Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u'\sec(u)\operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u'\operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u'\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u'\operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u'a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u'\operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u'\operatorname{sech} u\operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\,u^p\,dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ $(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan(u) + C$

$\int u'\sin u\,dx = -\cos u + C$

$\int u'\sec u\tan u\,dx = \sec u + C$

$\int u'\cos u\,dx = \sin u + C$

$\int u'\operatorname{cosec} u\operatorname{cotg} u\,dx = -\operatorname{cosec} u + C$

$\int u'\sec^2 u\,dx = \tan u + C$

$\int u'e^u\,dx = e^u + C$

$\int u'\operatorname{cosec}^2 u\,dx = -\operatorname{cotg} u + C$

$\int u'a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\,dx = uv + C$

$\int u'\operatorname{sech}^2 u\,dx = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u'\operatorname{sech} u\operatorname{tgh} u\,dx = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u'\sec u\,dx = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Aula 12: Critérios de Integrabilidade

Teorema 6.1, 6.2, 6.3 Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$. Então f é integrável em $[a, b]$ em qualquer uma das seguinte situações:

1. se f é contínua em $[a, b]$, ou
2. se f é limitada em $[a, b]$ e descontínua apenas num número finito de pontos, ou
3. se f é monótona em $[a, b]$.

Teorema 6.4 Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos, então g é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema 6.5 (Condição necessária de integrabilidade) Se f é integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Exemplo: A função $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$, é integrável em qq intervalo fechado que não contenha 0 (por ser contínua) e não é integrável (por não ser limitada) em nenhum intervalo fechado que contenha 0.

Aula 12: Exercícios 1

Exercício 6.5 Estude quanto à integrabilidade, nos respetivos domínios, as seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in [-1,2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$
2. $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1,5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1,5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$
3. $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$
4. $h(x) = \begin{cases} \ln |x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
5. $i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Exercício 6.6 Mostre que $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 6x)dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Progressão aritmética:

Um sucessão (a_n) diz-se uma progressão aritmética de razão r se $a_{n+1} - a_n = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Soma dos primeiros n termos: $\quad S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Progressão geométrica:

Um sucessão (a_n), com $a_1 \neq 0$, diz-se uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1\, r^{n-1}$.

Soma dos primeiros n termos: $\quad S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Aula 12: Propriedades do Integral definido

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f+g$ são funções integráveis em $[a,b]$ e*

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a,b]$ e se $c \in]a,b[$, f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Corolário Seja f uma função integrável em I, $a,b \in I$, com $a \neq b$, e $c \in I$. então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1,1]$ por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 2 & \text{se} \quad x \in [-1,0[\end{cases}$ $\quad \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 2\,dx + \int_0^1 x\,dx$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Aula 12: Consequências do Teorema 6.8

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0 \not\Rightarrow f(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$ Exemplo $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,dx = 0$

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0 \not\Rightarrow f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$ Exemplo $\displaystyle\int_{-1}^2 x\,dx > 0$

Teorema 6.10. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.9. *Se f é integrável em $[a,b]$ e se existem constantes m, $M \in \mathbb{R}$ tais que,*

$$m \leq f(x) \leq M,\ \text{para todo o } x \in [a,b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Exemplo 6.8. $\displaystyle 0 \leq \int_{-5}^{10} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\,dx \leq \frac{1}{2} \times 15.$

Aula 12: Mais propriedades do Integral definido

Teorema 6.11. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema 6.12. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$.*

$$\text{mas} \quad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \cancel{=} \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 6.13. ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$, então existe $c \in \,]a,b[$ tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Dem: (1) f limitada $m<f(x)<M$
(2) f é contínua

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.

Corolário Seja f uma função contínua em I e $a, b \in I$, com $a \neq b$.
Então existe c entre a e b tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Aula 12: Integral Indefinido

Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. Para cada $x \in I$, tem-se que f é integrável no intervalo fechado de extremos a e x sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} F \ &: \ I \to \mathbb{R} \\ & x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

- $F(0) = 0$

Teorema 6.14. *Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. A função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em I.*

Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.