Alguns integrais impróprios

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}\,, \quad \text{se } \alpha > 1 \quad (\text{divergente se } \alpha \leq 1).$$

- $$\int_1^{+\infty} e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\alpha}\,, \quad \text{se } \alpha < 0 \quad (\text{divergente se } \alpha \geq 0).$$

- $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\,.$$

- $$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln x^2}\,\mathrm{d}x = 1\,.$$

Aula 21: Propriedades dos Integrais Impróprios

Teorema 7.1. *Sejam f e g duas funções definidas em $[a,+\infty[$ e integráveis em $[a,t]$ para todo o $t \geq a$. Se os integrais impróprios $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ forem* ***convergentes*** *então, quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente e* $\boxed{\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.}$

Obs. 7.3. Se **apenas um dos integrais** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ou $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ for divergente, então $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx$ é divergente; contudo, se ambos forem divergentes nada se pode concluir sobre a natureza de $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx$

Ex. 7.6. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x}\,dx$ são divergentes e $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right)\,dx = \int_1^{+\infty} 0\,dx = 0$ é convergente e $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$ é divergente.

Obs. 7.4. Se $\alpha \neq 0$, então $\int_a^{+\infty} \alpha g(x)\,dx$ e $\alpha \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são da mesma natureza $\int_a^{+\infty} \alpha g(x)\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ caso convergem.

- Os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ e $\int_{-b}^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{d}x$ são da mesma natureza. Em caso de convergência, temos:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-b}^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{d}x.}$$

Aula 20: Convergência Absoluta

Um integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diz-se **absolutamente convergente** quando o integral impróprio do módulo da função integranda, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$, for convergente.

Teorema 7.3. *Seja $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$ para todo o $t \geq a$. Se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$ for convergente então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é também convergente.*

Resumindo, **todo o integral impróprio absolutamente convergente é convergente**.

- Se $h(x)$ é limitada e $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ é absolutamente convergente.

(pelo critério da comparação)

Exemplo 7.9. O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ é absolutamente convergente.

Exercício 7.11 Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$ 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$ 5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\,dx$

8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$ 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$ 10. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$ 11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ 13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx.$

Aula 21: Exercicios 1

Exercício 7.12 Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Exercício 7.15 Estude a natureza do integral impróprio seguinte, indicando o seu valor em caso de convergência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx.$$

Exercício 7.16 Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{\arctan(2x)}{1+4x^2}$.

1. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int f(x)\,dx$.
2. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, indicando o seu valor em caso de convergência.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\operatorname{sen} u$

$(\sec u)' = u'\sec(u)\operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\cos u$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u'\operatorname{cosec}(u)\operatorname{cotg}(u)$

$(\operatorname{tg} u)' = u'\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u'\operatorname{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u'a^u}{\ln a}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{tgh} u)' = u'\operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{sech} u)' = -u'\operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\,u^p\,dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x = \ln|u| + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(u) + C$

$\int u' \sin u\,\mathrm{d}x = -\cos u + C$

$\int u' \sec u \tan u\,\mathrm{d}x = \sec u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \mathrm{dx} = -\operatorname{cosec} \mathrm{u} + \mathrm{C}$

$\int u' \sec^2 u\,\mathrm{d}x = \tan u + C$

$\int u' e^u\,\mathrm{d}x = e^u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\,\mathrm{d}x = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{C}$

$\int u' a^u\,\mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln a} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\,\mathrm{d}x = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} u + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$

$\int u' \sec u\,\mathrm{d}x = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Transformadas de Laplace

Aula 21: Transformada de Laplace (definição e propriedades)

Seja $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace de f é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\,t} f(t)dt,$$

para os valores de s em que o integral impróprio é convergente.

Propriedades lineares da transformadas de Laplace:

Prop. 3.1: A transformada de Laplace é uma transf. linear nas funções[†], isto é, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_g$, então

(i) $\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > \max\{s_f, s_g\}$.

(i) $\mathcal{L}\{\alpha\, f\}(s) = \alpha\, \mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$.

[†] É possível provar que o conjunto das funções seccionalmente contínuas em $[0,+\infty[$ e de ordem exponencial constitui um espaço vectorial real (com a adição e multiplicação por números reais usuais) e que a transformada de Laplace é uma aplicação linear em tal espaço.

Aula 21: Exemplos

1. $\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{1}{s}$, para $s > 0$.

2. $g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 2,3 \\ 0 & t = 2 \\ 6 & t = 3 \end{cases}$, $\mathcal{L}\{g\}(s) = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$.

3. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s-a) = \dfrac{1}{s-a}$, para $s > a$ $(a \in \mathbb{R})$.

4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$.

5. $\mathcal{L}\{sen(at)\}(s) = \dfrac{a}{s}\mathcal{L}\{cos(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, para $s > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

6. $\mathcal{L}\{cos(at)\}(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{a}{s}\mathcal{L}\{sen(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, para $s > 0$ $(a \in \mathbb{R})$.

7. $\mathcal{L}\{c\}(s) = \mathcal{L}\{c\,1\}(s) = c\,\mathcal{L}\{1\}(s) = \dfrac{c}{s}$, para $s > 0$.

8. $\mathcal{L}\{cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2-a^2}$, para $s > |a|$ $(a \in \mathbb{R})$.

9. $\mathcal{L}\{senh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, para $s > |a|$ $(a \in \mathbb{R})$.

Aula 21: Exercícios 2

Determine:

1. $\mathcal{L}\{sen^2(at)\}(s)$ $\qquad sen^2x = \dfrac{1}{2}(1 - cos(2x))$

2. $\mathcal{L}\{cos^2(at)\}(s)$ $\qquad cos^2x = \dfrac{1}{2}(1 + cos(2x))$

3. $\mathcal{L}\{sen^3(at)\}(s)$ $\qquad sen^3x = \dfrac{1}{4}(3sen(x) - sen(3x))$

4. $\mathcal{L}\{cos^3(at)\}(s)$ $\qquad cos^3x = \dfrac{1}{4}(3cos(x) + cos(3x))$

5. $\mathcal{L}\{at^3 + bt^2 + ct + d\}(s)$