



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE\_IM\_2024-2025

# Mecânica e Campo Eletromagnético

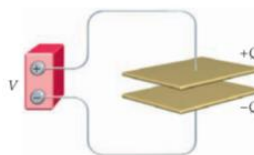
## Aula 10

Cap. 3 – Dielétricos. Vector polarização e deslocamento eléctrico. Susceptibilidade eléctrica.  
Campo magnético

Isabel Malaquias  
[imalaquias@ua.pt](mailto:imalaquias@ua.pt)  
Gab. 13.3.16

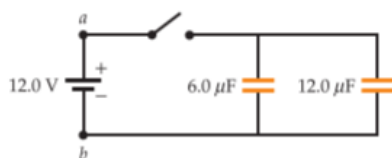
1

## CONDENSADORES E DIELECTRICOS



Quando as armaduras de um condensador não carregado são ligadas aos terminais de uma bateria, esta “bomba” carga de uma armadura para a outra até a ddp entre as duas armaduras igualar a ddp de circuito aberto nos terminais da bateria. A quantidade de carga transferida é  $Q = CV$ .

### CONDENSADORES LIGADOS EM PARALELO

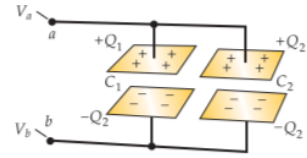
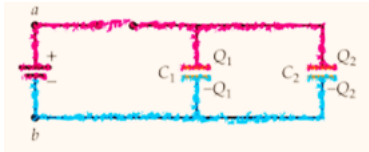


- Qual é o potencial de cada condensador no circuito?  
NB – escolher o terminal negativo como ponto referencial de potencial nulo
- Qual é a carga de cada uma das armaduras do condensador?
- Qual é a carga total que atravessa a bateria?

MCE\_IM\_2024-2025

2

### CONDENSADORES LIGADOS EM PARALELO



- Todos os pontos a vermelho têm um potencial  $V_a = 12 \text{ V}$   
Todos os pontos a azul têm  $V_b = 0 \text{ V}$ 
  - A carga em cada condensador é:  $Q_1 = C_1 V$  e  $Q_2 = C_2 V$ , portanto  
 $Q_1 = (6,0 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 72 \mu\text{C}$  e  
 $Q_2 = (12,0 \mu\text{F})(12 \text{ V}) = 144 \mu\text{C}$
- Os condensadores ficam carregados porque a bateria actua como uma bomba de cargas  
 $Q = Q_1 + Q_2$  o que dá  $Q = 216 \mu\text{C}$

A **CAPACIDADE EQUIVALENTE** será dada por  $C_{eq} = Q_{total} / V$   
ou seja,  $C_{eq} = 216 \mu\text{C} / 12 \text{ V}$

$$C_{eq} = 18 \mu\text{F}$$

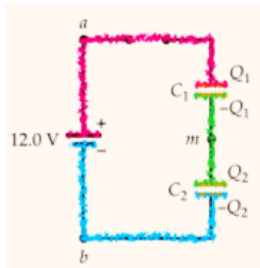
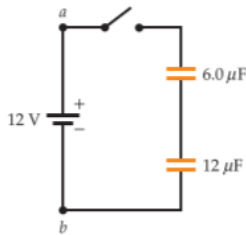


$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

MCE\_IM\_2024-2025

3

### CONDENSADORES LIGADOS EM SÉRIE



- Qual é o potencial de cada condensador no circuito? *NB – escolher o terminal negativo como ponto referencial de potencial nulo*
- Qual é a carga de cada uma das armaduras do condensador?
- Qual é a carga total que atravessa a bateria?

- Todos os pontos a:
  - vermelho estão a um potencial de 12 V
  - azul estão a um potencial zero
  - verde estão a um potencial a determinar,  $V_m$

$$Q_1 = C_1 V_1 \text{ e } Q_2 = C_2 V_2$$

- $V_1 = V_a - V_m$   
 $V_2 = V_m - V_b$   
 $Q_2 = C_2 V_2 = C_2 (V_m - V_b)$   
 $Q_1 = C_1 V_1 = C_1 (V_a - V_m)$

$$V_a - V_b = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$-Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Q_1 = Q_2 = Q = 48 \mu\text{C}$$

**CAPACIDADE EQUIVALENTE,**  
 $C_{eq} = 4,0 \mu\text{F}$

*Durante o carregamento não há transferência de carga de ou para a região a verde, pelo que a sua carga se mantém como zero*

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_2}$$

MCE\_IM\_2024-2025

4

## DIELÉTRICOS

Quando o espaço entre as armaduras de um condensador é ocupado por UM DIELÉTRICO, A CAPACITÂNCIA AUMENTA de um factor característico do dieléctrico – descoberta de Faraday.

### PORQUE AUMENTA?

O campo eléctrico entre as armaduras do condensador enfraquece com a presença do dieléctrico.

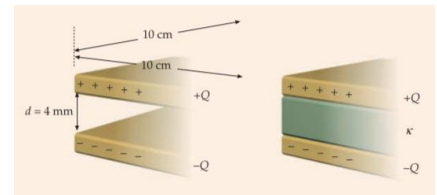
Assim, para uma dada carga  $Q$  das armaduras, a ddp  $V$  é reduzida e a capacitância  $C$  aumenta.

Se num condensador sem dieléctrico o campo é  $E_0$ , quando se introduz o dieléctrico, o campo será dado por

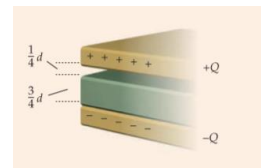
$$E = \frac{E_0}{K} \quad K = \text{CONSTANTE DIELÉCTRICA}$$

MCE\_IM\_2024-2025

5



Material não condutor (ex.<sup>o</sup> vidro, ar, papel ou madeira)



In Tipler & Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, W. H. Freeman & Company (2008), p.819

## DIELÉTRICOS

Para um **CONDENSADOR DE PLACAS PARALELAS**, separadas pela distância  $d$ , a ddp  $V$  entre as placas é dada por

$$V = Ed = \frac{E_0}{K} d = \frac{V_0}{K}$$

A nova **capacitância**,  $C$ , será dada por

$$C = \frac{Q}{V} = K \frac{Q}{V_0} \quad \longleftrightarrow \quad C = K C_0 \quad C = K \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$A$  = área da placa

$$\epsilon = K \epsilon_0$$

PERMITIVIDADE do dieléctrico

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

MCE\_IM\_2024-2025

6

## ENERGIA ARMAZENADA NA PRESENÇA DE UM DIELECTRICO

A energia,  $U$ , armazenada é dada por

$$U = \frac{1}{2} Q V \longrightarrow U = \frac{1}{2} C V^2$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{d} (Ed)^2$$

$$U = \frac{\epsilon A}{2} E^2$$

volume onde  
está o  
dielétrico

$$u = \frac{\epsilon}{2} E^2$$

ENERGIA/VOLUME

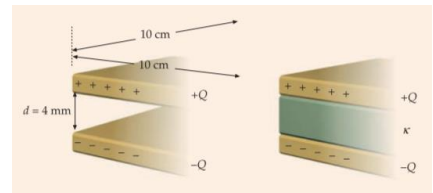
$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$V = Ed$$

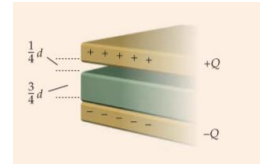
$$\epsilon = K \epsilon_0$$

$K$  = constante  
dielétrica

Parte desta energia está associada com o campo eléctrico e a restante está associada à agressão mecânica (*mechanical stress*) polarizadora sobre as moléculas do dielétrico.



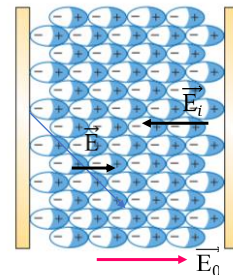
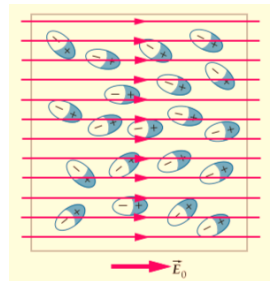
Material não condutor (ex.<sup>o</sup> vidro, ar, papel ou madeira)



MCE\_IM\_2024-2025

7

## Interpretação molecular do comportamento do dielétrico



In Paul A. Tipler & Gene Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, W. H. Freeman & Company (2008), p.825

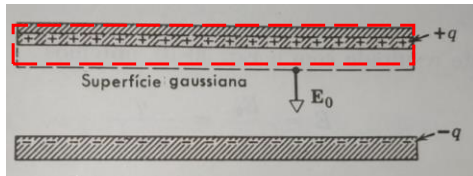
Polarização das moléculas do dielétrico dentro do condensador e criação de um campo eléctrico próprio contrário, induzido ( $\vec{E}_i$ ), ao campo eléctrico externo  $\vec{E}_0$

Há assim enfraquecimento do campo dentro do dielétrico  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ .

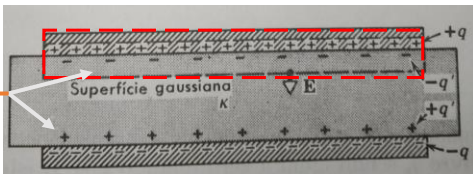
MCE\_IM\_2024-2025

8

## Dieléctricos e lei de Gauss



Caso 1 - sem dielétrico



Caso 2 - com dielétrico

cargas induzidas  $q'$  que fazem com que a carga total no condensador seja  $Q = q - q'$

Usámos a Lei de Gauss em situações sem dielétrico. Se tiver, o que acontece?

a MESMA CARGA nos dois casos

marcação das superfícies Gaussianas

Caso 1 - sem dielétrico

$q$  = carga livre das placas

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E_0 A = q$$

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

Caso 2 - com dielétrico

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E A = q - q'$$

$q'$  = carga superficial induzida

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K \epsilon_0 A}$$

$$q' = q \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

MCE\_IM\_2024-2025

9

## Dieléctricos e lei de Gauss

O CAMPO TOTAL DENTRO DO DIELECTRICO é  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$

O CAMPO INDUZIDO é proporcional ao campo eléctrico externo e, logo, proporcional ao campo total

$$\vec{E}_i = -\chi_e \vec{E}$$

$\chi_e$  = susceptibilidade eléctrica (constante positiva)

Comparando com a relação obtida experimentalmente num condensador, verificamos que a **CONSTANTE DIELECTRICA** é igual a

$$K = 1 + \chi_e$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = \frac{1}{1 + \chi_e} \vec{E}_0$$

MCE\_IM\_2024-2025

10

## Vectores POLARIZAÇÃO e DESLOCAMENTO ELÉCTRICO

### POLARIZAÇÃO

$$P = \frac{q'}{A}$$

A = área

A Polarização,  $P$ , pode definir-se como o **momento do dipolo eléctrico induzido por unidade de volume**

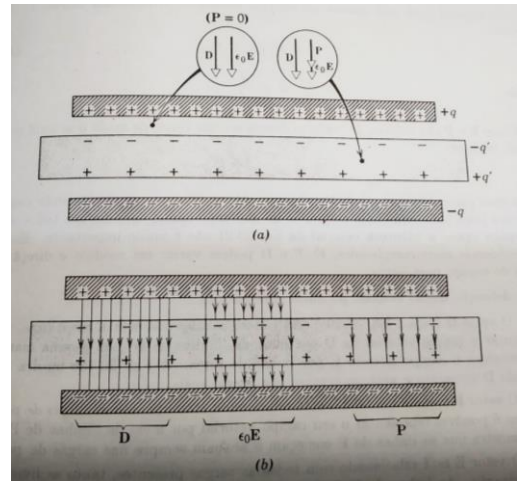
$$P = \frac{q' d}{A d}$$

volume total do dieléctrico

**momento de dipolo induzido na placa dieléctrica**

$d$  = espessura do condensador de placas paralelas

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$



Halliday & Resnick, Física, II-1, p.119

MCE\_IM\_2024-2025

11

## Vectores POLARIZAÇÃO e DESLOCAMENTO ELÉCTRICO

### DESLOCAMENTO ELÉCTRICO

Atrás escrevemos

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E_0 A = q$$

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 E A = q - q'$$

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{q}{K \epsilon_0 A}$$

$$P = \frac{q'}{A}$$

Poderemos agora dizer que

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \left( \frac{q}{K \epsilon_0 A} \right) + \frac{q'}{A}$$

$D$  = deslocamento eléctrico

relacionado com a carga livre

$$D = \epsilon_0 E + P$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

ou  $\text{div } \vec{D} = \rho$

expressões integral e diferencial da **LEI DE GAUSS** num dieléctrico

MCE\_IM\_2024-2025

12

## CAMPO MAGNÉTICO

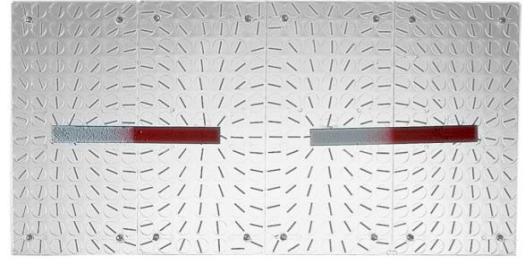
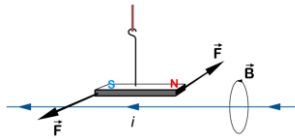
### FORÇA EXERCIDA SOBRE UMA CARGA POR UM CAMPO MAGNÉTICO

A existência de um campo  $\vec{B}$  magnético num dado ponto do espaço pode ser demonstrada usando uma agulha magnética e um fio de corrente.



Experiências de Ørsted e Faraday

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



<https://www.jroma.pt/eletromagnetismo.html>

Unidade S.I. de CAMPO  
MAGNÉTICO

1 tesla = 1 newton  
/coulomb.metro por segundo  
1 T = 1 N/C.m.s<sup>-1</sup>

1 T = 10<sup>4</sup> gauss (G)

MCE\_IM\_2024-2025

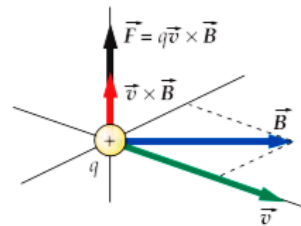
13

## CAMPO MAGNÉTICO

### FORÇA EXERCIDA SOBRE UMA CARGA POR UM CAMPO MAGNÉTICO

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$|\vec{F}| = q |\vec{v}| |\vec{B}| \sin \theta$$



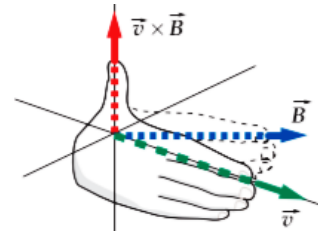
A força magnética **é sempre perpendicular** à velocidade da partícula carregada e ao campo magnético

→ não realiza trabalho sobre a partícula  
ao longo de um trajecto

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$dW = q (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

A direcção do vector  $\vec{v}$  pode ser alterada pela força magnética, mas não o seu módulo



MCE\_IM\_2024-2025

14



## CAMPO MAGNÉTICO

### FORÇA EXERCIDA SOBRE UMA CARGA POR UM CAMPO MAGNÉTICO. FORÇA DE LORENTZ.

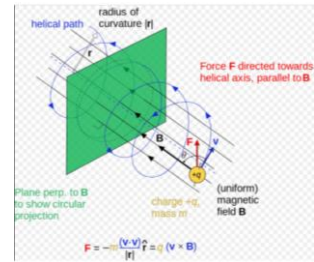
- A força magnética só actua sobre cargas em movimento

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



[https://stringfixer.com/pt/Electron\\_beams#wiki-1](https://stringfixer.com/pt/Electron_beams#wiki-1)

- Quando  $\vec{v} \perp \vec{B}$ , e  $\vec{B}$  é uniforme, a partícula descreve uma órbita circular



[https://pt.wikipedia.org/wiki/Força\\_de\\_Lorentz#/media/Ficheiro:Magnetic\\_deflection\\_helical\\_path.svg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Força_de_Lorentz#/media/Ficheiro:Magnetic_deflection_helical_path.svg)

- Se  $\vec{B}$  for uniforme e  $\vec{v}$  não for perpendicular a  $\vec{B}$ , a trajetória será helicoidal.

- Quando existem, em simultâneo, um campo eléctrico e um campo magnético, a partícula fica sujeita à chamada **FORÇA DE LORENTZ**

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

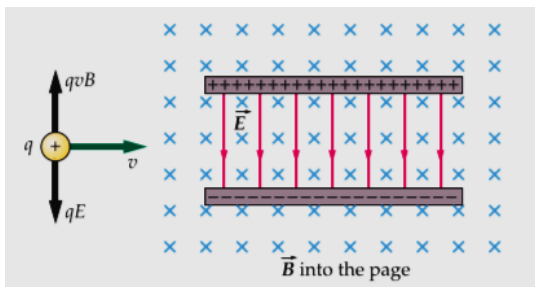
MCE\_IM\_2024-2025

15

## CAMPO MAGNÉTICO

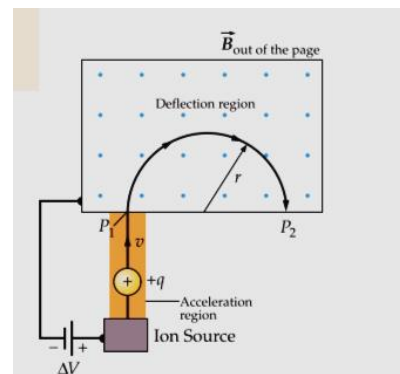
### APLICAÇÕES DA FORÇA MAGNÉTICA

#### SELECTOR DE VELOCIDADES



A partícula + sofre a acção de uma força eléctrica para baixo e uma força magnética para cima. Estas forças equilibram-se quando a velocidade da partícula verifica  $vB = E$

#### ESPECTRÓMETRO DE MASSA



Os iões sofrem encurvamento na trajetória e emergem em  $P_2$ . O raio  $r$  do círculo varia com a massa do ião.

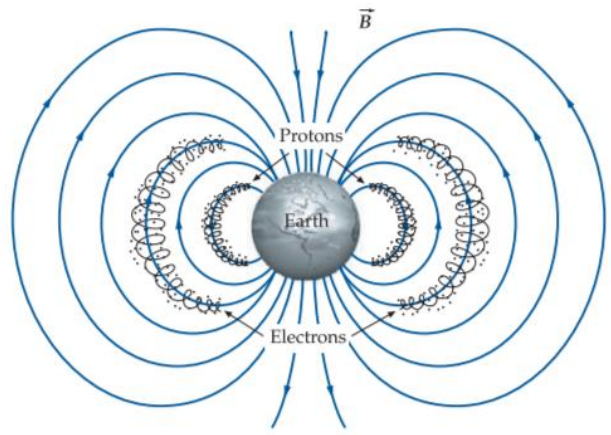
MCE\_IM\_2024-2025

16



## CAMPO MAGNÉTICO

Os **Cinturões de Van Allen** são uma barreira que protege a **Terra** de radiações, pois conseguem manter electrões muito energéticos a certa distância da atmosfera terrestre. Estão associados às auroras boreal e austral "cortinas" de partículas carregadas visíveis em determinados pontos na superfície da Terra, onde os cinturões se cruzam com a atmosfera superior



Tipler & Mosca, p. 895

MCE\_IM\_2024-2025

17

## CAMPO MAGNÉTICO

### FORÇA EXERCIDA SOBRE UM FIO

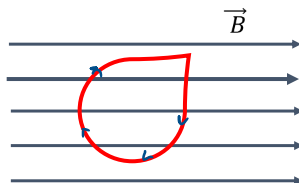
$$\vec{F} = Q \vec{v} \times \vec{B}$$

$Q$  = carga total

$$\vec{F} = Q \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B}$$

$\vec{I}$

$$\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$



Num condutor com FORMA ARBITRÁRIA, teremos de somar todas as contribuições para a força

$$\vec{F} = I \left( \int_a^b d\vec{l} \right) \times \vec{B} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

Força sobre um fio que encerra uma SUPERFÍCIE FECHADA

$$\vec{F} = I (\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0$$

MCE\_IM\_2024-2025

18

## CAMPO MAGNÉTICO

## LEI DE BIOT-SAVART – Fio infinito

Para o campo eléctrico, tínhamos

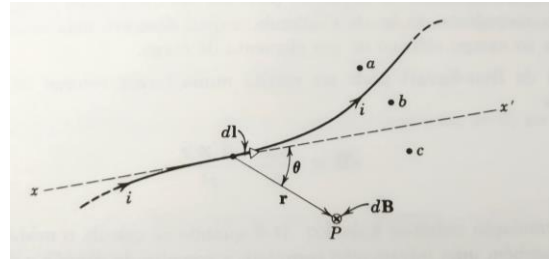
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Para o campo magnético, será

$$d\vec{B} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

lei de Biot-Savart

$$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad \mu_0 \text{ permeabilidade magnética do vácuo}$$



O elemento  $d\vec{l}$  do fio percorrido por uma corrente  $I$  fornece uma contribuição  $d\vec{B}$  para a indução magnética no ponto P. O campo magnético aponta para dentro do plano da folha.

O módulo da contribuição dB é dado por

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$

MCE\_IM\_2024-2025

19

## CAMPO MAGNÉTICO

## LEI DE BIOT-SAVART – Fio infinito

O módulo da contribuição de  $d\vec{B}$  é dado por

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dx \sin \theta}{r^2} \quad B = \int dB = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{dx \sin \theta}{r^2}$$

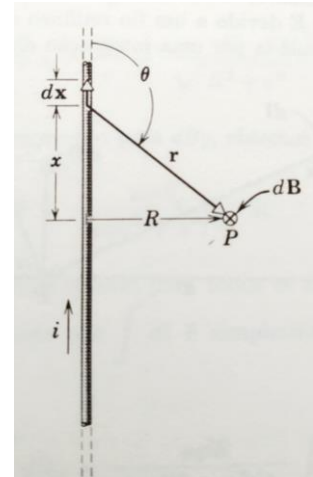
integremos em termos de  $d\theta$

$$\sin \theta = \sin (\pi - \theta) = \frac{R}{r} \quad \text{tg } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{R}{x}$$

$$x = R \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \sin \theta d\theta$$

$$dx = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta \quad B = 2 \left( -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



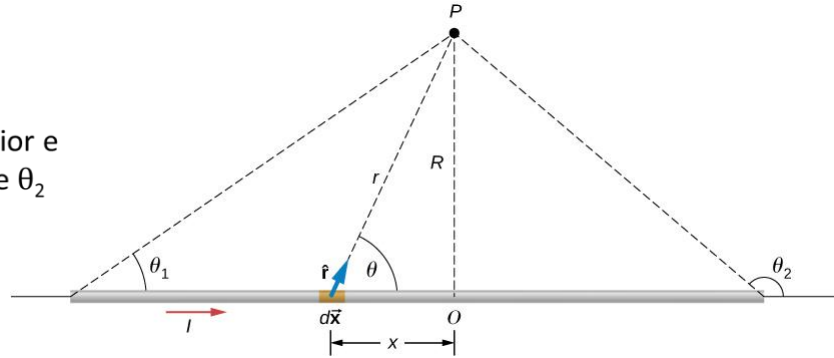
MCE\_IM\_2024-2025

20

## CAMPO MAGNÉTICO

## LEI DE BIOT-SAVART – Fio finito

Procedimento  
idêntico ao anterior e  
integrar entre  $\theta_1$  e  $\theta_2$



MCE\_IM\_2024-2025

21