



UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO

Departamento Académico de Economía

Matemáticas III (30651)

Segundo Semestre 2015

Profesores Diego Winkelried, Orestes Bueno, Diego Bohorquez y Jorge Cortez

## Práctica Calificada 2

### 1. Manipulación de matrices (6 pts)

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz semidefinida positiva distinta de la matriz nula, de dimensión  $n$ . Además, sea  $\theta > 0$  un escalar.

- a) **(1 pto)** Muestre que los valores propios de  $\mathbf{A} + \theta \mathbf{I}_n$  son iguales a los valores propios de  $\mathbf{A}$ , más  $\theta$ . Concluya que  $\mathbf{A} + \theta \mathbf{I}_n$  es no singular.
- b) **(3 pts)** Muestre que los valores propios de la matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \theta \mathbf{I}_n)^{-1}$$

son tales que  $\lambda_B \in [0, 1)$ . *Ayuda:* Recuerde que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable.

- c) **(2 pts)** Considere la función

$$f(\theta) = \text{traza} \{ \mathbf{A}(\mathbf{A} + \theta \mathbf{I}_n)^{-1} \}.$$

Muestre que  $f(\theta)$  es una función decreciente de  $\theta$ . Asimismo, encuentre el límite de  $f(\theta)$  conforme  $\theta \rightarrow 0$  y  $\theta \rightarrow \infty$ .

### 2. Matrices pequeñas (6 pts)

Sea  $0 < a < 1$ . Considere las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ \sqrt{1-a^2} & -a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & a-a^2 \\ 1 & 1-a \end{bmatrix}.$$

Para cada una de estas matrices:

- a) **(1.5 pts cada una)** Encuentre sus valores y vectores propios.
- b) **(0.5 pts cada una)** Indique condiciones suficientes para que las matrices sean diagonalizables.
- c) **(1 pto cada una)** Encuentre, utilizando la descomposición espectral de las matrices, expresiones lo más simple posible para las matrices  $\mathbf{A}^k$  y  $\mathbf{B}^k$ , donde  $k$  es un entero positivo.

### 3. Una matriz de 3 x 3 (3 pts)

Considere la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix},$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son escalares, con  $b > 0$ . Encuentre el valor de  $a$ ,  $b$  y  $c$  si se sabe que...

- ... la traza de  $\mathbf{A}$  es igual a 1,
- ... el mayor valor propio de  $\mathbf{A}$  es igual a 3,
- ... la multiplicidad algebraica del menor valor propio es igual a 2.

#### 4. Misceláneos (5 ptos)

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a)* **(1 pto)** Sean  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  dos vectores de  $\mathbb{R}^4$ , distintos del vector nulo. Luego, la matriz  $\mathbf{A} = \mathbf{a}\mathbf{b}'$  es singular.
- b)* **(2 ptos)** Si  $\mathbf{v}$  es un vector propio de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , entonces también será un vector propio de la matriz  $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}$ , donde  $\alpha$  y  $\beta$  son escalares.
- c)* **(2 ptos)** Si  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son dos vectores propios linealmente independientes de la matriz  $\mathbf{A}$ , entonces cualquier combinación lineal de éstos,  $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ , será un vector propio de  $\mathbf{A}$ .