Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - C **2023/2024**

Ficha de Exercícios 2 - Parte I
Séries de Potências e Fórmula de Taylor

1. Determine o domínio de convergência das seguintes séries de potências, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$; (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$; (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2+n^3}x^n$;

   (i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{\ln n}$; (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n6^n}(3x-2)^n$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}(x-2)^n$; (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{2n+1}}x^n$;

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-2)^n}x^{2n}$.

2. Mostre que:

   (a) se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente num dos extremos do seu domínio de convergência, então também é absolutamente convergente no outro extremo;

   (b) se o domínio de convergência de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ é $]-r, r]$, então a série é simplesmente convergente em $x = r$.

3. Determine os polinómios de Taylor seguintes:

   (a) $T_0^3(x^3+2x+1)$; (b) $T_\pi^3(\cos x)$; (c) $T_1^3(xe^x)$;
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)$; (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)$; (f) $T_1^n(\ln x)$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. Considere $f(x) = e^x$.

   (a) Escreva a fórmula de MacLaurin de ordem n da função f.

   (b) Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem n permite aproximar e^x no intervalo $]-1, 0[$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{(n+1)!}$.

   (c) Escolha um dos polinómios de MacLaurin de f e use-o para obter uma aproximação de $\frac{1}{\sqrt{e}}$, indicando uma estimativa para o erro absoluto cometido nessa aproximação.

5. Usando o resto de Lagrange, determine um majorante para o erro absoluto cometido na aproximação de $\operatorname{sen}(3)$ quando se usa o polinómio de Taylor de ordem 5 em torno do ponto $a = \pi$.

6. Mostre que o polinómio de MacLaurin de ordem 7 da função seno permite aproximar os valores desta função, no intervalo $[-1, 1]$, com erro absoluto inferior a $\frac{1}{2} \times 10^{-4}$.

7. (a) Escreva a fórmula de Taylor de 2.ª ordem no ponto 1 da função $f(x) = \ln(x)$.
   (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(1.2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 2 obtido na alínea anterior e mostre que o erro absoluto cometido é inferior a 3×10^{-3}.

Resolução:

(a) Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x), & f(1) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{x}, & f'(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2}, & f''(1) &= -1 \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3}, & f^{(3)}(\theta) &= \tfrac{2}{\theta^3} \end{aligned}$$

o polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto 1 e o resto de Lagrange de ordem 2 são dados, respetivamente, por

$$\begin{aligned} T_1^2 f(x) &= 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \\ R_1^2 f(x) &= \frac{\frac{2}{\theta^3}}{3!}(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3, \text{ para algum } \theta \text{ entre } x \text{ e } 1. \end{aligned}$$

A fórmula de Taylor pedida é

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3\theta^3}(x-1)^3, \text{ para algum } \theta \text{ entre } x \text{ e } 1\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} \ln(1.2) &\simeq T_1^2 f(1.2) \\ &= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 \\ &= 0.2 - 0.02 \\ &= 0.18 \end{aligned}$$

O erro absoluto cometido nesta aproximação é igual a $|R_1^2 f(1.2)|$. Como

$$\begin{aligned} |R_1^2 f(1.2)| &= \frac{\frac{2}{\theta^3}}{3!}(0.2)^3 \\ &= \frac{8}{3\theta^3}10^{-3}, \text{ para algum } \theta \text{ entre } 1 \text{ e } 1.2\,, \\ &< \frac{8}{3} \times 10^{-3} \\ &< 3 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

provámos o pretendido.

8. (a) Obtenha o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $c = 1$.
   (b) Determine um valor de n para o qual se garanta que o polinómio $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$, obtido na alínea anterior, aproxime $\frac{1}{x}$ no intervalo $[0.9, 1.1]$, com erro absoluto inferior a 10^{-3}.

9. Determine o menor valor de n tal que o polinómio de MacLaurin de ordem n da função $f(x) = e^x$ aproxime $f(1)$ com erro absoluto inferior a 10^{-3}.

10. Mostre, usando a fórmula de Taylor, que $\ln(1+x) \leq x$, para todo o $x > -1$.

11. Considere a representação em série de potências da função $\frac{1}{1-x}$ dada por

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Determine uma representação em série de potências para cada uma das seguintes funções (indicando o intervalo onde tal é válida):

$$\text{(a) } \frac{1}{1-3x}\ ; \qquad \text{(b) } \frac{2}{2+x}\ ; \qquad \text{(c) } \frac{1}{x}\ .$$

12. Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ em série de potências de $x-3$, indicando o maior intervalo onde o desenvolvimento é válido.

Exercícios de revisão

13. Considere a seguinte série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n}{n+1}(x-1)^n$.
    (a) Calcule o raio de convergência da série.
    (b) Determine o seu domínio de convergência.

14. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$.

Resolução: Usando o Critério da Raiz, tem-se que:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\left(\frac{x-2}{4}\right)^n\right|} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{|x-2|}{4\sqrt[n]{n}} \\ &= \frac{|x-2|}{4}. \end{aligned}$$

Assim, a série é convergente para valores de x tais que $L < 1$ e divergente para valores de x tais que $L > 1$. Como, $\frac{|x-2|}{4} < 1 \Leftrightarrow -2 < x < 6$, o intervalo de convergência da série é $I_c =]-2, 6[$. Podem ainda pertencer ao domínio de convergência os pontos $x = -2$ e $x = 6$.
Para $x = 6$, obtém-se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

que é divergente (pois é a série harmónica de ordem $p = 1$).
Para $x = -2$, temos a série numérica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

A sua série dos módulos é divergente, logo esta série alternada não é absolutamente convergente. Vejamos se podemos usar o Critério de Leibniz. Uma vez que, sendo $a_n = \frac{1}{n}$, se tem que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente (porque para todo o $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$), então, pelo Critério de Leibniz, a série é convergente (logo a série alternada é simplesmente convergente).

Conclusão: o domínio de convergência da série é $D_c = [-2, 6[$.

Nota: Em alternativa, pode determinar o intervalo de convergência I_c, calculando o raio de convergência usando os coeficientes da série.

15. Indique o maior intervalo onde a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{3n+1}}(x+2)^n$ é absolutamente convergente.
(Exame de Recurso de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

16. Determine o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-4)^n}{n\,6^{n+1}}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.
(Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

17. Seja $f(x) = \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Sabendo que $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, para $|x| < 1$, mostre que:
$$\frac{x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}, \ |x| < 1.$$

   (b) Usando a alínea anterior, determine a série de Taylor da função f, indicando o maior intervalo de $\mathbb{R}$ onde a mesma é válida.

   (c) Utilizando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de f, indique um valor aproximado para $\ln(1.01)$. Sabendo que $f'''(x) = \dfrac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, mostre que o erro absoluto dessa aproximação é inferior a $2 \times (0.1)^4$.
   (Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

18. Considere a função f dada por $f(x) = \cos(2x)$. Usando a fórmula MacLaurin de ordem 3 da função f, calcule um valor aproximado de $\cos(\frac{1}{5})$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$.
(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Questões de escolha múltipla:

19. Qual é o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$?

   (a) 2 (b) 1/e (c) e (d) 1/2

20. Sabendo que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n+5}(x+1)^n$ tem raio de convergência $R = 1$, podemos concluir que o seu domínio de convergência é:

   (a) $\{-1\}$ (b) $]-2, 0[$ (c) $[-2, 0]$ (d) $[-2, 0[$

21. O polinómio de MacLaurin de ordem 3 da função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{sen}\,(x)$ é dado por:

(a) $P(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{3}$

(b) $P(x) = x^2 + \frac{x^3}{3}$

(c) $P(x) = x - x^2 + x^3$

(d) $P(x) = x - x^2 + \frac{x^3}{3}$

22. Sabendo que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ para $|x| < 1$, podemos concluir que a série de MacLaurin de $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ é

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^n,\ |x| < 3^2.$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^n,\ |x| < 3.$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n,\ |x| < 2/3.$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} x^n,\ |x| < 2/3^2.$

Soluções

1. (a) $]-1,1[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (b) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (c) $]-1,1]$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (d) $[1,2[$, sendo simplesmente convergente em $x=1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (e) $\mathbb{R}$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (f) $\{2\}$, sendo absolutamente convergente nesse ponto.
   (g) $[-3,-1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-3$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (h) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (i) $[-1,1[$, sendo simplesmente convergente em $x=-1$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (j) $\left]-\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{8}{3}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (k) $]0,4[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos desse intervalo.
   (l) $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, sendo simplesmente convergente em $x=\frac{1}{2}$ e absolutamente convergente nos restantes pontos.
   (m) $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$, sendo absolutamente convergente em todos os pontos do intervalo.

2. —

3. (a) $T_0^3(x^3+2x+1)=x^3+2x+1$
   (b) $T_\pi^3(\cos x)=-1+\frac{(x-\pi)^2}{2}$
   (c) $T_1^3(xe^x)=e+2e(x-1)+\frac{3}{2}e(x-1)^2+\frac{2}{3}e(x-1)^3$
   (d) $T_0^5(\operatorname{sen} x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$
   (e) $T_0^6(\operatorname{sen} x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$
   (f) $T_1^n(\ln x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$.

4. (a) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$, para algum θ entre 0 e x.
   (b) —
   (c) Por exemplo, $\frac{1}{\sqrt{e}}\simeq T_0^2 f(-\frac{1}{2})=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}=0.625$, com erro inferior a $\frac{1}{6}$.

5. $|R_5(3)|\leq\frac{(3-\pi)^6}{6!}$

6. —

7. Resolvido

8. (a) $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)=1-(x-1)+(x-1)^2+\cdots+(-1)^n(x-1)^n\,,\quad n\in\mathbb{N}$.
   (b) $n=3$ (ou outro superior a este).

9. $n=6$.

10. —

11. (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$, para $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$;

    (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$, para $-2 < x < 2$;

    (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$, para $0 < x < 2$.

12. $\displaystyle\frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-3)^n\,, \qquad x \in]-1,7[.$

13. (a) $R = \frac{1}{4}$.

    (b) $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}[$.

    —

14. Resolvido

15. $]-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}[$

16. $D_c = [-1, 5[$, sendo que a série converge absolutamente em $]-1,5[$ e converge simplesmente em $x = -1$.

17. (a) —

    (b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}$, para todo o x tal que $|x| < 1$.

    (c) $\ln(1.01) \approx 0.01$

18. $\frac{49}{50}$

19. c)

20. d)

21. d)

22. b)