*On White II*, Wassily Kandinsky 1923

# Mecânica e Campo Eletromagnético

## Aula 3

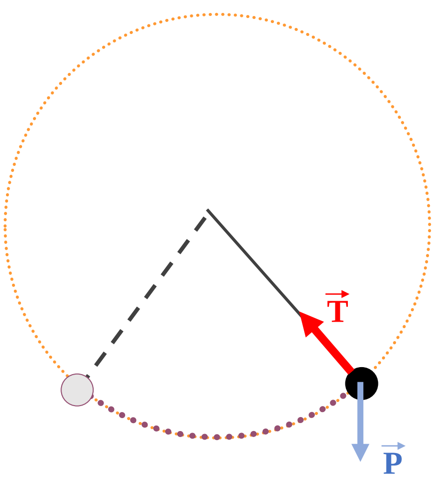
**1.3. Trabalho e Energia**

Trabalho realizado por uma força constante e variável. Energia cinética e teorema do trabalho. Potência. Forças conservativas e forças não conservativas. Energia potencial. Conservação da energia.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16



## PÊNDULO SIMPLES (movimento no plano vertical)




**Trajectória circular**

Forças: $\vec{P}$ e $\vec{T}$

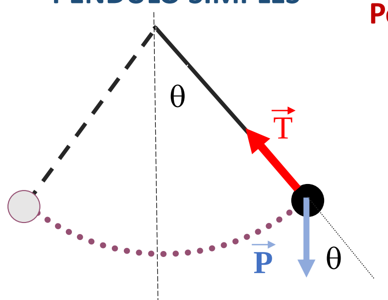
Em qualquer posição:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Pendulum/Pendulum.html

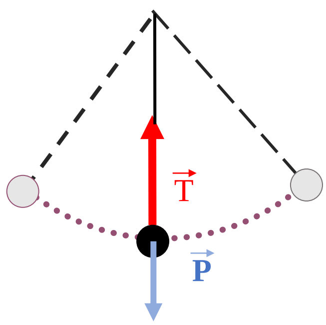
## PÊNDULO SIMPLES




**Posição extrema (v=0)**

$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a} \qquad \vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$$

$$\begin{cases} |\vec{T}|-|\vec{P}|\cos\theta = m|\vec{a}_n| \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{cases} \qquad \begin{matrix} |\vec{T}|-|\vec{P}|\cos\theta = m\dfrac{v^2}{L}=0 \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{matrix}$$




**Posição de equilíbrio (θ=0)**

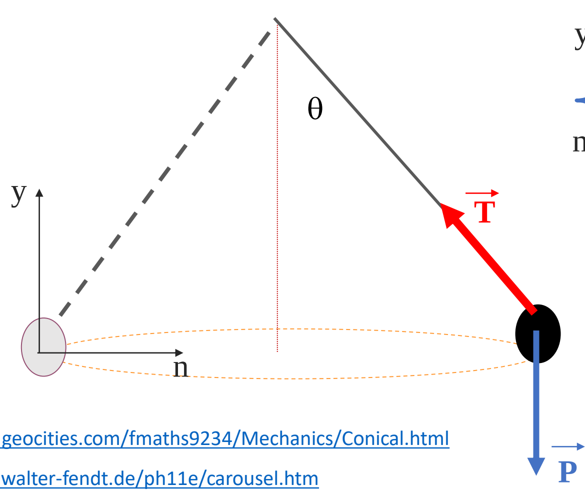
$$|\vec{T}|-|\vec{P}| = m\frac{v^2}{L}$$

$$|\vec{a}_t|=0$$

**Valor máximo da tensão!**



## PÊNDULO CÓNICO
## (movimento circular no plano horizontal)




$$\begin{matrix} y \\ n \end{matrix}\begin{cases} |\vec{T}|\cos\theta = |\vec{P}| \\ |\vec{T}|\sin\theta = m|\vec{a}_n| \end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

http://www.geocities.com/fmaths9234/Mechanics/Conical.html

http://www.walter-fendt.de/ph11e/carousel.htm

## Problemas de Mecânica Cap. 2

10 - Um corpo D cuja massa é de 6 kg esta sobre uma superfície cónica A B C e está rodando em torno do eixo EE' com uma velocidade angular de 10 rev/min.
Calcule:

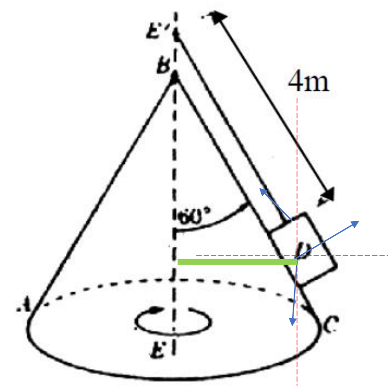
a) a velocidade linear do corpo

b) a reacção da superfície do corpo

c) a tensão no fio

d) a velocidade angular necessária para reduzir a reacção do plano a zero.

r = L sen 60




NB: o pêndulo move-se sobre o cone, descrevendo uma trajectória circular. Identificar as forças que actuam <u>sobre</u> o pêndulo e não esquecer que há aceleração centrípeta. Sendo a velocidade angular <u>constante</u>, também a velocidade linear é.
Reacção do plano zero significa que o pêndulo deixa de estar apoiado

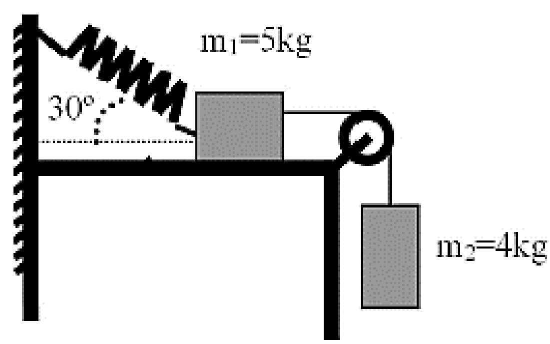


## Cap. 2

19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força k = 400N/m. Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o elongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):

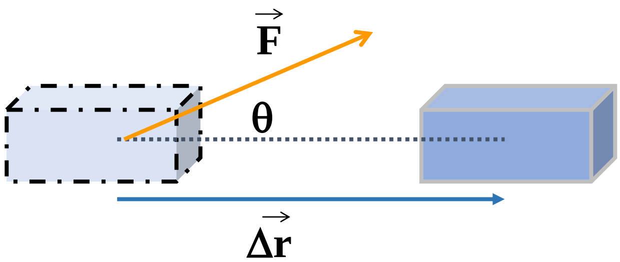
a) Se não houver atrito.

b) Se o coeficiente de atrito entre $m_1$ e a mesa for 0,4.



## Trabalho realizado por uma força constante

Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a acção duma força F constante (entre outras)




O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

**Ou seja, pelo**

**produto interno (produto escalar)**

$$\boxed{W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}}$$



## Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição x?

Suponhamos um deslocamento segundo x e $F=F_x(x)$

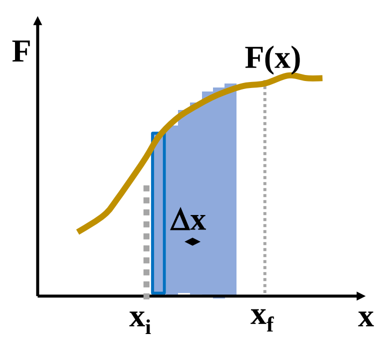
**Para um deslocamento infinitesimal Δ x**

**$\Delta w = F_x(x).\, \Delta x$**

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x).\Delta x$$

No limite Δ x--> ▯

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



## Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando o deslocamento não é rectilíneo?

$$W=\int_{r_i}^{r_f}\vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}=\int_{r_i}^{r_f}F_x(x,y,z)dx+F_y(x,y,z)dy+F_z(x,y,z)dz$$

$$W=\int_{r_i}^{r_f}F_x(x,y,z)dx+\int_{r_i}^{r_f}F_y(x,y,z)dy+\int_{r_i}^{r_f}F_z(x,y,z)dz$$

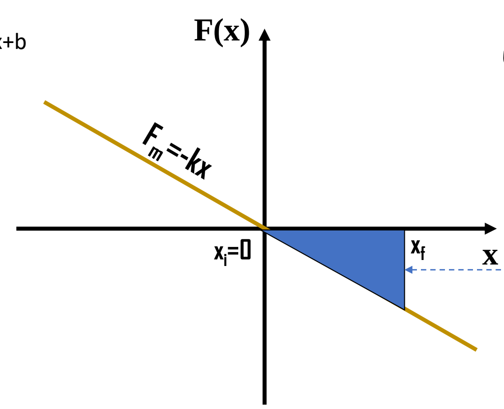
Integral de caminho

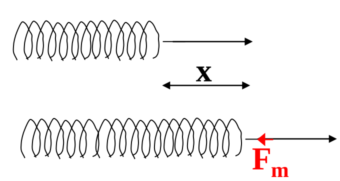
O trabalho será dado pela soma de 3 integrais, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas têm que ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajectória.



## Exemplo - Trabalho realizado por uma mola

y=mx+b




**Trabalho realizado PELA mola**

$$W=\int_{x_i}^{x_f}F(x)dx \qquad W=\int_{x_i}^{x_f}(-kx)dx$$

$$w=-k\int_{x_i}^{x_f}x\,dx=\frac{1}{2}kx_i^2-\frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho realizado PELA mola

$$x_i=0\Rightarrow W=-\frac{1}{2}kx_f^2$$

## Trabalho e Energia

Em muitos casos, é possível descrever o movimento de um corpo, relacionando directamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo.
A partir do trabalho da força resultante num dado deslocamento, é possível calcular a variação de velocidade correspondente

**Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F. Para um deslocamento segº xx', tem-se:**

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

**Usando a 2ª Lei de Newton pois F é resultante**

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\times\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\times v$$

**Eliminando t e explicitando a velocidade**



## Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)dx$$

$$W = \int_{vi}^{vf} mv\,dv$$

$$W_{RES} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

**TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA**

$$W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c$$

Este resultado é válido, de forma geral, para uma qualquer trajectória

## Potência de uma força

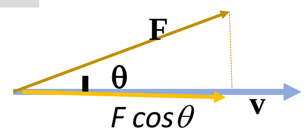
Potência é a taxa temporal com que se realiza trabalho

**Realizando um trabalho Δ W num intervalo de tempo Δ t**

$$\boxed{P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}} \qquad P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

$$P = \left|\vec{F}\right| v \cos\theta$$






## Potência de uma força

**A unidade S.I. de potência é o watt = joule.segundo$^{-1}$**

**isto é, W = J.s$^{-1}$**

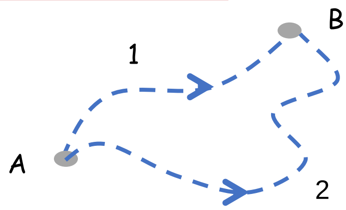
**O quilowatt-hora (kwh) é uma unidade de energia e <u>NÃO</u> de potência**

**1 kwh =1000 W x 3600s =3,6 MJ** (mega joule)

## Forças Conservativas

**Uma força é CONSERVATIVA se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for INDEPENDENTE do caminho seguido entre esses pontos**

**Nestas condições,** <u>o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento</u>




F conservativa

$$W_{AB}(\text{ca minho }1) = W_{AB}(\text{ca minho}2)$$

Por outro lado, **o trabalho realizado ao longo dum trajecto FECHADO é NULO**

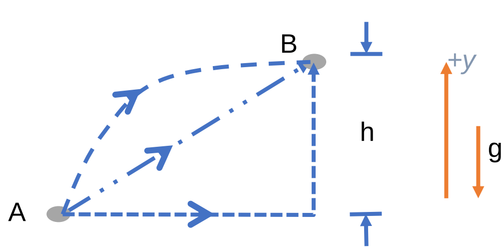


## Exemplos de forças conservativas

- *Gravítica*
- *Electrostática*
- *Elástica duma mola*

No caso em que a força gravítica é constante (junto à superfície da Terra), o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial

**Porquê?**




$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_y dy =$$

$$= \int_A^B -mg\, dy = -mg(y_B - y_A)$$

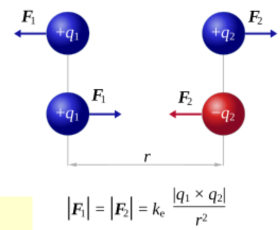
**Para qualquer trajecto de A até B**

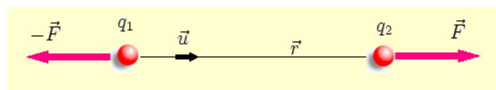
$$W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$$

## Exemplos de forças conservativas

***Força Gravítica*** $F=-G\frac{mM}{r^2}$

***Força Electrostática*** $F=\pm k\frac{qQ}{r^2}$



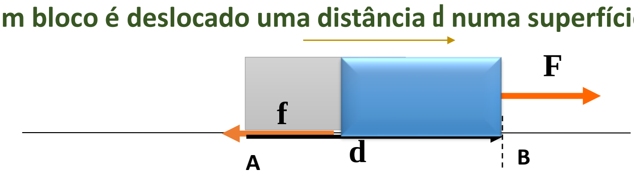

***Força Elástica*** F= -K $\Delta x$



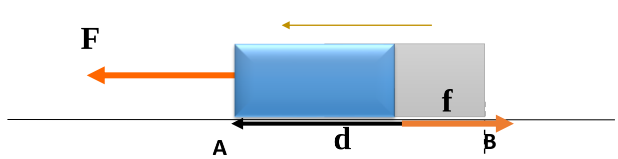
## Forças não-conservativas: atrito

Neste caso, **o trabalho realizado num trajecto fechado não é nulo**, como podemos ver com a força de atrito cinético

**Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f**




**Trabalho da força de atrito A•B** $W_{AB} = -fd$




**Trabalho da força de atrito B•A** $W_{BA} = -fd$

$W_{AA}(ida\,e\,volta) = -2fd \neq 0$

## Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto): a **ENERGIA POTENCIAL**:

= ΔEC

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = - \Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$E_{potencial}$ no ponto inicial

$E_{potencial}$ no ponto final

**O trabalho realizado por uma força conservativa de uma posição inicial para uma posição final corresponde ao *simétrico* da variação da ENERGIA POTENCIAL nesse trajecto**



## Exemplos - Energia Potencial Gravítica

Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{peso} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \bullet d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica

(junto à superfície da Terra)

$$EP_g = mgy$$

***A menos de uma constante, que define a origem, i.é, o zero da $E_{Pg}$***

$\Delta EP > 0$

$W < 0$

superfície da Terra

$\Delta EP_g < 0$

$W > 0$

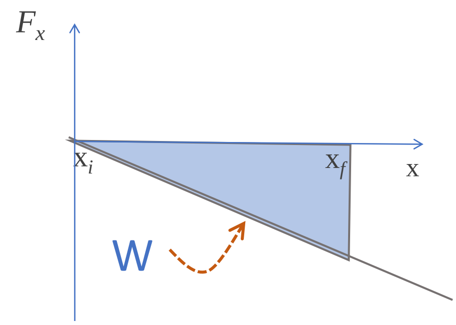
superfície da Terra

## Exemplos - Energia Potencial Elástica

Para a mola elástica, em que F = -k x

o trabalho de $x_i$ até $x_f$ é dado por:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$




Define-se a **energia potencial elástica** da mola como:

$$\boxed{E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2}$$

Nota:

x = 0 é a posição de equilíbrio; não é arbitrária.



## Lei de conservação da Energia Mecânica

Se uma partícula sofre apenas a acção de uma força conservativa **F** num deslocamento duma posição $P_i$ para $P_f$,

Do **teorema do Trabalho-Energia**, obtém-se:

$$\boxed{W_{i\to f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}}$$

Como F é conservativa:

$$W_{i\to f} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

**A soma é constante!**

$$\boxed{E_M = E_c + E_P}$$

Então a ENERGIA MECÂNICA É CONSTANTE !

## Lei de conservação da Energia Mecânica

Sob a acção de uma força conservativa **F**, a energia mecânica é conservada:

$$E_M = E_c + E_P$$

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Leftrightarrow \Delta E_M = 0$$

Havendo várias forças conservativas aplicadas ao corpo, a cada uma está associada uma energia potencial, pelo que a energia mecânica é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{varias\,Ep} \vec{F}_{cons} \Rightarrow \boxed{E_M = E_c + \sum_{varias\,Ep} E_P}$$



## Energia Mecânica

Em geral, numa partícula estarão aplicadas forças conservativas ($F_{cons}$) e forças não-conservativas ($F_{NC}$)

A resultante das forças será: $\vec{F}_{res} = \sum_{varias\,Ep} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$

Num deslocamento de $P_i$ para $P_f$ $\quad W_{i\to f}(F_{res}) = \Delta E_C$

Por outro lado, $W_{i\to f}(F_{res}) = W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) + W_{i\to f}(F_{NC})$

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = -\sum \Delta E_P$$

$$\begin{aligned} W_{i\to f}(F_{NC}) &= W_{i\to f}(Fres) - W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = \\ &= \Delta E_C - \left(-\sum \Delta E_P\right) = \\ &= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M \end{aligned}$$

$$\boxed{W_{i\to f}(F_{NC}) = \Delta E_M}$$

## Energia Mecânica

Deste modo, num deslocamento de $P_i$ para $P_f$

$$W_{i\to f}\left(Fres\right)=\Delta E_C$$

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right)=-\sum \Delta E_P$$

$$\boxed{W_{i\to f}\left(F_{NC}\right)=\Delta E_M}$$

$EM_i = EM_f + W_{Fnc}$

$EM_f - EM_i = W_{Fnc}$

**Há variação da energia mecânica**,
se as forças não conservativas realizarem trabalho



# Lei de Conservação da Energia

Quando temos forças não-conservativas a realizar trabalho, a energia inicial vai transformar-se noutras formas não mecânicas, por exemplo, calor devido ao atrito. Genericamente, designamo-la por **energia interna U**.

$$\Delta E_c + \Delta E_P + \Delta U = 0$$

Energia convertida noutras formas

**A energia total dum sistema isolado é constante.**
**Há apenas transformações em diversas formas de energia**

Se incluirmos os efeitos relativistas, teremos que considerar a contribuição da energia em repouso (massa)