Aula 25: Existência e unicidade do problema linear de Cauchy

Teor. 2.5: Se p e q são funções contínuas num intervalo I (contendo o pto inicial x_0), então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Obs: todos os problemas de Cauchy apresentados nesta aula envolvem funções contínuas num intervalo contendo o ponto inicial, pelo que a solução apresentada é única nesse intervalo.

Exercício 1: Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Sol: $y = -x\, e^x$

(b) $\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \frac{13}{16} \end{cases}$ Sol: $y = e^{\frac{4}{3}x} - \dfrac{4x+3}{16}$

(c) $\begin{cases} y'' = (xy)' \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ Sol: $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

Aula 25: Equações diferenciais lineares (EDL) de ordem arbitrária

Uma eq. dif. linear de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) é uma equação da forma

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)}$$

onde $a_0, a_1, \ . \ . \ . \ , a_n, b$ são funções (contínuas) num certo intervalo I, com $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. As funções a_j ($j = 0, 1, \ldots n$) dizem-se os coeficientes da equação. Se todos os coeficientes da equação forem funções constantes (em I), então a equação diz-se de coeficientes constantes. Se b é a função nula (em I), a equação dir-se-á uma eq. dif. linear homogénea (ou eq. dif. linear incompleta); caso contrário ela dir-se-á uma equação linear completa (ou equação linear não homogénea). A edo

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0}$$

é a eq. dif. linear homogénea associada à eq. dif. linear.

Exercício 1: Indique quais das seguintes EDOs são lineares. Em caso afirmativo identifique se são, ou não, lineares homogéneas:

(a) $y'' + \frac{1}{x}y' + 3y = 1$

(b) $y'''y + 2xy'' + \log(x)y = 0$

(c) $y^{(5)} + y = 0$

(d) $\tan(t)x''' + te^{t-1}x'' + t^7x = 6x$

(e) $y''\frac{y}{x} + \dfrac{x^2+1}{\operatorname{sen}^2(x) + 2}y^2 = 6y$

(f) $\frac{x-1}{x+1}y^{(4)} + (y'')^3x + y' + \ln(x)y = e^x$

Aula 25: Existência e unicidade de solução global das EDLs

Teor. 2.6 Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e b são funções contínuas num int. I, $a_n(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$, $x_0 \in I$, então em I o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0,\ y'(x_0) = \beta_1,\ \ldots,\ y^{n-1}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

possui uma e uma só solução.

Aula 25: Solução geral duma EDL completa

$$D(y) := a_n(x)\, y^{(n)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y \quad \rightarrow \quad D(y) \text{ é uma aplicação linear}$$

• A diferença de duas soluções duma EDL completa é uma sol. da ED linear homogénea associada. $[D(y_1) = b(x) = D(y_2) \Rightarrow D(y_1 - y_2) = D(y_1) - D(y_2) = 0]$

• A soma de uma sol. da EDL completa com uma sol. da EDL homogénea associada é uma sol. da EDL completa. $[D(y_1) = b(x),\ D(y_2) = 0 \Rightarrow D(y_1 + y_2) = D(y_1) + D(y_2) = b(x)]$

Teor. 2.7 A solução geral de uma EDL completa obtém-se adicionando uma qq sua solução à solução geral da EDL homogénea associada.

Portanto,

A solução geral y de uma EDL completa é a soma da solução geral y_H da EDL homogénea associada, com uma solução particular y_P da EDL completa:

$$y = y_H + y_P$$

Existência e unicidade de solução dum Problemas de Cauchi envolvendo EDLs:

Teor. 2.6 Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e b são funções contínuas num int. I, $a_n(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$, $x_0 \in I$, então em I o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0,\ y'(x_0) = \beta_1,\ \ldots,\ y^{n-1}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

possui uma e uma só solução.

Aula 25: Solução geral da EDL homogénea associada (Teorema 2.8)

$$D(y) := a_n(x)\, y^{(n)} + \ldots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y$$

Para encontrar a solução geral duma EDL completa $D(y) = b(x)$ necessitamos de encontrar a solução geral da EDL homogénea associada $D(y) = 0$.

Teorema 2.8: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$\boxed{a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = 0}$$

num dado intervalo I ($a_0, a_1, \ldots, a_n$ contínuas em I; $a_n(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, linearmente independentes. Qualquer outra solução, ψ, é combinação linear destas:

$$\boxed{\psi = C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + \cdots + C_n\phi_n\,,}$$

onde as constantes C_j são determinadas (de modo único) por ψ.

Toda a EDL homogénea de ordem n, com coeficientes funções contínuas,

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = 0}$$

admite um sistema fundamental de soluções (SFS) $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ composto por n soluções linearmente independentes (num intervalo I). A solução geral da EDL homogénea é:

$$y_H = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots + c_n\phi_n\,,$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Exercício 2:

1. Considere a EDL homogénea de coeficientes constantes $y'' + y = 0$, no intervalo $I = \mathbb{R}$. Mostre que $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ formam um SFS em $\mathbb{R}$.
   Determine a solução geral.

2. Considere a EDL homogénea de coeficientes constantes $y''' + 4y'' - 5y' = 0$.
   (a) Será que $\{1, e^x\}$ constitui um SFS?
   (b) Será que $\{1, e^x, 2e^x\}$ constitui um SFS?
   (c) Será que $\{1, e^x, \operatorname{sen}(-5x)\}$ constitui um SFS?
   (d) Será que $\{1, e^x, e^{-5x}\}$ constitui um SFS?

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = 0\,, \quad a_n \neq 0,\;\; a_i \in \mathbb{R}}$$

Soluções da forma $y = e^{rx}$. Tendo em conta que $(e^{rx})^{(n)} = r^n e^{rx}$, substituindo na EDL obtemos:

$$\begin{aligned} & e^{rx}\,(a_n\, r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} \cdots + a_1\, r + a_0) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a_n\, r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} \cdots + a_1\, r + a_0 = 0 \quad \text{(eq. característica)} \end{aligned}$$

Portanto e^{rx} é solução da EDL homogénea se e só se r é raíz do polinómio característico:

$$\boxed{P(r) = a_n\, r^n + a_{n-1}\, r^{n-1} \cdots + a_1\, r + a_0}$$

.

Aula 25: SFS de uma ED linear homogénea de coeficientes constantes

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P(r) = a_n\, r^n + \ldots + a_1\, r + a_0} \quad \text{(Pol. característico:)}$$

$$\downarrow$$

n raízes $\longleftrightarrow$ SFS= {**n** soluções linearmente independentes}:

(contando com multiplicidades)

Raízes reais:

(1) $r_1, r_2, .., r_k$ são raízes reais simples distintas: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, .., e^{r_k x} \in$ SFS.

(2) r raiz real de multiplicidade $m > 1$: $e^{rx}, xe^{rx}, .., x^{m-1}e^{rx} \in$ SFS.

Raízes complexas:

(3) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas simples: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\; e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS.

(4) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas de mult. $m > 1$: $x^t\, e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\; x^t\, e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS para $t = 0, 1, \ldots, m-1$.

Aula 25: Exercícios 3

Determine a solução geral das EDLs homogéneas de coeficientes constantes seguintes:

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

2. $y^{(4)} + y'' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$.

3. $y^{(4)} - 3y''' - y'' + 3y' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x}$.

4. $y'' + 2y' + 5y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$.

5. $y''' + y' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$.

6. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ Sol: $y_H = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 x \cos x + C_4 x \operatorname{sen} x$.

7. $y''' - 11y'' + 39y' - 45y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{5x}$.

8. $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{x} \cos x + C_4 e^{x} \operatorname{sen} x$.

9. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x + C_6 x \cos x + C_7 x \operatorname{sen} x$.

Aula 25: EDL completa. Solução particular de um EDL completa

Vamos dar ~~dois~~ 1 métodos para determinar uma solução particular da EDL completa. O primeiro aplica-se a equações diferenciais lineares (ordinárias) de coeficientes constantes (mas não a todas) e o segundo, mais geral, pode-se aplicar a equações diferencias não necessariamente de coeficientes constantes (embora na prática iremos aplicar somente a equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, principalmente a aquelas em que o primeiro método não se pode aplicar).

(1) Método dos coeficientes indeterminados (somente para algumas EDLs de coeficientes constantes)

~~(2) Método da variação das constantes (mais geral)~~ Não sai

Aula 25: Método dos coeficientes indeterminados (Para EDLs de coeficientes constantes)

Equações diferencial linear (ordinária) de coeficientes constantes:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{b}(x)\,, \qquad a_n \neq 0}$$

Este método exige que o termo independente da EDL, $\mathbf{b(x)}$, seja da forma $\boxed{\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ ou $\boxed{\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\text{sen}\,(\beta x)}$ onde $p_m(x)$ é um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Então a EDL possui uma solução particular y_p do tipo

$$\boxed{y_p = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\text{sen}\,(\beta x)]}$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$ é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$ como raiz do polin. característico $P(r)$ ($k = 0$ se não for raiz). $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes reais são determinados pelo sistema resultante quando substituimos y_p na EDL completa.

Aula 25: Método dos coeficientes indeterminados - Algoritmo

Equações diferencial linear (ordinária) de coeficientes constantes:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{b}(x)\,, \qquad a_n \neq 0}$$

(1) Analisar $\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $p_m(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x)$ e determinar m, α e β.

(2) Verificar se $r = \alpha + i\beta$ é raiz do pol. caract. da EDL homogénea associada. Determinar a sua multiplicidade k ($k = 0$ caso não seja raiz).

(3) Escrever $y_p = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\mathrm{sen}\,(\beta x)]$.

(4) Substituir y_p na EDL completa para determinar os coeficientes dos polinómios $P_m(x)$ e $Q_m(x)$.

Aula 25: Exercícios 4

Determine a solução geral das EDLs completas de coeficientes constantes seguintes:

1. $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$ Sol: $y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{13}{8} + \frac{3}{2}x - x^2$.

2. $y''' + y' = \sin x$ Sol: $y = y_H + y_P = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x \sin x}{2}$.

3. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$ Sol: $y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x}$.

4. $y' + y = (x+1)e^{2x}$ Sol: $y = y_H + y_P = Ce^{-x} + \frac{3x+2}{9} e^{2x}$.

5. $y'' + y = 2\sin x$ Sol: $y = y_H + y_P = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x$.