Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\cos u)' = -u'\,\mathrm{sen}\,u$

$(\mathrm{sen}\,u)' = u'\,\cos u$

$(\mathrm{tg}\,u)' = u'\,\sec^2 u$

$(\mathrm{cotg}\,u)' = -u'\,\mathrm{cosec}^2 u$

$(\mathrm{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\mathrm{tgh}\,u)' = u'\,\mathrm{sech}^2 u$

$(\mathrm{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\mathrm{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\mathrm{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\mathrm{tg}\,(u)$

$(\mathrm{cosec}\,u)' = -u'\,\mathrm{cosec}\,(u)\mathrm{cotg}\,(u)$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = \dfrac{u'\,a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\mathrm{sech}\,u)' = -u'\,\mathrm{sech}\,u\,\mathrm{tgh}\,u$

$(\mathrm{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\,u^p\,dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ $(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

$\int u'\,\sin u\,dx = -\cos u + C$

$\int u'\,\cos u dx = \sin u + C$

$\int u'\,\sec^2 u\,dx = \tan u + C$

$\int u'\mathrm{cosec}^2 u\,dx = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{C}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \mathrm{senh}^{-1} u + C$

$\int u'\,\mathrm{sech}^2 u\,dx = \mathrm{tgh}\,u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \mathrm{senh}^{-1}(u) + C$

$\int u'\,\sec u\,dx = \ln|\sec u + \mathrm{tg}\,u| + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan(u) + C$

$\int u'\,\sec u \tan u\,dx = \sec u + C$

$\int u'\,\mathrm{cosec}\,u\mathrm{cotgudx} = -\mathrm{cosec\ u} + \mathrm{C}$

$\int u' e^u\,dx = e^u + C$

$\int u' a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$\int u'v + uv'\,dx = uv + C$

$\int u'\mathrm{sech}\,u\,\mathrm{tgh}\,u\,dx = -\mathrm{sech}\,u + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \mathrm{tgh}^{-1} u + C$

Exercícios de revisão

Aula 18: Integrabilidade e Áreas

Regras de integrabilidade : Aula 10

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1 + t + t^2} \, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a - x) \, dx.$$

Aula 18: Primitivas por partes, por substituição e de funções racionais

- Calcule $\displaystyle\int \frac{x+1}{2+4x^2}\,\mathrm{d}x$

- Calcule $\displaystyle\int \sin(sqrt2x)\,\mathrm{d}x$

- Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}{\sqrt[6]{1+x}+1}\,\mathrm{d}x.$

Aula 18: Fermat, Cauchy e extremos

Teorema 4.5. *(**Teorema de Fermat**) Seja f uma função definida e derivávell num intervalo aberto $]a,b[$, $a<b$. Se f tiver um extremo local num ponto $c\in\,]a,b[$, então $f'(c)=0$.*

REGRA DE CAUCHY $\longrightarrow$ levantamento de indeterminações $\dfrac{0}{0}$ e $\dfrac{\infty}{\infty}$ Aula 6

$\downarrow$

Teorema 4.11. *Seja f contínua em a. Se $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} f'(x)=l\in\mathbb{R}$ então $f'_{\pm}(a)=l$.*

$\cancel{\Leftarrow}$

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por $f(x)=\begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$ (1) é contínua,

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ não existe, (3) $f'(0)=0$, logo, o domínio de f' é $[0,\infty[$.

Exercício. Determine os extremos da função $f(x)=\frac{e^x}{x}$ em $\mathbb{R}^+$. Averigue se têm assintotas.

(aula 6)

Aula 18: Bolzano, Weierstrass, Rolle e Lagrange

Teorema 4.1. ***(Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b], a<b$, e $f(a)<Y<f(b)$ ou $f(b)<Y<f(a)$ então existe $X\in]a,b[$ tal que $f(X)=Y$.*

Exercício 4.3 Considere a função g dada por $g(x)=\dfrac{3\pi}{5}-\arccos\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$. Utilize o teorema de Bolzano para justificar que g admite uma raiz no intervalo $]0,2[$.

Teorema 4.2. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Seja $f: D_f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Se D_f é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em D_f, então f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem $x_m, x_M\in D_f$ tais que, $f(x_m)\leq f(x)\leq f(x_M)$, para todo o $x\in D_f$. Consequentemente, o contradomínio da função é $f(D_f)=[f(x_m),f(x_M)]$.*

Exercício • A função $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume o valor máximo em $x=0$, mas não existe $x\in[0,+\infty[$ tal que $g(x)$ seja mínimo. Porquê?

Teorema 4.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.*

51. Mostre que se $a>0$ a equação $x^3+ax+b=0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b\in\mathbb{R}$.

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe um ponto $c\in]a,b[$ tal que* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercício. Considere a função $f(x)=e^x+x-1$ no intervalo $[0,1]$. Mostre que existe $c\in]0,1[$ tal que $f'(c)=e$.

Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

f contém		Substituição
$\sqrt[k]{a+bx}$	$\leadsto$	$\sqrt[k]{a+bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt[k_1]{(a+bx)^{t_1}}, \sqrt[k_2]{(a+bx)^{t_2}}, \ldots, \sqrt[k_n]{(a+bx)^{t_n}}$	$\leadsto$	$k = \mathrm{mmc}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\,, \quad \sqrt[k]{a+bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\leadsto$	$x = a \operatorname{tg} t$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\leadsto$	$x = a \operatorname{sen} t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\leadsto$	$x = a \sec t$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\leadsto$	$x + \dfrac{b}{2a} = z$ $\quad \boxed{ax^2+bx+c = a\,[\,(x+\frac{b}{2a})^2 + K\,]}$

Fracções Simples: $\dfrac{A}{bx^2+c} \leadsto$ imediata

$\dfrac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \leadsto \operatorname{tg} x = t\,, \quad \dfrac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} \leadsto x = 2z$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \leadsto \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \leadsto \text{imediata} \\ \dfrac{D}{ax^2+bx+c} = \dfrac{D}{a\,[\,(x+\frac{b}{2a})^2 + k^2\,]} \leadsto x + \dfrac{b}{2a} = k \operatorname{tg} t\,, \quad t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$