Aula 1: Informação

- Docente: João Breda — gabinete: 27.3.10 (3º piso).
- Avaliação: discreta.
- Teste 1: dia 17 de novembro de 2023 (6^a feira).
- Teste 2: no Exame Final.
- OT: 6a feira das 13:00h–14:00h, sala: 23.3.15
- Toda a informação relevante (pograma, textos de apoio, avaliação, etc.) está no Moodle.

Aula 1: Lógica em matemática

- Proposições: p, q, r afirmações (condições) verdadeiras ou falsas, mas não ambas.
  Símbolos lógicos: (1) Relações: $=$, $\in$ (igualdade e pertença).
  (2) Connectivos $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\sim$ (conjunção, disjunção, implicação, equivalência e negação).
  (3) Quantificadores: $\forall$, $\exists$ (universal e existencial)

- Leis de De Demorgan:
  1^{as}: $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q \quad , \quad \sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
  2^{as}: $\sim[\forall x \in A, p(x)] \Leftrightarrow \exists x \in A, \sim p(x) \quad , \quad \sim[\exists x \in A, p(x)] \Leftrightarrow \forall x \in A, \sim p(x)$

- Implicação $p \Rightarrow q$ (se p, então q)
  $[p \Rightarrow q] \;\Leftrightarrow\; [\sim q \Rightarrow \sim p]$
  $p \Rightarrow q \;\Leftrightarrow \sim p \vee q \quad , \quad \sim[p \Rightarrow q] \;\Leftrightarrow\; p \vee \sim q$

- $\sim(\sim p) = p$
  $p \wedge q = q \wedge p \,, \quad p \vee q = q \vee p$ (comutatividade)
  $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad , \quad p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributividade)

Aula 1: Tabelas da verdade

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$p \Rightarrow q$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V

Aula 1: Teoremas, proposições, lemas

- Teorema: é uma implicação $P \Rightarrow Q$ (ou uma equivalência $P \Leftrightarrow Q$).
  P é a condição suficiente e Q é a condição necessária.

- Lema: é um teorema de menor importância, mas necessário para argumentação.

- Argumento: sequência de afirmações ligados por implicações.

- Argumento é válido quando todas as afirmações na sequência forem verdadeiras.

- Prova direta: Argumento válido que começa com P e acaba com Q.

- Prova por contraposição: Argumento válido que começa em $\sim Q$ e acaba em $\sim P$.

- Prova por contradição (ou redução ao absurdo): Argumento válido que começa assumindo $P \wedge \sim Q$ e termina com uma afirmação que é a negação de uma das afirmações anteriores da sequência, isto é, termina com $p_i \wedge \sim p_i$, para algum i.

- Prova por indução: Neste caso $P =$"$n \in \mathbb{N}$" e $Q = Q(n)$ proposição em n. A prova consiste em dois passos: (1) provar que $Q(1)$ é verdadeiro. (2) Assumindo que $Q(n)$ é verdadeiro, provar que $Q(n+1)$ também é verdadeiro.

Aula 1: Topologia da reta $\mathbb{R}$ (Complementar e interior)

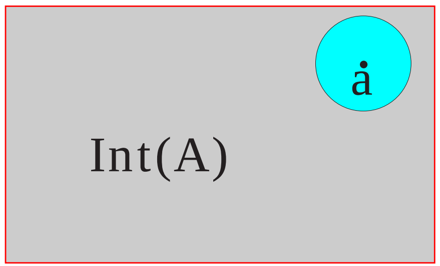
Nesta secção vamos referir algumas noções que no 2º semestre serão definidas em $\mathbb{R}^n$.

Complementar - O *complementar* de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\mathbb{R}\backslash A$, é o conjunto de todos os elementos que estão em $\mathbb{R}$ e não estão em A.

Interior - $a \in A$ diz-se *ponto interior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a, contida em A, $\mathcal{V}(a) \subseteq A$, isto é, $a \in A$ é ponto interior a A se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a-\delta, a+\delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior de* A é o conjunto de todos os pontos interiores de A e denota-se por $\mathrm{Int}(A)$.



Exemplo 1.12. Seja $A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup[\pi, 5[$.

- $\mathbb{R}\backslash A \ =$
- $\mathrm{Int}(A) \ =$

Aula 1: Topologia da reta $\mathbb{R}$ (exterior, fronteira e fecho)

Exterior - $a \in \mathbb{R}\backslash A$ diz-se *ponto exterior* a $A \subseteq \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a contida no complementar de A, $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, isto é,

$$\exists \delta > 0 :]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto exterior de A se e só se é ponto interior de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

O *exterior* de A é o conjunto de todos os pontos exteriores de A e denota-se por $\operatorname{Ext}(A)$.

Fronteira - Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a interseta A e interseta o complementar de A ($\mathbb{R}\backslash A$), isto é,

$$\forall \delta > 0,]a - \delta, a + \delta[\cap A \neq \emptyset \wedge]a - \delta, a + \delta[\cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

Frt(A)

$a \in \mathbb{R}$ é ponto fronteira de A se e só se é ponto fronteira de $\mathbb{R}\backslash A$. (Porquê?)

A *fronteira* de A é o conjunto de todos os pontos fronteira de A e denota-se por $\operatorname{Frt}(A)$.

Fecho (ou aderência) - O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de $A \subseteq \mathbb{R}$ designa-se por *fecho ou aderência de* A e denota-se por $\overline{A}$, $\overline{A} = \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Frt}(A)$. Os pontos de $\overline{A}$ designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

Exemplo 1.12. Seja $A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup [\pi, 5[$.

- $\operatorname{Ext}(A) =$
- $\operatorname{Frt}(A) =$

Aula 1: Exercício 1

Exercício 1.7 Seja $A =]-\infty, 1] \ \cup \ \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

- O interior de A;
- O complementar de A;
- O exterior de A;
- A fronteira de A;
- O fecho de A.

Qual é a fronteira de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$?

Aula 1: Conjuntos abertos e conjuntos fechados

Aberto - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *aberto* em $\mathbb{R}$ se $A = \mathrm{Int}(A)$.

Fechado - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *fechado* em $\mathbb{R}$ se o seu complementar é aberto, isto é, se $\mathbb{R} \setminus A = \mathrm{Ext}(A)$.

Exemplo 1.13. São conjuntos abertos os conjuntos $]-1,4[\,;\ ]2,3[\cup]3,5[\,;\ ]2,+\infty[\,;\ \mathbb{R}\,;\ \emptyset$.

São conjuntos fechados os conjuntos $[-1,4]\,;\ ]-\infty,3]\,;\ [2,3]\cup[4,+\infty[\,;\ \mathbb{R}\,;\ \emptyset$.

Os conjuntos $[-1,3[$ e $]4,7]$ não são abertos nem fechados.

Observação 1.8. $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ são conjuntos abertos **e** fechados.

Proposição 1.1. *Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado em $\mathbb{R}$ se e só se coincide com o seu fecho, i.e., $A = \overline{A}$. Equivalentemente, um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é fechado se e só se contém a sua fronteira, i.e., $A \supseteq \mathrm{Frt}(A)$.*

Exemplo 1.14. Seja $A = [2,8] \cup \{0,1,9\}$. Averigue se A é um conjunto fechado.

Aula 1: Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se ***ponto de acumulação*** de A se toda a vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, interseta $A \setminus \{a\}$:

$$\forall \mathcal{V}(a), \mathcal{V}(a) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

$$a \in \mathbb{R} \text{ é } \textit{ponto de acumulação} \text{ de } A \text{ se e só se } \forall \delta > 0,\ ]a-\delta, a+\delta[\cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se ***derivado* de** A e denota-se por A'.

Um ponto $a \in A$ diz-se ***ponto isolado de*** A se existe uma vizinhança de a, $\mathcal{V}(a)$, que interseta A apenas no ponto a:

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

Usando de novo as vizinhanças centradas no ponto, podemos dizer que

$$a \in A \text{ é um } \textit{ponto isolado} \text{ de } A \text{ se e só se } \exists \delta > 0 :]a-\delta, a+\delta[\cap A = \{a\}.$$

Nota: $A' \cap \{\text{pontos isolados de } A\} = \emptyset$ $\qquad$ $A' \cup \{\text{pontos isolados de } A\} = \overline{A}.$

Pontos isolados são pontos de A na fronteira de A que não são pontos de acumulação.

Aula 1: Exemplo e exercício 2

Exemplo 1.15. Seja $A =]-\sqrt{7}, 3] \cup \{\pi\}$.

Calcule o derivado A' de A. Tem A pontos isolados?

Observação 1.9. Em $\widetilde{\mathbb{R}}$, o ponto $+\infty$ (resp. $-\infty$) pode ser considerado ponto de acumulação e de aderência de todo o subconjunto de $\mathbb{R}$ superiormente (resp. inferiormente) ilimitado.

Seja $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Quais são os pontos de acumulação de A e quais são os pontos isolados de A?

Aula 1: Função

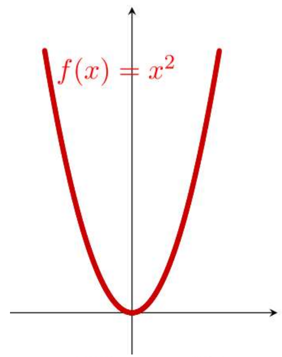
Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \to B$ é uma correspondência que *a cada* elemento $x \in A$ associa *um único* elemento $f(x) \in B$. Isto escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{e, em notação lógica,} \qquad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

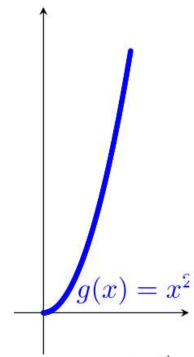
O quantificador $\exists^1$ significa "existe um e um só" ou "existe um único".

Chama-se **domínio** de f ao conjunto A, **conjunto de chegada** ao conjunto B e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de f ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$



$D_f = \mathbb{R}$



$D_g = \mathbb{R}_0^+$

O domínio de f denota-se por D_f e o seu contradomínio por $CD_f = f(D_f)$.

Aula 1: Função Composta

Dadas duas funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se o contradomínio de f for um subconjunto do domínio de g ($CD_f \subseteq D_g$) pode definir-se a **função composta** $g \circ f$:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemplo 2.4. Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

Aula 1: Função injetiva e função sobrejetiva

Definição 2.1. *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***injetiva*** *se*

$$\forall x, x' \in D_f,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função f é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 2.2. *Uma função* $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *diz-se* ***sobrejetiva*** *se*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real f é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

Exercício 2.3 Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

Aula 1: Função inversa

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por f^{-1} a função (dita **inversa** de f) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

f é invertível (com inversa g) se e só se existe $g : CD_f \to \mathbb{R} : \forall x \in D_f,\ (g \circ f)(x) = x$.

Observação 2.1. O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.

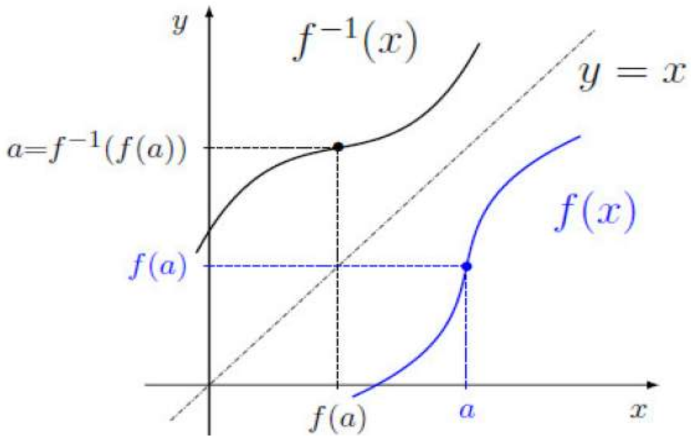


Figura 2.2: Função inversa

Exercício 2.7 Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.