Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\, \text{sen}\, u$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \text{tg}\,(u)$

$(\text{sen}\, u)' = u'\, \cos u$

$(\text{cosec}\, u)' = -u' \text{cosec}\,(u) \text{cotg}\,(u)$

$(\text{tg}\, u)' = u'\, \sec^2 u$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(\text{cotg}\, u)' = -u'\, \text{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\;,\; a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\text{tgh}\, u)' = u' \text{sech}^2 u$

$(\text{sech}\, u)' = -u' \text{sech}\, u \text{tgh}\, u$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\text{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln |u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan(u) + C$

$\int u'\, \sin u\, dx = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + C$

$\int u'\, \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \text{cosec}\, u \text{cotgudx} = -\text{cosec u} + \text{C}$

$\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + C$

$\int u' e^u\, dx = e^u + C$

$\int u' \text{cosec}^2 u\, dx = -\text{cotgu} + \text{C}$

$\int u' a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \text{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, dx = uv + C$

$\int u' \text{sech}^2 u\, dx = \text{tgh}\, u + C$

$\int u' \text{sech}\, u \text{tgh}\, u\, dx = -\text{sech}\, u + C$

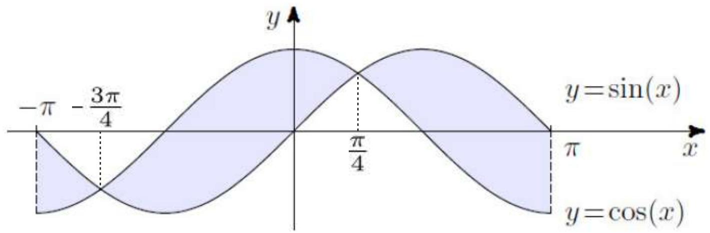
$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \text{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \text{tgh}^{-1} u + C$

$\int u'\, \sec u\, dx = \ln |\sec u + \text{tg}\, u| + C$

Aula 14: Exercícios 1

Exercício resolvido 6.3. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.



Exercício 6.11 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.

Mostre ainda que, quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+e^{2a}}{1+e^{2b}} \right) + b - a$.

Exercício 6.12 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.

Aula 15: Exercícios 2

Exercício 6.13 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx$

2. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (Suggestão: Faça a substituição $t=\sqrt{x}$)

Exercício 6.14 Considere a função F definida por $\displaystyle F(x)=\int_{x^2}^{k\ln(x)} e^{-t^2}\,dt$

1. Determine a expressão da derivada de F, $F'(x)$.
2. Determine $k\in\mathbb{R}$ de modo a que $F'(1)=0$.

Exercício 6.15 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ com $b>a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=-1$ e $x=1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $\displaystyle F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}\arctan t\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

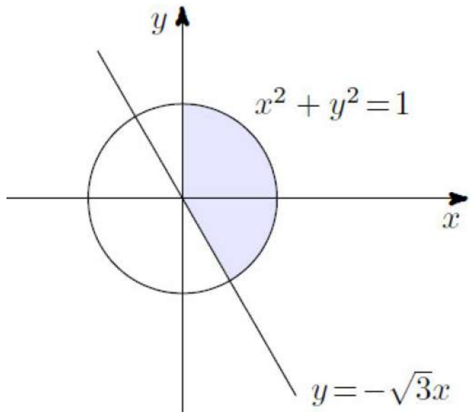
1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais.

Exercício 6.17 Considere a função F definida por $\displaystyle F(x)=\int_0^{x^2} t\ln\left(1+e^t\right)dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.
2. Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Aula 15: Exercícios 3

Exercício 6.18 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura



Exercício 6.19 Seja $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq (x-3)^2 \wedge y\geq x-1 \wedge y\leq 4\right\}$.

1. Represente geometricamente a região A.
2. Calcule a área da região A.

Exercício 6.20 Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x)=\sqrt{4+x^2}$ e $g(x)=x$ e pelas retas de equações $x=-2$ e $x=2$.

Exercício 6.21 Considere a função F dada por $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ para $x\in[1,+\infty[$.
Determine $F(1)$.

Aula 15: Exercícios 4

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ & \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a-x)\, dx.$$