Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(e^u)' = u' e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}$, $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$ $(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan(u) + C$

$\int u' \sin u\, dx = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u dx = -\operatorname{cosec} u + C$

$\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + C$

$\int u' e^u\, dx = e^u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\, dx = -\operatorname{cotg} u + C$

$\int u' a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\, dx = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\, dx = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, dx = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u' \sec u\, dx = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Aula 13: Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Teorema 6.17. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(Fórmula de Barrow)

Habitualmente escrevemos $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$ para denotar $F(b) - F(a)$.

Integração por partes no integral definido: $$\int_a^b \underset{\mathrm{P}}{f(x)}\underset{\mathrm{D}}{g(x)}\, \mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\, \mathrm{d}x$$

Exemplo 6.12. Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x dx = 1 - \frac{1}{e}.$
2. $\displaystyle\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = -1.$
3. $\displaystyle\int_{1}^{e} x \ln x dx = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4} dx;$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1 + (2x)^2} dx;$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x + 4)} dx.$

Aula 14: Substituição no integral definido e funções pares e ímpares

Teorema 6.18. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $u : I \to \mathbb{R}$ é derivável e invertível com $[a, b] \subset u(I)$, I um intervalo de $\mathbb{R}$, então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_a}^{t_b} f(u)\,\mathrm{d}t = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t))\,\mathrm{d}t$$

feita a substituição $\begin{array}{c} x = u(t) \\ \mathrm{d}x = u'\,\mathrm{d}t \end{array}$ $\quad \begin{array}{cc} x & t \\ \hline a & t_a \\ b & t_b \end{array}$ em que $u(t_a) = a$ e $u(t_b) = b$.

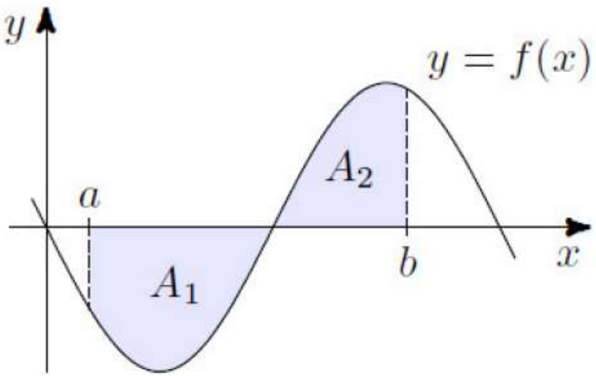
Exemplo 6.13. Consideremos o integral definido $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$. Mudança de variável $x + 1 = t^2,\ t > 0$

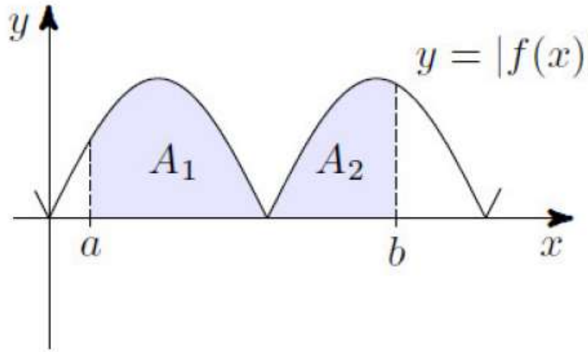
Proposição 6.2. *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto simétrico, isto é, para todo o $x \in D$, o seu simétrico também pertence a D ($-x \in D$), e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer subconjunto de D do tipo $[-a, a]$. Então:*

1. *se f é uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$;*
2. *se f é uma função ímpar, isto é, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.*

Aula 14: Cálculo de áreas - Área sobe gráfico de função

Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$ então $\int_a^b |f(x)|dx$ é a área da região limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$.





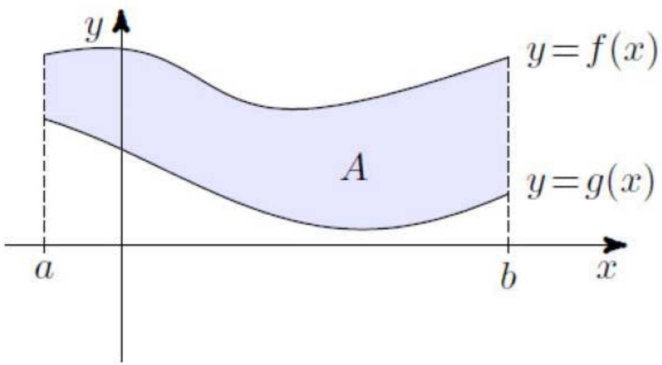
Exercício resolvido 6.2. Considere a função real de variável real dada por $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-2}$.

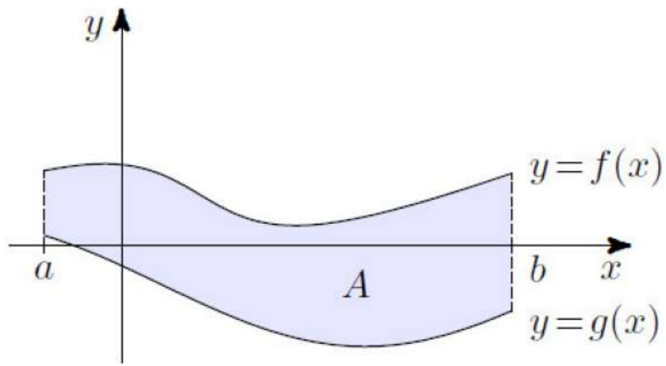
1. Estude o sinal da função f.
2. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano limitada pelo eixo Ox, pelas retas de equações $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ e pelo gráfico de f.

Aula 14: Cálculo de áreas - 6.7.1 Área compreendida entre 2 curvas

Sejam f e g funções contínuas em $[a, b]$. A área A da região do plano limitada inferiormente pelo gráfico de g e limitada superiormente pelo gráfico de f e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

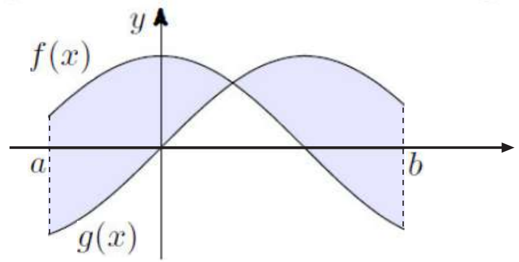
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$





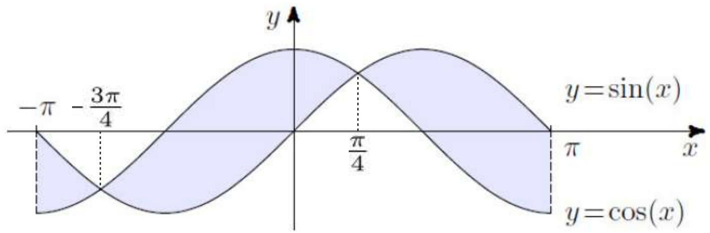
Observe que, em geral, a área A da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo gráfico de g e pelas retas de equações $x = a$ e $x = b$, é dada por

$$\boxed{A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.}$$



Aula 14: Exercícios 1

Exercício resolvido 6.3. Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = \cos x$ e pelas retas $x = -\pi$ e $x = \pi$.



Exercício 6.11 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região limitada pelos gráficos das funções dadas por $f(x) = \dfrac{1+\cos^2 x}{1+e^{2x}}$ e $g(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+e^{2x}}$, em $[\ln 2, \ln 5]$.

Mostre ainda que, quaisquer que sejam a, $b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, a área da região limitada pelos gráficos das duas funções em $[a, b]$ é dada por $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+e^{2a}}{1+e^{2b}}\right) + b - a$.

Exercício 6.12 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região do primeiro quadrante limitada pela parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$ e pela reta que lhe é tangente no ponto $(2, 2)$.