Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

f contém		Substituição
$\sqrt[k]{a+bx}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt[k]{a+bx}=t \quad (t\geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt[k_1]{(a+bx)^{t_1}},\ \sqrt[k_2]{(a+bx)^{t_2}},\ldots,\ \sqrt[k_n]{(a+bx)^{t_n}}$	$\rightsquigarrow$	$k=\mathrm{mmc}(k_1,k_2,\ldots,k_n)\ ,\quad \sqrt[k]{a+bx}=t \quad (t\geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x=a\,\mathrm{tg}\,t$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x=a\,\mathrm{sen}\,t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\rightsquigarrow$	$x=a\,\sec t$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\rightsquigarrow$	$x+\dfrac{b}{2a}=z \quad \boxed{ax^2+bx+c\,=\,a\,[\,(x+\frac{b}{2a})^2+K\,]}$

Fracções Simples: $\dfrac{A}{bx^2+c} \rightsquigarrow$ imediata

$\dfrac{P(\mathrm{tg}\,x)}{Q(\mathrm{tg}\,x)} \rightsquigarrow \mathrm{tg}\,x=t\ ,\quad \dfrac{P(\mathrm{sen}\,x,\cos x)}{Q(\mathrm{sen}\,x,\cos x)} \rightsquigarrow x=2z$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}=\frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\ \dfrac{D}{ax^2+bx+c}=\dfrac{D}{a\,[\,(x+\frac{b}{2a})^2+k^2\,]} \rightsquigarrow x+\dfrac{b}{2a}=k\,\mathrm{tg}\,t\ ,\quad t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

$(\Delta=b^2-4ac<0)$

Aula 11: Exercícios 1

Exemplo 5.7. $$\int \frac{x^4 + 2x + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\, dx$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3} dx$?

Exemplo 5.9. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2 + x + 1}{(2x+1)(x^2+1)} dx$?

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2x + 15} dx$

Exemplo 5.11. $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$$

substituição: x = tg t

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\, u$

$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\text{tg}\,(u)$

$(\text{sen}\, u)' = u'\,\cos u$

$(\text{cosec}\, u)' = -u'\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$

$(\text{tg}\, u)' = u'\,\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\text{cotg}\, u)' = -u'\,\text{cosec}^{\,2} u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\text{tgh}\, u)' = u'\text{sech}^{\,2} u$

$(\text{sech}\, u)' = -u'\text{sech}\, u\text{tgh}\, u$

$(\text{senh}^{\,-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\text{tgh}^{\,-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, \mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, \mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u'\, \sin u\, \mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u'\, \sec u \tan u\, \mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u'\, \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \text{cosec}\, u \text{cotgudx} = -\text{cosec u} + \text{C}$

$\int u'\, \sec^2 u\, \mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' e^u\, \mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u' \text{cosec}^{\,2} u\, \mathrm{d}x = -\text{cotgu} + \text{C}$

$\int u' a^u\, \mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, \mathrm{d}x = uv + C$

$\int u'\, \text{sech}^{\,2} u\, \mathrm{d}x = \text{tgh}\, u + C$

$\int u' \text{sech}\, u \text{tgh}\, u\, \mathrm{d}x = -\text{sech}\, u + C$

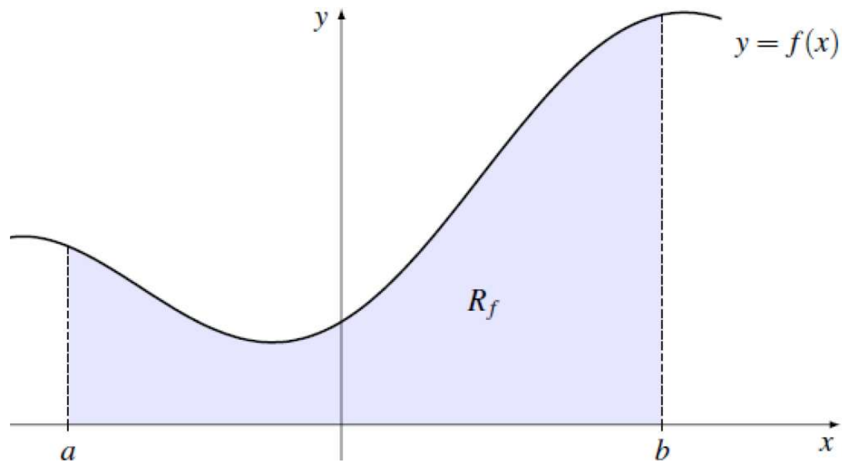
$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}^{\,-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, \mathrm{d}x = \text{tgh}^{\,-1} u + C$

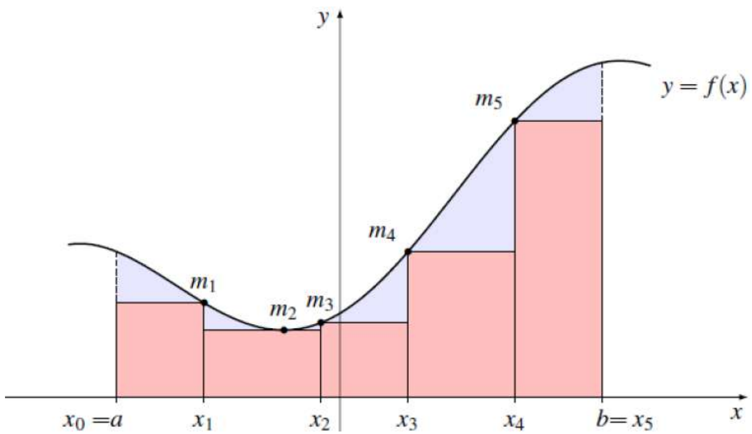
$\int u'\, \sec u\, \mathrm{d}x = \ln|\sec u + \text{tg}\, u| + C$

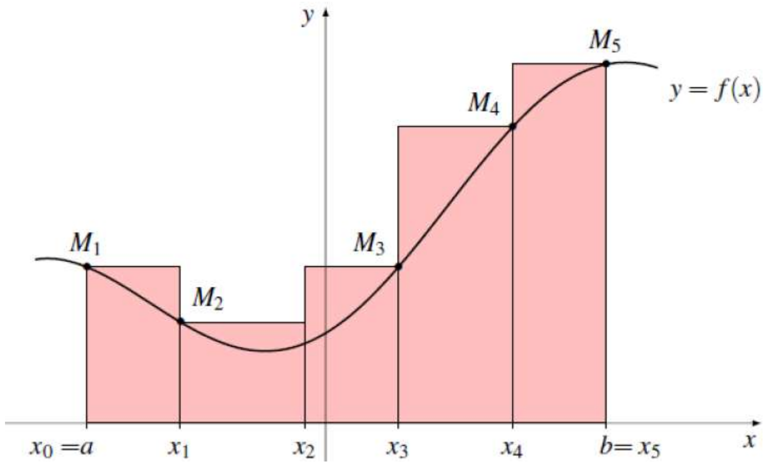
Aula 11: Integral Definido - introdução

Questão: Como determinar um valor aproximado da área A da região do plano R_f delimitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$?



Esta área pode ser aproximada por somas das áreas de retângulos:





Aula 11: Integral Definido - Somas Superiores e Inferiores de Darboux

Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Dada uma decomposição (ou partição) $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ do intervalo $[a, b]$, determinado pelas marcas $x_0 = a$, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, $x_n = b$, em sub-intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, definimos soma inferior e soma superior como sendo respectivamente:

$$I_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad \text{e} \qquad S_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

em que $m_i = \inf\{f(I_i)\}$ e $M_i = \sup\{f(I_i)\}$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (comprimento do intervalo I_i).

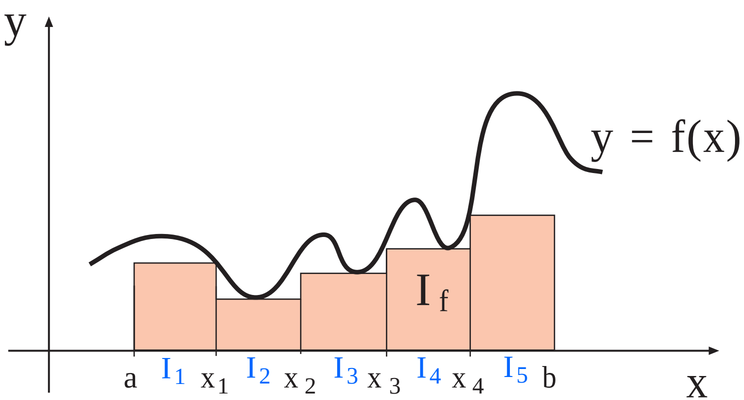


Figura 6.7: Soma inferior.

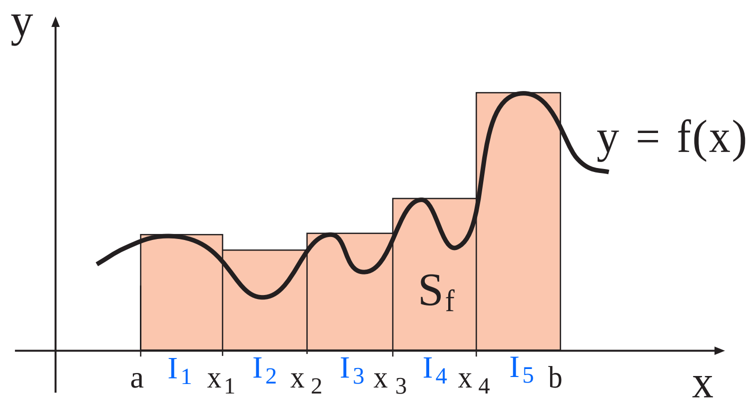


Figura 6.6: Soma superior.

Aula 11: Integral Definido - definição

Definição Uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ diz-se integrável em $[a,b]$ se para todo o $\epsilon>0$ existe uma decomposição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ tal que

$$S_f(\mathcal{P})-I_f(\mathcal{P})<\epsilon.$$

Observação: Existe uma definição que elimina a necessidade de f ser limitada ver Guião Definição 6.7.

Seja $\mathcal{P}_n$ a partição regular de $[a,b]$ em intervalos de tamanho $\triangle x=\triangle x_i=\frac{b-a}{n}$, determinado pelas marcas $x_i=a+i\triangle x$ para $i=0,1,\ldots,n$.

Se f é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\mathcal{P}_n)-I_f(\mathcal{P}_n)=0$ então f é integrável em $[a,b]$.

Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} S_f(\mathcal{P}_n)=\lim_{n\to\infty} I_f(\mathcal{P}_n)=A \underset{def}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

Seja $\mathcal{C}_n=\{x_1^*,\ldots,x_n^*\}$ uma qualquer seleção de pontos x_i^* no intervalo $I_i=[x_{i-1},x_i]$.

Designemos por soma de Riemann à soma $\Sigma_f(\mathcal{P}_n,\mathcal{C}_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\triangle x$. Como facilmente se constata, $I_f(\mathcal{P}_n)\le\Sigma_f(\mathcal{P}_n,\mathcal{C}_n)\le S_f(\mathcal{P}_n)$, pelo que se f é integrável em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i^*)\,\triangle x$$

Aula 11: Integral Definido - exemplos

1. Mostre que a função constante $f(x) = c$ é integrável em $[a, b]$ e que
$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

2. Mostre que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$ e que
$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

3. Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ não é integrável em $[0, 1]$.

Observações:
- O símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ lê-se integral de a até b de $f(x)$ ou integral de f de a para b.
- Dizemos que a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração, f é a função integranda e x a variável de integração.

Nota: A variável de integração é muda, logo podemos escrever $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \cdots$

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$, pois $\mathcal{P}_n = \emptyset$ e $\Delta x = 0$.
- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$, pois $\underleftarrow{\Delta x} = -\underrightarrow{\Delta x}$

Progressão aritmética:

Um sucessão (a_n) diz-se uma progressão aritmética de razão r se $a_{n+1} - a_n = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$.

$$\boxed{\text{Soma dos primeiros } n \text{ termos:} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}$$

Progressão geométrica:

Um sucessão (a_n), com $a_1 \neq 0$, diz-se uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1\, r^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Soma dos primeiros } n \text{ termos:} \quad S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}}$$