Aula 1: Função injetiva e função sobrejetiva

Definição 2.1. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **injetiva** se*

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função f é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 2.2. *Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **sobrejetiva** se*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real f é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

Exercício 2.3 Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

Aula 2: Função inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por f^{-1} a função (dita **inversa** de f) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

f é invertível (com inversa g) se e só se existe $g : CD_f \to \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = x$.

Observação 2.1. O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.

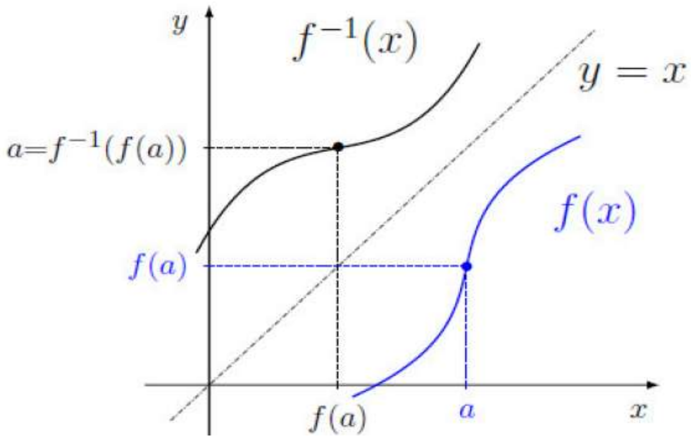


Figura 2.2: Função inversa

Exercício 2.7 Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.

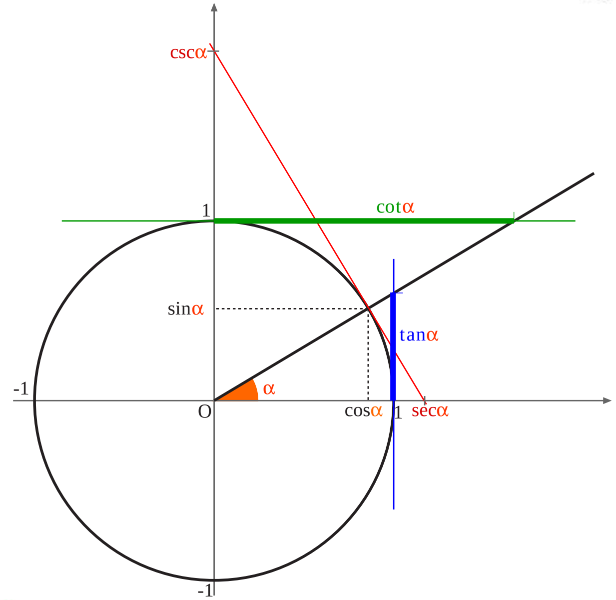
Aula 2: Funções trigonométricas diretas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas *geometricamente* no círculo trigonométrico, como estudado no Ensino Secundário.

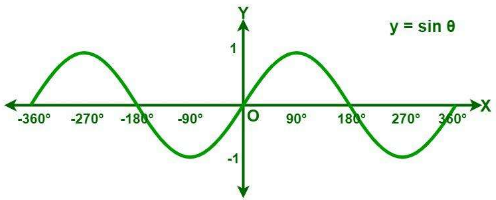
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Outras funções trigonométricas: secante (sec) e cossecante (csc),

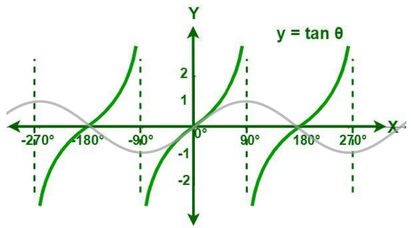
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$



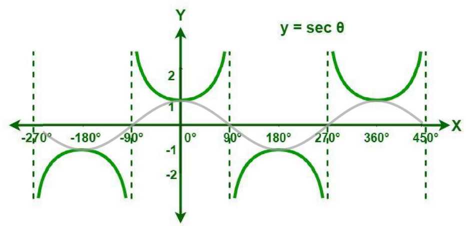
Sine graph (period 2π)



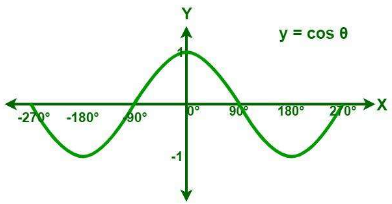
Graph of Tangent (period π)



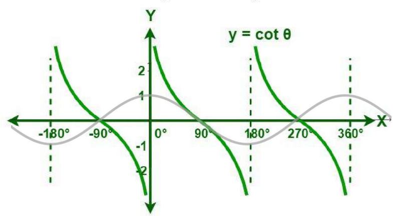
Secant graph (period 2π)



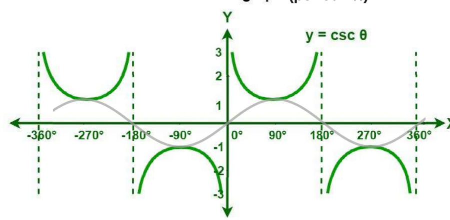
Cosine graph (period 2π)



Graph of Cotangent (period π)



Cosecant graph (period 2π)

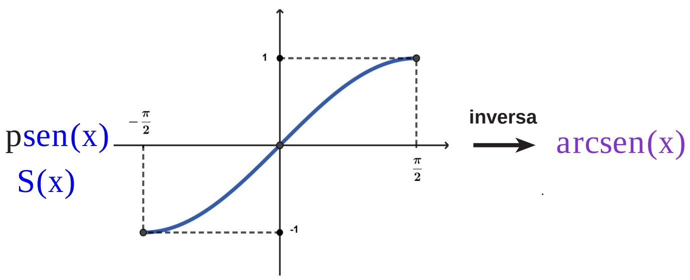


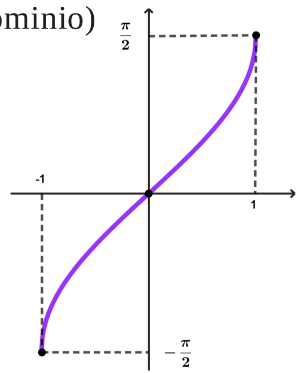
$$f(\alpha) = g(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)$$
$$g(\alpha) = f(\tfrac{\pi}{2} - \alpha)$$

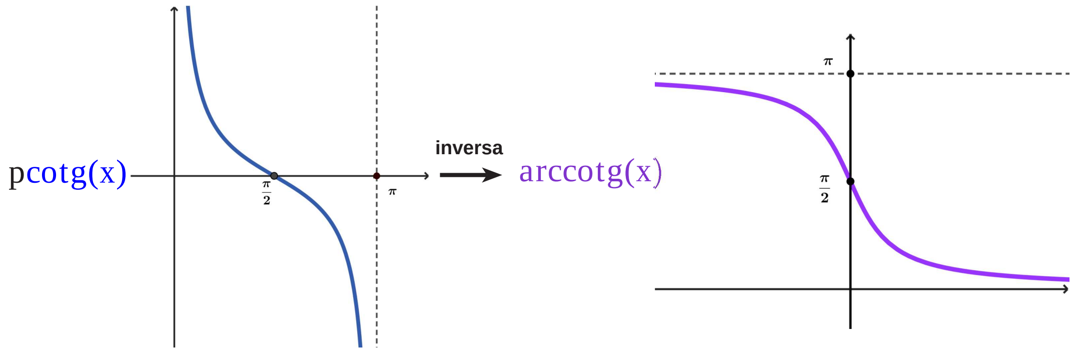
para $\quad (f, g) = (\operatorname{sen}, \cos)\,,$
$(\operatorname{tg}, \operatorname{cotg})\,,$
$(\sec, \csc)$

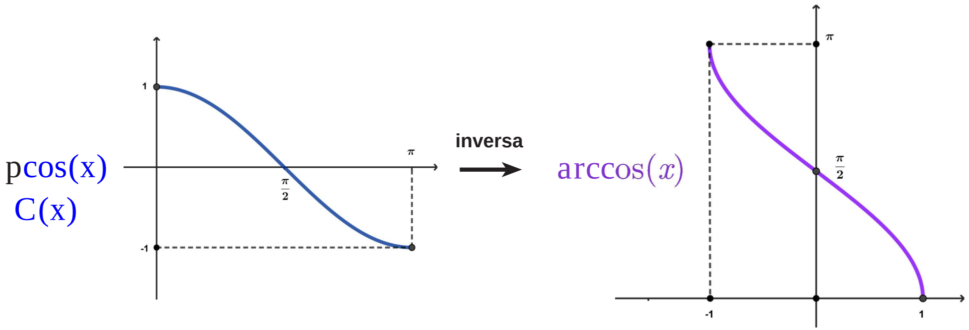
Aula 2: Funções trigonométricas inversas

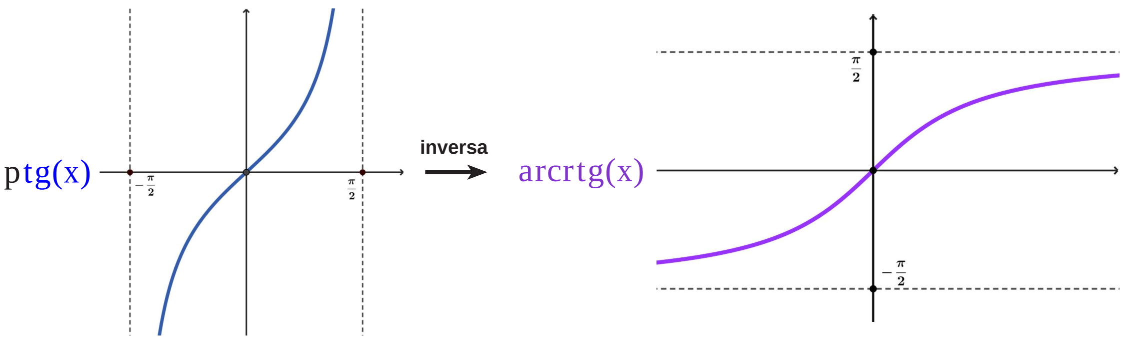
pf: parte de f ao subdominio (f restrita ao subdominio)











- Sejam f uma das funções trigonométricas analizadas e $arcf$ a inversa de pf.

Compondo pf com $arcf$ temos:

$$pf(arcf(x)) = x\,,\ \forall x \in D(arcf),$$

$$\text{e}\quad arcf(pf(x)) = x\,,\ \forall x \in D(pf).$$

No entanto, compondo f com $arcf$, temos:

$$f(arcf(x)) = x\,,\ \ \forall x \in D(arcf),$$

mas

$$arcf(f(x)) \cancel{=} x\,,\ \forall x \in D(f).$$

Aula 2: Exercícios 1

1. Pag.43, Exercício 3.5, 2.

2. Pag.43, Exercício 3.5, 3.

3. Pag.44, Exercício 3.6, 2.

4. Pag.45, Exercício 3.8.