Aula 25: SFS de uma ED linear homogénea de coeficientes constantes

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + \ldots + a_1\, y' + a_0\, y = 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P(r) = a_n\, r^n + \ldots + a_1\, r + a_0} \quad \text{(Pol. característico:)}$$

$$\downarrow$$

n raízes $\longleftrightarrow$ SFS= {**n** soluções linearmente independentes}:

(contando com multiplicidades)

Raízes reais:

(1) $r_1, r_2, .., r_k$ são raízes reais simples distintas: $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, .., e^{r_k x} \in$ SFS.

(2) r raiz real de multiplicidade $m > 1$: $e^{rx}, xe^{rx}, .., x^{m-1}e^{rx} \in$ SFS.

Raízes complexas:

(3) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas simples: $e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS.

(4) $\alpha \pm i\beta$ par de raízes complexas de mult. $m > 1$: $x^t\, e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,,\ x^t\, e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x) \in$ SFS para $t = 0, 1, \ldots, m-1$.

Aula 26: Exercícios 1

Determine a solução geral das EDLs homogéneas de coeficientes constantes seguintes:

1. $y'' + 4y' + 3y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

2. $y^{(4)} + y'' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \operatorname{sen} x$.

3. $y^{(4)} - 3y''' - y'' + 3y' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{-x} + C_4 e^{3x}$.

4. $y'' + 2y' + 5y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \operatorname{sen}(2x)$.

5. $y''' + y' = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$.

6. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ Sol: $y_H = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + C_3 x \cos x + C_4 x \operatorname{sen} x$.

7. $y''' - 11y'' + 39y' - 45y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + C_3 e^{5x}$.

8. $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 0$ Sol: $y_H = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x} + C_3 e^{x} \cos x + C_4 e^{x} \operatorname{sen} x$.

9. $y^{(7)} + 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ Sol: $y_H = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \cos x + C_5 \operatorname{sen} x + C_6 x \cos x + C_7 x \operatorname{sen} x$.

Aula 26: EDL completa. Solução particular de um EDL completa

Vamos dar dois métodos para determinar uma solução particular da EDL completa. O primeiro aplica-se a equações diferenciais lineares (ordinárias) de coeficientes constantes (mas não a todas) e o segundo, mais geral, pode-se aplicar a equações diferencias não necessariamente de coeficientes constantes (embora na prática iremos aplicar somente a equações diferenciais lineares de coeficientes constantes, principalmente a aquelas em que o primeiro método não se pode aplicar).

(1) Método dos coeficientes indeterminados (somente para algumas EDLs de coeficientes constantes)

(2) Método da variação das constantes (mais geral) NÃO VAI SER DADO

Aula 26: Método dos coeficientes indeterminados (EDL de coef^s. const^{tes})

Equações diferencial linear (ordinária) de coeficientes constantes:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{b}(x)\,, \qquad a_n \neq 0}$$

Este método exige que o termo independente da EDL, $\mathbf{b(x)}$, seja da forma $\boxed{\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)}$ ou $\boxed{\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\mathrm{sen}\,(\beta x)}$ onde $p_m(x)$ é um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Então a EDL possui uma solução particular y_p do tipo

$$\boxed{y_p = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\mathrm{sen}\,(\beta x)]}$$

onde $k \in \mathbb{N}_0$ é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$ como raiz do polin. característico $P(r)$ ($k = 0$ se não for raiz). $P_m(x)$ e $Q_m(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes reais são determinados pelo sistema resultante quando substituimos y_p na EDL completa.

Aula 26: Método dos coeficientes indeterminados - Algoritmo

Equações diferencial linear (ordinária) de coeficientes constantes:

$$\boxed{a_n\, y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = \mathbf{b}(x)\,, \qquad a_n \neq 0}$$

(1) Analisar $\mathbf{b}(x) = p_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $p_m(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$ e determinar m, α e β.

(2) Verificar se $r = \alpha + i\beta$ é raiz do pol. caract. da EDL homogénea associada. Determinar a sua multiplicidade k ($k = 0$ caso não seja raiz).

(3) Escrever $y_p = x^k e^{\alpha x}[P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$.

(4) Substituir y_p na EDL completa para determinar os coeficientes dos polinómios $P_m(x)$ e $Q_m(x)$.

Aula 26: Exercícios 2

Determine a solução geral das EDLs completas de coeficientes constantes seguintes:

1. $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{13}{8} + \frac{3}{2}x - x^2$.

2. $y''' + y' = \sin x$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x \sin x}{2}$.

3. $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x}$.

4. $y' + y = (x+1)e^{2x}$

Sol: $y = y_H + y_P = Ce^{-x} + \frac{3x+2}{9} e^{2x}$.

5. $y'' + y = 2 \sin x$

Sol: $y = y_H + y_P = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x$.

6. $y' + y = e^{2x} + \cos x + 1$

(a) Determine a solução geral da seguinte EDO linear: $y'' + 4y = e^x + \sin x$.

(b) Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \;\; y(\pi) = 0, \; y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

Sol: $y = -\frac{3\pi}{4} e^{2\pi - 2x} + \frac{3x}{4} e^{2\pi - 2x} + \frac{\text{sen}\,(2x)}{8}$

(c) Resolva o seguinte problema de Cauchy: $y'' + y = t^2 + 1\,, \;\; y(\pi) = \pi^2, \; y'(\pi) = 2\pi$.

Sol: $y = t^2 - \cos t - 1$