


Árvores Binárias I

06/11/2024

Ficheiro ZIP

- Está disponível no Moodle um ficheiro ZIP de suporte aos tópicos de hoje
- 1ª versão do tipo abstrato Árvore Binária
- Funções incompletas, que permitem trabalho autónomo de desenvolvimento e teste

Sumário

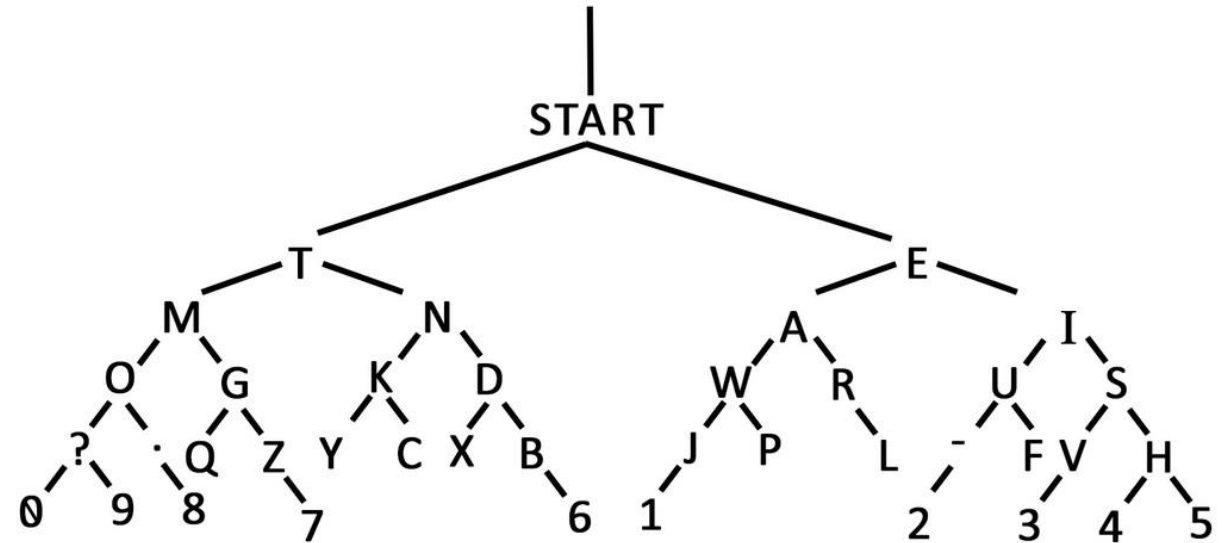
- Árvores binárias; terminologia e algumas propriedades
- O TAD Árvore Binária
- Possíveis estruturas de dados
- Algoritmos recursivos – exemplos simples
- Exercícios / Tarefas 

Árvores

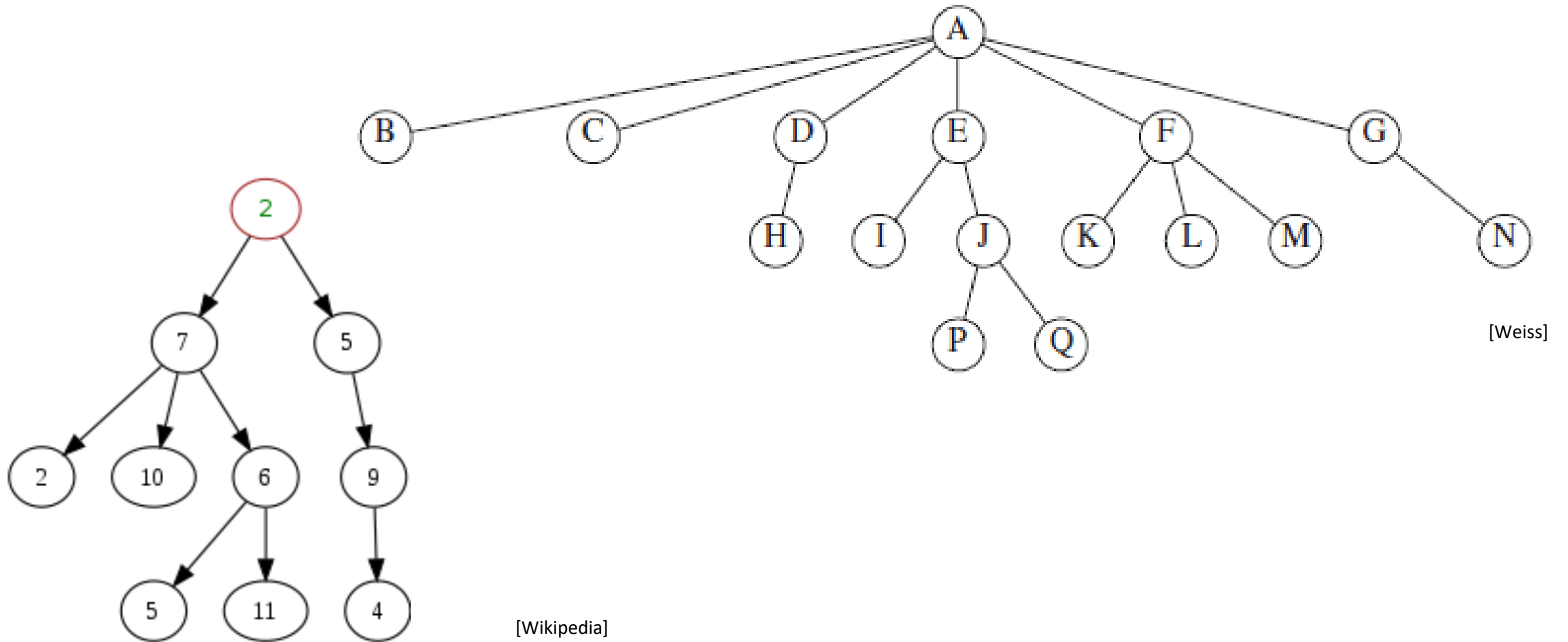
← DASH

DOT →

[weebly.com]



Árvores – Arcos ? – Ordem ?



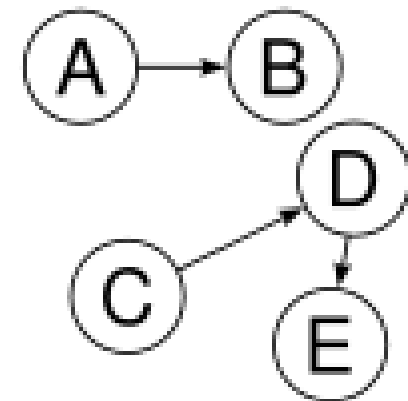
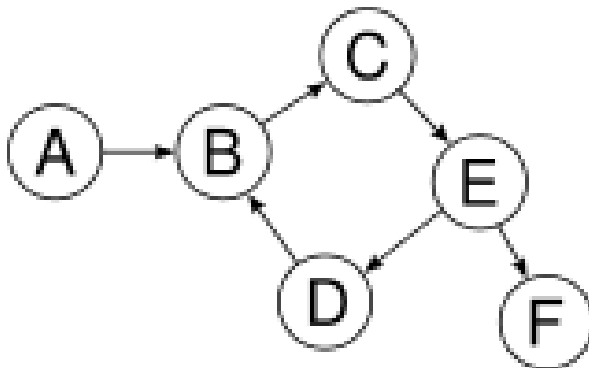
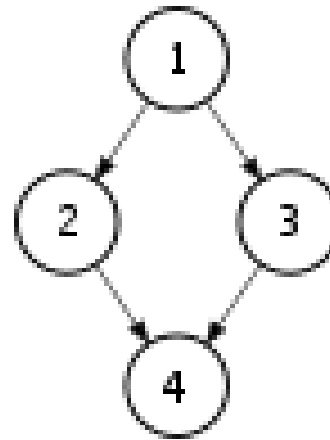
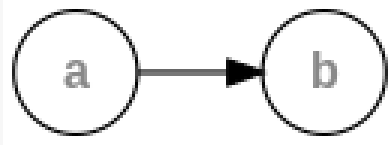
Árvores vs Grafos – Definição ?

- Todas as **árvores** são **grafos** !
- **MAS**, nem todos os grafos são árvores !!
- Definição ?

Árvores **vs** Grafos – Definições equivalentes

- Todas as **árvores** são **grafos** !
- **MAS**, nem todos os grafos são árvores !!
- Árvore: existe **um só caminho** entre qualquer **par de nós distintos**
- Árvore: **apagar** um qualquer **arco** origina duas árvores **desconexas**
- Árvore com **n nós** tem **$(n - 1)$ arcos** e não contém nenhum ciclo
- Árvore com **n nós** tem **$(n - 1)$ arcos** e é conexa

São árvores orientadas ou **não** ?



[Wikipedia]

Árvores orientadas vs Grafos orientados

- Todas as **árvores orientadas** são **grafos orientados** !
- **MAS**, nem todos os grafos orientados são árvores orientadas !!
- Definição ?

Árvores orientadas vs Grafos orientados

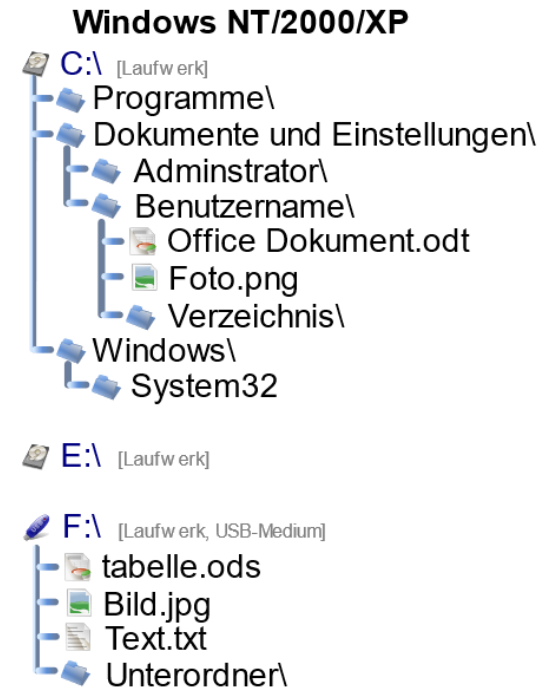
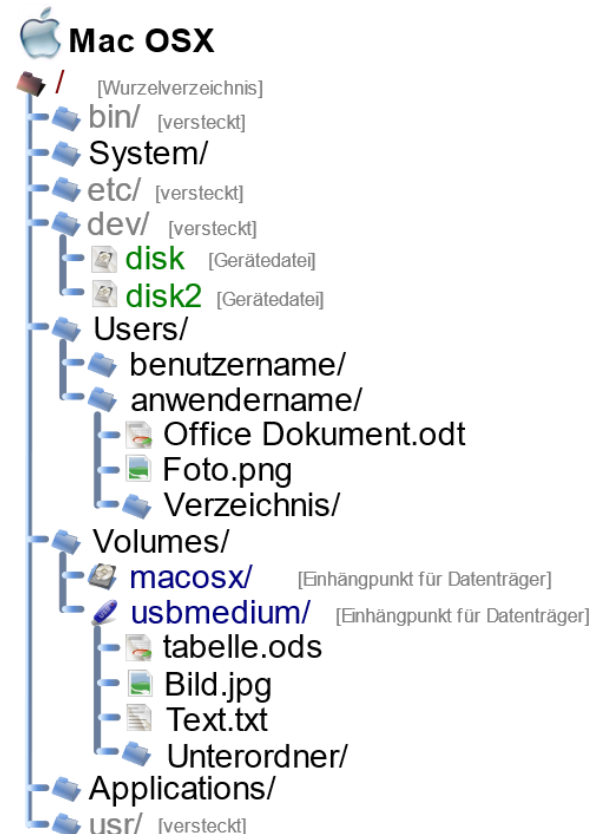
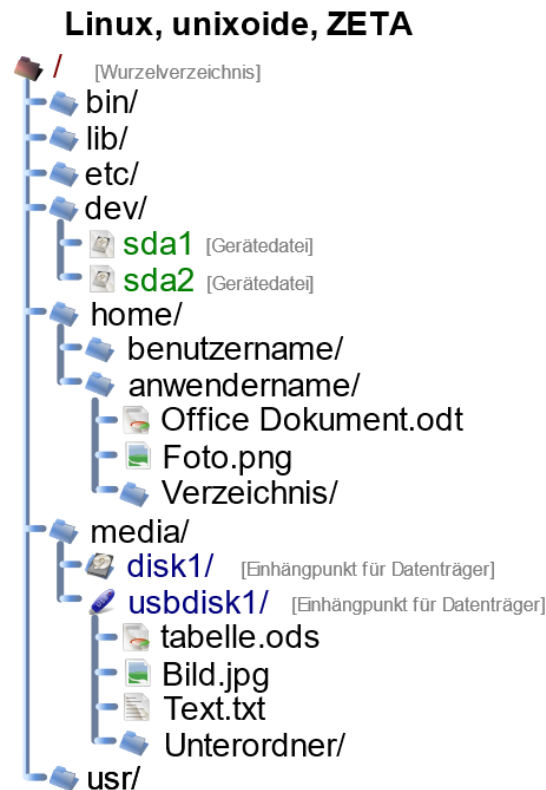
- Todas as **árvores orientadas** são **grafos orientados** !
- **MAS**, nem todos os grafos orientados são árvores orientadas !!
- **Árvore orientada:**
 - O nó **raiz** não tem qualquer arco incidente
 - Cada um dos outros nós tem **um só arco incidente**
 - Existe **um só caminho orientado** entre a **raiz** e cada um dos outros **nós**

Exemplos de aplicação

- Árvores **genealógicas**
- Árvores de **pedigree**
- Torneios
- Hierarquia de uma organização
- Estrutura de um livro
- Taxonomias hierárquicas
- ...

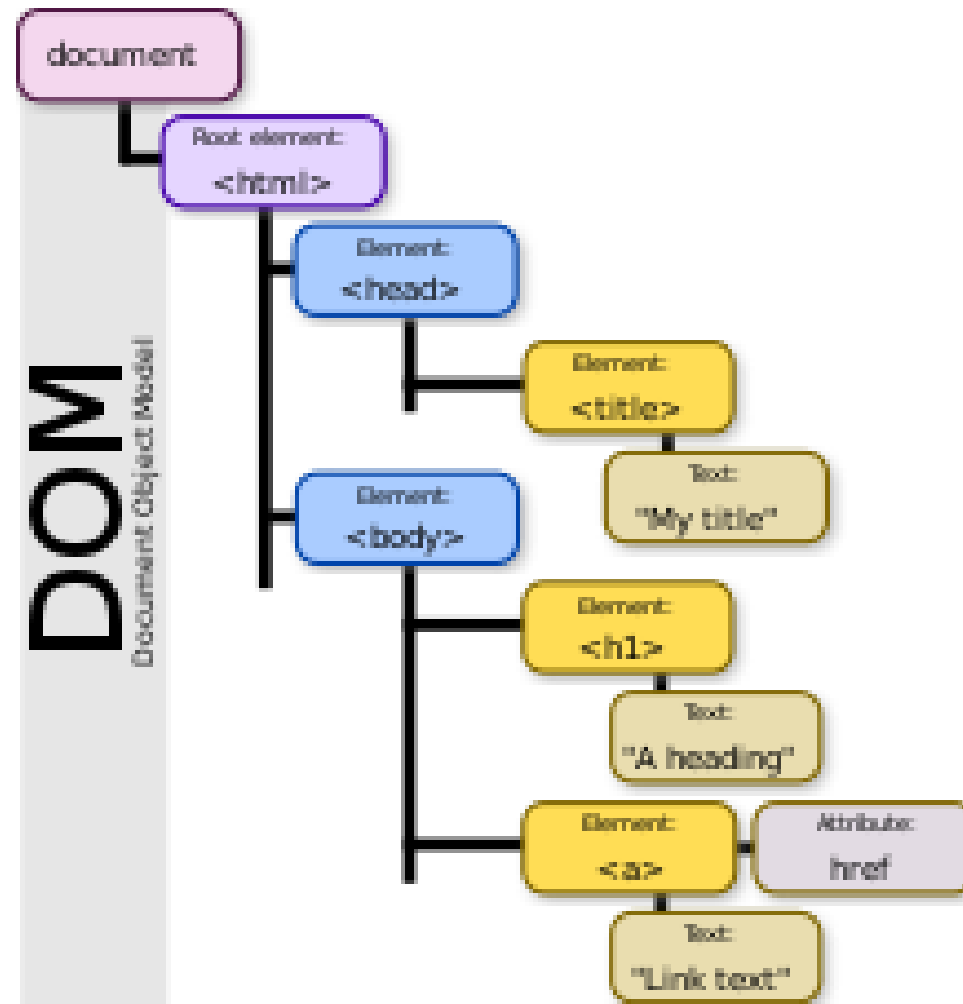


Organização do sistema de ficheiros



[Wikipedia]

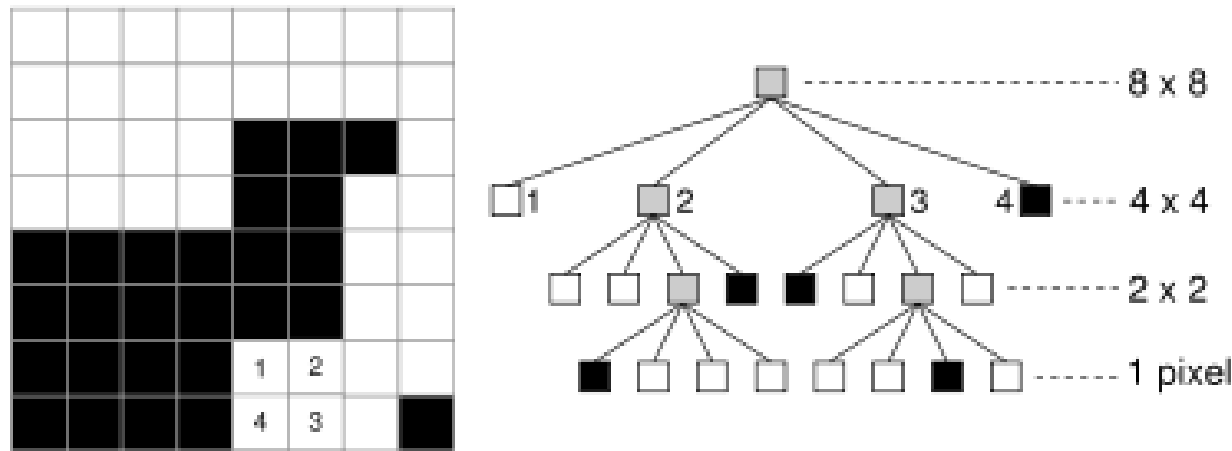
DOM tree



[Wikipedia]

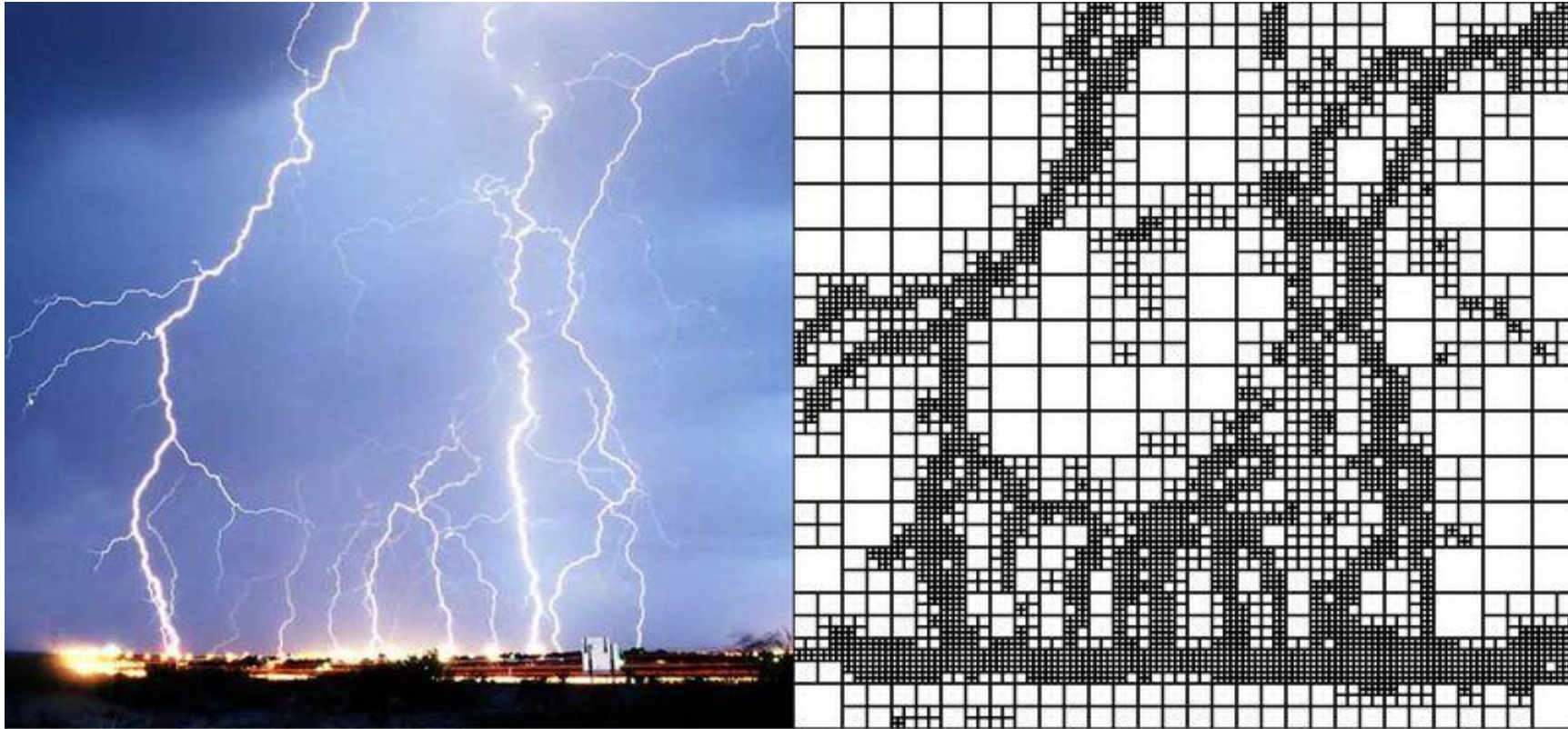
Quadrees – Árvores quaternárias

- Representação de imagens binárias
 - Subdivisão recursiva em 4 quadrantes
 - Nós pretos, brancos e cinzentos



[Wikipedia]

Quadrees



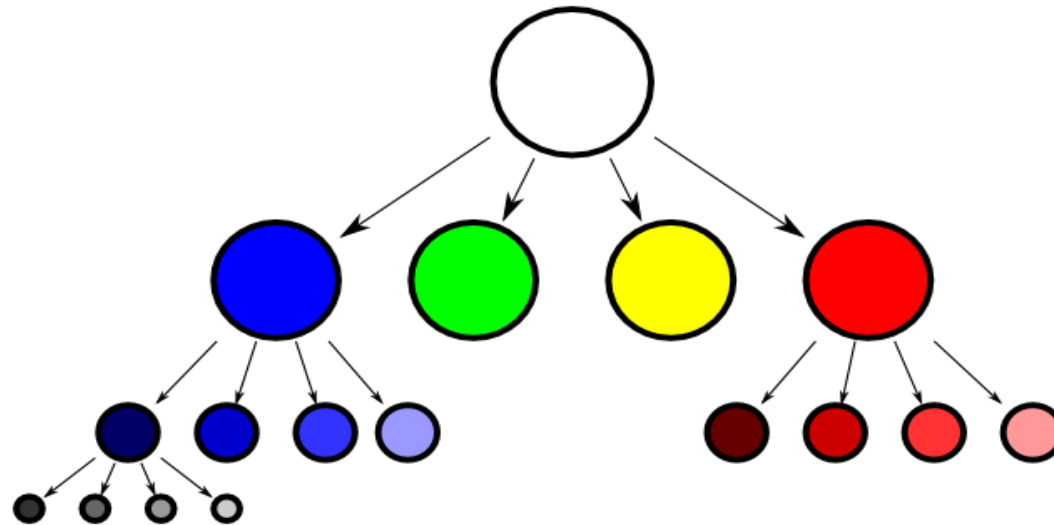
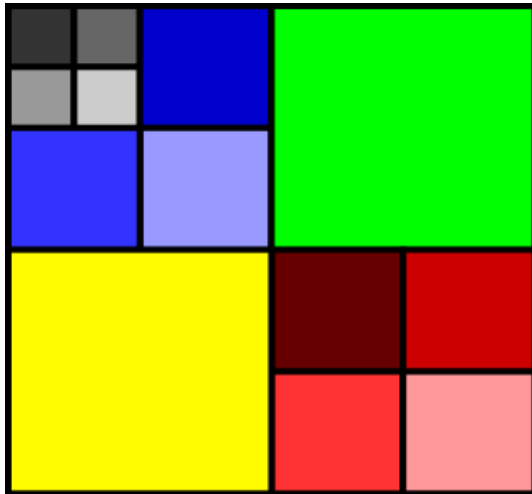
Originalbild

Aus Konturwerten
erstellter Quadtree
(Größe: 1229 Byte)

[Wikipedia]

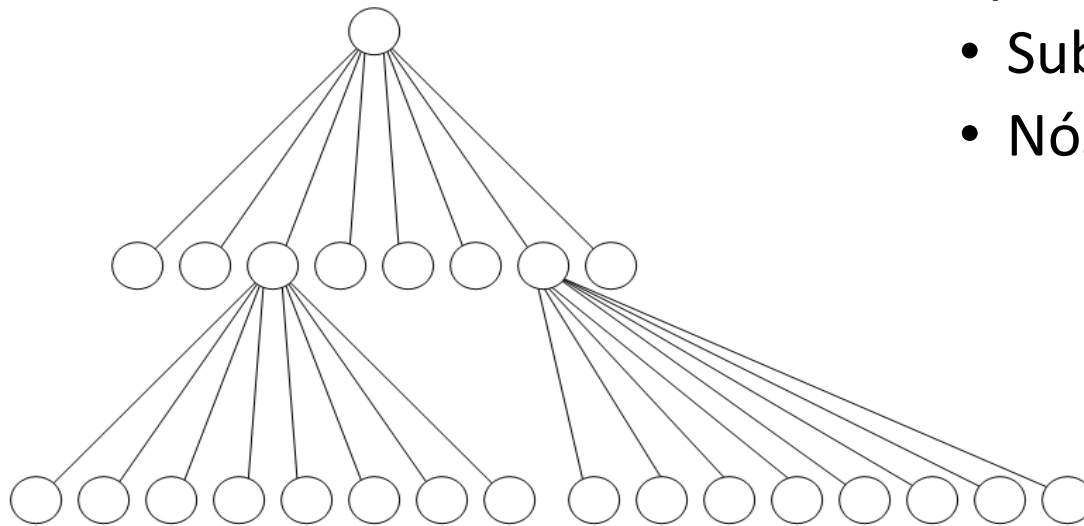
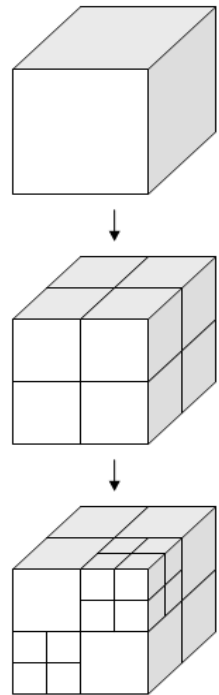
Quadrees

- Representação de imagens a cores



[Wikipedia]

Octrees – Árvores octais



- Representação de volumes
 - Subdivisão recursiva em **8 octantes**
 - Nós pretos, brancos e cinzentos

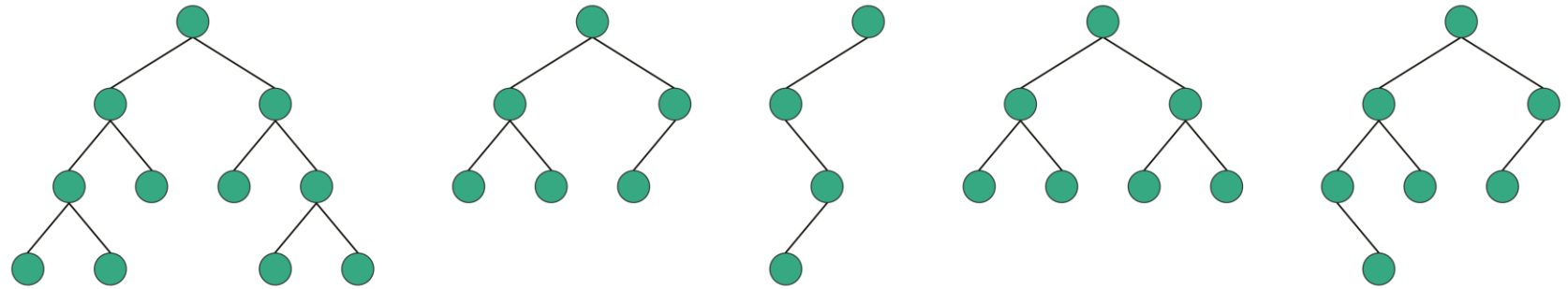
[Wikipedia]

Mais exemplos de aplicação

- Herança **simples** em POO
- Comportamento dinâmico de algoritmos “**divide-and-conquer**”
- ...

Resumo – Tipos de árvores

- Árvores **orientadas** vs não orientadas
- Árvores **binárias**, ternárias, quaternárias, ... , **m-árias**
- Árvores binárias **ordenadas** – Como ?
- Árvores binárias **equilibradas** em altura – Como ?

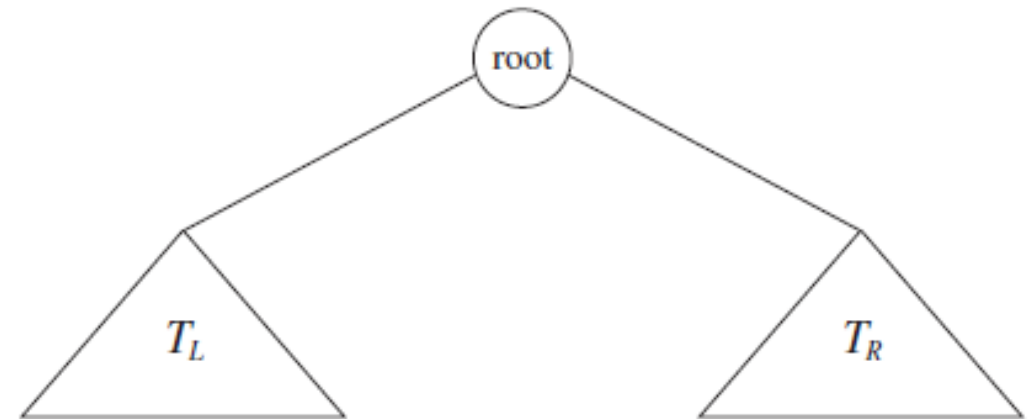


[towardsdatascience.com]

Árvores Binárias

Árvore Binária – Definição recursiva

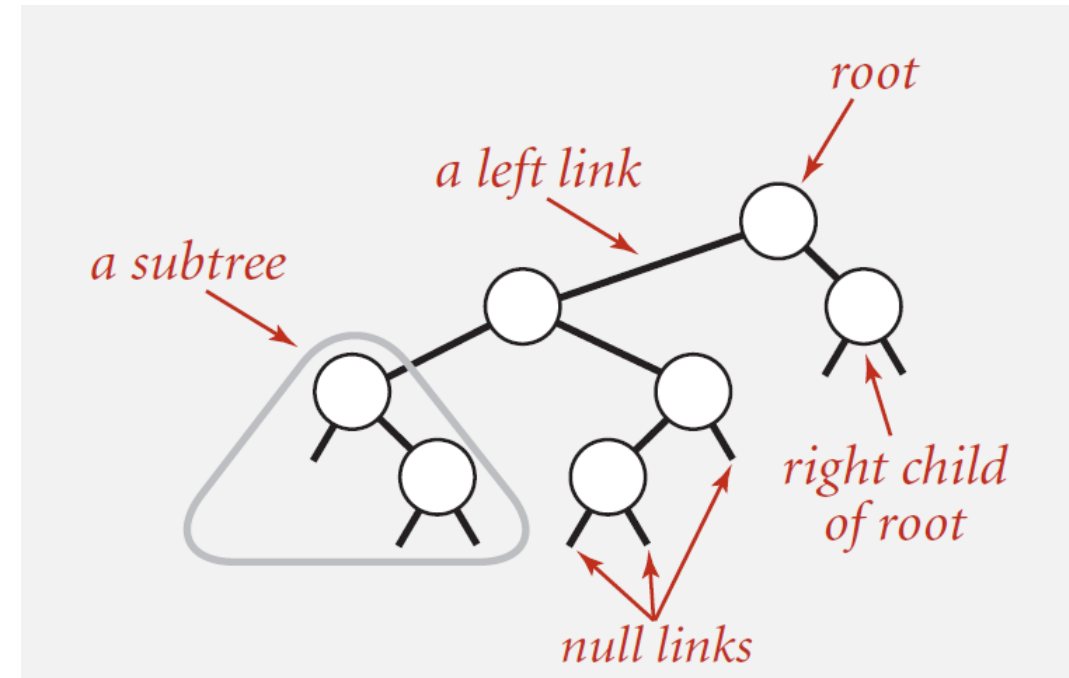
- Uma árvore binária é formada por um conjunto finito de nós ($n \geq 0$)
- Uma **árvore binária** é **vazia**
- **OU** é constituída por um **nó raiz** que referencia **duas (sub-)árvores** binárias disjuntas (**SAEsq** e **SADir**)
 - Arcos orientados para a SAEsq e para a SADir



[Weiss]

Árvore Binária – Terminologia

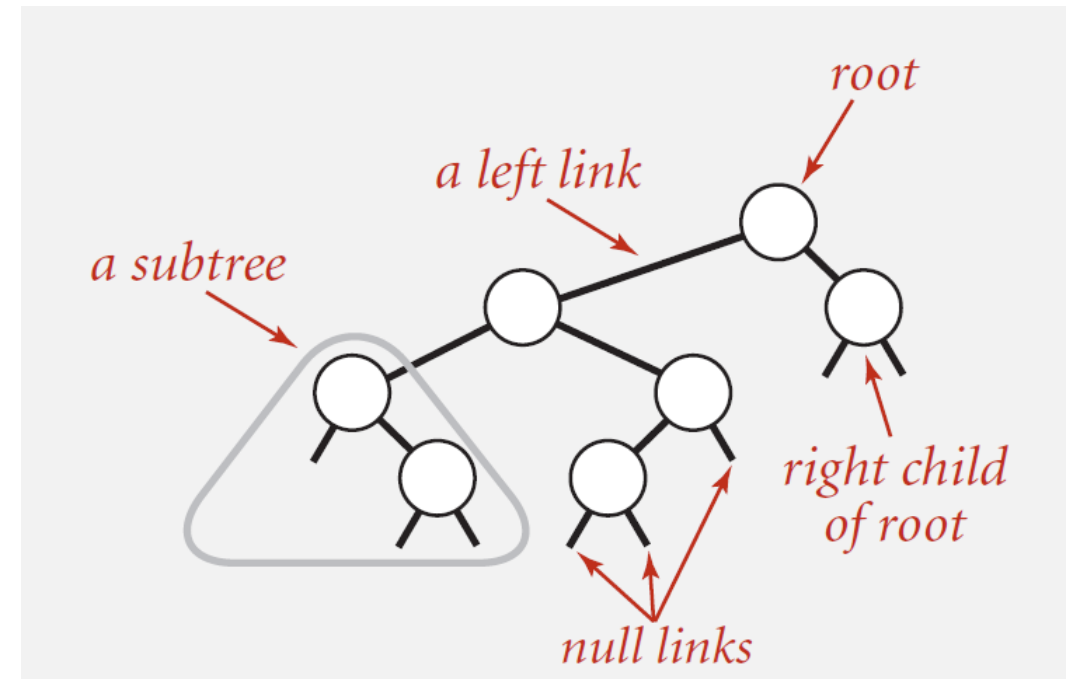
- **Grau** de um **nó**: nº das suas subárvores não-vazias
- **Grau** de uma **árvore** ?
- **Nós não-terminais** vs **Folhas**
- Pai, **filhos**, irmãos
- Antepassados, descendentes



[Sedgewick & Wayne]

Árvore Binária – Terminologia

- **Nível** de um nó ?
- A **raiz** está no nível **0**
- Qual é a **definição recursiva** ?
- **Altura** de uma árvore ?
- Nº de arcos do **caminho mais longo** da raiz da árvore para uma das suas folhas
- Índice do **último nível**



[Sedgewick & Wayne]

Algumas propriedades das árvores binárias

- Questões simples !!
- Nº **máximo** de nós no **nível i** ?
- Nº **máximo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ?
- Nº **mínimo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ?
- Façam **exemplos** !

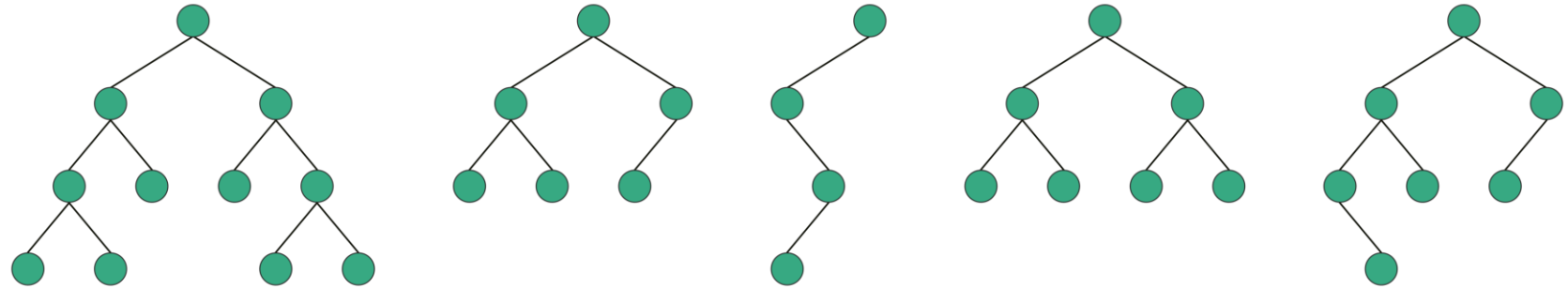
Algumas propriedades das árvores binárias

- Questões simples !!
- Nº **máximo** de nós no **nível i** ? 2^i
- Nº **máximo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ? $2^{h+1} - 1$
- Nº **mínimo** de nós numa árvore de **altura h** ? Quando ? $h + 1$

$$h + 1 \leq n \leq 2^{h+1} - 1$$

Algumas propriedades das árvores binárias

- Completar a frase:
- A altura de uma árvore binária com n nós é pelo menos ... e quando muito ...
- Façam exemplos !!

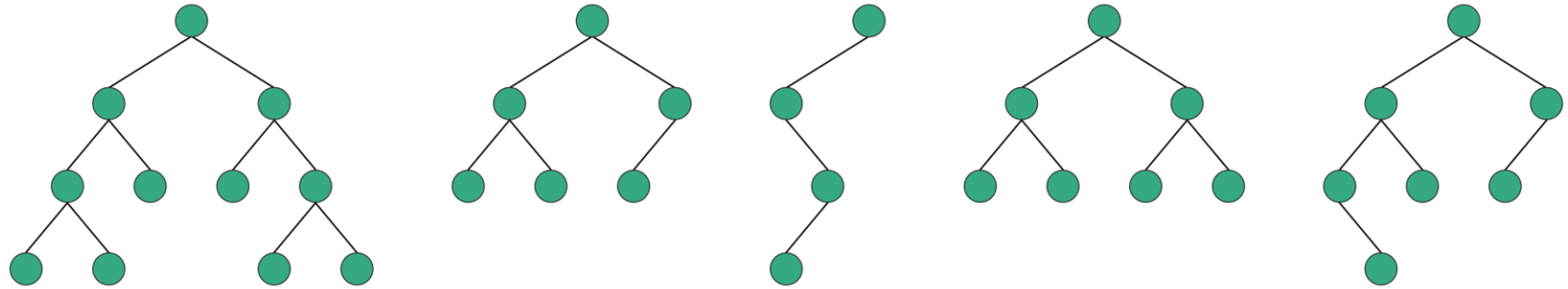


[towardsdatascience.com]

O TAD Árvore Binária

TAD Árvore Binária – Funcionalidades

- Conjunto de **elementos** do **mesmo tipo**
- Armazenados **sem qualquer ordem particular**
- Procura / inserção / remoção / substituição
- Pertença
- **search() / insert() / remove() / replace()**
- **contains()**
- **size() / isEmpty()**
- **create() / destroy()**



[towardsdatascience.com]

O TAD Árvore Binária de **Inteiros**



Árvore Binária de Inteiros – Funcionalidades

```
#ifndef _INTEGERS_BINTREE_
#define _INTEGERS_BINTREE_

// JUST storing integers
typedef int ItemType;
typedef struct _TreeNode Tree;

Tree* TreeCreate(void);

void TreeDestroy(Tree** pRoot);
```



```
// Tree properties

int TreeIsEmpty(const Tree* root);

int TreeEquals(const Tree* root1, const Tree* root2);

int TreeMirrors(const Tree* root1, const Tree* root2);

// ...
```

Árvore Binária de Inteiros – Funcionalidades

```
// Getters

int TreeGetNumberOfNodes(const Tree* root);

int TreeGetHeight(const Tree* root);

ItemType TreeGetMin(const Tree* root);
ItemType TreeGetMax(const Tree* root);

Tree* TreeGetPointerToMinNode(const Tree* root);
Tree* TreeGetPointerToMaxNode(const Tree* root);


// ...
```

- A estrutura e os elementos da árvore **não são alterados**


Árvore Binária de Inteiros – Funcionalidades

```
// Operations with items
```

```
int TreeContains(const Tree* root, const ItemType item);
```



```
int TreeAdd(Tree** pRoot, const ItemType item);
```



```
int TreeRemove(Tree** pRoot, const ItemType item);
```

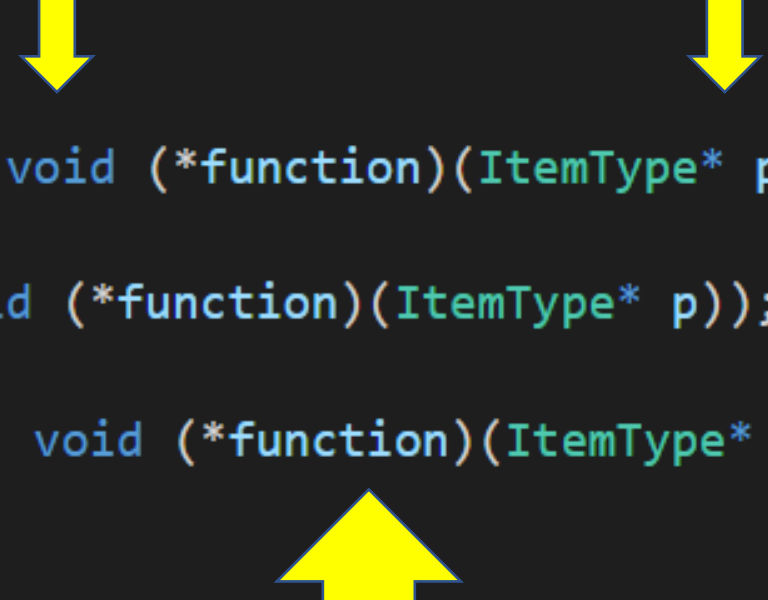
```
// ...
```



- TreeAdd()
 - Se **vazia**, criar o nó raiz e **atualizar o ponteiro**
- TreeRemove()
 - Se o nó raiz original é **apagado**, **atualizar o ponteiro**


Árvore Binária de Inteiros – Travessias

```
// Traversals  
  
void TreeTraverseInPREOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));  
  
void TreeTraverseINOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));  
  
void TreeTraverseInPOSTOrder(Tree* root, void (*function)(ItemType* p));  
  
// ...
```



- 2º argumento é um **ponteiro** para uma **função genérica**
- Que pode **consultar** ou **alterar** a informação dos **nós da árvore**

Árvore Binária – Funções para as travessias



```
#include "IntegersBinTree.h"

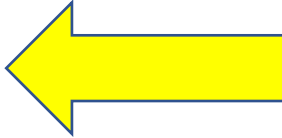
void printInteger(int* p) { printf("%d ", *p); }

void multiplyIntegerBy2(int* p) { *p *= 2; }

int main(void) {
    Tree* tree = createExampleTree();

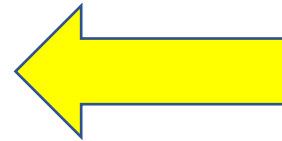
    printf("Created an example tree\n");

    if (TreeIsEmpty(tree)) {
        printf("The created tree is EMPTY\n");
    } else {
        printf("The created tree is OK\n");
    }
}
```

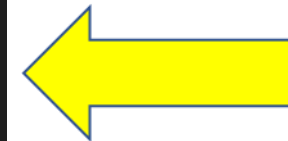


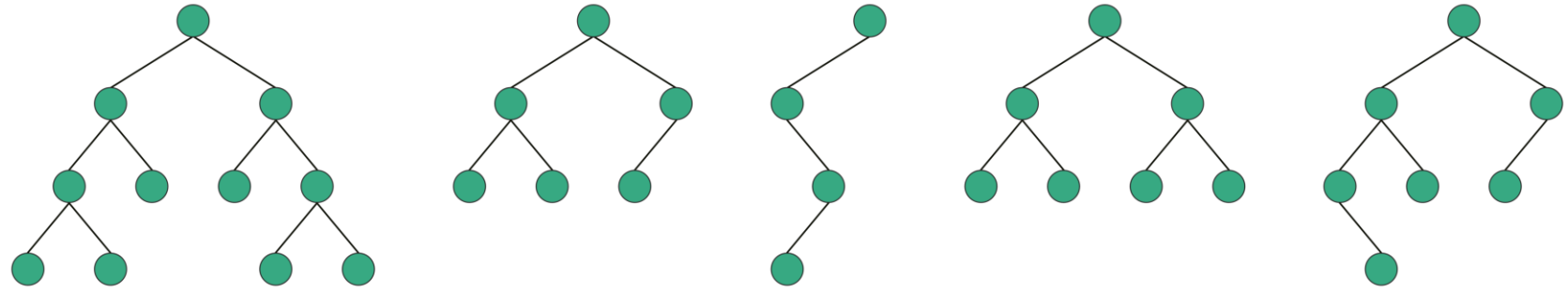
Árvore Binária – Funções para as travessias

```
printf("PRE-Order traversal : ");  
TreeTraverseInPREOrder(tree, printInteger);  
printf("\n");
```



```
printf("Multiply each value by 2\n");  
TreeTraverseInPREOrder(tree, multiplyIntegerBy2);
```





[towardsdatascience.com]

O TAD Árvore Binária

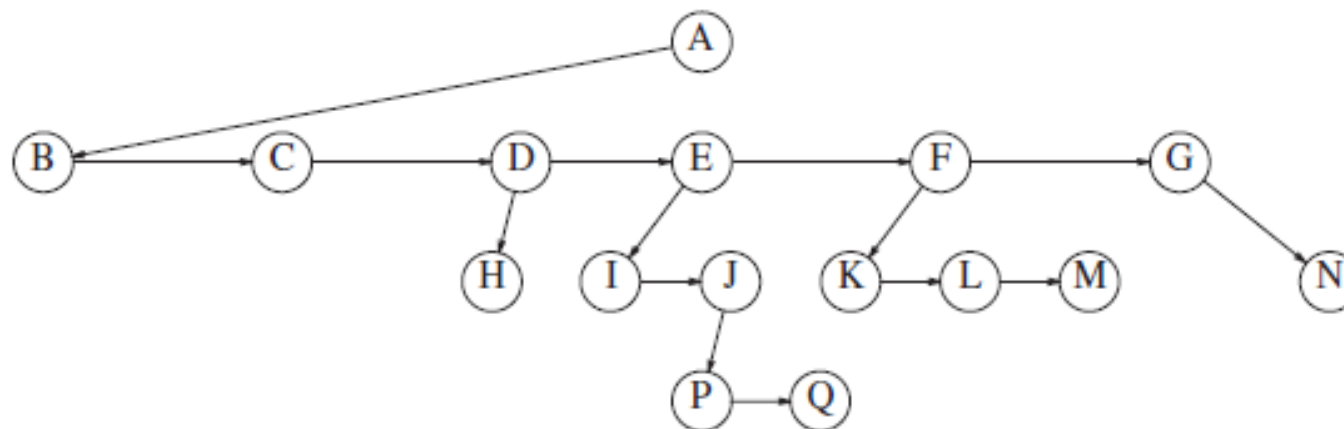
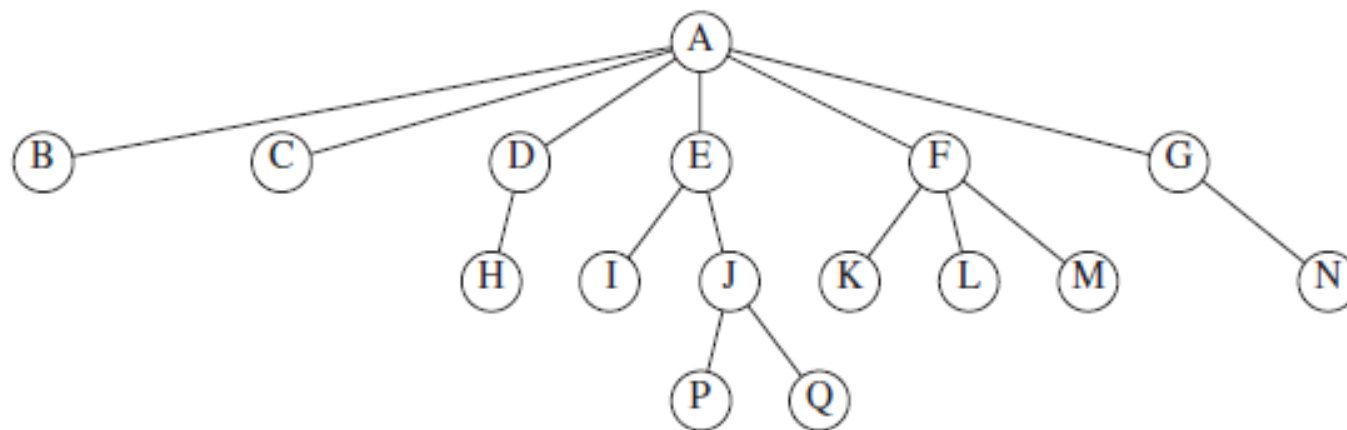
– Possíveis estruturas de dados

Possíveis representações internas

- **Array** – representação sequencial **por níveis** ✓
- **Lista de listas** – 1º filho e irmãos
- Nó com **2 ponteiros** para as subárvores esquerda e direita
- Nó com **mais 1 ponteiro** para o **progenitor**
- ...
- Que **operações** são mais **fáceis** / **difíceis** com uma dada representação interna ?

Lista de listas – 1º filho e irmãos

[Weiss]

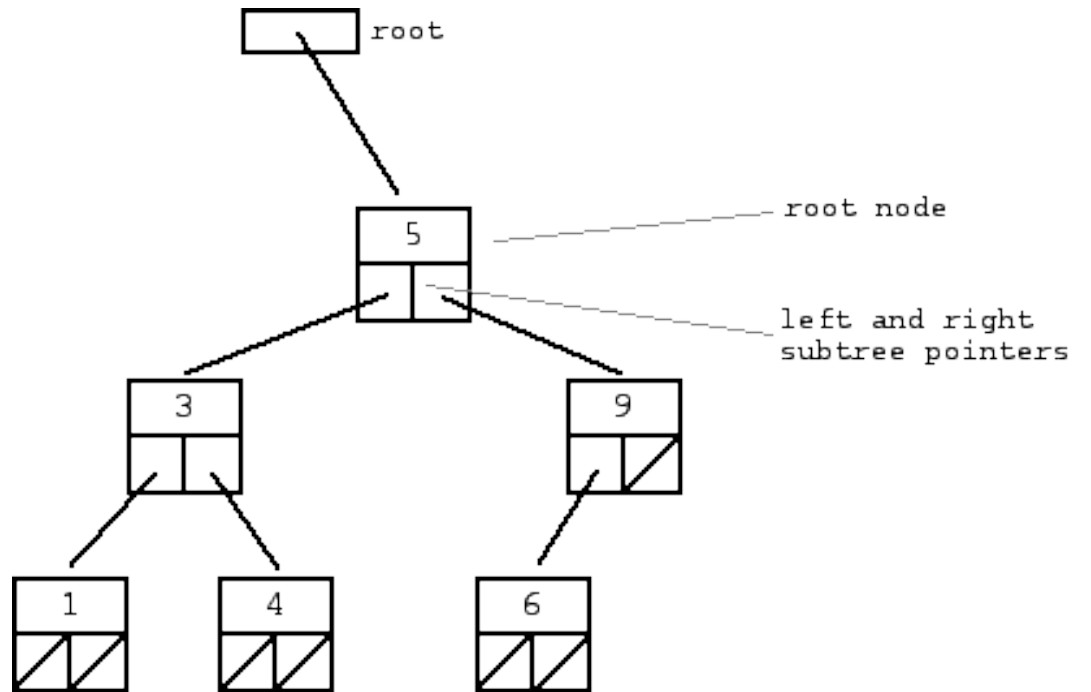


```
struct TreeNode
{
    Object    element;
    TreeNode *firstChild;
    TreeNode *nextSibling;
};
```



Árvore Binária – Nó com 2 ponteiros

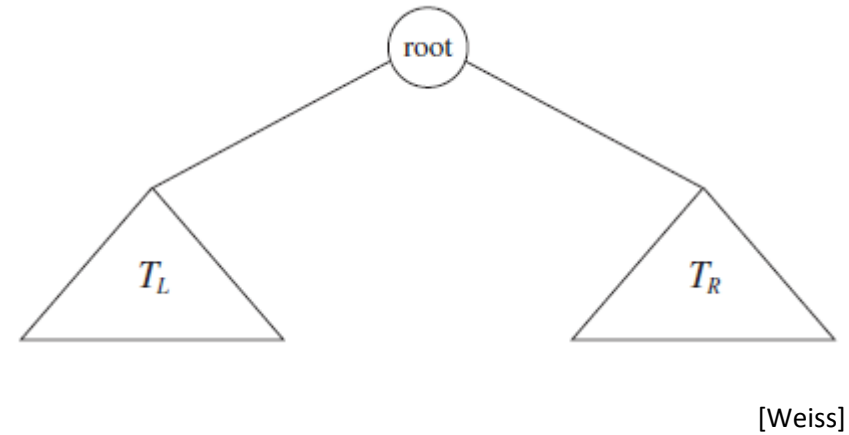
```
struct _TreeNode {  
    ItemType item;  
    struct _TreeNode* left;  
    struct _TreeNode* right;  
};
```



[stanford.edu]

Possíveis representações internas

- Não alterar as funcionalidades do TAD !!
- Que operações são mais fáceis / difíceis com uma dada representação interna?
- P.ex., listar por níveis
- Ou encontrar antepassados de um dado nó




Algoritmos Recursivos

– Exemplos simples

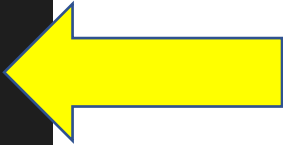
Árvore Binária – Algoritmos recursivos

- Contar o **nº de nós** de uma árvore
- Determinar a **altura** de uma árvore
- **Destruir** uma árvore
- Verificar se duas árvores são **iguais**
- Estas operações dependem da **ordem de visita dos nós** das subárvores ?
- Quais são os **casos de base** ?
- Representar graficamente !!

Contar o nº de nós de uma árvore binária



```
int TreeGetNumberOfNodes(const Tree* root) {  
    if (root == NULL) return 0;  
  
    return 1 + TreeGetNumberOfNodes(root->left) +  
           TreeGetNumberOfNodes(root->right);  
}
```




Determinar a **altura** de uma árvore binária

```
int TreeGetHeight(const Tree* root) {  
    if (root == NULL) return -1;  
  
    int heightLeftSubTree = TreeGetHeight(root->left);  
    int heightRightSubTree = TreeGetHeight(root->right);  
  
    if (heightLeftSubTree > heightRightSubTree) {  
        return 1 + heightLeftSubTree;  
    }  
  
    return 1 + heightRightSubTree;  
}
```

- **Árvore vazia** tem altura -1
- **Número de arcos** da raiz até à folha mais longínqua

Destruir uma árvore binária

```
void TreeDestroy(Tree** pRoot) {  
    Tree* root = *pRoot;  
  
    if (root == NULL) return;  
  
    TreeDestroy(&(root->left));  
    TreeDestroy(&(root->right));  
    free(root);  
    *pRoot = NULL;  
}
```



- Destruir todos os nós da subárvore esquerda
- Destruir todos os nós da subárvore direita
- Libertar a memória alocada ao nó raiz

Verificar se duas árvores são iguais

```
int TreeEquals(const Tree* root1, const Tree* root2) {  
    if (root1 == NULL && root2 == NULL) {  
        return 1;  
    }  
    if (root1 == NULL || root2 == NULL) {  
        return 0;  
    }  
    if (root1->item != root2->item) {  
        return 0;  
    }  
    return TreeEquals(root1->left, root2->left) &&  
           TreeEquals(root1->right, root2->right);  
}
```

- Casos de base

- Comparar as subárvores



Exercícios / Tarefas

Exercício 1 – Escolha-múltipla

Seja dada uma **árvore binária completa**, i.e., em que todos os níveis da árvore estão completamente preenchidos, com **n níveis**.

- a) A árvore tem um número ímpar de nós.
- b) O número de **nós intermédios** (i.e., que **não são folhas**) da árvore é igual a $(2^{n-1} - 1)$.
- c) O número de **folhas** da árvore é igual a 2^{n-1} .
- d) Todas estão corretas.

Exercício 2 – Escolha-múltipla

O “*array*” seguinte armazena, **por níveis**, os elementos de uma **árvore ternária**.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	6	9	2	5	7	8	0	1	3

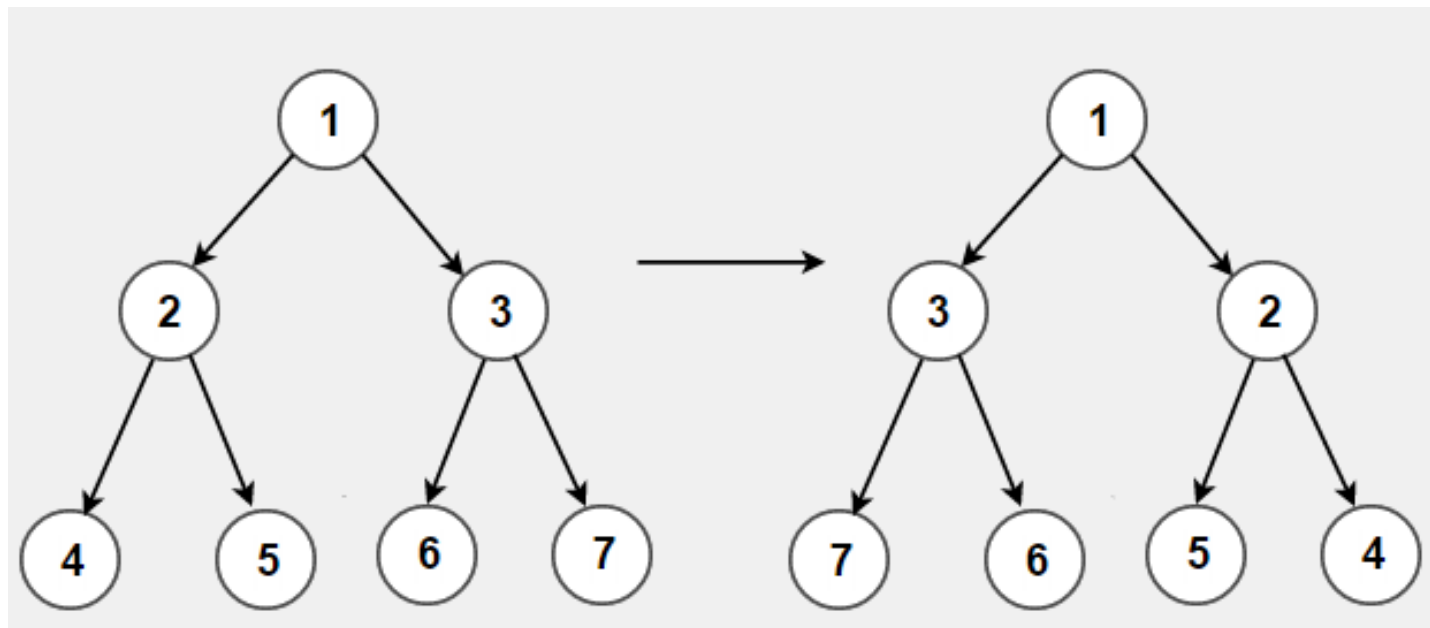
- a) A árvore tem 7 folhas.
- b) O elemento de valor 0 é filho do elemento de valor 9.
- c) Ambas estão corretas.
- d) Nenhuma está correta.

Tarefa 1 – Número de nós que não são folhas

- Dado o **ponteiro para o nó raiz** de uma árvore binária
- Desenvolver uma **função recursiva** que devolva o **número dos nós da árvore que não são folhas**
- **Não** use quaisquer **variáveis globais !!**

Tarefa 2 – Duas árvores são espelhadas ?

- Desenvolver uma **função recursiva** que devolva 1 ou 0, indicando se duas árvore dadas são ou não espelhadas



[techiedelight.com]

Tarefa 3 – Item dado **pertence** a uma árvore ?

- Dado o **ponteiro para o nó raiz** de uma árvore binária e um dado **item**
- Desenvolver uma **função recursiva** que verifique se esse **item pertence** à árvore
- **Não** use quaisquer **variáveis globais !!**

Tarefas Adicionais – Funções recursivas

- Determinar o **valor** do **menor** elemento
- Determinar o **valor** do **maior** elemento
- Devolver um **ponteiro** para o nó contendo o **menor** elemento
- Devolver um **ponteiro** para o nó contendo o **maior** elemento

- **Não** use quaisquer **variáveis globais** !!