Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ , \ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan(u) + C$

$\int u' \sin u\, dx = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u dx = -\operatorname{cosec} u + C$

$\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + C$

$\int u' e^u\, dx = e^u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\, dx = -\operatorname{cotg} u + C$

$\int u' a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, dx = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\, dx = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, dx = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u' \sec u\, dx = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Aula 12: Propriedades do Integral definido

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f+g$ são funções integráveis em $[a,b]$ e*

- $$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$
- $$\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a,b]$ e se $c \in]a,b[$, f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corolário Seja f uma função integrável em I, $a,b \in I$, com $a \neq b$, e $c \in I$. então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1,1]$ por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 2 & \text{se} \quad x \in [-1,0[\end{cases}$

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 2\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Aula 12: Mais propriedades do Integral definido

Teorema 6.11. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema 6.12. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$.*

$$\text{mas} \qquad \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \cancel{=} \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

Teorema 6.13. ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$, então existe $c \in \,]a,b[$ tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dem: (1) f limitada $m<f(x)<M$
(2) f é contínua

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.

Corolário Seja f uma função contínua em I e $a, b \in I$, com $a \neq b$.
Então existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Aula 12: Integral Indefinido

Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. Para cada $x \in I$, tem-se que f é integrável no intervalo fechado de extremos a e x sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} F \ &: \ I \to \mathbb{R} \\ & x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

- $F(0) = 0$

Teorema 6.14. *Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. A função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em I.*

Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

Aula 13: Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Teorema 6.15. *Seja f uma função contínua num intervalo I e $a \in I$. Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada $x \in I$, então F é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Corolário 1. *Se f é uma função contínua em I e $a \in I$, então f tem uma primitiva em I que é dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.*

Teorema 6.16. Seja f uma função contínua num intervalo J e H a função definida por

$$H(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t,$$

em que u e v são funções definidas em $I \subset \mathbb{R}$ com $u(I) \subset J$ e $v(I) \subset J$. Se u e v são deriváveis em I, então

$$H' = f(v)v' - f(u)u'.$$

Aula 13: Exercícios 1

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \operatorname{arcsen} t \, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.

2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por
$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

3. Seja F a função dada por $F(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u^2} du \right) dt$. Calcule $F''(x)$.

4. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
Mostre que a função F dada por
$$F(x) = \int_0^{6x-x^2} f(t) dt$$
admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

Aula 13: Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Teorema 6.17. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(Fórmula de Barrow)

Habitualmente escrevemos $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$ para denotar $F(b) - F(a)$.

Integração por partes no integral definido:
$$\int_a^b \underset{\mathrm{P}}{f(x)}\,\underset{\mathrm{D}}{g(x)}\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemplo 6.12. Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x dx = 1 - \frac{1}{e}$.
2. $\displaystyle\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = -1$.
3. $\displaystyle\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^5 x e^{3x^2+4} dx$;
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx$;
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx$.