

## Aula 24: Equação diferencial ordinária (EDO)

- Equação diferencial ordinária (EDO) de ordem  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ):  
equação do tipo  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  ( $y = y(x)$ )
- EDO está na **forma normal**: quando a derivada de maior ordem está explicitamente expressa em função das restantes variáveis:  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ .
- A ordem de uma EDO é a maior ordem da derivada de  $y$ .
- Eq. dif. **ordinária** porque  $y$  é função de uma só variável independente (muitas vezes omitida).
- $y^{(n)}$ , ou  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , denota a derivada de ordem  $n$  da função  $y$ .

Exemplos:

- Edos de ordem 1:  $x(y')^4 + ye^x = \sqrt{x}$ .
- Edos de ordem 2:  $\frac{e^x y'' + xy'}{y} = x^2$ .
- Edos de ordem 3:  $y y''' + xy'' + y' - y = e^x$ .

## Aula 24: Integral geral de uma EDO de ordem $n$

---

- Também se chama **integral geral** de uma equação diferencial de ordem  $n$  a uma equação  $f(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$  com  $n$  constantes de integração que implicitamente representa a solução  $y = f(x, c_1, \dots, c_n)$  da equação diferencial (nalguma vizinhança de  $x$ ). É esta última interpretação que iremos usar nos exercícios.
- Uma **solução particular** (ou **integral particular**) é uma solução que se obtém dum integral geral por concretização de todas as suas constantes de integração.
- Uma solução que não seja solução particular de nenhum integral geral chama-se **solução singular**.
- Uma solução que não seja solução particular de um dado integral geral será também dito uma **solução singular relativo** a esse integral geral.
- Uma equação diferencial **direta**  $y' = f(x)$ ,  $x \in I$ , tem solução geral  $y = \int f(x)dx + C$  ( $x \in I$ ). Mais geralmente, equações diferenciais diretas de ordem  $n$ ,  $y^{(n)} = f(x)$  resolvem-se por  $n$  integração sucessivas.

## Aula 24: Exercícios 1 (exemplos)

1. Determine uma eq. dif. para a qual a família de curvas  $y = e^{cx}$  é um integral geral. **Res:** Com 1 parâmetro  $c$  a família só pode ser integral geral de uma eq. dif. de ordem 1:  $y' = ce^{cx} = cy$ . Ora  $\ln y = cx$ . Logo  $y'x = ycx = y \ln y$ . A equação diferencial é  $y'x - y \ln y = 0$ .
2. Determine uma eq. dif. para a qual a família de curvas  $y = Ae^{Bx}$  é um integral geral. **Res:** Com 2 parâmetros  $A$  e  $B$ , a família só pode ser integral geral de uma eq. dif. de ordem 2:  $y' = AB e^{Bx} = B A e^{Bx} = By$ . Logo  $y'' = By'$ . Multiplicando por  $y$ :  $y''y = Byy' = (y')^2$ . Portanto, a equação diferencial é  $y''y - (y')^2 = 0$ .
3. Determine uma edo para a qual a família de curvas  $y = A \sin(x + B) + C$  é um integral geral. **Sol:**  $y''' + y' = 0$
4. A equação diferencial  $(y')^2 = 1$  tem dois integrais gerais:  $y = x + c$  e  $y = -x + c$ . Qualquer solução particular numa é solução singular da outra.
5. A equação dif.  $xy' = 4y$  (eq. dif. variáveis separáveis) possui uma infinidade de integrais gerais. Uma delas, a mais óbvia, é  $y = cx^4$  (que é a que vai ser calculada pelo método das eq. de variáveis separáveis).
6. A equação  $(y')^2 - 4y = 0$  tem integral geral  $y = (x + c)^2$ ,  $c$  constante arbitrária.  $y = x^2$  é uma solução particular e  $y = 0$  é uma solução singular.
7. Determine a solução geral das equações diferenciais diretas:  $y' = \cos(x)$ ,  $y'' = xe^x$ ,  $y + xy' = e^x$ , e  $y' - yx = 0$ .

## Aula 24: Problema de valores iniciais (PVI) ou problema de Cauchy

**Definição:** Definição 2.3 Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma equação diferencial de ordem  $n$  satisfazendo  $n$  certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto  $x_0$ :

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

- Resolver um PVI significa determinar a(s) solução(ões) da equação diferencial de ordem  $n$  envolvida que satisfaz(em) as  $n$  condições iniciais no único ponto  $x_0$  (notar que  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  são números reais dados).

## Aula 24: Exercícios 2

---

9. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

10. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 3x^2 = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

11. A equação diferencial de valores iniciais

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

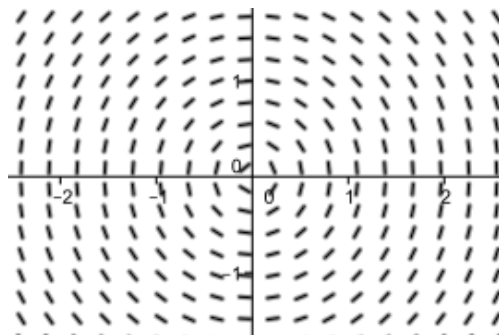
não tem solução, pois a única solução de  $|y'| + |y| = 0$  é  $y = 0$ .

## Aula 24: Equações diferenciais de primeira ordem

- As equações dif. de 1ª ordem que vamos estudar são equações do tipo

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- As soluções deste tipo de equações diferenciais podem ser visualizadas geometricamente no plano  $XOY$  através do **campo de declives**: em cada ponto  $(x, y)$  do plano, associa-se um pequeno segmento de reta com declive  $y'$ , dado pelo valor de  $f(x, y)$  (ver geogebra CampoDeDeclives). Exemplo, o campo de declives de  $y' = -\frac{x}{y}$



Como se pode observar as soluções são circunferências concêntricas na origem.

- O caso mais simples, as equações diferenciais diretas  $y' = g(x)$ , resolve-se por primitivação direta:

$$y = \int g(x)dx + c.$$

## Resumo - EDOs de 1ª ordem

---

1. EDOs de **variáveis separáveis**:  $y' = \frac{p(x)}{q(y)} \Leftrightarrow q(y) dy = p(x) dx$ . Resol.

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx + C.$$

2. EDO **homogénea**:  $y' = g(\frac{y}{x})$ . A substituição  $\frac{y}{x} = z$  transforma na eq. dif. de variáveis separáveis:  $xz' + z = g(z)$ .

3. EDOs **exata**:  $M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \Leftrightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  com  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .  
Integral geral:  $F(x, y) = C$ , em que  $F(x, y)$  é calculado de  $M = \frac{\partial F}{\partial x}$  e  $N = \frac{\partial F}{\partial y}$ .

**NÃO SAI**

4. EDO **linear de 1ª ordem**:  $y' + p(x)y = q(x)$ . Factor integrante  $\mu(x) = e^{P(x)}$ , onde  $P(x) = \int p(x) dx$ . Então  $\mu(y' + p(x)y) = (\mu y)'$  e a EDO fica  $(\mu y)' = \mu q(x)$ . A solução é:  $\mu(x)y = \int \mu(x)q(x) dx + c$ .

5. EDO de **Bernoulli**:  $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha \xrightarrow{\text{dividir por } y^\alpha} y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$ , com

$0, 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ . A substituição  $z = y^{1-\alpha}$  transforma na EDL de 1ª ordem:

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x).$$

## Aula 24: EDOs de variáveis separáveis

---

A eq. dif.  $y' = f(x, y)$  diz-se de **variáveis separáveis** se

$$y' = f(x, y) = \frac{p(x)}{q(y)} \quad \text{com } q(y) \neq 0$$

Forma separada numa eq. dif. de var. separáveis:

$$q(y) y' = p(x) \quad \text{ou} \quad q(y) dy = p(x) dx$$

As funções  $p$  e  $q$  assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

Resolução: obtém-se integrando ambos os membros da forma separada:

$$\int q(y) dy = \int p(x) dx + C$$



## Aula 24: Exercícios 3

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

1.  $xy' - y = 0$

Sol:  $y = cx, c \in \mathbb{R}$

1.  $x + yy' = 0$

Sol:  $y^2 + x^2 = c, c \in \mathbb{R}_0^+$

2.  $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$

Sol:  $xe^{\frac{1}{x}} = cte^{-\frac{1}{t}}, c \neq 0; x = 0$  sol. singular.

Resolva os seguintes problemas de Cauchy: (S.P.C. - Solução do P. de Cauchy)

1.  $xy' + y = y^2; y(1) = 1/2$

Sol:  $y = \frac{1}{1-cx}, \text{ S.P.C.: } y = \frac{1}{x+1}, x \neq -1.$

2.  $x(y+1) + y'\sqrt{4+x^2} = 0; y(0) = 1;$

Sol:  $y = \frac{c}{e^{\sqrt{x^2+4}}} - 1, \text{ S.P.C.: } y = 2e^{2-\sqrt{x^2+4}} - 1$

3.  $(1+x^3)y' = x^2y; y(1) = 2.$

Sol:  $y = c\sqrt[3]{x^3+1}, \text{ S.P.C.: } \sqrt[3]{4(x^3+1)}$

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

1.  $y + y'\operatorname{cosec}(x) = 0$

Sol:  $y = ce^{\cos x}, c \in \mathbb{R}.$

2.  $y^2 + y = (x^2 - x)y'$

Sol:  $\frac{y}{y+1} = ce^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R}. y = -1$  é uma sol. singular.

3.  $y'\operatorname{sen}(x) + y\cos(x) = 0$

Sol:  $y = \frac{c}{\operatorname{sen} x}, c \in \mathbb{R}.$

4.  $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

Sol:  $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + c), c \in \mathbb{R}.$

## Aula 24: EDOs homogéneas

A eq. dif.  $y' = f(x, y)$  diz-se **homogénea** se  $f(x, y)$  é homogénea (de grau zero<sup>a</sup>), isto é, se  $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in D$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , tais que  $(\lambda x, \lambda y) \in D$ .

Neste caso,  $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x})$ , ( $x \neq 0$ ), pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

em que  $g$  é uma função de uma variável apenas.

**Resolução:** Através da mudança de variável  $\frac{y}{x} = z$ , a edo homogénea

transforma-se numa edo de variáveis separáveis em  $x$  e  $z$ :  $z + xz' = g(z)$  cuja solução é  $z = h(x) + C$ , ou  $W(z, x, C) = 0$ .

Revertendo a substituição, obtém-se a solução da edo original:  $\frac{y}{x} = h(x) + C$  ou  $W\left(\frac{y}{x}, x, C\right) = 0$ .

---

<sup>a</sup>Um função  $f(x, y)$  diz-se homogénea de grau  $m$  se  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$ .

## Aula 24: Exercícios 4

---

Verifique que cada uma das seguinte EDOs é homogênea e determine o seu integral geral:

(a)  $xe^{\frac{y}{x}}y' = ye^{\frac{y}{x}} + x;$

**Sol:**  $y = x \ln(\ln(|x|) + c)$

(b)  $(x^3 + y^3)dx - y^2x dy = 0;$

**Sol:**  $y = x \sqrt[3]{c + 3 \ln |x|}$

(c)  $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$

**Sol:**  $\ln(x^2 + y^2) = 2 \arctan \frac{y}{x} + c$

(d)  $(2y - x)y' = x - y;$

**Sol:**  $\frac{\sqrt{2}y - x}{\sqrt{2}y + x} = c |2y^2 - x^2|^{\sqrt{2}}, c \neq 0$

(e)  $(x + y)y' = x - y;$

**Sol:**  $y^2 + 2xy = x^2 + c \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{2x^2 + c} - x$

## Aula 24: EDOs Exatas

$$\text{EDOS do tipo: } M(x, y) + N(x, y)y' = 0 \Leftrightarrow M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

A edo (1) diz-se **exata** se existe uma função  $F(x, y)$  com derivadas parciais contínuas tal que

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = M(x, y) + N(x, y)y'. \quad (2)$$

Aplicando a regra da cadeia, (1) é exata se e só se

$$M = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ e } N = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

**Teorema 1 (Critério):** Se  $M$ ,  $N$ ,  $\frac{\partial M}{\partial y}$  e  $\frac{\partial N}{\partial x}$  são contínuas num aberto *simplesmente conexo*

$D \subset \mathbb{R}^2$ , então  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  é **exata** se e só se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Isto porque  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ . Se (1) é exata, então a edo (1) torna-se numa edo

direta:  $\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0 \quad (2)$  cuja solução é  $F(x, y) = C$ . Isto é,

qualquer função  $y = \phi(x)$  que satisfaça esta equação é solução da edo (1).

## Aula 24: EDOs Exatas

**Critério:**  $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$  contínuas em  $\mathbb{R}^2$ , então (1) é **exata** se e só se  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ .

Sendo (1) exata então existe uma função  $F(x, y)$  com derivadas parciais contínuas tal que

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = M(x, y) + N(x, y)y'. \quad (2)$$

**Cálculo de  $F(x, y)$ :** Resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}$$

por integração “parcial” de uma equação em ordem a uma variável (tomando a outra constante); a constante de integração vem dependente da variável tomada constante.

Derivar parcialmente em ordem à variável tomada constante e igualar à outra equação para determinar a constante de integração anterior.

**Solução da EDO:** A solução da EDO é  $F(x, y) = C$ , pois de (1) e (2) sai que a edo (1)

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0.$$

## Aula 24: Exercícios 5

**A.** Verifique se a EDO é exata e no caso afirmativo determine as soluções na forma implícita.

(1)  $(2y^2 + 2x)dx + 4xydy = 0$ . Sol:  $F(x, y) = 2xy^2 + x^2$  sol da EDO:  $F(x, y) = C \Leftrightarrow 2xy^2 + x^2 = C$

(2)  $\sin y + (y^2 - x \sin y)y' = 0$ . Sol: Não é exata

(3)  $\cos y + (y^2 - x \sin y)y' = 0$ . Sol:  $x \cos y + \frac{y^3}{3} = C$

(4)  $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 - 2y)dy = 0$ . Sol:  $F(x, y) = x^2y - y - x^3$  sol. da EDO:  $F(x, y) = C \Leftrightarrow x^2y - y - x^3 = C$ .

(5)  $y + 2xe^y + (x^2e^y + x - 2y)y' = 0$ . Sol:  $F(x, y) = yx + x^2e^y - y^2$  sol da EDO:

$$F(x, y) = C \Leftrightarrow yx + x^2e^y - y^2 = C$$

**B.** Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

1. 
$$\begin{cases} y'(x \cos(xy) + e^y) = 1 - y \cos(xy) \\ y(1) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
 Sol:  $\sin(xy) - x + e^y = C$  S.P.C.:  $\sin(xy) - x + e^y = e^{\frac{\pi}{2}}$

2. 
$$\begin{cases} y'(y - x^2) = 2xy - 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
 Sol:  $(y - x^2)^2 + 2x - x^4 = C$  S.P.C.:  $C = 1$ :  $(y - x^2)^2 + 2x - x^4 = 1$   
 $y(0) = 1 \Rightarrow$  sol.  $y = x^2 + \sqrt{1 + x^4 - 2x}$

Nota: (2) com a restrição  $y(0.8) = 1$  não teria solução. Com a restrição  $y(1) = 1$  também não teria solução pois  $y$  não seria diferenciável em 1.

## Aula 24: EDOs lineares de primeira ordem

EDOS linear de 1<sup>a</sup> ordem: equação dif. da forma  $a(x)\mathbf{y}' + b(x)\mathbf{y} + c(x) = 0$ , em que  $a, b, c$  são funções def. num int.  $I$ , com  $a(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Passando  $c(x)$  para o outro membro e dividindo por  $a(x)$ , a equação toma a forma:

$$\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)$$

**Exercício 2:** determine uma função  $\mu = \mu(x)$  que satisfaz:  $\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu \mathbf{y})'$ .

**Resolução:**

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) &= (\mu \mathbf{y})' &\Leftrightarrow &\mu \mathbf{y}' + \mu p(x)\mathbf{y} = \mu \mathbf{y}' + \mu' \mathbf{y} \\ &&\Leftrightarrow &\mu' = \mu p(x) \text{ (eq. dif. de var. sep.)} \\ &&\Leftrightarrow &\frac{1}{\mu} d\mu = p(x)dx\end{aligned}$$

**Exercício 3:** resolva agora esta equação diferencial de variáveis separáveis em  $x$  e  $\mu = \mu(x)$ .

Nota importante: Esta função  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$  é um **factor integrante** da equação não exata (supondo  $p(x) \neq 0$ )  $p(x)\mathbf{y} - q(x) + \mathbf{y}' = 0$ . De facto, seja  $M = p(x)\mathbf{y} - q(x)$  e  $N = 1$ . Então  $\mu M dx + \mu N dy = 0$  é exata:  $\frac{\partial \mu M}{\partial \mathbf{y}} = \mu p(x)$  e  $\frac{\partial \mu N}{\partial x} = \mu' = (e^{\int p(x)dx})' = e^{\int p(x)dx} p(x) = \mu p(x)$ .

## Aula 24: Resolução das EDOs lineares de primeira ordem

---

$$\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)$$

Resolução:

(1) Calcular uma primitiva  $P(x)$  de  $p(x)$ , isto é,

$$P(x) = \int p(x)dx$$

(2) Construir o **factor integrante**

$$\mu(x) = e^{P(x)}$$

multiplicar ambos os membros da eq. dif. linear anterior por  $\mu(x)$ :

$$\mu(x)(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = \mu(x)q(x) \Leftrightarrow (\mu(x)\mathbf{y})' = \mu(x)q(x)$$

(3) Integral geral:

$$\mu(x)\mathbf{y} = \int \mu(x)q(x)dx + C.$$



## Aula 24: EDOs lineares - Exemplos

$$\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)$$

- Se  $p(x) = 0$  ou  $q(x) = 0$ , a EDO é (também) de variáveis separáveis.
- Se  $p(x) = p$  e  $q(x) = q$  são constantes, a EDO é de variáveis separáveis.

**Exercício 4:** Resolva as seguintes EDOs:

(a)  $xy' - y = x - 1; x > 0$

**Sol:**  $y = x \ln x + cx + 1$

(b)  $xy' + y - e^x = 0; x > 0$

**Sol:**  $y = \frac{e^x + c}{x}$

(c)  $y' - y = -e^x$

**Sol:**  $y = (c - x)e^x$

(d)  $y' + 2y = \cos x$

**Sol:**  $y = \frac{2 \cos x + \sin x}{5} + c e^{-2x}$

## Aula 24: Existência e unicidade do problema linear de Cauchy

**Teor. 2.5:** Se  $p$  e  $q$  são funções contínuas num intervalo  $I$  (contendo o pto inicial  $x_0$ ), então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Obs: todos os problemas de Cauchy apresentados nesta aula envolvem funções contínuas num intervalo contendo o ponto inicial, pelo que a solução apresentada é única nesse intervalo.

**Exercício 6:** Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) 
$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

**Sol:**  $y = -x e^x$

(b) 
$$\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \frac{13}{16} \end{cases}$$

**Sol:**  $y = e^{\frac{4}{3}x} - \frac{4x + 3}{16}$

(c) 
$$\begin{cases} y'' = (xy)' \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

**Sol:**  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

## Aula 24: EDOs de Bernoulli

Uma equação diferencial de **Bernoulli** é uma equação diferencial da forma

$$\mathbf{y}' + a(x)\mathbf{y} = b(x)\mathbf{y}^\alpha, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \alpha \neq 0, 1$$

Se  $\alpha > 0$ , então  $y = 0$  é sempre uma solução da eq. dif. de Bernoulli.

Soluções  $y \neq 0$ : Dividindo ambos os membros da eq. por  $\mathbf{y}^\alpha$  obtemos:

$$\mathbf{y}^{-\alpha}\mathbf{y}' + a(x)\mathbf{y}^{1-\alpha} = b(x)$$

A substituição  $z = y^{1-\alpha}$  transforma a edo de Bernoulli numa edo linear de primeira ordem:

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x)$$

cuja solução é:  $z = h(x) + C$  ou  $W(z, x, C) = 0$ . Revertendo a substituição obtém-se a solução da edo original:  $y^{1-\alpha} = h(x) + C$  ou  $W(y^{1-\alpha}, x, C) = 0$ .

**Exemplo:** Resolva a edo  $y' + y = e^x y^2$ .

**Sol:**  $y = \frac{1}{e^x(c - x)}$

## Aula 24: Exercícios 7

---

Resolva as seguintes equações diferenciais

(a)  $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$

Sol:  $y = \frac{1}{x(c-x)}$

(b)  $y' + \sin(x)y = \sin(x)y^2$

Sol:  $y = \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + c}$

(c)  $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4; \\ y(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Sol:  $y^3 = \frac{5x^6}{c-9x^5}$ , S.P.C.:  $y = \sqrt[3]{\frac{5x^6}{49-9x^5}}$ .

(d)  $\begin{cases} xy' + y = -\frac{(xy)^4}{3+3x^2}; \\ y(1) = 1. \end{cases}$

Sol:  $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{\arctg x + c}}$ , S.P.C.:  $y = \frac{1}{x\sqrt[3]{\arctg x + 1 - \frac{\pi}{4}}}$ .

# Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$$(u^p)' = p u^{p-1} u' \quad (\arcsen(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (\arctg(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad (\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \quad (\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$$

$$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u \quad (a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u \quad (\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$$

$$(\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \quad (\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

$$\int u' \sin u dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + C$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + C$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\cotg u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1} u + C$$

$$\int u' \operatorname{sech}^2 u dx = \operatorname{tgh} u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1}(u) + C$$

$$\int u' \sec u dx = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C$$

$$\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + C$$

$$\int u' \operatorname{cosec} u \cotg u dx = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int u' v + uv' dx = uv + C$$

$$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u dx = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2} dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$$