

# Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$$\begin{aligned}
 (u^p)' &= p u^{p-1} u' & (\arcsen(u))' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \\
 (\ln u)' &= \frac{u'}{u} & (\arctg(u))' &= \frac{u'}{1+u^2} \\
 (\cos u)' &= -u' \sen u & (\sec u)' &= u' \sec(u) \tg(u) \\
 (\sen u)' &= u' \cos u & (\csc u)' &= -u' \csc(u) \cotg(u) \\
 (\tg u)' &= u' \sec^2 u & (e^u)' &= u' e^u \\
 (\cotg u)' &= -u' \csc^2 u & (a^u)' &= \frac{u' a^u}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \\
 (\sinh^{-1} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} & (uv)' &= u'v + uv' \\
 (\tgh u)' &= u' \sech^2 u & (\sech u)' &= -u' \sech u \tgh u \\
 (\sinh^{-1} u)' &= \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} & (\tgh^{-1} u)' &= \frac{u'}{1-u^2}
 \end{aligned}$$

$$\int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C$$

$$\int u' \sin u dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + C$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + C$$

$$\int u' \csc u \cotg u dx = -\csc u + C$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' \csc^2 u dx = -\cotg u + C$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1} u + C$$

$$\int u'v + uv' dx = uv + C$$

$$\int u' \sech^2 u dx = \tgh u + C$$

$$\int u' \sech u \tgh u dx = -\sech u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2} dx = \tgh^{-1} u + C$$

$$\int u' \sec u dx = \ln |\sec u + \tg u| + C$$

# Aula 15: Exercícios 1

---

**Exercício 6.13** Calcule os seguintes integrais definidos:

1.  $\int_0^1 e^{-x} \cos(e^{-x}) dx$
2.  $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$  (Sugestão: Faça a substituição  $t = \sqrt{x}$ )

**Exercício 6.14** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_{x^2}^{k \ln(x)} e^{-t^2} dt$

1. Determine a expressão da derivada de  $F$ ,  $F'(x)$ .
2. Determine  $k \in \mathbb{R}$  de modo a que  $F'(1) = 0$ .

**Exercício 6.15** Considere a função definida em  $\mathbb{R}$  por  $f(x) = xe^x$ .

1. Diga, justificando, se a função  $f$  é integrável em qualquer intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  com  $b > a$ .
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre  $x = -1$  e  $x = 1$  e compreendida entre o gráfico de  $f$  e o eixo das abscissas.

**Exercício 6.16** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} \arctan t dt$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

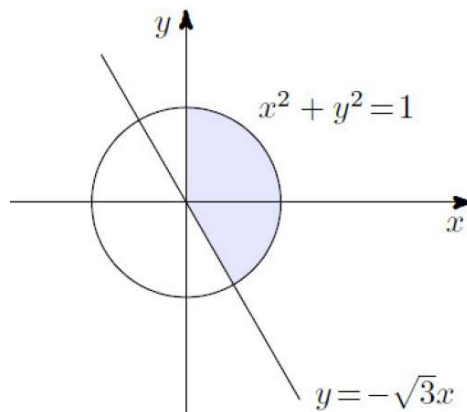
1. Determine  $F'(x)$  e o seu domínio.
2. Estude  $F$  quanto à existência de extremos locais.

**Exercício 6.17** Considere a função  $F$  definida por  $F(x) = \int_0^{x^2} t \ln(1 + e^t) dt$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

1. Justifique que  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e determine  $F'(x)$ .
2. Estude  $F$  quanto à monotonia e existência de extremos locais.

## Aula 16: Exercícios 2

**Exercício 6.18** Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura



**Exercício 6.19** Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x - 3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$ .

1. Represente geometricamente a região  $A$ .
2. Calcule a área da região  $A$ .

**Exercício 6.20** Determine a área da região de  $\mathbb{R}^2$  delimitada pelos gráficos de  $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$  e  $g(x) = x$  e pelas retas de equações  $x = -2$  e  $x = 2$ .

**Exercício 6.21** Considere a função  $F$  dada por  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$  para  $x \in [1, +\infty[$ .  
Determine  $F(1)$ .

## Aula 16: Exercícios 3

---

**Exercício 6.22** Considere a função real de variável real  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de  $k$  a função  $f$  é integrável no intervalo  $[-1, 1]$ .
2. Determine a família de primitivas  $\int x \ln x \, dx$ , definidas no intervalo  $]0, +\infty[$ .
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre  $x = 1/e$  e  $x = e$  e delimitada pelo gráfico de  $f$  e pelo eixo das abcissas.

**Exercício 6.23** Considere a função definida por  $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} \, dt$ . Determine o subconjunto de  $\mathbb{R}$  onde o gráfico da função  $f$  tem concavidade voltada para cima.

**Exercício 6.24** Prove que se  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$  e  $a$  é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$