Resumo de alguns resultados importantes sobre Integrais Impróprios

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em qualquer sub-intervalo limitado de $[0, +\infty[$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \;\in \mathbb{R} \quad \text{(convergente)}$$

- $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
  (Neste caso verifica-se a desigualdade triangular $\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$).
- Sejam $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, $\forall\, x \in [0, +\infty[$.
  - Se $f(x) \leq g(x)$ então: $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
    $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.
  - Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M \in \mathbb{R}^+$, então $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ têm a mesma natureza.
  - Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, então: $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.
  - Se $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então: $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ diverge $\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge.
- Se f é contínua e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0$, então $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ diverge.
- Se h é limitada, $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ convergente $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ absoluta/ converg.

Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace de f é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} f(t)dt,$$

para os valores de s em que o integral impróprio é convergente.

Propriedades lineares da transformadas de Laplace:

Prop. 3.1: A transformada de Laplace é uma transf. linear nas funções[†], isto é, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_g$, então

(i) $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > \max\{s_f, s_g\}$.

(i) $\mathcal{L}\{\alpha\, f\}(s) = \alpha\, \mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$.

[†] É possível provar que o conjunto das funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial constitui um espaço vectorial real (com a adição e multiplicação por números reais usuais) e que a transformada de Laplace é uma aplicação linear em tal espaço.

Aula 21: Exemplos

1. $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$, para $s > 0$.

2. $g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 2, 3 \\ 0 & t = 2 \\ 6 & t = 3 \end{cases}$, $\mathcal{L}\{g\}(s) = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$.

3. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-a) = \dfrac{1}{s-a}$, para $s > a$ $(a \in \mathbb{R})$.

4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$.

5. $\mathcal{L}\{sen(at)\}(s) = \dfrac{a}{s}\mathcal{L}\{cos(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

6. $\mathcal{L}\{cos(at)\}(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{a}{s}\mathcal{L}\{sen(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

7. $\mathcal{L}\{c\}(s) = \mathcal{L}\{c\,1\}(s) = c\,\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{c}{s}$, para $s > 0$.

8. $\mathcal{L}\{cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$, para $s > |a|$ $(a \in \mathbb{R})$.

9. $\mathcal{L}\{senh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$, para $s > |a|$ $(a \in \mathbb{R})$.

Determine:

1. $\mathcal{L}\{sen^2(at)\}(s)$ $\quad$ $sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos(2x))$

2. $\mathcal{L}\{cos^2(at)\}(s)$ $\quad$ $cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos(2x))$

3. $\mathcal{L}\{sen^3(at)\}(s)$ $\quad$ $sen^3x = \frac{1}{4}(3sen(x) - sen(3x))$

4. $\mathcal{L}\{cos^3(at)\}(s)$ $\quad$ $cos^3x = \frac{1}{4}(3cos(x) + cos(3x))$

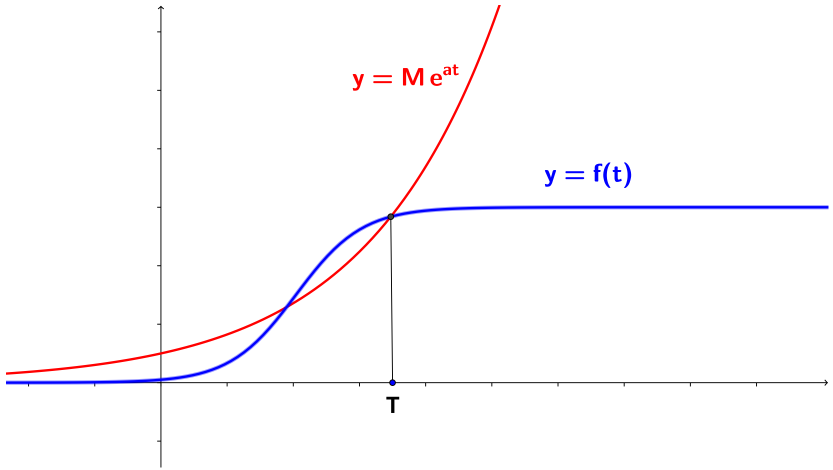
5. $\mathcal{L}\{at^3 + bt^2 + ct + d\}(s)$

Aula 22: Funções de ordem exponencial (à direita)

Um função f diz-se uma **função de ordem exponencial** $a \in \mathbb{R}$, se

$$|f(t)| \leq M\, e^{at}, \; \forall\, t \geq T,$$

para algumas constantes M, T positivas.



Uma função f é de ordem exponencial se para algum $a > 0\,,\quad \dfrac{|f(t)|}{e^{at}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Exemplo: Toda a função $f(t) = p(t)e^{at}h(t)$, em que $p(t)$ é um qualquer polinómio e $h(t)$ é uma função limitada (tal como sen (bx), $\cos(bx)$) , é uma função de ordem exponencial.

Aula 22: Existência da transformada de Laplace

Se $f(t) = p(t)e^{at}h(t)$ admite transformada de Laplace para todo o polinómio $p(t)$ e para toda a função limitada $h(t)$ (por exemplo $f(t) = t^n e^{at} \operatorname{sen}(bt)$), nem toda a função admite transformada de Laplace.

Por exemplo $f(t) = e^{t^2}$ não admite transformada de Laplace:

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{t(t-s)} dt$ é divergente para todo o $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2 Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Se

(i) f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e

(ii) f é uma função de ordem exponencial $a \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Nota: Isto decorre do teorema: Se $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ é convergente então $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) dt$ é também convergente.

Aula 22: Transformada de Laplace inversa

Teorema 1.3: Se f e g são funções seccionalmente contínuas em $[0,+\infty[$ e satisfazem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)\,, \quad \text{para } \forall\, s > a \;\; (a \in \mathbb{R}),$$

então $f(t) = g(t)$ para todo o ponto $t \in \mathbb{R}^+$ onde f e g são contínuas.

A menos de um conjunto discreto de pontos, este teorema diz-nos que a transformada de Laplace é "injectiva" no espaço vectorial das funções seccionalmente contínuas (e de ordem exponencial) em $[0,+\infty[$, portanto "invertível" neste espaço vectorial.

Note-se que $\displaystyle\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty g(t) \;\not\Rightarrow\; f(t) = g(t)$ em $\mathbb{R}^+$.

Ex: $f(t) = e^{-t}$ e $g(t) = \frac{e^{-t}}{2}$ são diferentes e temos $\displaystyle\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty g(t) = 1$.

Linearidade da transformada de Laplace inversa:

Prop 1.7: Suponha-se que F e G (definidas num mesmo domínio) admitem transformada de Laplace inversa. Então $F+G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

(i) $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$; **(ii)** $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Aula 22: Tabela das transformadas de Laplace inversas

1. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}(t) = 1\,,\;$ para $s > 0$.

2. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-a}\}(t) = e^{at}\,,\;$ para $s > a \quad (a \in \mathbb{R})$.

3. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{n!}{s^{n+1}}\}(t) = t^{n}\,,\;$ para $s > 0$.

4. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2+a^2}\}(t) = sen(at)\,,\;$ para $s > 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.

5. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+a^2}\}(t) = cos(at)\,,\;$ para $s > 0 \quad (a \in \mathbb{R})$.

6. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s^2-a^2}\}(t) = senh(at),\quad$ para $s > |a| \quad (a \in \mathbb{R})$.

7. $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2-a^2}\}(t) = cosh(at),\quad$ para $s > |a| \quad (a \in \mathbb{R})$.

Aula 22: Exercícios 2

Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

(1) $\dfrac{1}{s(s-2)}$

(2) $\dfrac{3}{s^2+9}$

(3) $\dfrac{42-4s}{s(s-7)}$

(4) $\dfrac{6+7s^2}{s^4}$

(5) $\dfrac{2s^2}{(s-a)(s^2+a^2)}$

Aula 22: Prop. 3.2 (Deslocamento na transformada)

Prop. 3.2: Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > s_f$, então também existe

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) \;=\; \mathcal{L}\{f(t)\}(s - \lambda)\,, \quad \text{para } s > \lambda + s_f.$$

Invertendo o deslocamento na transformada temos:

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\}(t) = e^{\lambda t}\,\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).}$$

Ex. 1: $\mathcal{L}\{e^{-2t}\operatorname{sen}(6t)\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen}(6t)\}(s+2) = \dfrac{6}{(s+2)^2 + 6^2}\,, \quad s > -2.$

Ex. 2: $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-5)^2-4}\}(t) = e^{5t}\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2-4}\}(t) = e^{5t}\,\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2-2^2}\}(t) = \frac{e^{5t}}{2}\operatorname{senh}(2t), \quad (s > 5).$

Exercício: 1: Mostre que:

(1) $\mathcal{L}\{e^{t}\operatorname{sen}(3t)\}(s) = \dfrac{3}{s^2 - 2s + 10},\ s > 1.$

(2) $\mathcal{L}\{e^{\beta t}\cosh(\alpha t)\}(s) = \dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2 - \alpha^2}\,,\ s > |\alpha| + \beta.$

(3) $\mathcal{L}\{e^{2t}\operatorname{senh}(-\sqrt{3}\,t)\}(s) = \dfrac{-\sqrt{3}}{(s-2)^2 - 3}\,,\ s > \sqrt{3} + 2.$

(4) $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{3}{s^2 - 2s + 10}\}(t) = e^{t}\operatorname{sen}(3t).$

(5) $\mathcal{L}^{-1}\{\dfrac{s-\beta}{(s-\beta)^2 - \alpha^2}\}(t) = e^{\beta t}\cosh(\alpha t).$

Formulário Transformadas de Laplace

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ s>s_f;\quad G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s),\ s>s_g.\qquad \mathcal{L}\{f(t)\}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}\ ,\quad s>0$
$t^n\ (n\in\mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\ ,\quad s>0$
$e^{at}\ (a\in\mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\ ,\quad s>a$
$sen(at)\ (a\in\mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\ ,\quad s>0$
$cos(at)\ (a\in\mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\ ,\quad s>0$
$senh(at)\ (a\in\mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\ ,\quad s>\lvert a\rvert$
$cosh(at)\ (a\in\mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\ ,\quad s>\lvert a\rvert$
$f(t)+g(t)$	$F(s)+G(s)\ ,\quad s>s_f,s_g$
$\alpha\, f(t)\ (\alpha\in\mathbb{R})$	$\alpha\, F(s)\ ,\quad s>s_f$
$e^{\lambda t}f(t)\ (\lambda\in\mathbb{R})$	$F(s-\lambda)\ ,\quad s>s_f+\lambda$
$H_a(t)f(t-a)\ (a>0)$	$e^{-as}F(s)\ ,\quad s>s_f$
$f(at)\ (a>0)$	$\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})\ ,\quad s>as_f$
$t^nf(t)\ (n\in\mathbb{N})$	$(-1)^nF^{(n)}(s)\ ,\quad s>$ ordem exp. de f
$f'(t)$	$s\,F(s)-f(0)\ ,\quad s>$ ord. exp. de f
$f''(t)$	$s^2\,F(s)-s\,f(0)-f'(0)\ ,\quad s>$ ordens exp. de f,f'
$f^{(n)}(t)$	$s^n\,F(s)-\sum_{k=1}^n s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$, onde $f^{(0)}\equiv f\ ,\quad s>$ ordens exp. de $f,f',\dots,f^{(n-1)}$
$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t\text{-}u)du$	$F(s)G(s)$

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ , \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\ \mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\ \mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u' \sin u\ \mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\ \mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \mathrm{dx} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} + \mathrm{C}$

$\int u' \sec^2 u\ \mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' e^u\ \mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\ \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} \mathrm{u} + \mathrm{C}$

$\int u' a^u\ \mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\ \mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\ \mathrm{d}x = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\ \mathrm{d}x = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\ \mathrm{d}x = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\ \mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u' \sec u\ \mathrm{d}x = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$