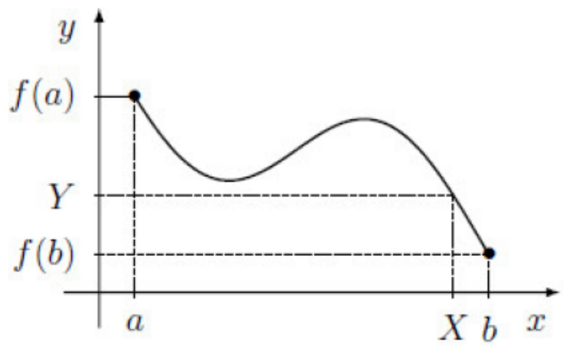
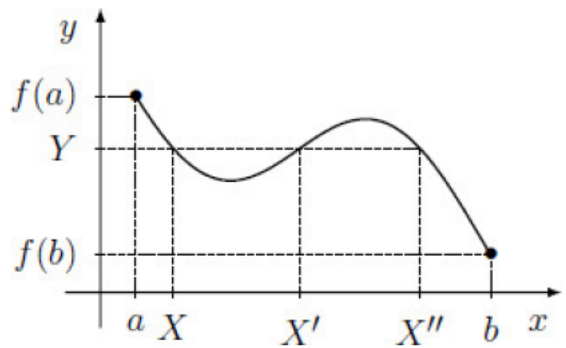
Aula 3: Teoremas sobre funções contínuas - Teorema de Bolzano

Teorema 4.1. ***(Teorema de Bolzano ou dos valores intermédios)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b], a < b$, e $f(a) < Y < f(b)$ ou $f(b) < Y < f(a)$ então existe $X \in]a,b[$ tal que $f(X) = Y$.*





Corolário 1. *Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Exemplo 4.1. A equação $\operatorname{sen} x + 2x - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $\mathbb{R}$.

Corolário 2. *Seja I um intervalo qualquer de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.*

Um ponto é um intervalo fechado degenerado, o vazio é um intervalo aberto degenerado.

Aula 4: Extremos locais e globais

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ com contradomínio CD_f. Um ponto $c \in D_f$ é

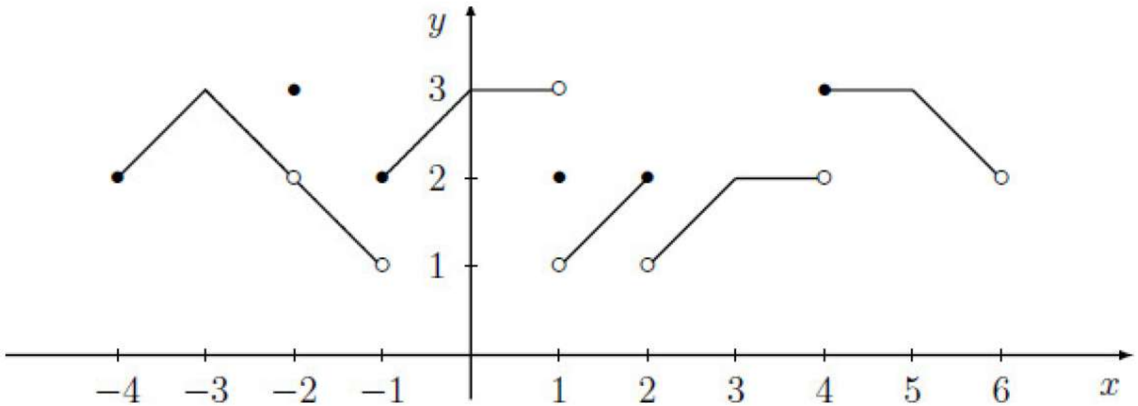
- ponto de *máximo* (*mínimo*) *global* se $f(c)$ é o máximo (mínimo) de CD_f;
- ponto de *máximo* (*mínimo*) *local* se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(c)$ tal que c é ponto de máximo (mínimo) global da restrição da função f ao conjunto $D \cap \mathcal{V}(c)$.

Um ponto c de máximo ou de mínimo local (global) diz-se *ponto de extremo local* (*global*) de f. Ao valor $f(c)$ chama-se *extremo local* (*global*) de f.

ou extremante

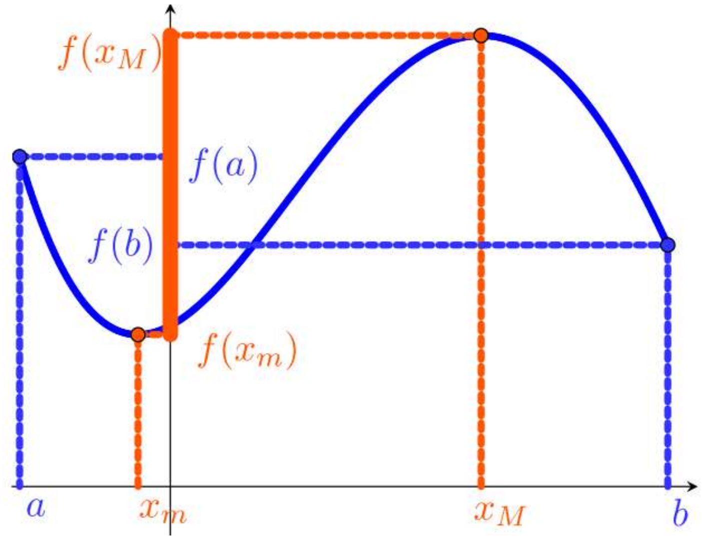
Um ponto de extremo c da função f diz-se de *extremo estrito* quando $f(x) \neq f(c)$ para todo o x diferente de c numa vizinhança de c.

Exercício 4.1 Encontre extremos e pontos de extremo locais e globais da função definida em $[-4, 6[$ pelo gráfico representado na figura 4.2, indicando os extremos estritos:



Aula 4: Teoremas sobre funções contínuas - Teorema de Weierstrass

Teorema 4.2. ***(Teorema de Weierstrass)*** *Seja $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se D_f é um ~~conjunto~~* intervalo *limitado e fechado e f é contínua em D_f, então f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo, isto é, existem $x_m, x_M \in D_f$ tais que, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$, para todo o $x \in D_f$. Consequentemente, o contradomínio da função é $f(D_f) = [f(x_m), f(x_M)]$.*



- A função $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ não é limitada. Isto contradiz o teorema anterior?

- A função $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ é contínua e limitada. Assume o valor máximo em $x = 0$, mas não existe $x \in [0,+\infty[$ tal que $g(x)$ seja mínimo. Porquê?

Aula 4: Exercícios 1

Exercício 4.3 Considere a função g dada por

$$g(x) = \frac{3\pi}{5} - \arccos\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

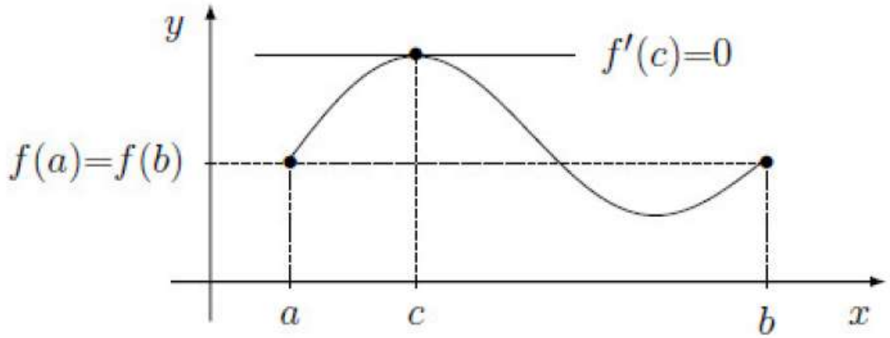
Utilize o teorema de Bolzano para justificar que g admite uma raiz no intervalo $]0, 2[$.

Exercício 4.4 Considere a função f, real de variável real, tal que $f(x) = \frac{1}{x-1}$

1. f é contínua em $]1, 2]$? f é limitada em $]1, 2]$?
2. Existe contradição com o teorema de Weierstrass?

Aula 4: Teoremas sobre funções contínuas - Teorema de Rolle

Teorema 4.3. ***(Teorema de Rolle)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$ então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.*



Corolário: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$.
Se $f'(x)\neq 0,\ \forall\, x\in]a,b[$, então f é injetiva e estritamente monótona.

- Se $f'(x)\geq 0$ (resp. $f'(x)\leq 0$) em $]a,b[$, e $f'(x)=0$ apenas em pontos isolados, então f é estritamente crescente (decrescente).
- Se f é estritamente monótona, então f é injetiva.

Exercício

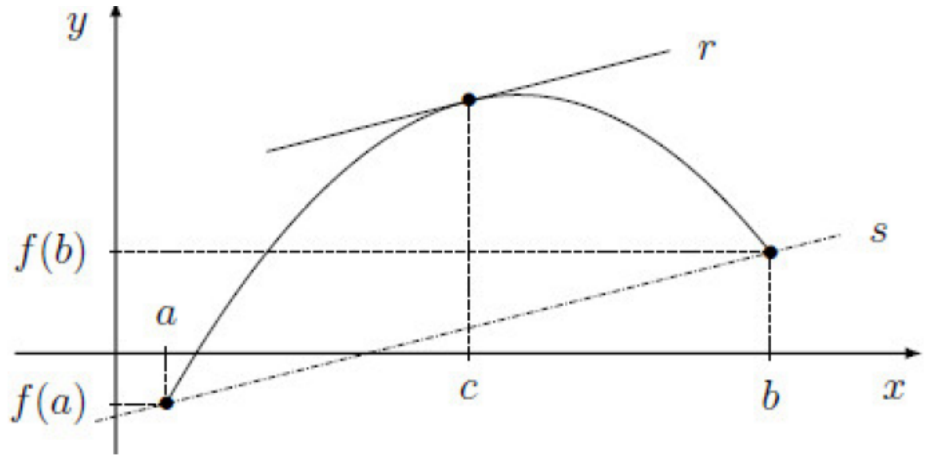
2. Se f é estritamente monótona e derivável em $]a,b[$, então $f'(x)\neq 0,\ \forall x\in]a,b[$?

3. Prove que entre duas raízes (dois zeros) consecutivas duma função, derivável em $\mathbb{R}$, existe uma raiz da sua derivada. Prove ainda que entre raízes consecutivas da derivada existe quando muito uma raiz da função.

Aula 4: Teoremas sobre funções deriváveis - Teorema de Lagrange

Teorema 4.4. ***(Teorema de Lagrange)*** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Exercício 4.5 Seja $f : [3, 2+e] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \ln(x-2)$. Verifique que f satisfaz a hipótese do Teorema de Lagrange e encontre a equação da reta tangente ao gráfico e paralela à secante nos extremos do domínio.