Informação

Na sequência da realização da Conferência EQAF organizada pela Reitoria, dia 24 de novembro, sexta-feira, a aula de Cálculo I - C, turma TPC-6, das 11h00 às 13h00 , muda da sala 23.3.15 para a 28.02.29 (DECivil).

Aula 19: Exemplo e exercicios 1

Exemplo: O integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e tem valor $\frac{\pi}{2}$ porque

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 1: Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é:

- divergente se $\alpha \leq 1$;
- convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Exercício 2: Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\beta x}\,dx$ é:

- divergente se $\beta \geq 0$;
- convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\beta x}\,dx = -\frac{1}{\beta}$.

Aula 20: Critério de comparação para Integrais Impróprios de 1^a espécie

Sejam $f, g : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$ para todo o $t > a$. Se existe um c tal que para todo $x > c$ se tem $0 \leq f(x) \leq g(x)$, então

(i) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente, então também $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente;

(ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente, então também $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ é divergente.

Observação: este critério aplica-se também aos integrais impróprios de 2^a espécie, substituindo $+\infty$ por b.

Exemplo 7.7. Será $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)\mathrm{d}x$ convergente? (nota: $\forall\, x \geq 0,\ \operatorname{sen} x \leq x$.)

Exercício resolvido 7.5. Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\,\mathrm{d}x$ é convergente.

Exercício 7.9. Será o integral $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ convergente?

Aula 20: Critério do limite

Proposição 7.3. ***(Critério do Limite)*** *Sejam $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Suponhamos que, para cada $x \in [a, +\infty[$,*

$$f(x) \geq 0 \quad e \quad g(x) > 0$$

e seja $L = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(i) Se $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então os integrais impróprios $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ são da mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente.

Exemplo 7.8. Considere-se o integral impróprio de 1ª espécie $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$.

Exercício 7.10 Estude, utilizando o critério de comparação ou critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\, dx$;
3. $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x} - 1}\, dx$;
4. $\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1}\, dx$;
5. $\int_0^{+\infty} e^{x^2}\, dx$;

Aula 20: Convergência Absoluta

Um integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diz-se **absolutamente convergente** quando o integral impróprio do módulo da função integranda, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$, for convergente.

Teorema 7.3. *Seja $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$ para todo o $t \geq a$. Se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$ for convergente então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é também convergente.*

Resumindo, **todo o integral impróprio absolutamente convergente é convergente**.

- Se $h(x)$ é limitada e $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ é absolutamente convergente.

(pelo critério da comparação)

Exemplo 7.9. O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ é absolutamente convergente.

Exercício 7.11 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ 5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\,dx$

8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ 10. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ 11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ 13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx.$

Aula 20: Exercicios 2

Exercício 7.12 Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Exercício 7.15 Estude a natureza do integral impróprio seguinte, indicando o seu valor em caso de convergência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx.$$

Exercício 7.16 Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\arctan(2x)}{1+4x^2}$.

1. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
2. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$, indicando o seu valor em caso de convergência.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\, u$

$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\text{tg}\,(u)$

$(\text{sen}\, u)' = u'\,\cos u$

$(\text{cosec}\, u)' = -u'\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$

$(\text{tg}\, u)' = u'\,\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(\text{cotg}\, u)' = -u'\,\text{cosec}^{\,2} u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ , \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\text{tgh}\, u)' = u'\text{sech}^{\,2} u$

$(\text{sech}\, u)' = -u'\text{sech}\, u\text{tgh}\, u$

$(\text{senh}^{\,-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\text{tgh}^{\,-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, \mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, \mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u'\, \sin u\, \mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u'\, \sec u \tan u\, \mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u'\, \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \text{cosec}\, u \text{cotgudx} = -\text{cosec u} + \text{C}$

$\int u'\, \sec^2 u\, \mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' e^u\, \mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u' \text{cosec}^{\,2} u\, \mathrm{d}x = -\text{cotgu} + \text{C}$

$\int u' a^u\, \mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, \mathrm{d}x = uv + C$

$\int u'\, \text{sech}^{\,2} u\, \mathrm{d}x = \text{tgh}\, u + C$

$\int u' \text{sech}\, u \text{tgh}\, u\, \mathrm{d}x = -\text{sech}\, u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}^{\,-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, \mathrm{d}x = \text{tgh}^{\,-1} u + C$

$\int u'\, \sec u\, \mathrm{d}x = \ln|\sec u + \text{tg}\, u| + C$