Aula 7: Utilidade do polinómio de Taylor

O polinómio de Taylor de f de grau n em $x = c$,

$$T_c^n f = P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

é um polinómio cujo gráfico é tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$. Logo o polinómio de Taylor aproxima os valores de f numa vizinhança de c. Quanto maior for o grau, maior é a aproximação (em geral - funções analíticas). O pol. de Taylor de grau 1, $T_c^1 f = f(c) + f'(c)(x-c)$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$, enquanto que o pol. de Taylor de grau 2, $T_c^2 f = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2$ é a parábola tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$.
A maior utilidade do polinómio de Taylor é calcular valores aproximados da função f em pontos x_0 que não conseguimos saber o seu valor exato.

Exemplo: Calcule o valor aproximado de: **1.** $\operatorname{sen}(1)$ **2.** $e = 2,7\ldots$

Se uma função f for derivável até a segunda ordem e $f'(c) = 0$ e $f''(c) \neq 0$, então $(c, f(c))$ é extremo local da função. Neste caso o pol. de Taylor de grau 1 em c (reta tangente) é horizontal e o pol. de Taylor de grau 2 em c é uma parábola com vértice em $(c, f(c))$, logo mínimo se tiver concavidade para cima $f''(c) > 0$ e máximo se a concavidade for para baixo $f''(c) < 0$. Útil se conseguirmos apenas calcular a 1^a e a 2^a derivada de f em c.

$$\begin{cases} f'(c) = 0; \\ f''(c) < 0. \end{cases} \Rightarrow (c, f(c)) \text{ é máximo local.} \qquad \begin{cases} f'(c) = 0; \\ f''(c) > 0. \end{cases} \Rightarrow (c, f(c)) \text{ é mínimo local.}$$

Aula 7: Função primitivável (exemplos)

Seja f uma função definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se f admite uma primitiva F em I, dizemos que f é primitivável em I.

- Se F é uma primitiva de f em $I \subset \mathbb{R}$, então F é contínua em I.
- Se f é primitivável em I, f pode não ser contínua em I.
  Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ não é contínua em 0, no entanto é primitivável em $\mathbb{R}$, uma primitiva é $F(x) = \begin{cases} x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$.
- Nem toda a função é primitivável em I. Exemplo: a função $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ não é primitivável em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.2 Toda a função contínua num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é primitivável em I.

Exercício 1: Se a taxa de variação (taxa de crescimento, ou taxa de declínio) da população de uma cidade é dada pela função $f(t) = 12t^2 - 6t + 120$ (t anos) e atualmente habitam 10000 habitantes, qual será a população da cidade daqui a 3 anos?

Aula 7: Primitivas imediatas

As primitivas imediatas são as primitivas resultantes de $\int f'(x)dx = f(x) + C$, isto é, as primitivas resultantes da inversão da tabela de derivação:

$$\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f' \\ \hline f(x) & & g(x) \\ \hline F & \longleftarrow & f \end{array}$$

$$\boxed{f'(x) = g(x) \longrightarrow \int g(x)dx = f(x) + C.}$$

- $(e^x)' = e^x, \longrightarrow \int e^x\,dx = e^x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, \longrightarrow \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$.
- $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x, \longrightarrow \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x, \longrightarrow \int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x, \longrightarrow \int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \operatorname{tgh} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{cotgh} x)' = \frac{1}{\operatorname{senh}^2 x} = \operatorname{cosech}^2 x, \longrightarrow \int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = \operatorname{cotgh} x + C,\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- $(\operatorname{senh}^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} x + C$, em $\mathbb{R}$.
- $(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh} x + C$, em $]1, +\infty[$.
- $(\operatorname{tgh}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \longrightarrow \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{tgh}^{-1} x + C$, em $]-1, 1[$.
- $(\operatorname{cotgh}^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \longrightarrow \int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{cotgh}^{-1} x + C$, em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$.

Aula 8: Propriedades das primitivas

- $\displaystyle\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) + C.$
- $\displaystyle\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int f(x) + g(x)\ dx = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$
- $\displaystyle\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\,\mathrm{d}x.$

Exercício 5.2: Calcule **6.** $\displaystyle\int (\sqrt{3}\mathrm{sen}\,x + \tfrac{2}{3x})\,\mathrm{d}x.$ **8.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{tg}\,u}{\cos u}\,\mathrm{d}u$

Aula 8: Primitivas quase imediatas

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função primitivável com primitiva $F(x)$ e $u = g(x)$ com $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em J com $g(J) \subset I$. Então $f(u)\,u' = f(g(x))g'(x)$ é primitivável e como $(F(u))' = \frac{dF(u)}{dx} = \frac{dF(u)}{du}\frac{du}{dx} = f(u)\,u'$, então

$$\int f(u)\,u' \;\mathrm{d}x \;=\; F(u) + C.$$

Exemplo: $\displaystyle\int \frac{5x^4}{\sqrt{1-x^{10}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5x^4}{\sqrt{1-(x^5)^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}x = .$

Exercício 5.3: Seja $u = g(x)$. Determine:

7. $\displaystyle\int e^u\,u'\,\mathrm{d}x$ **9.** $\displaystyle\int \frac{u'}{u}\,\mathrm{d}x$ **10.** $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}x$ **12.** $\displaystyle\int u'\sqrt[n]{u}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}x$.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$$

$$(\text{arcsen}\,(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$(\text{arctg}\,(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\, u$$

$$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\text{tg}\,(u)$$

$$(\text{sen}\, u)' = u'\,\cos u$$

$$(\text{cosec}\, u)' = -u'\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$$

$$(\text{tg}\, u)' = u'\,\sec^2 u$$

$$(e^u)' = u'\, e^u$$

$$(\text{cotg}\, u)' = -u'\,\text{cosec}\,^2 u$$

$$(a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln(a)}\ ,\ a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$$

$$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$(\text{tgh}\, u)' = u'\text{sech}\,^2 u$$

$$(\text{sech}\, u)' = -u'\text{sech}\, u \text{tgh}\, u$$

$$(\text{senh}\,^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$(\text{tgh}\,^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,\quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{u}\, \mathrm{d}x = \ln(|u|) + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\, \mathrm{d}x = \arctan(u) + C$$

$$\int u'\, \sin u\, \mathrm{d}x = -\cos u + C$$

$$\int u'\, \sec u \tan u\, \mathrm{d}x = \sec u + C$$

$$\int u'\, \cos u dx = \sin u + C$$

$$\int u' \text{cosec}\, u \text{cotgudx} = -\text{cosec u} -$$

$$\int u'\, \sec^2 u\, \mathrm{d}x = \tan u + C$$

$$\int u' e^u\, \mathrm{d}x = e^u + C$$

$$\int u' \text{cosec}\,^2 u\, \mathrm{d}x = -\text{cotgu} + \text{C}$$

$$\int u' a^u\, \mathrm{d}x = \frac{a^u}{\ln(a)} + C,\quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}^{-1} u + C$$

$$\int u'v + uv'\, \mathrm{d}x = uv + C$$

$$\int u'\, \text{sech}\,^2 u\, \mathrm{d}x = \text{tgh}\, u + C$$

$$\int u' \text{sech}\, u \text{tgh}\, u\, \mathrm{d}x = -\text{sech}\, u +$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, \mathrm{d}x = \text{senh}\,^{-1}(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2}\, \mathrm{d}x = \text{tgh}\,^{-1} u + C$$

$$\int u'\, \sec u\, \mathrm{d}x = \ln(|\sec u + \text{tg}\, u|) + C$$