Integrais impróprios de 1^a espécie

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Aula 17: Integral Impróprio de 1^a espécie no limite superior

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie impróprio no limite superior de integração)

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

então o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Aula 17: Integral Impróprio de 1^a espécie no limite inferior

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie impróprio no limite inferior de integração)

Seja $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, para todo o $t \leq a$. Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx$$

então o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Aula 17: Integral Impróprio de 1^a espécie em ambos os limites

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ (integral impróprio de 1ª espécie impróprio em ambos os limites de integração)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

são ambos convergentes dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e

escrevemos
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, um dos integrais impróprios $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ ou $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Aula 17: Exemplo e exercicios 1

Exemplo: O integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ é convergente e tem valor $\frac{\pi}{2}$ porque

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to+\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercício 1: Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ é:

- divergente se $\alpha \leq 1$;
- convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1}$.

Exercício 2: Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\, dx$ é:

- divergente se $\beta \geq 0$;
- convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\, dx = -\frac{1}{\beta}$.

Aula 17: Observações

Observação 7.1. Repare-se que se houver convergência num intervalo ilimitado, essa convergência mantém-se em qualquer seu subintervalo, contudo, o valor do integral impróprio poderá ser diferente.

- Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Se $c \geq a$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ são da mesma natureza.

- Seja $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \leq b$. Se $c \leq b$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx$ são da mesma natureza.

- O estudo de um integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, com f integrável em todo o intervalo limitado e fechado, não depende do ponto $a \in \mathbb{R}$ que se escolhe para estudar os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

- Os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_{-b}^{+\infty} f(-x)\, \mathrm{d}x$ são da mesma natureza. No caso de convergência, temos:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-b}^{+\infty} f(-x)\, \mathrm{d}x.}$$

Aula 17: Exemplo e exercicios 2

Exemplo 7.2. Atendendo a que o limite $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-\cos t + 1)$ não existe, podemos concluir que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ é divergente. Mais ainda, podemos também concluir que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ é divergente.

Exercício 7.1 Verifique que existe $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} \operatorname{sen} x\,dx$ e conclua que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx \neq \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} \operatorname{sen} x\,dx$.

Sendo f uma função integrável em qualquer intervalo $[-a, a]$ com $a > 0$, ao limite $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ dá-se a designação de **valor principal de Cauchy** da função f.

Repare-se que este limite pode existir e no entanto o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ser divergente como acontece no caso do exercício 7.1.

Exercício resolvido 7.1. Estude a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2+4}\,dx$.

Exercício 7.3 Verifique que $\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{1+\alpha^2}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$

$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\text{tg}\,(u)$

$(\text{sen}\,u)' = u'\,\cos u$

$(\text{cosec}\,u)' = -u'\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$

$(\text{tg}\,u)' = u'\,\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\text{cotg}\,u)' = -u'\,\text{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\text{tgh}\,u)' = u'\text{sech}^2 u$

$(\text{sech}\,u)' = -u'\text{sech}\,u\text{tgh}\,u$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\text{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\,u^p\,dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ $(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u'\,\sin u\,\mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u'\,\sec u \tan u\,\mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u'\,\cos u dx = \sin u + C$

$\int u'\text{cosec}\,u\text{cotgudx} = -\text{cosec u} + \text{C}$

$\int u'\,\sec^2 u\,\mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' e^u\,\mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u'\text{cosec}^2 u\,\mathrm{d}x = -\text{cotgu} + \text{C}$

$\int u' a^u\,\mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}x = \text{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\,\mathrm{d}x = uv + C$

$\int u'\,\text{sech}^2 u\,\mathrm{d}x = \text{tgh}\,u + C$

$\int u'\text{sech}\,u\text{tgh}\,u\,\mathrm{d}x = -\text{sech}\,u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}x = \text{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\,\mathrm{d}x = \text{tgh}^{-1} u + C$

$\int u'\,\sec u\,\mathrm{d}x = \ln|\sec u + \text{tg}\,u| + C$