
On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 6
Exemplos

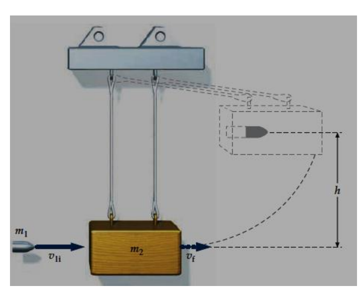
Cap.2- Movimento oscilatório
- Movimento harmónico simples
- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Capítulo 1.4.a

8. Um pêndulo balístico é constituído por um corpo suspenso dum fio. Um projétil de massa m_1 = 30 g penetra no corpo e fica cravado nele. O centro de massa do corpo eleva-se até uma altura h = 30 cm. A massa do corpo é m_2 = 3,0 kg.

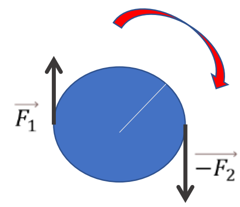
a) Deduza uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados.
b) Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando este atinge o corpo.



ESTÁTICA

Binário de forças

$$\sum \overrightarrow{F_i} = 0$$



mas

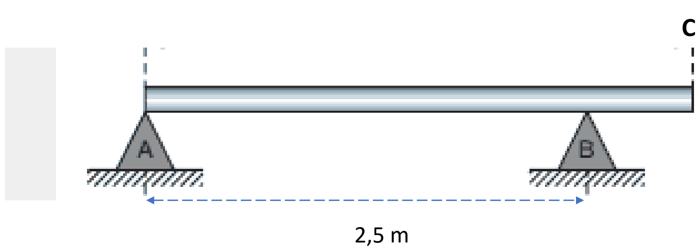
$$\sum \overrightarrow{\tau_i} \neq 0$$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

$$\sum \overrightarrow{F_i} = 0$$ e, simultaneamente, $$\sum \overrightarrow{\tau_i} = 0$$

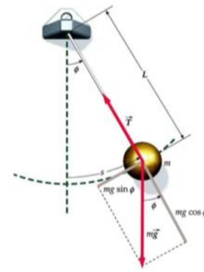
Capítulo 1.4.b

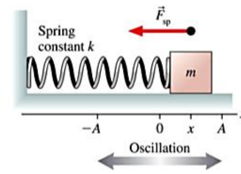
12. Uma barra uniforme AC de 4 m tem massa m = 50 kg. Existe um ponto fixo B em torno do qual a barra pode rodar. A barra está apoiada no ponto A. Um homem com massa igual a 75 kg anda ao longo da barra partindo de A. Calcule a distância máxima a que o homem pode deslocar-se, mantendo o equilíbrio.



Sugestão: usar as condições de equilíbrio estático
No limite, a reacção sobre A anula-se

MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES (MHS)



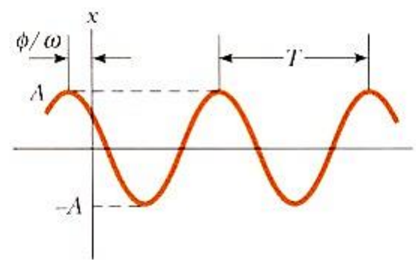


Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

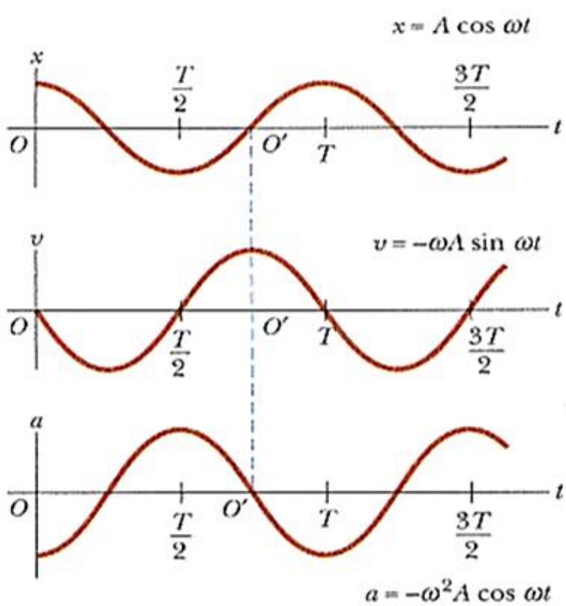
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

O corpo tem movimento **periódico**, **harmónico**, **oscilatório** ou **vibratório**



Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

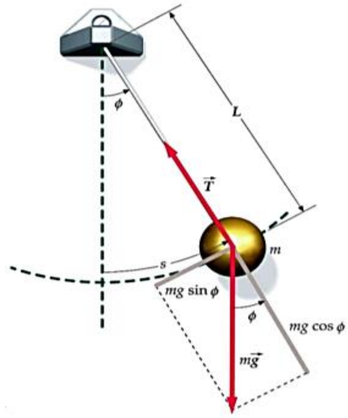
$\omega = 2\pi f$ (rad/s)



Pêndulo simples

Força restauradora:

$-mg\sin\phi$



$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi \approx -\frac{g}{L}\phi \quad \text{se} \quad \phi \ll 1$$

aceleração tangencial:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

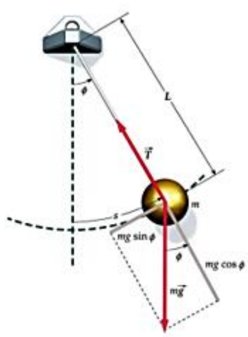
$$-mg\sin\phi = m\frac{d^2 s}{dt^2} = mL\frac{d^2\phi}{dt^2}$$

solução: $\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$

Pêndulo simples

Para pequenos ângulos
sen ϕ ≈ ϕ

Para pequenas oscilações, tem-se:



eq. movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\omega^2\phi \quad \text{com} \quad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

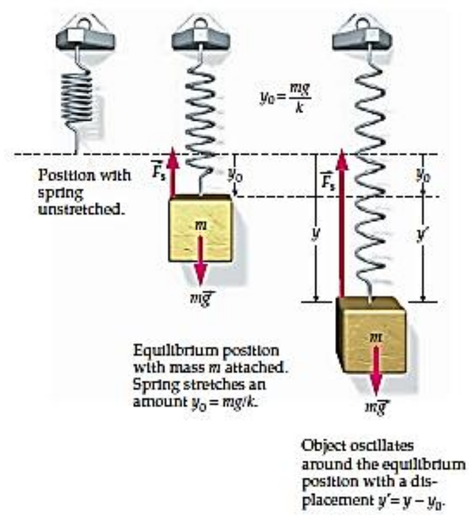
solução:

$$\phi = \phi_0\cos(\omega t + \delta)$$

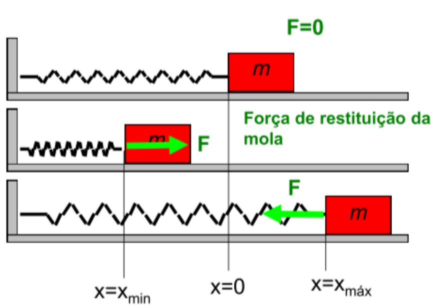
período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Sistema massa-mola



Sistema massa-mola



F: Força restauradora

$$F = -kx$$

k: constante da mola

Equação do movimento

$$F = -kx = ma_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

definimos $\omega^2 = \frac{k}{m}$ or $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ω: frequência angular (radianos/s)

solução:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

período: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

COMPARANDO…

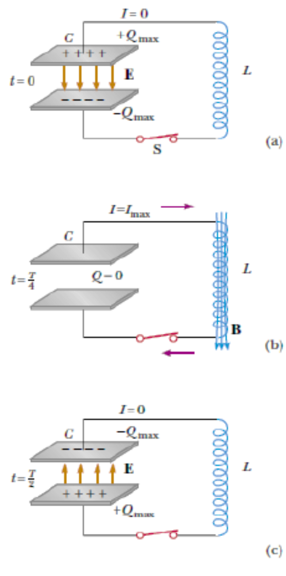
Circuito LC | **Massa/Mola**

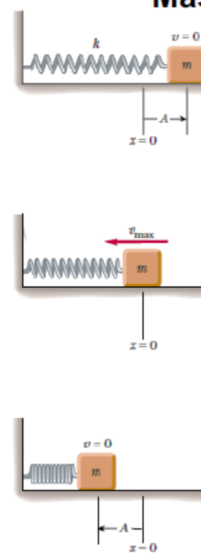
A intensidade da corrente I funciona como análoga à velocidade v

$$\mathrm{I} = \frac{dQ}{dt} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$





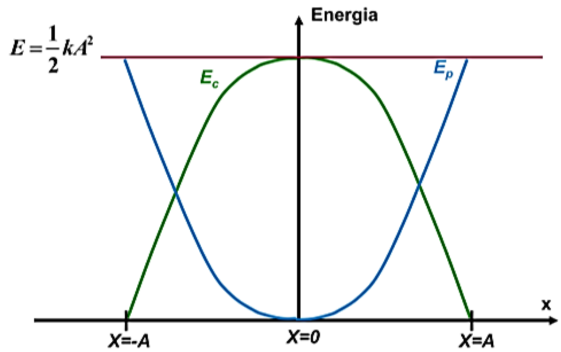
Energia no Movimento Harmónico Simples (MHS)

Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante:	$E = \frac{1}{2}kA^2$

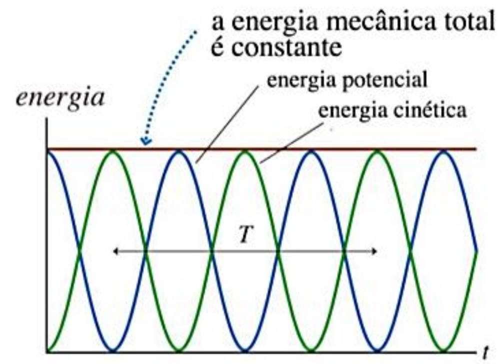
Energia potencial elástica: $E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)	$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$

Energia cinética:	$E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2}k\left(A^2 - x^2\right)$

Energia no MHS em função de x



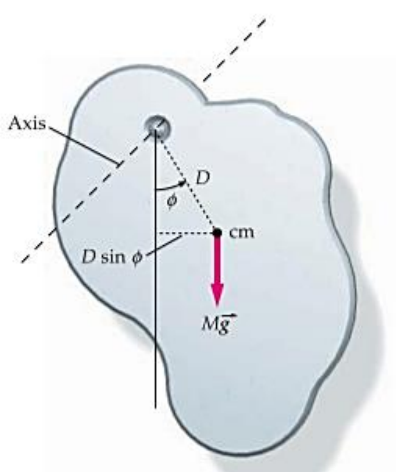
Energia no MHS em função de t



$$E=\tfrac{1}{2}mv_x^{\ 2}+\tfrac{1}{2}kx^2=\tfrac{1}{2}kA^2=\tfrac{1}{2}mv_{\max}^{\ 2}=\text{constante}$$

Pêndulo físico ou Pêndulo composto

Para pequenos ângulos
sen ϕ ≈ ϕ



$$\tau = -MgD sen\phi \approx -MgD\phi$$

$$\tau = I\,\alpha = -MgD\phi \qquad \text{com } \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M.
O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que a razão I/M é independente de M

Oscilador amortecido

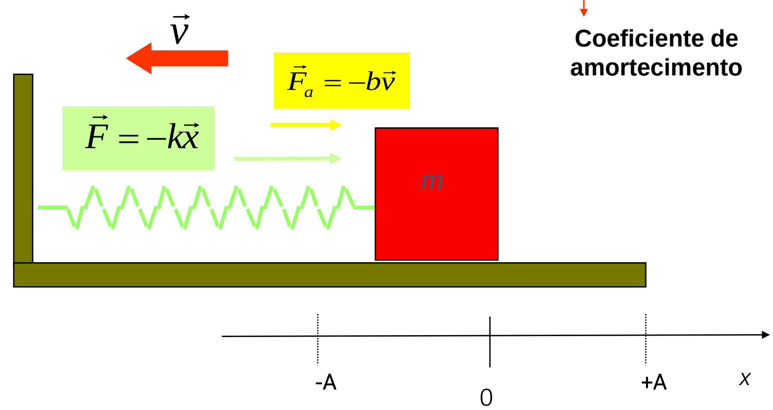
EXEMPLO de força dissipativa: **Força devida à viscosidade de um fluido**

$\vec{F}_a$

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

Coeficiente de amortecimento

A mola oscila dentro de um fluido:



Oscilador amortecido

A solução é:

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c), esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo

E a frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Esta solução só é válida se:

$$\frac{b}{2m} < \omega_o$$

$$\boldsymbol{b < 2m\omega_0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Coeficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$\boldsymbol{b_c = 2m\omega_0}$$

Oscilador amortecido

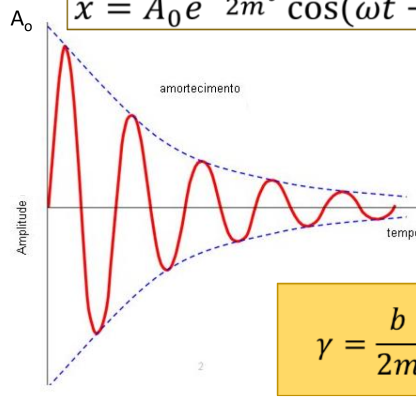
Na ausência de forças externas, a AMPLITUDE de um oscilador DIMINUI no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc)

$$\boxed{\vec{F_a} = -b\vec{v}}$$

$$\boxed{x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Se A diminui, a Energia Mecânica diminui também

$$\omega = \sqrt{[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2]}$$



$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

Oscilador amortecido

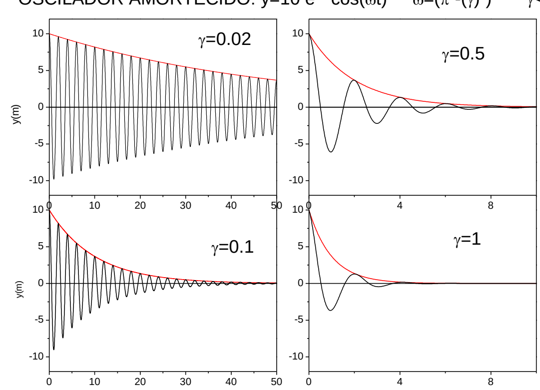
Graus de Amortecimento

$$x = A_o e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\boxed{\frac{b}{2m}}\right)^2}$$

Para b < b_c

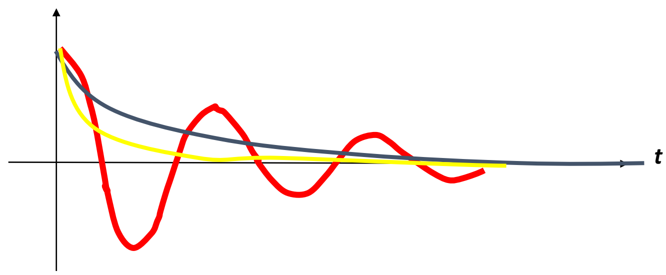
OSCILADOR AMORTECIDO: $y=10\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$ $\omega=(\pi^2-(\gamma)^2)^{1/2}$ $\gamma<\pi$



À medida que **b** aumenta, o decréscimo da amplitude das oscilações é cada vez mais rápido.

Oscilador amortecido

Graus de Amortecimento



Sub-Amortecido (Amortecimento fraco)

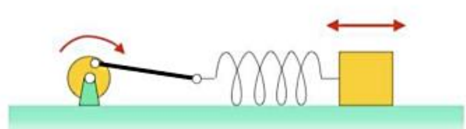
Amortecido criticamente (Amortecimento forte)

Sobre Amortecido (Amortecimento muito forte)

$$b < 2m\omega_0$$

$$b_c = 2m\omega_0$$

Oscilador Forçado



"mola" ligada a um "motor"

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma força externa. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a frequência da força externa.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a amplitude mantém-se constante, e o seu valor depende da frequência externa.

Equações do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência angular da força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

amortec.

força elástica

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

com $\gamma = \dfrac{b}{2m}$

Solução geral

$$\text{solução:}\quad x(t) = x_t(t) + x_p(t)$$

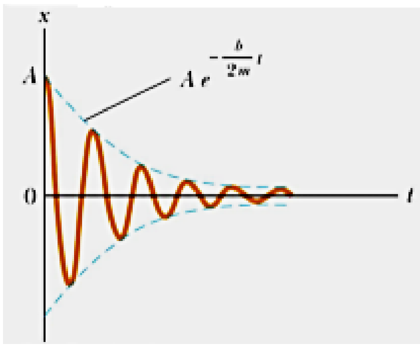
solução transiente:

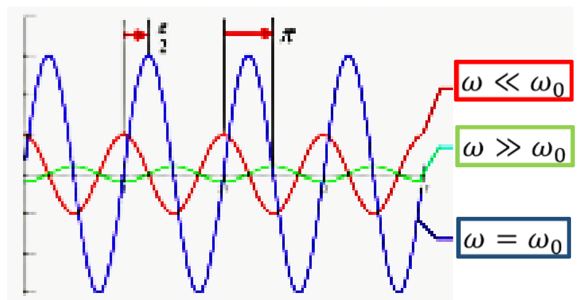
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$+$

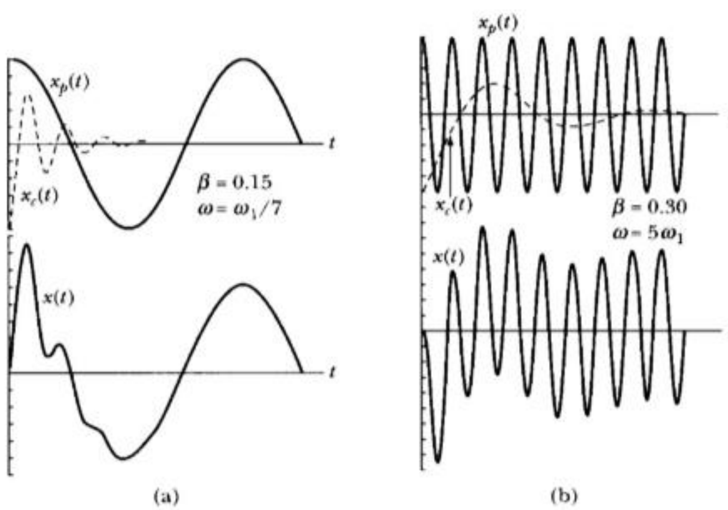
solução permanente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$





Solução transiente + solução permanente



Solução permanente

$$\boxed{x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)}$$

com $A = \dfrac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan \dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força

$0 \leq \delta \leq \pi$

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A\cos(\omega t - \delta)$

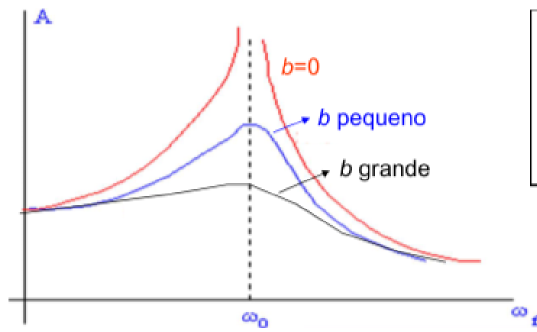
Mesma frequência!

Amplitude: $A = \dfrac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\dfrac{b\omega}{m}\right)^2}}$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow \text{A é máximo quando } \omega \approx \omega_0 \Rightarrow \textbf{ressonância}$$



Na ausência de amortecimento
$A \longrightarrow \infty$
quando $\omega \longrightarrow \omega_0$

Sobre a energia

Considerando a solução permanente,
NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:
energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

[The Tacoma
Narrows Bridge Collapse]

1940

https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

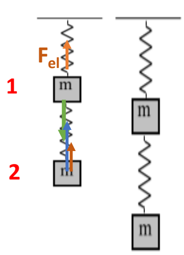
Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



1 $F_1 = - k_1x_1 + k_2 (x_2-x_1)$ $\quad m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = - k_1x_1 + k_2 (x_2-x_1)$

2 $F_2 = - k_2x_2 - k_2 (x_2-x_1)$ $\quad m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = - k_2x_2 - k_2 (x_2-x_1)$

$k_1 = k_2 = k$ $\quad m_1 = m_2 = m$

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa *m* como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

1 $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) \iff \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

2 $$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m}x_2 - \frac{k}{m}(x_2 - x_1) \iff \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}(x_2 - x_1) = 0$$

SOLUÇÕES POSSÍVEIS:

$x_1 = A\cos\omega t$

$x_2 = B\cos\omega t$

Derivar 1 e 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

1 $- mA\omega^2 \cos\omega t + 2kA\cos\omega t - kB\cos\omega t = 0$

2 $- mB\omega^2 \cos\omega t + 2kB\cos\omega t - kA\cos\omega t = 0$

$$\iff \begin{cases} - mA\omega^2 + 2kA - kB = 0 \\ - mB\omega^2 + 2kB - kA = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ - kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

A = B = 0 o que significaria que não havia oscilação.

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \iff k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}\,k}{2m}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}\,k}{2m}}$$

FREQUÊNCIAS DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO DO SISTEMA

(ω_1 e ω_2)

16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Tínhamos
$$\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Usando, por exemplo, a 1ª equação, tem-se:

$$A(2k - m\,\boxed{\omega^2}) - kB = 0$$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{3\,k + \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3\,k - \sqrt{5}\,k}{2\,m}}$$

$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})}$ = -1,61 valor negativo ➡ oposição de fase

$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})}$ = 0,61 valor positivo ➡ em fase