



Departamento Académico de Economía

Matemáticas III (130651)

Segundo Semestre 2016

Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, C. Aparicio e Y. García

## Práctica Calificada 4

### 1. Ecuación de Gompertz (4 pts)

La ecuación de Gompertz para una variable  $y > 0$  está dada por:

$$\frac{\dot{y}}{y} = r \ln \left( \frac{M}{y} \right),$$

donde  $r$  y  $M$  son dos constantes positivas.

- a) (1 pto) Esboce el diagrama de fase de esta ecuación y encuentre los estados estacionarios de  $y$ .
- b) (1 pto) Tras linealizar la ecuación, indique si los estados estacionarios de  $y$  son estables.
- c) (2 pts) Resuelva esta ecuación tomando  $y(0) = \alpha M$  como condición inicial,  $\alpha \in (0, 1)$ . Describa el comportamiento de la trayectoria  $y(t)$  conforme  $t$  se incrementa.  
*Ayuda:* El cambio de variable  $z = \ln(y/M)$  puede ser de utilidad.

### 2. Otra ecuación de primer orden (4 pts)

Considere la ecuación diferencial:

$$\dot{y} = \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

- a) (1 pto) Esboce el diagrama de fase de esta ecuación y encuentre los estados estacionarios de  $y$ .
- b) (1 pto) Tras linealizar la ecuación, indique si los estados estacionarios de  $y$  son estables.
- c) (2 pts) Resuelva esta ecuación tomando  $y(0) = y_0$  como condición inicial. Describa el comportamiento de la trayectoria  $y(t)$  conforme  $t$  se incrementa para el caso  $y_0 = \frac{1}{2}$ .

### 3. Ecuación diferencial de segundo orden (6 pts)

Considere la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + 2a \dot{y} = 2ae^{-t},$$

donde  $a$  es una constante.

- a) (2 pts) Encuentre la trayectoria  $y(t)$  que resuelve la ecuación anterior y su primera derivada  $\dot{y}(t)$ . Estudie cómo el valor de  $a$  afecta la solución.
- b) (2 pts) Encuentre  $y(t)$  e  $\dot{y}(t)$  considerando las condiciones iniciales  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ .
- c) (2 pts) Dado  $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ , describa el comportamiento de  $y(t)$ : ¿Es convergente/divergente? ¿Creciente/decreciente?

#### 4. Sistema lineal (6 ptos)

Considere el sistema lineal

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + (1 + a)x_2 \quad \text{y} \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 .$$

donde  $a$  es una constante.

- a)* **(2 ptos)** Clasifique el equilibrio del sistema si  $8a \neq -9$  y  $a \neq 0$ .
- b)* **(1 pto)** Encuentre las trayectorias  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  si  $a = 0$ .
- c)* **(1 pto)** Si  $a = 0$  y  $x_1(0) = x_2(0) = 6$ , describa el comportamiento de  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$ : ¿Convergen/divergen?
- d)* **(2 ptos)** Encuentre las trayectorias  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  si  $8a = -10$  y  $x_1(0) = x_2(0) = 4$ .