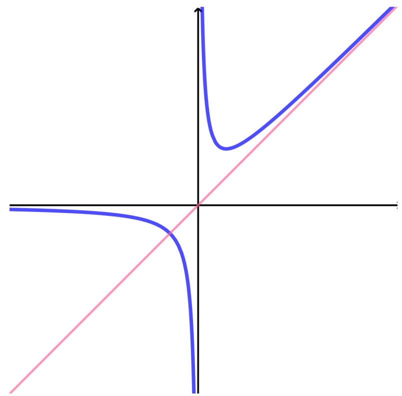
Aula 6: Assíntotas



As assíntotas a uma função $f(x)$ dividem-se em assíntotas verticais, assíntotas horizontais e assíntotas oblícuas.

Assíntota vertical: é uma reta vertical $x = c$ tal que $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$.
O ponto c é um ponto real de acumulação que não está no domínio de alguma expressão de f. Procurar c nestes pontos.

Assíntota horizontal: é uma reta horizontal $y = c$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = c$ (i.e., $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = c$)

Assíntota oblíqua: é uma reta $y = mx + b$ tal que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx - b = 0$
Se $y = mx + b$ é uma assíntota oblíqua de f, então

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{e} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx.$$

Aula 6: Extremos locais - Teorema de Fermat

Teorema 4.5. *(**Teorema de Fermat**) Seja f uma função definida e derivávell num intervalo aberto $]a, b[$, $a < b$. Se f tiver um extremo local num ponto $c \in]a, b[$, então $f'(c) = 0$.*

O elemento $a \in \text{Int}(D_f)$ é *ponto crítico* de f se $f'(a) = 0$ ou se $a \notin D_{f'}$, ou seja, se a derivada se anula nesse ponto ou se não existe derivada nesse ponto.

Exemplo 4.4. Seja $f :]-2, 2[\to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |1 - x^2|$. Os pontos críticos são $\{-1, 0, 1\}$.

Esta função não tem derivada em $c = -1$ nem em $c = 1$ e a derivada anula-se em $c = 0$.

Concavidade:

- Um ponto $c \in \text{Int}(D_f)$ é de inflexão para f se e só se f'' muda de sinal em c.

  f'' pode mudar de sinal em c sem existir no ponto. Consequentemente, só zeros de f'' ou pontos onde f'' não existe podem ser pontos de inflexão de f.

Exercício 4.12 Esboce o gráfico das seguintes funções e estude a função quanto a $\quad g(x) = \dfrac{e^x}{x}, \qquad h(x) = 5|x|e^{-|x|}.$

●domínio ●sinal e zeros ●assíntotas ●int. monotonia e ptos de extremos ●concavidade e ptos de inflexão ●contradomínio

Aula 6: Teorema de Cauchy (generaliza T. de Lagrange)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções nas condições do Teorema de Lagrange.

Teorema de Lagrange $\Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c_1)$ e $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c_2) \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)}$ $\qquad c_1, c_2 \in \,]a,b[$

Teorema 4.7. ***(Teorema de Cauchy)*** *Sejam f e g duas funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e deriváveis em $]a,b[$. Se $g'(x) \neq 0, \forall x \in \,]a,b[$, então existe pelo menos um ponto $c \in \,]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema de Cauchy extende o teorema de Lagrange (tome g(x)=mx+b, com $m \neq 0$)

Teorema 4.9. *Seja f uma função definida num intervalo aberto I e n vezes derivável num ponto $c \in I$. Se $f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ então*
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{(x-c)^n} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Nota: Seja f uma função definida num intervalo aberto contendo c. Se $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$, então $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

Aula 6: Indeterminações $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^{∞}, $+\infty - \infty$

Regra de Cauchy: *Sejam f, g funções definidas e deriváveis num intervalo aberto $I =]a, b[\neq \emptyset$, com $a = -\infty$, ou $a \in \mathbb{R}$, e $b = +\infty$, ou $b \in \mathbb{R}$. Seja c um dos extremos de I ($c = a$, ou $c = b$) ou um ponto do interior de I. Seja $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Se $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, e se $g'(x) \neq 0$ em $I \setminus \{c\}$, então $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Exemplo 4.6 Seja $\alpha \in \mathbb{R}^+$ uma constante. Mostre que $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} = 0$.

Observação4.2 (a) O $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pode não existir e no entanto existir $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemplo: $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ e $g(x) = x$.

(b) Se $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \frac{0}{0}$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, quando $x \to c$, e a regra de Cauchy é aplicável a $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, então
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

(c) As indeterminações $\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0 \times \infty$ e $\lim_{x \to c} f(x) - g(x) = +\infty - \infty$ podem ser reduzidas a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ mediante as seguintes transformações: $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ e $f(x) - g(x) = f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)$.

(d) A indet. $\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = 0^{\infty}$, ou ∞^0, levanta-se com $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}$.

Aula 6: Teorema de l'Hopital

Sejam f, g funções definidas num intervalo aberto $I =]a, b[\neq \emptyset$, com $a = -\infty$, ou $a \in \mathbb{R}$, e $b = +\infty$, ou $b \in \mathbb{R}$.

Regra de l'Hopital: *Caso $c \in I$ (ponto interior) e f, g poderem não ter derivadas em $I \backslash \{c\}$. Se f e g são contínuas em I, $g(x) \neq 0$ em $I \backslash \{c\}$, e se $f(c) = g(c) = 0$ e $g'(c) \neq 0$, então* $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Nota: • Um função pode ser contínua num intevalo aberto e não ter derivada em nenhum ponto do intervalo. Por exemplo, a função do tipo Weierstrass $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(2^n x)}{2^n}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e não é derivável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Note-se que $g(0) = 0$.

• Um função pode ser contínua num intervalo aberto I e ter derivada apenas num ponto. Por exemplo, a função $f(x) = xg(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ e só é derivável em $x = 0$, $f'(0) = 0$.

• Um função pode ser contínua num intervalo aberto I e ter derivadas apenas em pontos isolados. Exemplo $f(x) = \operatorname{sen}^2(x) g(x)$.

• Uma função pode ser conínua e derivável num só ponto. Por examplo, $p(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$, e $p(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Não é contínua nem derivável em nenhum ponto. No entanto $f(x) = x^2 p(x)$ é apenas contínua e derivável em $x = 0$.

Aula 6: Exercícios 1

Lema Seja f contínua em c e derivável numa vizinhança própria de c (i.e., sem c). Aplicando a Regra de Cauchy temos:

- Se $\lim_{x\to c^-} f'(x) = k$, então $f'_-(c) = k$.
- Se $\lim_{x\to c^+} f'(x) = k$, então $f'_+(c) = k$.
- *Se* $\lim_{x\to c} f'(x) = k$, então $f'(c) = k$.
- Se $f'_-(c) = f'_+(c) = k$, então $f'(c) = k$.

Exemplo 4.7, 4.20 Caracterize a derivada das funções definidas por

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } x > 1. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ \arctan x & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que (1) f é contínua em R; (2) $f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$

(3) não existe o $\lim_{x\to 0} f'(x)$ (4) f é derivável em $x = 0$