função contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é primitivável em I.

Exercício 2: Se a taxa de variação (taxa de crescimento, ou taxa de declínio) da população de uma cidade é dada pela função $f(t) = 12t^2 - 6t + 120$ (t anos) e atualmente habitam 10000 habitantes, qual será a população da cidade daqui a 3 anos?

Aula 7: Primitivas imediatas

As primitivas imediatas são as primitivas resultantes de $\int f'(x)dx = f(x) + C$, isto é, as primitivas resultantes da inversão da tabela de derivação:

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f' \\ \hline f(x) & & g(x) \\ \hline F & \longleftarrow & f \end{array} \qquad f'(x) = g(x) \longrightarrow \int g(x)dx = f(x) + C.$$

- $(e^x)' = e^x, \longrightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \longrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
- $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x, \longrightarrow \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x, \longrightarrow \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x, \longrightarrow \int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \operatorname{tgh} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{cosech}^2 x, \longrightarrow \int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = \operatorname{cotgh} x + C,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $(\operatorname{senh}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh} x + C$, em $]1, +\infty[$.
- $(\operatorname{tgh}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \longrightarrow \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{tgh}^{-1} x + C$, em $]-1, 1[$.
- $(\operatorname{cotgh}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \longrightarrow \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{cotgh}^{-1} x + C$, em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$.