Solução geral duma EDL homogénea de coeficientes constantes

$\boxed{a_n\, y^{(n)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0}$ $\rightsquigarrow$ Pol. característico: $\boxed{P(r) = a_n\, r^n + \ldots + a_1\, r + a_0}$

As n raízes de $P(r)$ $\quad\longleftrightarrow\quad$ com as n soluções linearmente independentes do SFS:
(contando com multiplicidades)

Raízes reais:

(1) $r_1, r_2, .., r_k$ são raízes reais simples distintas: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, .., e^{r_k x} \in$ SFS.

(2) r raiz real de multiplicidade $m > 1$: $e^{rx}, xe^{rx}, .., x^{m-1}e^{rx} \in$ SFS.

Raízes complexas:

(3) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas simples: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS.

(4) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas de mult. $m > 1$: $x^t\, e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ x^t\, e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS
para $t = 0, 1, \ldots, m-1$.

Cálculo de 1 sol. part. da EDL completa: Método dos coefs indeterminados

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{b}(x)\,, \qquad a_n \neq 0}$$

(1) Analisar $\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $p_m(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x)$ e determinar m, α e β.

(2) Verificar se $\alpha + i\beta$ é raiz do pol. caract. da EDL homogénea associada. Determinar a sua multiplicidade k ($k = 0$ caso não seja raiz).

(3) Escrever $y_p = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\mathrm{sen}\,(\beta x)]$.

(4) Substituir y_p na EDL completa para determinar os coeficientes dos polinómios $P_m(x)$ e $Q_m(x)$.

Determine a solução geral das EDLs completas de coeficientes constantes seguintes:

1. $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \frac{13}{8} + \frac{3}{2}x - x^2$.

2. $y''' + y' = \sin x$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x \sin x}{2}$.

3. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{2}e^{2x}$.

4. $y' + y = (x+1)e^{2x}$

Sol: $y = y_H + y_P = Ce^{-x} + \frac{3x+2}{9}e^{2x}$.

5. $y'' + y = 2\sin x$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x$.

6. $y'' + y = e^{2x} + 2\text{sen}\, x + 1$

(a) Determine a solução geral da seguinte EDO linear: $y'' + 4y = e^x + \sin x$.

(b) Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \;\; y(\pi) = 0, \; y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

Sol: $y = -\frac{3\pi}{4} e^{2\pi - 2x} + \frac{3x}{4} e^{2\pi - 2x} + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{8}$

(c) Justifique que o seguinte problema de Cauchy possui uma única solução e resolva-o:
$y'' + y = x^2 + 1 + \frac{1}{\cos x}\,, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

(d) Justifique que o seguinte problema de Cauchy possui uma única solução e resolva-o:
$y'' + y = t^2 + 1\,, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

Classifique e determine o integral geral das EDOS seguintes:

1. $\frac{1}{2}y' - \operatorname{sen}(2x)y = \dfrac{\operatorname{sen}(4x)}{2}$.

2. $1 + y - y'\sqrt{1+x^2} = 0$.

3. $y' + \dfrac{1}{x}y = xy^2\,, \quad x > 0$.

Sol: $y = \dfrac{1}{x(c-x)}$

4. $(x^3 + y^3) - y^2 x\, y' = 0$;

Sol: $y = x\,\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}$

Resumo - EDOs de de 1ª ordem

1. EDOs de variáveis separáveis: $y' = \dfrac{p(x)}{q(y)} \Leftrightarrow q(y)\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$. Resol.
$\displaystyle\int q(y)dy = \int p(x)dx + C.$

2. EDO homogénea: $y' = g(\frac{y}{x})$. A substituição $\frac{y}{x} = z$ transforma na eq. dif. de variáveis separáveis: $xz' + z = g(z)$.

3. EDOs exata: $M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ com $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Integral geral: $F(x,y) = C$, em que $F(x,y)$ é calculado de $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $N = \frac{\partial F}{\partial y}$. Não sai.

4. EDO linear de 1^a ordem: $y' + p(x)y = q(x)$. Factor integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x) = \int p(x)dx$. Então $\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})'$ e a EDO fica $(\mu\,\mathbf{y})' = \mu q(x)$. A solução é: $\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\,dx + c$.

5. EDO de Bernoulli: $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \xrightarrow[\text{dividir por } y^{\alpha}]{} y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$, com $0, 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. A substituição $z{=}y^{1-\alpha}$ transforma na EDL de 1ª ordem:
$z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)$.

Formulário Transformadas de Laplace

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, $s>s_f$; $G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, $s>s_g$. $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s>0$
t^n $(n\in\mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$
e^{at} $(a\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$, $s>a$
$sen(at)$ $(a\in\mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s>0$
$cos(at)$ $(a\in\mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s>0$
$senh(at)$ $(a\in\mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $s>\|a\|$
$cosh(at)$ $(a\in\mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $s>\|a\|$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)$, $s>s_f,s_g$
$\alpha\,f(t)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha\,F(s)$, $s>s_f$
$e^{\lambda t}f(t)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$, $s>s_f+\lambda$
$H_a(t)f(t-a)$ $(a>0)$	$e^{-as}F(s)$, $s>s_f$
$f(at)$ $(a>0)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$, $s>as_f$
$t^n f(t)$ $(n\in\mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$, $s>$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s)-f(0)$, $s>$ ord. exp. de f
$f''(t)$	$s^2\,F(s)-s\,f(0)-f'(0)$, $s>$ ordens exp. de f,f'
$f^{(n)}(t)$	$s^n\,F(s)-\sum_{k=1}^{n}s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)}\equiv f$, $s>$ ordens exp. de $f,f',\ldots,f^{(n-1)}$
$f'''(t)$	$s^3\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-s^2f(0)-sf'(0)-f''(0)$
$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t\text{-}u)du$	$F(s)G(s)$

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$; $g(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(t)$.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ , \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{u}\, \mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int u' \sin u\, \mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \sec^2 u\, \mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\, \mathrm{d}x = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{C}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\, \mathrm{d}x = \operatorname{tgh} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int u' \sec u\, \mathrm{d}x = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, \mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u' \sec u \tan u\, \mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \mathrm{cotgudx} = -\mathrm{cosec\ u} + \mathrm{C}$

$\int u' e^u\, \mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u' a^u\, \mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int u'v + uv'\, \mathrm{d}x = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, \mathrm{d}x = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, \mathrm{d}x = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$


Feliz Natal
e um
Próspero Ano Novo