Informação

Na sequência da realização da Conferência EQAF organizada pela Reitoria, dia 24 de novembro, sexta-feira, a aula de Cálculo I - C, turma TPC-6, das 11h00 às 13h00 , muda da sala 23.3.15 para a 28.02.29 (DECivil).

Exercícios de revisão (continuação)

Aula 19: Integrabilidade e Áreas

Regras de integrabilidade : Aula 10

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} \, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$

Aula 19: Primitivas por partes, por substituição e de funções racionais

- Calcule $\displaystyle\int \frac{x+1}{2+4x^2}\,\mathrm{d}x$

- Calcule $\displaystyle\int \sin(sqrt2x)\,\mathrm{d}x$

- Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}{\sqrt[6]{1+x}+1}\,\mathrm{d}x.$

Aula 19: Fermat, Cauchy e extremos

Teorema 4.5. *(**Teorema de Fermat**) Seja f uma função definida e derivávell num intervalo aberto* $]a,b[$ *,* $a<b$. *Se f tiver um extremo local num ponto $c \in]a,b[$, então $f'(c)=0$.*

REGRA DE CAUCHY $\longrightarrow$ levantamento de indeterminações $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ Aula 6

$\downarrow$

Teorema 4.11. *Seja f contínua em a. Se $\lim\limits_{x\to a^{+-}} f'(x) = l \in \mathbb{R}$ então $f'_{+-}(a) = l$.*

$\cancel{\Leftarrow}$

Exercício resolvido 4.2. Verifique que a função dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (1) é contínua,

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ não existe, (3) $f'(0) = 0$, logo, o domínio de f' é $[0,\infty[$.

Exercício. Determine os extremos da função $f(x) = \frac{e^x}{x}$ em $\mathbb{R}^+$. Averigue se têm assintotas.

(aula 6)

Aula 19: Bolzano, Weierstrass, Rolle e Lagrange

Teorema 4.1. ***(Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b], a < b$, e $f(a) < Y < f(b)$ ou $f(b) < Y < f(a)$ então existe $X \in]a,b[$ tal que $f(X) = Y$.*

Exercício 4.3 Considere a função g dada por $g(x) = \dfrac{3\pi}{5} - \arccos\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$. Utilize o teorema de Bolzano para justificar que g admite uma raiz no intervalo $]0,2[$.

Teorema 4.2. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se D_f é um conjunto limitado e fechado e f é contínua em D_f, então f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem $x_m, x_M \in D_f$ tais que, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, para todo o $x \in D_f$.* Se D_f for um intervalo limitado e fechado, o *contradomínio da função é $f(D_f) = [f(x_m), f(x_M)]$.*

Exercício • A função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume o valor máximo em $x = 0$, mas não existe $x \in [0,+\infty[$ tal que $g(x)$ seja mínimo. Porquê?

Teorema 4.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

51. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Exercício. Considere a função $f(x) = e^x + x - 1$ no intervalo $[0,1]$. Mostre que existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = e$.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ $(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan(u) + C$

$\int u' \sin u\, dx = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u dx = -\operatorname{cosec} u + C$

$\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + C$

$\int u' e^u\, dx = e^u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\, dx = -\operatorname{cotg} u + C$

$\int u' a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, dx = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\, dx = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, dx = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u' \sec u\, dx = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

f contém		Substituição
$\sqrt[k]{a+bx}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt[k]{a+bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt[k_1]{(a+bx)^{t_1}},\ \sqrt[k_2]{(a+bx)^{t_2}}, \ldots,\ \sqrt[k_n]{(a+bx)^{t_n}}$	$\rightsquigarrow$	$k = \operatorname{mmc}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\,, \quad \sqrt[k]{a+bx} = t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\operatorname{tg} t$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\operatorname{sen} t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\sec t$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\rightsquigarrow$	$x + \dfrac{b}{2a} = z \qquad \boxed{ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2 + K\right]}$

Fracções Simples: $\dfrac{A}{bx^2+c} \rightsquigarrow$ imediata

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t\,, \qquad \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\ \dfrac{D}{ax^2+bx+c} = \dfrac{D}{a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+k^2\right]} \rightsquigarrow x + \dfrac{b}{2a} = k\operatorname{tg} t\,, \quad t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$