UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Segundo Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, D. Bohorquez y C. Aparicio

SOLUCIONARIO 1

Espacios vectoriales y dependencia lineal

Vectores

1. Responda las siguientes preguntas sobre álgebra vectorial:

a) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores tales que $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\|$. Encuentre $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

b) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos. Si el conjunto $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\}$ contiene tres vectores mutuamente ortogonales, determine en qué razón se encuentran los módulos de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

c) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos, tales que $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$. Se sabe que $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|$. Si el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es θ, muestre que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ es $\pi-\theta$.

d) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos tales que el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es igual al ángulo entre $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Determine el valor del escalar τ para que el vector $\boldsymbol{d} = \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a} + \tau\boldsymbol{b}$ sea ortogonal a $\boldsymbol{c}$.

e) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores no nulos. Si se define $\boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}$, halle el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, considerando que el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es $30°$.

f) Considere tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ mutuamente ortogonales y con el mismo módulo. Encuentre el coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

g) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores no nulos y no colineales. Se dice que el vector $\boldsymbol{c}$ es una *bisectriz* de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ si el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es igual al ángulo entre $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$. Determine el valor de los escalares λ_1 y λ_2 para que el vector $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$ sea una bisectriz de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

h) Considere los siguientes vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)'$ y $\boldsymbol{b} = (-a_2, a_1)'$. Muestre que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales. Además, dado un vector $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)' \in \mathbb{R}^2$, determine el valor los escalares λ_1 y λ_2 tales que $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$.

Solución:

a) Trabajando las ecuaciones:

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\|^2 \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 4\|\boldsymbol{b}\|^2 + 4\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{b}\|^2 = -\frac{2}{3}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}\,.$$

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\|^2 \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 9\|\boldsymbol{b}\|^2 + 6\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \quad\rightarrow\quad \|\boldsymbol{b}\|^2 = -\frac{5}{8}\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}\,.$$

Resolviendo estas ecuaciones, encontramos que $\|\boldsymbol{b}\| = 0$, es decir, sólo con el vector nulo se cumple las condiciones del problema. Por lo tanto, $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$.

b) De las condiciones de ortogonalidad:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 0 \quad &\rightarrow\quad \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} - 2\|\boldsymbol{b}\|^2 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = 0\\
&\rightarrow\quad \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = 2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2\,.\\
(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})'(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}) = 0 \quad &\rightarrow\quad \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + 2\|\boldsymbol{b}\|^2 + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = 0\\
&\rightarrow\quad \boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} + 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = -2\|\boldsymbol{b}\|^2\,.
\end{aligned}$$

Se aprecia que $2\|\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 = -2\|\boldsymbol{b}\|^2$. Manipulando, $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{b}\|^2} = 4$ lo que conlleva a $\dfrac{\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} = 2$.

c) Sea $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. Se sabe que $\|\boldsymbol{d} + \boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}\|$. Resolviendo, se concluye que $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{c} = 0$, o $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}$. Utilizando este resultado junto con $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$ y las igualdades del ángulo formado por dos vectores,

$$\cos(\theta_{bc}) = \frac{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = -\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = -\frac{\cos(\theta_{ac})\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = -\cos(\theta_{ac}) = \cos(\pi - \theta_{ac})\,.$$

Se desprende que $\theta_{bc} = \pi - \theta_{ac}$ o $\theta_{ac} = \pi - \theta_{bc}$.

d) Para que el vector $\boldsymbol{c}$ sea ortogonal a $\boldsymbol{d}$ se requiere que $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{c} = 0$. Dado que $\boldsymbol{d}'\boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c}) + \tau(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c})$, la ortogonalidad se consigue para $\tau = -\|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c})/(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c})$. Dado que $\theta_{ac} = \theta_{bc}$,

$$\tau = -\frac{\|\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c})} = -\frac{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|\,\cos(\theta_{ac})}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|\,\cos(\theta_{bc})} = -\|\boldsymbol{a}\|\,.$$

e) De la definición del vector $\boldsymbol{c}$,

$$\|\boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|^2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a} + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\left(1 + \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)\,.$$

Reconocemos que el último término dentro del paréntesis es el coseno del ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Así

$$\|\boldsymbol{c}\|^2 = 2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)\,.$$

Por su parte, el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es conocido e igual a θ_{ac}. Así,

$$\cos(\theta_{ac}) = \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} + \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|\cos(\theta_{ab}) + \|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{a}\|^2}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \frac{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{c}\|}\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)\,.$$

Tomando cuadrados y reemplazando nuestros hallazgos sobre $\|\boldsymbol{c}\|^2$:

$$\cos(\theta_{ac})^2 = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}{\|\boldsymbol{c}\|^2}\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)^2 = \frac{\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2}{2\|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)}\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\cos(\theta_{ab}) + 1\right)\,.$$

Es decir, $\cos(\theta_{ab}) = 2\cos(\theta_{ac})^2 - 1$. Sabiendo que el ángulo formado entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es 30°:

$$\cos(\theta_{ab}) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad \theta_{ab} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}\,.$$

f) El ángulo solicitado satisface

$$\cos(\theta) = \frac{(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})'(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})}{\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}\|}\,,$$

donde

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})'(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 - (\|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} + \|\boldsymbol{c}\|^2)\,.$$

Dado que $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = 0$ y $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\|$, esta expresión se reduce a $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})'(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = -\|\boldsymbol{c}\|^2$. Asimismo,

$$\|\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} \pm \boldsymbol{c}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{c}\|^2 \pm 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \pm 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} \pm 2\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = 3\|\boldsymbol{c}\|^2\,.$$

Se concluye que

$$\cos(\theta) = \frac{-\|\boldsymbol{c}\|^2}{(\|\boldsymbol{c}\|\sqrt{3})(\|\boldsymbol{c}\|\sqrt{3})} = -\frac{1}{3}\,.$$

g) Dado que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son no nulos y no colineales, $\theta_{ab} \in (0, \pi)$. Sea $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$. Observe que

$$\cos(\theta_{ac}) = \frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \lambda_1\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} + \lambda_2\frac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \lambda_1\frac{\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{c}\|} + \lambda_2\cos(\theta_{ab})\frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{c}\|}$$

y, del mismo modo,

$$\cos(\theta_{bc}) = \frac{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\|} = \lambda_1\cos(\theta_{ab})\frac{\|\boldsymbol{a}\|}{\|\boldsymbol{c}\|} + \lambda_2\frac{\|\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{c}\|}.$$

Si $\boldsymbol{c}$ es bisectriz de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, podemos igualar ambos cosenos y obtenemos la ecuación

$$\lambda_1\|\boldsymbol{a}\|(1 - \cos(\theta_{ab})) = \lambda_2\|\boldsymbol{b}\|(1 - \cos(\theta_{ab}))\,.$$

Dado que $\cos(\theta_{ab}) \neq 1$, obtenemos $\lambda_1\|\boldsymbol{a}\| = \lambda_2\|\boldsymbol{b}\|$. De aquí, podemos escoger, entre infinitas alternativas, la solución $\lambda_1 = 1/\|\boldsymbol{a}\|$ y $\lambda_2 = 1/\|\boldsymbol{b}\|$.

h) Claramente $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = a_1(-a_2) + a_2(a_1) = 0$. Es decir, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales. Si $\boldsymbol{a}$ no es nulo, entonces $\boldsymbol{b}$ tampoco lo es. Esto, junto con el hecho de que son ortogonales, implica que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no pueden ser colineales.

Ahora, dado $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$, tenemos que existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$. Entonces

$$\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} = \lambda_1\|\boldsymbol{a}\|^2 + \lambda_2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \lambda_1\|\boldsymbol{a}\|^2 \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{b}'\boldsymbol{a} + \lambda_2\|\boldsymbol{b}\| = \lambda_2\|\boldsymbol{b}\|^2 .$$

Es decir, $\lambda_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$.

■

2. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Si se tienen dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tales que los vectores suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ y diferencia $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ son ortogonales, entonces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales.

b) Para dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$ cuando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales.

c) Si $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es ortogonal a $\boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a $\boldsymbol{c}$.

d) Si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son ortogonales, se cumple que:

$$\|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\| = \|\boldsymbol{a}_1\| + \|\boldsymbol{a}_2\| + \|\boldsymbol{a}_3\| + \cdots + \|\boldsymbol{a}_n\| .$$

Solución:

a) Partimos de la condición de que $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ son ortogonales:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})'(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = 0 \quad \to \quad \boldsymbol{a}'\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{b} = 0 \quad \to \quad \|\boldsymbol{a}\|^2 = \|\boldsymbol{b}\|^2 \quad \to \quad \|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| .$$

Únicamente puede concluirse que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen el mismo módulo. No es posible concluir (es decir, afirmar o desmentir) si son ortogonales o no.

b) Se tiene que

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \leq \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| = (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2 .$$

La desigualdad es el resultado de la Desigualdad de Schwarz: $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$. Dado que $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \cos(\theta_{ab})\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ ocurre que $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$ cuando $\cos(\theta_{ab}) = 1$; es decir cuando $\theta_{ab} = 0$ y, por tanto, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales. Con ello, la desigualdad anterior es, en efecto, una igualdad.

c) La ortogonalidad no es una propiedad transitiva. La manera más simple de ilustrar este punto es cuando $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}$, donde $\lambda \neq 0$. Acá, si $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$ entonces $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} = 0$, pero claramente $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{c} = \lambda\|\boldsymbol{a}\|^2 \neq 0$.

d) Si todos los vectores son ortogonales, entonces se cumple $\boldsymbol{a}_i{}'\boldsymbol{a}_j = 0$, para todo $i \neq j$. Así,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\|^2 &= (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n)'(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_i{}'\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i{}'\boldsymbol{a}_i = \|\boldsymbol{a}_1\|^2 + \|\boldsymbol{a}_2\|^2 + \|\boldsymbol{a}_3\|^2 + \cdots + \|\boldsymbol{a}_n\|^2 .\end{aligned}$$

Se concluye que la afirmación es falsa ya que

$$\|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \cdots + \boldsymbol{a}_n\| = \sqrt{\|\boldsymbol{a}_1\|^2 + \|\boldsymbol{a}_2\|^2 + \|\boldsymbol{a}_3\|^2 + \cdots + \|\boldsymbol{a}_n\|^2} .$$

■

3. Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)'$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)'$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. El *producto cruzado* (o *producto vectorial*) de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (\, a_2b_3 - a_3b_2,\; a_3b_1 - b_3a_1,\; a_1b_2 - b_1a_2 \,)' .$$

a) Muestre que $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es ortogonal a $\boldsymbol{a}$ y es ortogonal a $\boldsymbol{b}$.

b) Muestre que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, entonces $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

c) Muestre que si $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales.

d) Muestre que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales, entonces $\{\, \boldsymbol{a},\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,\}$ es un conjunto ortogonal.

Solución:

a) El producto interno de $\boldsymbol{a}$ con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es igual a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}'(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - b_3a_1) + a_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_1a_2b_3 + a_2a_3b_1 + a_1a_3b_2 - a_1a_3b_2 - a_1a_2b_3 - a_2a_3b_1 = 0\,,\end{aligned}$$

por lo que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ son ortogonales. Del mismo modo, el producto interno de $\boldsymbol{b}$ con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es igual a

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}'(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) &= b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - b_3a_1) + b_3(a_1b_2 - b_1a_2) \\ &= a_2b_1b_3 + a_3b_1b_2 + a_1b_2b_3 - a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0\,,\end{aligned}$$

por lo que $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ son ortogonales.

b) Cuando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, dado que son vectores no nulos, existe un escalar $\alpha \neq 0$ tal que $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$. Es decir, $a_i = \alpha\, b_i$ para $i = 1, 2, 3$. Así,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= (\, a_2b_3 - a_3b_2,\, a_3b_1 - b_3a_1,\, a_1b_2 - b_1a_2\,)' \\ &= (\, \alpha b_2b_3 - \alpha b_3b_2,\, \alpha b_3b_1 - \alpha b_3b_1,\, \alpha b_1b_2 - \alpha b_1b_2\,)' = (0, 0, 0)' = \mathbf{0}\,.\end{aligned}$$

c) Igualando los elementos de $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ a cero se consigue

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\,, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1}{b_1}\,, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \rightarrow \quad \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_j}{b_j}$$

para todo i y j. Es decir, el ratio a_i/b_i es constante lo que indica que $a_i = \alpha\, b_i$ para todo i: $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales.

d) Dado que se tratan de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, distintos al vector nulo dado que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales, algo encontrado en la partes *b*) y *c*), bastaría verificar que estos tres vectores sean mutuamente ortogonales.

Primero, de la parte *a*) se sabe que $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a vectores de la forma $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, para cualquier $\boldsymbol{c}$. Así, se aprecia que $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$, y también a $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, donde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Segundo, de la parte *a*) también se sabe que $\boldsymbol{c}$ es ortogonal a vectores de la forma $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$. Así, el segundo vector $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ es ortogonal al tercero, que es igual a $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$.

■

4. Sean θ_1 y θ_2 dos números reales tales que $0 < \theta_1 < \theta_2$. Defina los vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ otros dos vectores en $\mathbb{R}^2$ definidos como $\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_2$, donde $\boldsymbol{Q}$ es la matriz

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

para $\alpha > 0$. Finalmente, las siguientes Figuras grafican los vectores previamente definidos:

Figura 1

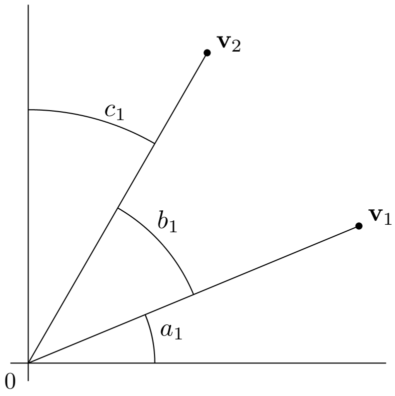
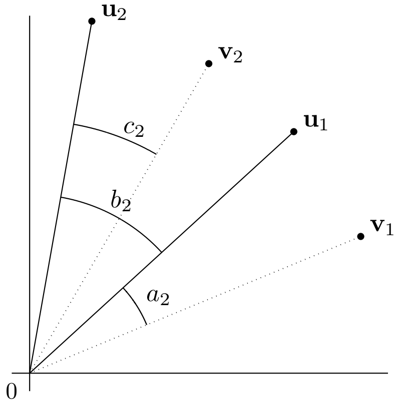


Figura 2



a) Encuentre los ángulos a_1, b_1 y c_1 de la Figura 1 en términos de θ_1 y θ_2.

b) Encuentre los ángulos a_2, b_2 y c_2 de la Figura 2 en términos de θ_1, θ_2 y α.

c) Comente sobre la relación existente entre los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Ayuda: Recuerde que $\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \cos(\omega_1)\cos(\omega_2) \mp \sin(\omega_1)\sin(\omega_2)$ y $\sin(\omega_1 \pm \omega_2) = \sin(\omega_1)\cos(\omega_2) \pm \cos(\omega_1)\sin(\omega_2)$.

Solución:

Es bueno notar que el módulo de vectores de la forma $\mathbf{v} = (\cos(\omega), \sin(\omega))'$ es igual a uno, $\mathbf{v}'\mathbf{v} = \cos(\omega)^2 + \sin(\omega)^2$. Una implicancia es que vamos a trabajar con vectores unitarios, de modo que el coseno del ángulo entre éstos es igual a su producto interno.

a)

- a_1 es el ángulo entre el vector $\mathbf{v}_1$ y el eje horizontal, representado por el vector canónico $\mathbf{e}_1 = (1, 0)'$:

$$\cos(a_1) = \frac{\mathbf{v}_1{}'\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{e}_1\|} = \mathbf{v}_1{}'\mathbf{e}_1 = \cos(\theta_1) \qquad \rightarrow \qquad a_1 = \theta_1\,.$$

- Por su parte, $a_1 + b_1$ es el ángulo entre el vector $\mathbf{v}_2$ y el vector $\mathbf{e}_1$:

$$\cos(a_1 + b_1) = \frac{\mathbf{v}_2{}'\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_2\|\,\|\mathbf{e}_1\|} = \mathbf{v}_2{}'\mathbf{e}_1 = \cos(\theta_2) \qquad \rightarrow \qquad b_1 = \theta_2 - a_1 = \theta_2 - \theta_1\,.$$

  Alternativamente, b_1 es el ángulo entre los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\cos(b_1) = \frac{\mathbf{v}_1{}'\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\|\,\|\mathbf{v}_2\|} = \mathbf{v}_1{}'\mathbf{v}_2 = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad \rightarrow \qquad b_1 = \theta_2 - \theta_1\,.$$

- Finalmente, se aprecia que $c_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2$.
  Alternativamente, c_1 es el ángulo entre $\mathbf{v}_2$ y el eje vertical, representado por $\mathbf{e}_2 = (0, 1)'$:

$$\cos(c_1) = \frac{\mathbf{v}_2{}'\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{v}_2\|\,\|\mathbf{e}_2\|} = \mathbf{v}_2{}'\mathbf{e}_2 = \sin(\theta_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) \qquad \rightarrow \qquad c_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_2\,.$$

b) Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ tienen la forma

$$\mathbf{u}_i = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\theta_i) - \sin(\alpha)\sin(\theta_i) \\ \sin(\alpha)\cos(\theta_i) + \cos(\alpha)\sin(\theta_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \alpha) \\ \sin(\theta_i + \alpha) \end{bmatrix}.$$

- a_2 es la diferencia entre el ángulo entre $\mathbf{u}_1$ y el eje horizontal, y el ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y el eje horizontal. El primer ángulo, siguiendo un procedimiento idéntico al de la parte *a*) es $\theta_1 + \alpha$, mientras que el segundo ángulo es θ_1. Luego, $a_2 = \alpha$.
  Alternativamente, a_2 es el ángulo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_1$:

$$\cos(a_2) = \frac{\mathbf{u}_1{}'\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{v}_1\|} = \mathbf{u}_1{}'\mathbf{v}_1 = \cos(\theta_1 + \alpha)\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1 + \alpha)\sin(\theta_1) = \cos(\theta_1 + \alpha - \theta_1)$$
$$\rightarrow \qquad a_1 = \alpha\,.$$

- b_2 es la diferencia entre el ángulo entre $\mathbf{u}_2$ y el eje horizontal, y el ángulo entre $\mathbf{u}_1$ y el eje horizontal. Siguiendo un procedimiento idéntico al de la parte *a*), el primer ángulo es $\theta_2 + \alpha$, y el segundo es $\theta_1 + \alpha$. Así, $b_2 = \theta_2 - \theta_1$.
  Alternativamente, b_2 es el ángulo entre $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$:

$$\cos(b_2) = \frac{\mathbf{u}_1{}'\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\|\,\|\mathbf{u}_2\|} = \mathbf{u}_1{}'\mathbf{u}_2 = \cos(\theta_1 + \alpha)\cos(\theta_2 + \alpha) + \sin(\theta_1 + \alpha)\sin(\theta_2 + \alpha) = \cos(\theta_2 + \alpha - \theta_1 - \alpha)$$
$$\rightarrow \qquad b_2 = \theta_2 - \theta_1\,.$$

- c_2 es la diferencia entre el ángulo entre $\mathbf{u}_2$ y el eje horizontal, y el ángulo entre $\mathbf{v}_2$ y el eje horizontal. El primero es $\theta_2 + \alpha$ y el segundo es θ_2. Así, $c_2 = \alpha$.

  Alternativamente, c_2 es el ángulo entre $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{v}_2$:

$$\cos(c_2) = \frac{\mathbf{u}_2{}'\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{u}_2\|\,\|\mathbf{v}_2\|} = \mathbf{u}_2{}'\mathbf{v}_2 = \cos(\theta_2+\alpha)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2+\alpha)\sin(\theta_2) = \cos(\theta_2+\alpha-\theta_2)$$

$$\rightarrow \qquad c_2 = \alpha\,.$$

c) $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ son *rotaciones* de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Básicamente, $\mathbf{u}_i$ es una versión de $\mathbf{v}_i$ tal que su ángulo respecto al eje horizontal se incrementa en α ($a_2 = c_2 = \alpha$), pero se mantiene inalterado el ángulo entre $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ ($b_2 = b_1$).

■

5. Sea $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n números reales. Utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz muestre que:

a) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq 0\,.$

b) $\displaystyle \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq 1\,.$

Solución:

Para los vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz es

$$(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y})\,.$$

a) Defina

$$\boldsymbol{x} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)' \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)'\,.$$

Así,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\,, \qquad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2\,, \qquad \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\,.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\,,$$

de donde se deduce el resultado.

b) Defina

$$\boldsymbol{x} = (\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n})' \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{y} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \frac{1}{\sqrt{a_3}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)'\,.$$

Así,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{a_i}}{\sqrt{a_i}} = n\,, \qquad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\,, \qquad \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\,.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es

$$n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\,,$$

de donde se deduce el resultado.

■

Eliminación de Gauss-Jordan y rango

6. Evalúe cómo la constante α afecta las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 2\,, \\ 3x + y - z &= 2\,, \\ -2x + \alpha y + 6z &= 4\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3\,, \\ 6x - y - z &= 4\,, \\ -4x + \alpha y + 3z &= 2\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1\,, \\ 3x - y + 2z &= 0\,, \\ 2x + y - z &= \alpha\,. \end{aligned}$$

Solución:

Utilizamos operaciones elementales de filas para lidiar con el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, al reducir la matriz aumentada $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\,]$ a una forma escalonada $[\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{x}\,]$ (método de eliminación de Gauss-Jordan).

a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & \alpha & 6 & 4 \end{array}\right] \to (F_1 + F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & \alpha & 6 & 4 \end{array}\right] \to F_1 \times \frac{1}{4} \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & \alpha & 6 & 4 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 - 3 \times F_1) \text{ y } (F_3 + 2 \times F_1) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha & 6 & 6 \end{array}\right] \to (F_3 + 6 \times F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \alpha + 6 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Se aprecia, de la tercera fila de la matriz reducida, que $(\alpha + 6)y = 0$. Así, dependiendo del valor de α, se tendrá o bien una solución única, o bien un número infinito de soluciones. En todos los casos, se tiene que $x = 1$ (de la primera ecuación) y $z = y + 1$ (de la segunda ecuación).

- Si $\alpha \neq -6$, entonces $(\alpha + 6)y = 0$ se cumple si y sólo si $y = 0$. La solución $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)'$ es única. En este caso, $\boldsymbol{A}$ es una matriz no singular.
- En cambio, si $\alpha = -6$, y puede tomar cualquier valor real y cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x} = (1, s, 1 + s)'$ para $s \in \mathbb{R}$ satisface el sistema. En este caso, $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular y el sistema es consistente.

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & \alpha & 3 & 2 \end{array}\right] \to (F_1 + F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 7 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & \alpha & 3 & 2 \end{array}\right] \to F_1 \times \frac{1}{7} \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \\ -4 & \alpha & 3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 - 6 \times F_1) \text{ y } (F_3 + 4 \times F_1) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & 3 & 6 \end{array}\right] \to (F_3 + 3 \times F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha - 3 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La tercera fila de la matriz reducida implica que $(\alpha - 3)y = 0$. La naturaleza de la solución depende del valor de α. En todos los casos, $x = 1$ (de la primera ecuación) y $z = 2 - y$ (de la segunda ecuación).

- Si $\alpha \neq 3$, entonces $(\alpha - 3)y = 0$ se cumple si y sólo si $y = 0$. La solución $\boldsymbol{x} = (1, 0, 2)'$ es única. En este caso, $\boldsymbol{A}$ es una matriz no singular.
- En cambio, si $\alpha = 3$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular y el sistema es consistente. Acá, y puede tomar cualquier valor real y cualquier vector de la forma $\boldsymbol{x} = (1, s, 2 - s)'$ para $s \in \mathbb{R}$ resuelve el sistema.

c)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & \alpha \end{array}\right] \to (F_2 + 3 \times F_1) \text{ y } (F_3 + 2 \times F_1) \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & \alpha + 2 \end{array}\right]$$

$$\to (F_3 - F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \alpha - 1 \end{array}\right] \to F_2 \times 3 \text{ y } F_3 \times 2 \to \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -6 & 2\alpha - 2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_2+F_3) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 0 & 2\alpha+7 \\ 0 & 0 & -3 & 2\alpha-2 \end{array}\right] \rightarrow F_1\times 7.5 \text{ y } F_3\times(-5) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 7.5 & -15 & 0 & -7.5 \\ 0 & 15 & 0 & 2\alpha+7 \\ 0 & 0 & 15 & 10-10\alpha \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_1+F_2)\times 2 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 7.5 & 0 & 0 & 2\alpha-0.5 \\ 0 & 15 & 0 & 2\alpha+7 \\ 0 & 0 & 15 & 10-10\alpha \end{array}\right] \rightarrow F_1\times 2 \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 15 & 0 & 0 & 4\alpha-1 \\ 0 & 15 & 0 & 2\alpha+7 \\ 0 & 0 & 15 & 10-10\alpha \end{array}\right].$$

Se ha llegado a la forma $[\,15\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{w}\,]$, de donde se deduce que $\boldsymbol{x} = \frac{1}{15}\boldsymbol{w}$. Así,

$$x = \frac{4\alpha-1}{15}, \qquad y = \frac{2\alpha+7}{15}, \qquad z = \frac{2\alpha-2}{3}.$$

En este caso la solución es única, dado un valor de α. La matriz $\boldsymbol{A}$ de este sistema es no singular. ∎

7. Determine los valores de la constante a para que los siguientes sistemas de ecuaciones sean consistentes. Encuentre las soluciones a los sistemas para ese valor de a.

$$a)\ \begin{aligned} x+y+z&=6\,,\\ x+2y-z&=2\,,\\ x-y+2z&=5\,,\\ x+3y-z&=a\,. \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x+2y+z&=8\,,\\ x-3y+2z&=-1\,,\\ x+y-2z&=3\,,\\ x-2y+2z&=a\,. \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x+z&=1\,,\\ 2y+z&=2\,,\\ x+y+z&=2\,,\\ x+y+3z&=a\,. \end{aligned}$$

Solución:

Utilizamos operaciones elementales de filas para resolver el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, reduciendo la matriz aumentada $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\,]$ a una forma escalonada $[\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{x}\,]$.

a)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & a \end{array}\right] \rightarrow (F_i - F_1 \text{ para } i=2,3,4) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & a-6 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_3+2\times F_2)\times\left(-\frac{1}{3}\right) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & a-6 \end{array}\right] \rightarrow (F_4-2\times F_2) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & a+2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_4-2\times F_3) \text{ y } (F_2+2\times F_3) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right] \rightarrow (F_1-F_2) \text{ y } (F_1-F_3) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array}\right].$$

Se aprecia que si $a\neq 4$, el sistema será inconsistente y no tendrá solución. Por el contrario, si $a=4$ las ecuaciones serán consistentes y obtendremos la solución única $x=1$, $y=2$ y $z=3$.

b)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & a \end{array}\right] \rightarrow (F_i - F_1 \text{ para } i=2,3,4) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -4 & 1 & a-8 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_4-4\times F_3) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & a+12 \end{array}\right] \rightarrow (F_2-5\times F_3)\times\frac{1}{16} \text{ y } F_3\times(-1) \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & a+12 \end{array}\right]$$

$$\to (F_4 - 13\times F_2),\ (F_1 - F_2) \text{ y } (F_3 - 3\times F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right] \to (F_1 - 2\times F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 \Leftrightarrow F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right].$$

Si $a \neq 1$, el sistema no tendrá solución. Si $a = 1$ las ecuaciones serán consistentes y se obtiene la solución única $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$.

Es interesante notar que el método ha resuelto el sistema utilizando efectivamente las tres primeras ecuaciones (por tratarse de tres variables). La cuarta ecuación se utiliza, en estricto, para garantizar la consistencia. Para $x = 3$, $y = 2$ y $z = 1$, $x - 2y + 2z = 1$, que es el valor de a obtenido previamente.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & a \end{array}\right] \to (F_i - F_1 \text{ para } i = 3,4) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-1 \end{array}\right] \to (F_2 - 2\times F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-1 \end{array}\right]$$

$$\to (F_1 - F_2) \text{ y } (F_4 - 2\times F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right] \to (F_4 - F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 \Leftrightarrow F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array}\right].$$

Se aprecia que si $a = 2$ las ecuaciones serán consistentes y obtendremos la solución única $x = 1$, $y = 1$ y $z = 0$. Nuevamente, el método resuelve el sistema utilizando las tres primeras ecuaciones y utiliza la cuarta ecuación para garantizar la consistencia: $x + y + 3z = 1 + 1 + 3\times 0 = 2$, que es el valor de a obtenido previamente. ■

8. Encuentre una relación entre los escalares a y b para que los siguientes sistemas de ecuaciones tengan solución. Asumiendo que esa relación se cumple, encuentre las soluciones.

$$a)\quad \begin{aligned} u + v + w + x &= a\,, \\ u - 2v + w - 2x &= 2\,, \\ u - v + w - x &= b\,, \\ 2u - v - w - x &= 1\,. \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} u + v + w + x &= a\,, \\ u - 3v + w - 3x &= 2\,, \\ u - v + w - x &= b\,, \\ 2u - v - w + 2x &= 1\,. \end{aligned}$$

Solución:

Lo más conveniente es aplicar, nuevamente, el método de reducción a una forma escalonada con operaciones elementales de filas.

a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to (F_2 - F_1),\ (F_3 - F_1) \text{ y } (F_4 - 2\times F_1) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 2-a \\ 0 & -2 & 0 & -2 & b-a \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 1-2a \end{array}\right]$$

$$\to (F_4 - F_2) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & 0 & -3 & 2-a \\ 0 & -2 & 0 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1-a \end{array}\right] \to F_1\times 6,\ F_2\times(-2),\ F_3\times 3 \text{ y } F_4\times(-2) \to \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 6 & 6 & 6 & 6a \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 2a-4 \\ 0 & -6 & 0 & -6 & 3b-3a \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2+2a \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_3{+}F_2) \text{ y } (F_1{-}F_2{-}F_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 2a+2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b-a-4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2+2a \end{array}\right] \rightarrow (F_3 \Leftrightarrow F_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & 2a+2 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & 2a-4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b-a-4 \end{array}\right].$$

De la cuarta fila se tiene que la relación entre a y b requerida para que el sistema tenga solución es $3b-a-4=0$. Luego, suponiendo que esta relación es satisfecha, de la primera y tecera ecuación se concluye que

$$u = w = \frac{a+1}{3}.$$

Quedan dos incógnitas (v y x) y una sola ecuación (la segunda), lo que indica que existe un número infinito de soluciones. Así, para $x = s \in \mathbb{R}$, se obtiene que

$$v = \frac{a-2}{3} - s.$$

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & b \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow (F_2 - F_1),\ (F_3 - F_1) \text{ y } (F_4 - 2 \times F_1) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -4 & 0 & -4 & 2-a \\ 0 & -2 & 0 & -2 & b-a \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 1-2a \end{array}\right]$$

$$\rightarrow F_1 \times 12,\ F_2 \times (-3),\ F_3 \times (-6) \text{ y } F_4 \times (-4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 12 & 12 & 12 & 12a \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 3a-6 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 6a-6b \\ 0 & 12 & 12 & 0 & 8a-4 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_i - F_2 \text{ para } i = 1,3,4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 0 & 12 & 0 & 9a+6 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 3a-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-6b+6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 5a+2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow (F_1 - F_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 0 & 0 & 12 & 4a+4 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 3a-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-6b+6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 5a+2 \end{array}\right] \rightarrow (F_3 \Leftrightarrow F_4) \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 12 & 0 & 0 & 12 & 4a+4 \\ 0 & 12 & 0 & 12 & 3a-6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & 5a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a-6b+6 \end{array}\right].$$

La consistencia del sistema requiere que $a-2b+2=0$. Se tienen infinitas soluciones, al tratarse de un sistema con más variables que ecuaciones. Entonces, si fijamos $x = s \in \mathbb{R}$ se concluye que

$$u = \frac{a+1}{3} - s, \qquad v = \frac{a-2}{4} - s, \qquad \text{y} \qquad w = \frac{5a+2}{12} + s.$$

■

9. Considere una matriz $\boldsymbol{A}$, que depende de un escalar real α, y los vectores $\boldsymbol{x} = (x, y, z)'$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)'$.

- Encuentre el determinante de $\boldsymbol{A}$ y diga para qué valores de α la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible.
- Cuando α es tal que $\boldsymbol{A}$ no es invertible, encuentre qué condición deberían satisfacer los escalares b_1, b_2 y b_3 para que el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sea consistente. Encuentre $\boldsymbol{x}$ en este caso.

$$a) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad\qquad b) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) • Para calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$, utilizamos el método de expansión de filas:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-\alpha+1) - 1(-1)(3\alpha+1) + 2(3+1) = 2\alpha + 10\,.$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible cuando su determinante es distinto de cero: $\alpha \neq -5$.

- Cuando $\alpha = -5$, procedemos a reducir la matriz aumentada $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\,]$ a una forma escalonada para encontrar las condiciones que $\boldsymbol{b}$ debe satisfacer para que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ sea consistente (un número infinito de soluciones). Aplicamos operaciones elementales de filas:

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 3 & -1 & -1 & b_2 \\ 1 & 1 & -5 & b_3 \end{array}\right] \to (F_2 - 3\times F_1) \text{ y } (F_3 - F_1) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -7 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 2 & -7 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\to (F_3 - F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -7 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + 2b_1 - b_2 \end{array}\right].$$

Se aprecia que el sistema será inconsistente (y, por tanto, no tendrá solución) si $b_3 - b_2 + 2b_1 \neq 0$. Por tanto, se requiere que $b_3 = b_2 - 2b_1$ para que el sistema sea consistente.

Luego, para determinar las soluciones al sistema, se tienen las ecuaciones $x - y + 2z = b_1$ y $2y - 7z = b_2 - 3b_1$. Para $z = s$ (cualquier valor real), se consigue que

$$y = \frac{1}{2}(b_2 - 3b_1 + 7s) \qquad \text{y} \qquad x = b_1 + \frac{1}{2}(b_2 - 3b_1 + 7s) - 2s = \frac{1}{2}(b_2 - b_1 + 3s)\,.$$

b) • Para calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$, utilizamos el método de expansión de filas:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$= 1(4+\alpha) - 1(-3)(8+1) + 1(2\alpha - 1) = 3\alpha + 30\,.$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible (no singular) cuando su determinante es distinto de cero. En consecuencia, $\boldsymbol{A}$ es invertible cuando $3\alpha + 30 \neq 0$ o $\alpha \neq -10$.

- Cuando $\alpha = -10$, procedemos a reducir la matriz aumentada $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}\,]$ a una forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & 1 & b_1 \\ 2 & 1 & -1 & b_2 \\ 1 & -10 & 4 & b_3 \end{array}\right] \to (F_2 - 2\times F_1) \text{ y } (F_3 - F_1) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & b_1 \\ 0 & 7 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 7 & -3 & b_1 - b_3 \end{array}\right]$$

$$\to (F_3 - F_2) \to \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & b_1 \\ 0 & 7 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 - b_2 - b_3 \end{array}\right].$$

Se aprecia que el sistema no tendrá solución si $3b_1 - b_2 - b_3 \neq 0$. Por tanto, se requiere que $b_3 = 3b_1 - b_2$ para que el sistema sea consistente.

Luego, para determinar las soluciones al sistema, se tienen las ecuaciones $x - 3y + z = b_1$ y $7y - 3z = b_2 - 2b_1$. Para $z = s$ (cualquier valor real), se consigue que

$$y = \frac{1}{7}(b_2 - 2b_1 + 3s) \qquad \text{y} \qquad x = b_1 + \frac{3}{7}(b_2 - 2b_1 + 3s) - s = \frac{1}{7}(b_1 + 3b_2 + 2s)\,.$$

■

10. Utilizando operaciones elementales, encuentre la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$. Luego, encuentre $\boldsymbol{x}$, la solución al sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, si $\boldsymbol{b} = (1,1,1)'$.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, *b*) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, *c*) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución:

Calculamos la inversa al reducir, mediante operaciones elementales, el primer bloque de la matriz $[\,\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}\,]$ a una matriz identidad. Tras la reducción, la matriz resultante tendrá la forma $\left[\,\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}\,\right]$.

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to (F_1 - F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to (F_2 - F_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to (F_3 - F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \to F_3 \times (-1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

La existencia de esta inversa indica que el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es resuelto por $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Así, dado $\boldsymbol{b} = (1,1,1)'$, se encuentra que

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to F_2 \times 2 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 + F_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to F_1 \times 2 \text{ y } F_3 \times (-4) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

$$\to (F_1 + F_2) \text{ y } (F_3 + F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right].$$

Note que se ha llegado a la forma $[\,4\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{C}\,]$ y, por tanto, $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4}\boldsymbol{C}$. Luego, el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = (1,1,1)'$, es resuelto únicamente por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to F_1 \times 3 \text{ y } F_3 \times 7 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -21 & 28 & -14 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

$$\to (F_3 + F_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 34 & -11 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right] \to (F_3 - 11 \times F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 0 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \end{array}\right]$$

$$\to (F_2 - 3 \times F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 0 & 5 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 34 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \end{array}\right] \to (F_1 + 5 \times F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 0 & 0 & -42 & 168 & -105 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 34 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \end{array}\right]$$

$$\to F_1 \div 21 \text{ y } F_2 \times (-1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -34 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \end{array}\right] \to (F_3 \Leftrightarrow F_2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -11 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -34 & 21 \end{array}\right].$$

El sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, para $\boldsymbol{b} = (1,1,1)'$, es resuelto únicamente por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

■

11. Encuentre la matriz inversa de la siguiente matriz triangular:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Considere el método de eliminación de Gauss-Jordan. Aplicamos una secuencia de operaciones elementales de filas a la matriz $\boldsymbol{A}$ hasta reducirla a una matriz identidad. Luego, las misma secuencia de operaciones elementales se aplica a una matriz identidad para conseguir la inversa de $\boldsymbol{A}$.

En el caso de la matriz $\boldsymbol{A}$ bajo análisis, es simple notar que la operación $F_1 - F_2$ dará como resultado la primera fila de la matriz identidad. Asimismo, la operación $F_2 - F_3$ dará como resultado la segunda fila de la matriz identidad. En general, la operación $F_i - F_{i+1}$ dará como resultado la i-ésima fila de la matriz identidad. Al aplicar estas operaciones a $\boldsymbol{I}_n$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} (F_i - F_{i+1}) \\ \text{para } i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{A}^{-1}.$$

■

12. Comente las siguientes afirmaciones sobre el rango:

a) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}$, de orden $m \times p$, y $\boldsymbol{B}$, de orden $p \times n$, se verifica que $\rho(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{\rho(\boldsymbol{A}), \rho(\boldsymbol{B})\}$.

b) Si la matriz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ tiene inversa y $\boldsymbol{X}$ es una matriz no cuadrada (de dimensión $n \times k$), entonces el rango de $\boldsymbol{X}$ debe ser igual a su número de columnas k.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices del mismo orden. Luego, $\rho(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \geq \min\{\rho(\boldsymbol{A}), \rho(\boldsymbol{B})\}$.

d) Sean las matrices $\boldsymbol{A}_{3n\times 2n}$, $\boldsymbol{B}_{2n\times n}$, $\boldsymbol{C}_{n\times p}$ y $\boldsymbol{D}_{p\times 3n}$. Entonces, la matriz $\boldsymbol{ABCD}$ es singular.

Solución:

a) Cualquier columna de la matriz $\boldsymbol{AB}$ es una combinación lineal de las columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$. La i-ésima columna de $\boldsymbol{AB}$ es

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{1i} + a_{12}b_{2i} + \cdots + a_{1p}b_{pi} \\ a_{21}b_{1i} + a_{22}b_{2i} + \cdots + a_{2p}b_{pi} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{1i} + a_{m2}b_{2i} + \cdots + a_{mp}b_{pi} \end{bmatrix} = b_{1i}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_{2i}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{pi}\begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{bmatrix}.$$

Si todas estas combinaciones lineales fueran linealmente independientes, el espacio generado por las columnas de $\boldsymbol{AB}$ sería el mismo espacio que el generado por las columnas de $\boldsymbol{A}$. Caso contrario, las columnas de $\boldsymbol{AB}$ generarían un subpespacio del espacio generado por las columnas de $\boldsymbol{A}$. Se concluye que $\rho(\boldsymbol{AB}) \leq \rho(\boldsymbol{A})$.

Análogamente, puede demostrarse que las filas de $\boldsymbol{AB}$ son combinaciones lineales de las filas de $\boldsymbol{B}$. El mismo argumento de generación de espacios lleva a conlcuir que $\rho(\boldsymbol{AB}) \leq \rho(\boldsymbol{B})$. Combinando ambas desigualdades, finalmente, $\rho(\boldsymbol{A}) \leq \min\{\rho(\boldsymbol{A}), \rho(\boldsymbol{B})\}$.

b) Dado que $\rho(\boldsymbol{X}') = \rho(\boldsymbol{X})$, se tiene que $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq \min\{\rho(\boldsymbol{X}'), \rho(\boldsymbol{X})\} = \rho(\boldsymbol{X})$. Asimismo, por definición del rango, $\rho(\boldsymbol{X}) \leq \min\{n, k\}$. Así, $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq \min\{n, k\}$.

Por su parte, dado que $\boldsymbol{X}$ es de orden $n \times k$, entonces $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ es de orden $k \times k$. Además, como $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ tiene inversa, es de rango completo, $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) = k$.

- Suponga que $n < k$. La desigualdad $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq \min\{n, k\}$ lleva a la contradicción $k \leq n$. Cuando $n < k$, simplemente, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ no podrá tener rango completo y, por tanto, no sería invertible.
- En cambio, cuando $k < n$, la desigualdad $\rho(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}) \leq \min\{n, k\}$ lleva a $k \leq k$. Luego, $\rho(\boldsymbol{X}) = k$, el rango de $\boldsymbol{X}$ es igual al número de columnas.

c) La afirmación es falsa. El contraejemplo más simple ocurre cuando $\boldsymbol{A}$ es una matriz no nula y $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}$. Acá, $\rho(\boldsymbol{A}) = \rho(\boldsymbol{B}) > 0$ y $\rho(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \rho(\boldsymbol{0}) = 0$.

d) Dado que $\boldsymbol{ABCD} = (\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CD})$, entonces $\rho(\boldsymbol{ABCD}) \leq \rho(\boldsymbol{AB})$. Pero como $\rho(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{3n, n\} = n$, se encuentra que $\rho(\boldsymbol{ABCD}) \leq n$ y como su rango es menor que su orden $(3n \times 3n)$, entonces es singular. ■

Espacios vectoriales

13. Analice si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:

a) $\mathbb{R}^n$.

b) Un plano en $\mathbb{R}^3$.

c) La bisectriz del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$.

d) $\mathcal{F}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y \leq z\}$

e) $\mathcal{F}_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz dada de orden $n \times n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo.

Solución:

a) Trivial. Si $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, cualquier combinación lineal $\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^n$. Así, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

b) El conjunto en cuestión es $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}$. Tomando a $\boldsymbol{u} \in \mathcal{F}$ $(au_1 + bu_2 + cu_3 = d)$ y $\boldsymbol{v} \in \mathcal{F}$ $(av_1 + bv_2 + cv_3 = d)$ se tiene que para $\boldsymbol{w} = \lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{v}$ se cumple que $aw_1 + bw_2 + cw_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)d$. Así, $\boldsymbol{w} \in \mathcal{F}$ únicamente cuando $(\lambda_1 + \lambda_2)d = d$. Dado que λ_1 y λ_2 son necesariamente arbitrarios, esta condición se cumple solo para $d = 0$. Entonces, un plano en $\mathbb{R}^3$ no es un subespacio vectorial, a menos que éste pase por el origen.

c) El conjunto en cuestión es $\mathcal{F} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}$. Las desigualdades hacen que no se cumpla la ley de cerradura externa. Si bien $(a, a) \in \mathcal{F}$, se tiene que $(\lambda a, \lambda a) \notin \mathcal{F}$ para cualquier $\lambda < 0$.

d) $\mathcal{F}_1$ no cumple con la ley de cerradura externa. Si el vector $(x, y, z) \in \mathcal{F}_1$, entonces debe ocurrir que $-x - y \geq -z$ por lo que $(-x, -y, -z) \notin \mathcal{F}_2$. En consecuencia, $\mathcal{F}_1$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

e) $\mathcal{F}_2$ no cumple la ley de cerradura interna. Si $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathcal{F}_2$ entonces se tiene $\boldsymbol{Ax}_1 = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{Ax}_2 = \boldsymbol{b}$. Luego, sumando $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = 2\boldsymbol{b}$; pero como $\boldsymbol{b}$ no es nulo, entonces $2\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}$, por lo que $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \notin \mathcal{F}_3$. En consecuencia, $\mathcal{F}_2$ no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Análogamente, $\mathcal{F}_2$ tampoco cumple la ley de cerradura externa. ■

14. Sobre espacios con estructura de espacios vectoriales:

a) Se define un espacio de funciones $\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to [0, 1], f \text{ es continua}\}$. Considere los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{W}_1 = \left\{ f \in \mathcal{C} \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_2 = \left\{ f \in \mathcal{C} \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 1 \right\}.$$

Verifique si estos conjuntos son subespacios de $\mathcal{C}$.

b) Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos espacios vectoriales. Se dice que una función $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ es *par* cuando $f(-\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u})$ para todo $\boldsymbol{u} \in \mathcal{E}$. Muestre que el conjunto $\mathcal{A}$ de todas las funciones pares es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, el espacio de todas las funciones definidas sobre $\mathcal{E}$ y con valores en $\mathcal{F}$.

c) Se define $\mathbb{P}_n$ como el espacio de todos los polinomios con grado menor o igual a n en la variable x con coeficientes reales. Muestre que $\mathbb{P}_n$ tiene estructura de espacio vectorial.

d) Verifique si el siguiente conjunto tiene características de subespacio vectorial

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{A},\delta)=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{M}_{n\times n}\left|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'=\delta\mathrm{tr}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}\right.\right\}\,,$$

donde $\mathbb{M}_{n\times n}$ es el espacio formado por todas las matrices de orden $n\times n$ con elementos reales, $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $n\times n$ y δ es un número real.

e) Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio de matrices de dimensión 2×2. Defina el subespacio vectorial

$$\mathcal{M}=\{\,\boldsymbol{X}\in\mathbb{M}_2\ \mid\ \boldsymbol{X}\text{ es simétrica}\}\,.$$

¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{M}$?

f) Determine la dimensión del espacio de matrices *antisimétricas* 3×3,

$$\mathcal{M}=\{\boldsymbol{X}\ :\ \boldsymbol{X}\text{ es una matriz de }3\times 3\text{ tal que }\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{X}'\}\,.$$

Solución:

Las reglas de conformación de espacios vectoriales (las leyes de cerradura) aplican también a conjuntos cuyos elementos no son necesariamente vectores (sino por ejemplo, funciones, matrices, entre otros), pero que ostentan la estructura de un espacio vectorial.

a) Comencemos con $\mathcal{W}_1$. Tomemos dos funciones $g\in\mathcal{W}_1$ y $h\in\mathcal{W}_1$. Luego,

$$\int_0^1 g(t)dt=0\quad\text{y}\quad\int_0^1 h(t)dt=0\quad\rightarrow\ \text{(sumando)}\ \rightarrow\quad\int_0^1[g(t)+h(t)]dt=0\,.$$

Dado que $g+h\in\mathcal{W}_1$, se verifica la ley de cerradura interna. Es simple verificar que para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda g\in\mathcal{W}_1$, cumpliéndose también la ley de cerradura externa. Se concluye que $\mathcal{W}_1$ es un subespacio de $\mathcal{C}$.

El caso de $\mathcal{W}_2$ es distinto. Tomemos dos funciones $g\in\mathcal{W}_2$ y $h\in\mathcal{W}_2$. Luego,

$$\int_0^1 g(t)dt=1\quad\text{y}\quad\int_0^1 h(t)dt=1\quad\rightarrow\ \text{(sumando)}\ \rightarrow\quad\int_0^1[g(t)+h(t)]dt=2\,.$$

Dado que $g+h\notin\mathcal{W}_2$, no se verifica la ley de cerradura interna (tampoco se cumple la ley de cerradura externa). Se concluye que $\mathcal{W}_2$ no tiene la estructura de un subespacio de $\mathcal{C}$.

b) Sean $f\in\mathcal{A}$, $g\in\mathcal{A}$, $a_1\in\mathbb{R}$ y $a_2\in\mathbb{R}$. Puesto que f y g son funciones pares, tenemos que para cualquier $\boldsymbol{u}\in\mathcal{E}$, $f(-\boldsymbol{u})=f(\boldsymbol{u})$ y $g(-\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u})$. Defina $h(\boldsymbol{u})=a_1f(\boldsymbol{u})+a_2g(\boldsymbol{u})$. Se aprecia que

$$h(-\boldsymbol{u})=a_1f(-\boldsymbol{u})+a_2g(-\boldsymbol{u})=a_1f(\boldsymbol{u})+a_2g(\boldsymbol{u})=h(\boldsymbol{u})\,,$$

y, por tanto, $h\in\mathcal{A}$. Se concluye que $\mathcal{A}$ es un subespacio de $\mathcal{C}$.

c) Defina $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ y $B(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n$. Note que

$$A(x)+B(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n\,.$$

Así, dado que $A(x)\in\mathbb{P}_n$ y $B(x)\in\mathbb{P}_n$, el resultado $A(x)+B(x)\in\mathbb{P}_n$ implica que se verifica la ley de cerradura interna. Además, dado que para $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda A(x)\in\mathbb{P}_n$, también se cumple la ley de cerradura externa. Se concluye que $\mathbb{P}_n$ tiene estructura de espacio vectorial.

d) Considere dos escalares λ_1 y λ_2, y dos matrices $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$. Defina $\boldsymbol{X}_3=\lambda_1\boldsymbol{X}_1+\lambda_2\boldsymbol{X}_2$. Si $\boldsymbol{X}_i\in\mathcal{E}$, para $i=\{1,2\}$, entonces $\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_i{}'=\delta\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_i)\boldsymbol{A}$. Al multiplicar esta expresión por λ_i y sumar, se consigue que $\boldsymbol{X}_3+\boldsymbol{X}_3{}'=\delta\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_3)\boldsymbol{A}$. Por tanto, $\boldsymbol{X}_3\in\mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ tiene la estructura de un espacio vectorial.

e) Para números reales a, b y c, una matriz que pertenece a $\mathcal{M}$ tiene la estructura

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\,,$$

de lo cual se deriva que la base de $\mathcal{M}$ es

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\,.$$

Por tanto, $\dim(\mathcal{M})=3$.

f) Observe que toda matriz antisimétrica de 3×3 necesariamente tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix}$$

Luego podemos descomponer

$$\begin{bmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, las matrices

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

generan $\mathcal{M}$. Además es verificar que son linealmente independientes: solo para $b = c = e = 0$ la combinación lineal de estas matrices producen la matriz nula. Luego, concluimos que este conjunto es una base de $\mathcal{M}$ y por ende, este espacio posee dimensión 3. ■

15. Pruebe que la unión de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{E}$ también será un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ solo si uno de ellos está contenido en el otro.

Solución:

Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ tales subespacios. Procedemos por contradicción. Supongamos que ninguno está contenido en el otro. Luego, existen vectores tales que $\boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{F}_1$, $\boldsymbol{v}_1 \notin \mathcal{F}_2$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{F}_2$ y $\boldsymbol{v}_2 \notin \mathcal{F}_1$. Como $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ es, por definición, también un subespacio de $\mathcal{E}$, entonces $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ y, por la ley de cerradura interna, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$.

Luego, $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ debe pertenecer al menos a $\mathcal{F}_1$ o $\mathcal{F}_2$. Digamos, sin pérdida de generalidad, que $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{F}_1$. La ley de cerradura externa implica que $-\boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{F}_1$, mientras que la ley de cerradura interna implica que $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) - \boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{F}_1$. Pero $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2$ que, se supone, no pertenece a $\mathcal{F}_1$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, uno de los subespacios debe estar incluido en el otro. ■

Independencia lineal y generación de espacios

16. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Si $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ forman una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ son vectores que se generan como combinaciones lineales de dicha base, entonces $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ son vectores ortogonales.

b) Si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\boldsymbol{a}_n$ puede ser expresado como una combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$.

c) En $\mathbb{R}^n$ se tiene un conjunto generador formado por $n+1$ vectores. Si retiramos un vector cualquiera, los restantes n vectores constituyen una base de $\mathbb{R}^n$.

d) Si $\mathcal{W}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes que pertenecen al subespacio vectorial $\mathcal{V}$, no existe ningún subconjunto de $\mathcal{W}$ que sea generador de $\mathcal{V}$.

Solución:

a) Falso. Una base puede generar *cualquier* vector del espacio vectorial, no necesariamente ortogonales. Como contraejemplo, considere $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ y $\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$, claramente generados por los vectores base, donde se aprecia que $\boldsymbol{b}_1{}'\boldsymbol{b}_2 = \|\boldsymbol{a}_1\|^2 \neq 0$.

b) Falso. La dependencia lineal de un conjunto de vectores implica que *alguno* (por lo menos uno) de los vectores del conjunto pueda ser expresado como una combinación lineal de los restantes. No implica que *todos* o que *cualquier* vector pueda ser expresado como combinación lineal de los restantes. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 3)$ el conjunto $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ es linealmente dependiente y no hay manera de expresar a $\boldsymbol{e}_3$ como una combinación lineal de $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$.

c) Falso. Al retirar un vector del conjunto generador, nada garantiza que el conjunto de vectores restante sea generador ni linealmente independiente. Por ejemplo, el conjunto $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\}$ es generador de $\mathbb{R}^3$, el subconjunto $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ es una base, pero el subconjunto $\{\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\}$ no lo es.

d) Verdadero. Una condición necesaria (aunque no suficiente) para que un conjunto de vectores sea generador es que contenga *por lo menos* $\dim(\mathcal{V})$ vectores. Un conjunto con menos de $\dim(\mathcal{V})$ vectores, simplemente, no podría generar $\mathcal{V}$, incluso en el caso más favorable donde $\mathcal{W}$ constituye una base de $\mathcal{V}$.

■

17. Diga para qué valores del número real k los siguientes conjuntos forman una base de $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(k, 1, 1), (1, k, 1), (1, 1, k)\}$.

b) $\{(k, 1, 0), (1, k, 1), (0, 1, k)\}$.

Solución:

Dado que se tratan de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$, basta verificar que los vectores sean linealmente independiente para que constituyan una base. Para ello, la ecuación $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0}$ debe admitir como única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Matricialmente, se tiene que $\boldsymbol{V}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{V}$ es una matriz cuadrada cuya i-ésima columna es $\boldsymbol{v}_i$. La solución $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ es única si $\boldsymbol{V}$ es invertible. Una condición suficiente para ello es que $\det(\boldsymbol{V}) \neq 0$. Luego,

a)

$$\det(\boldsymbol{V}) = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k(k^2 - 1) - 2(k - 1) = (k - 1)^2 (k + 2)\,.$$

Se requiere que $k \neq 1$ y que $k \neq -2$.

b)

$$\det(\boldsymbol{V}) = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = k(k^2 - 1) - k = k(k^2 - 2)\,.$$

Se requiere que $k \neq 0$ y que $k \neq \pm\sqrt{2}$.

■

18. Sea a un escalar. Considere vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ (para $n > 1$) tales que el i-ésimo elemento de $\mathbf{v}_i$ es igual a 1 y los elementos restantes son iguales a a ($i = 1, 2, \ldots, n$). Por ejemplo, para $n = 4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El escalar a debe satisfacer dos condiciones para que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sea linealmente independiente ¿Cuáles son estas condiciones?

Solución:

Tres posibles maneras de enfrentar este problema:

i. Para concluir que el conjunto es linealmente independiente, la siguiente igualdad (el contraste lineal)

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}\,,$$

deben ser satisfecha únicamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Note que los vectores tienen la siguiente estructura $\mathbf{v}_i = a\mathbf{s} + (1 - a)\mathbf{e}_i$, donde $\mathbf{s}$ es el vector suma (lleno de unos) y $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector canónico (todos sus elementos iguales a cero, excepto el i-ésimo que es igual a 1). Al reemplazar en el contraste lineal

$$\lambda_1[a\mathbf{s} + (1 - a)\mathbf{e}_1] + \lambda_2[a\mathbf{s} + (1 - a)\mathbf{e}_2] + \cdots + \lambda_n[a\mathbf{s} + (1 - a)\mathbf{e}_n] = \mathbf{0}\,,$$

que se simplifica a

$$a(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\mathbf{s} + (1-a)(\lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}\,.$$

Al premultiplicar por $\mathbf{e}_i{}'$ y por $\mathbf{e}_j{}'$ $(i \neq j)$ se consigue

$$\begin{aligned} a(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + (1-a)\lambda_i &= 0 \\ a(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + (1-a)\lambda_j &= 0\,. \end{aligned}$$

Al restar ambas igualdades $(1-a)(\lambda_i - \lambda_j) = 0$. Así, si $a \neq 1$, entonces $\lambda_i = \lambda_j$ para todo $i \neq j$. Luego, al reemplazar $\lambda_i = \lambda$ para todo i,

$$\begin{aligned} a(\lambda + \lambda + \cdots + \lambda) + (1-a)\lambda &= 0 \\ an\lambda + (1-a)\lambda &= 0 \\ (1 - a + an)\lambda &= 0\,. \end{aligned}$$

Con ello, se concluye que $\lambda = 0$ (y, por tanto, $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$) si $1 + a(n-1) \neq 0$ o $a \neq 1/(1-n)$.

ii. Pueden llegarse a las mismas condiciones analizando directamente ecuación por ecuación del contraste lineal. Las ecuaciones i y j son

$$\begin{aligned} a\sum_{k\neq i}\lambda_k + \lambda_i = 0 \quad &\rightarrow \quad a\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - a\lambda_i + \lambda_i = 0 \\ a\sum_{k\neq j}\lambda_k + \lambda_j = 0 \quad &\rightarrow \quad a\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - a\lambda_k + \lambda_k = 0\,, \end{aligned}$$

de donde se consigue, nuevamente, que $a(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + (1-a)\lambda_i = 0$. El resto del análisis es idéntico al del enfoque i.

iii. Recuerde que n vectores en $\mathbb{R}^n$ serán linealmente independientes si y solo si el determinante de la matriz (cuadrada) que los agrupa es distinto de cero. Recuerde, además, que el determinante no se ve alterado por operaciones elementales de filas o columnas del tipo “a la fila (o columna) i se le suma una combinación lineal del resto de filas (o columnas)”. Luego,

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}| = \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{vmatrix} = (1-a)^{n-1}(1+(n-1)a)\,. \end{aligned}$$

En la primera igualdad, se le resta la primera fila al resto de filas; en la segunda igualdad, se le suma a la primera columna el resto de columnas; finalmente, en la útlima igualdad se calcula el determinante de una matriz triangular (el producto de los elementos sobre la diagonal). Así, $|\mathbf{V}| \neq 0$ si $a \neq 1$ y $a \neq 1/(1-n)$. ■

19. Misceláneos:

a) Si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ son vectores linealmente independientes, determine si $\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}), (3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

b) Sea $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ un conjunto base de un espacio vectorial. Defina los vectores: $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3$ y $\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 3\boldsymbol{w}_3$. Demuestre que el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente.

c) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los dos conjuntos de vectores $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ y $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, donde $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ ¿Se puede concluir que los subespacios generados por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son los mismos?

d) Sea $\mathcal{A} = \{(1, 1, -2), (1, r - s, -9), (2, -1, 3), (r + 1, 3, s - 6)\}$. Encuentre los números reales s y r tales que el conjunto $\mathcal{A}$ no genere $\mathbb{R}^3$.

Solución:

a) Dado que $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ son linealmente independientes, ocurre que $\lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{v} + \lambda_3\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, únicamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Consideremos ahora una combinación lineal de los otros vectores:

$$\alpha_1(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) + \alpha_2(3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \alpha_3(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}) = (\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{u} - (\alpha_1 + 2\alpha_2)\boldsymbol{v} + (\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{w}\,.$$

Se deduce que $\lambda_1 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $-\lambda_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ y $\lambda_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Se consigue que $\alpha_2 = -\alpha_3$ y $\alpha_1 = 2\alpha_3$. Debido a que ponderadores de la forma $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2s, -s, s)$ para cualquier s vuelven cero la combinación lineal bajo análisis, se concluye que el conjunto de vectores es linealmente dependiente.

b) Consideremos una combinación lineal de $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$,

$$\begin{aligned}\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 &= \alpha_1(2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3) + \alpha_2(\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3) + \alpha_3(3\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 3\boldsymbol{w}_3)\\ &= (2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{w}_1 + (2\alpha_1 - \alpha_3)\boldsymbol{w}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3)\boldsymbol{w}_3\,.\end{aligned}$$

Dado que el conjunto $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ es base, entonces debe es linealmente independiente. Por lo tanto, los ponderadores (entre paréntesis en la expresión anterior) deben ser iguales a 0. Se consigue el siguiente sistema, dispuesto matricialmente como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si la matriz de coeficientes puede reducirse a una matriz identidad a través de operaciones elementales de filas, entonces será invertible y la única solución del sistema anterior será la trivial. Procedamos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to (F_1 - F_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to (F_2 - 2 \times F_1) \text{ y } (F_3 - F_1) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\to (F_3 + 3 \times F_2) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to (-1 \times F_2) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to (F_2 \Leftrightarrow F_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente.

c) Se debe verificar que si $\boldsymbol{s}$ es combinación lineal de $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, entonces también lo es de $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$. Así,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} = \lambda_1\boldsymbol{u} + \lambda_2\boldsymbol{v} + \lambda_3\boldsymbol{w} &= \lambda_1(2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) + \lambda_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) + \lambda_3(2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z})\\ &= (2\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{x} + (2\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{y} + (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)\boldsymbol{z}\,.\end{aligned}$$

Entonces $\boldsymbol{s}$ es combinación lineal de $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, con lo que se concluye que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Conversamente, se puede comprobar que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Sea $\theta_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$, $\theta_2 = 2\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1$ y $\theta_3 = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$. Los λ se pueden resolver en función de los θ,

$$\lambda_1 = \frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}{3}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{\theta_1 - 2\theta_2 - 4\theta_3}{3}\,, \qquad \lambda_3 = \theta_2 + \theta_3\,.$$

Con ello,

$$\boldsymbol{s} = \theta_1\boldsymbol{x} + \theta_2\boldsymbol{y} + \theta_3\boldsymbol{z} = \left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3}{3}\right)\boldsymbol{u} + \left(\frac{\theta_1 - 2\theta_2 - 4\theta_3}{3}\right)\boldsymbol{v} + (\theta_2 + \theta_3)\boldsymbol{w}\,.$$

Por lo tanto, los subespacios generados por ambos conjuntos son los mismos.

d) Para que estos vectores no generen $\mathbb{R}^3$, el máximo número de vectores linealmente independientes entre ellos debe ser 2. Se puede apreciar que los vectores $(1,1,-2)$ y $(2,-1,3)$ son linealmente independientes (no son colineales). Por lo tanto, los otros dos vectores deben ser necesariamente una combinación lineal de éstos.

Primero,

$$(1, r-s, -9) = \alpha_1(1,1,-2) + \alpha_2(2,-1,3)\,,$$

de donde se deduce, de la primera y tercera ecuación, que $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$ y $-2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -9$. Se consigue que $\alpha_1 = 3$ y $\alpha_2 = -1$. De la segunda ecuación, $r - s = \alpha_1 - \alpha_2 = 4$.

Segundo,

$$(r+1, 3, s-6) = \delta_1(1,1,-2) + \delta_2(2,-1,3)\,,$$

de donde se deduce que $\delta_1 + 2\delta_2 = r+1$, $\delta_1 - \delta_2 = 3$ y $-2\delta_1 + 3\delta_2 = s-6$. Se consigue $r - 3s = 2$.

Juntando las condiciones $r - s = 4$ y $r - 3s$, se llega a $r = 5$ y $s = 1$. ■

20. Compruebe que $\{(4,8,0,0),(0,4,4,0),(0,-4,0,4)\}$ es una base del subespacio vectorial

$$\mathcal{A} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}\,.$$

Solución:

Dividimos los vectores entre 4 y trabajamos con $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,0,0)'$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,1,0)'$ y $\boldsymbol{v}_3 = (0,-1,0,1)$. Los vectores que este conjunto genera tienen la estructura:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Éste es un vector que, en efecto, pertenence a $\mathcal{A}$:

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2\lambda_1 - (2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + \lambda_2 - \lambda_3 = 0\,,$$

por lo que se concluye que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ genera a $\mathcal{A}$. Además, es simple verificar que se trata también de un conjunto linealmente independiente. La única manera de conseguir que $\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \lambda_2\boldsymbol{v}_2 + \lambda_2\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$ es que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Luego, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es una base de $\mathcal{A}$. ■

21. Se define $\mathbb{P}_n$ como el espacio de todos los polinomios con grado menor o igual a n en la variable x con coeficientes reales. Determine si el conjunto $\mathcal{A}_n$ es base de dicho espacio en los siguientes casos:

a) $\mathcal{A}_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$.

b) $\mathcal{A}_3 = \{x^3, (x-1)^3, (x+1)^3, x^2\}$.

Solución:

a) Debemos verificar si el conjunto es generador de todos los polinomios de grado menor o igual a 2, y si es linealmente independiente. Partimos de la igualdad

$$\lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(1+x^2) = a_0 + a_1x + a_2x^2\,.$$

Agrupando términos:

$$(\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 = a_0 + a_1x + a_2x^2\,,$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones $\lambda_1 + \lambda_3 = a_0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = a_1$ y $\lambda_2 + \lambda_3 = a_2$. Resolviendo,

$$\lambda_1 = \frac{a_0 + a_1 - a_2}{2}\,, \qquad \lambda_2 = \frac{-a_0 + a_1 + a_2}{2}\,, \qquad \lambda_3 = \frac{a_0 - a_1 + a_2}{2}\,.$$

Esto demuestra que para cualquier polinomio en $\mathbb{P}_2$ se pueden hallar valores de λ_1, λ_2 y λ_3 que permiten generarlo como combinación lineal de los elementos del conjunto $\mathcal{A}_2$. Por lo tanto, el conjunto es generador de todos los polinomios de grado menor o igual a 2. Asimismo, el conjunto $\mathcal{A}_2$ contiene elementos linealmente independientes. Al evaluar $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, se aprecia que $\lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(1+x^2) = 0$ únicamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Note que la base canónica de $\mathbb{P}_2$ es $\{1, x, x^2\}$. Los elementos de $\mathcal{A}_2$, por supuesto, pueden expresarse como combinaciones lineales de esta base canónica, y son linealmente independientes. $\mathcal{A}_2$ es, pues, una base de $\mathbb{P}_2$.

b) Repitiendo el procedimiento anterior, se parte de

$$\lambda_1 x^3 + \lambda_2(x-1)^3 + \lambda_3(x+1)^3 + \lambda_4 x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,.$$

Tras agrupar términos,

$$(\lambda_3 - \lambda_2) + 3(\lambda_2 + \lambda_3)x + (\lambda_4 + 3\lambda_3 - 3\lambda_2)x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \,,$$

de donde obtenemos las siguientes ecuaciones: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a_3$, $\lambda_4 + 3\lambda_3 - 3\lambda_2 = a_2$, $3\lambda_2 + 3\lambda_3 = a_1$ y $\lambda_3 - \lambda_2 = a_0$. Resolviendo el sistema encontramos los valores de los ponderadores

$$\lambda_1 = \frac{a_3 - 3a_1}{3} \,, \qquad \lambda_2 = \frac{a_1 - 3a_0}{6} \,, \qquad \lambda_3 = \frac{3a_0 - a_1}{6} \,, \qquad \lambda_4 = a_2 - 3a_0$$

Cualquier polinomio en $\mathbb{P}_3$ expresarse como combinación lineal de los elementos del conjunto $\mathcal{A}_3$. Por lo tanto, el conjunto es generador de los polinomios de grado menor o igual a 2. Además, el conjunto $\mathcal{A}_3$ contiene elementos linealmente independientes. Al evaluar $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $\lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(1+x^2) = 0$ únicamente para $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. $\mathcal{A}_3$ es una base de $\mathbb{P}_3$. ■

22. Analice si el conjunto $\mathcal{D}$, mostrado a continuación, es generador del espacio de las matrices de 2×2. Encuentre una base de dicho espacio.

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$

Solución:

Si bien es cierto que el problema puede analizarse directamente con matrices, conviene "vectorizarlo". Así, estamos interesados en averiguar si el conjunto

$$\mathcal{D}' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

que contiene vectores obtenidos tras concatenar las columnas de las matrices en $\mathcal{D}$, es capaz de generar a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$. Los elementos de $\boldsymbol{x}$ pueden ordenarse en una matriz representativa

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que representa a todas las matrices de 2×2. La expresión anterior presenta la base canónica del espacio de matrices de 2×2, que se compone de matrices que "vectorizadas" corresponden a la base canónica de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$. Este espacio tiene dimensión 4.

En términos de los vectores canónicos,

$$\mathcal{D}' = \{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 - \boldsymbol{e}_1\} \,.$$

Cada vector de $\mathcal{D}'$ es, claramente, una combinación lineal de $\mathcal{E}$. Luego, $\mathcal{D}'$ generaría $\mathbb{R}^4$ si es que tuviera 4 vectores linealmente independientes. Por la ubicación de los 0, se deduce que los 4 primeros vectores en $\mathcal{D}'$ son, en efecto, linealmente independientes. Se concluye que $\mathcal{D}'$ genera $\mathbb{R}^4$ y, por consiguiente, $\mathcal{D}$ genera el espacio de las matrices de 2×2. ■

23. *a*) Encuentre una base y la dimensión del subespacio vectorial generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuál de los siguientes espacios vectoriales es el generado en la parte a)? ¿Por qué?

$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$, $\mathcal{D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$.

Solución:

a) Sea $\mathcal{V}$ el espacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$. Dado que tenemos cinco vectores en $\mathbb{R}^4$, podemos afirmar de inmediato que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ son linealmente dependientes. Calculemos los ponderadores α_i, no todos nulos, tales que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 + \alpha_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Planteando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 &= 0\,, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0\,, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_3 - 2\alpha_4 + \alpha_5 &= 0\,, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 &= 0\,, \end{aligned}$$

Al despejar α_5 de la primera y tercera ecuación: $2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 = 2\alpha_1+3\alpha_3-2\alpha_4$ se consigue $\alpha_2 = \alpha_3 - 3\alpha_4$. De la última ecuación: $\alpha_1 = \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_3 - 3\alpha_4) - 2\alpha_3 + \alpha_4 = -\alpha_3 - 2\alpha_4$. Regresando a la tercera ecuación: $\alpha_5 = -2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 2(\alpha_3 + 2\alpha_4) - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = -\alpha_3 + 4\alpha_4$. Esto nos permite escoger, por ejemplo, la solución no nula $\alpha_4 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_5 = 1$. En particular tenemos que $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_5$; es decir, $\mathbf{v}_3$ es generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_5$. Luego, $\mathcal{V}$ es también generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, excluyendo a $\mathbf{v}_3$.

Estudiemos ahora la dependencia lineal de estos cuatro vectores. Planteando el nuevo sistema $\beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_4\mathbf{v}_4 + \beta_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, tenemos

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_5 &= 0\,, \\ \beta_1 + 2\beta_4 &= 0\,, \\ 2\beta_1 - 2\beta_4 + \beta_5 &= 0\,, \\ \beta_1 - \beta_2 - \beta_4 &= 0\,. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación: $\beta_1 = -2\beta_4$. De la cuarta: $\beta_2 = \beta_1 - \beta_4 = -3\beta_4$. De la tercera: $\beta_5 = -2\beta_1 + 2\beta_4 = 6\beta_4$. Luego, $\beta_4 = -1$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 3$ y $\beta_5 = -6$ dan una solución no trivial. Note que la primera ecuación es satisfecha por esta solución: $2(2) + (3) + (-1) + (-6) = 0$. Concluimos que $\mathbf{v}_4 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_5$. Por la misma razón descrita anteriormente, tenemos que $\mathcal{V}$ es también generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$, excluyendo a $\mathbf{v}_4$.

Para determinar si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$ es una base, planteamos el sistema $\gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2 + \gamma_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$. Es decir,

$$\begin{aligned} 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_5 &= 0\,, \\ \gamma_1 &= 0\,, \\ 2\gamma_1 + \gamma_5 &= 0\,, \\ \gamma_1 - \gamma_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Este sistema posee una única solución $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = 0$. Por ende, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$ es una base de $\mathcal{V}$, el cual posee dimensión tres.

Alternativamente, quizá de manera más directa, puede utilizarse el método de eliminación de Gauss-Jordan. El sistema $[\,\mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\,\mathbf{v}_3\,\mathbf{v}_4\,\mathbf{v}_5\,]\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$ tiene la siguiente reducción

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to (F_1 \Leftrightarrow F_2) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} (F_2 - 2\times F_1) \\ (F_3 - 2\times F_1) \\ (F_4 - F_1) \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to (F_4 + F_2) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \to (F_4 - F_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to (F_1 - F_3) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los tres vectores correspondientes a las columnas con pivotes son linealmente independientes, mientras que los otros dos vectores correspondientes a las columnas sin pivotes dependen linealmente de los anteriores. Así $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ resulta ser también una base, de dimensión 3. Nótese que el procedimiento indica cómo emerge la dependencia lineal: $\mathbf{v}_4 = 8\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 6\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

b) La dimensión del espacio $\mathcal{V}$ es 3. La dimensión del espacio $\mathcal{E}$ es cuatro y, por tanto, se $\mathcal{E}$ se descarta.

El resto de espacios, al intorducir una restricción a los elementos de vectores de $\mathbb{R}^4$, tienen dimensión igual a 3. Los miembros de la base previamente encontrada, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_5\}$, deben necesariamente pertenecer al espacio vectorial. Claramente, $\mathbf{v}_2 \notin \mathcal{D}$ ya que $(1-0-0) \neq 0$ por lo que $\mathcal{D}$ es descartado. Del mismo modo, $\mathbf{v}_5 \notin \mathcal{C}$ ya que $(1-0+0) \neq 0$ por lo que $\mathcal{C}$ es también descartado. Finalmente, $\mathbf{v}_1 \notin \mathcal{A}$ ya que $(2+1-2+1) \neq 0$ por lo que $\mathcal{A}$ es también descartado. Se verifica, de hecho, que $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{B}$, $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{B}$ y $\mathbf{v}_5 \in \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}$ es el espacio descrito en la parte *a*). La misma conclusión se obtiene al analizar la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. ∎

24. Sean

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

dos conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$. El conjunto R genera el subespacio vectorial $\mathcal{R}$, mientras que el conjunto S genera el subespacio vectorial $\mathcal{S}$.

a) Calcule bases de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ que sean subconjuntos de R y S.

b) En la parte *a*), en caso de eliminar un vector de cualquiera de los conjuntos para obtener la base, calcule la combinación lineal del vector eliminado en función de los vectores de la base.

c) Determine si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ representan el mismo subespacio vectorial.

Solución:

a) Formamos matrices con los vectores en R y S dispuestos como columnas:

$$\boldsymbol{A}_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 4 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{A}_S = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 11 & -2 \\ 3 & -3 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Tras aplicar el método de reducción de Gauss-Jordan a estas matrices se obtienen las formas reducidas;

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\boldsymbol{A}}_S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los vectores correspondientes a las columnas con pivotes son linealmente independientes, mientras que los vectores correspondientes a las columnas sin pivotes dependen linealmente de los anteriores. Así

$$\text{Base}(\mathcal{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \text{Base}(\mathcal{S}) = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Para la primera base, la forma reducida nos indica que

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix} = (3) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Para la segunda base, la forma reducida se traduce en

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \left(-\frac{2}{5}\right) \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

c) Considere la matriz $[\,\boldsymbol{A}_R \,|\, \boldsymbol{A}_S\,]$. Tras aplicar el método de reducción de Gauss-Jordan,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que encontramos tres columnas con pivotes, el espacio vectorial generado por los vectores en R y en S tiene dimensión tres. Es interesante notar que los dos primeros vectores de R (es decir, la base de $\mathcal{R}$) son capaces de generar los vectores en S *menos* el último. Entonces, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ representan subespacios vectoriales diferentes.

Una manera directa de verificar lo anterior es notando que rango$(\boldsymbol{A}_R) = 2 \neq$ rango$(\boldsymbol{A}_R \mid \boldsymbol{A}_S) = 3$ o, análogamente, rango$(\boldsymbol{A}_S) = 2 \neq$ rango$(\boldsymbol{A}_R \mid \boldsymbol{A}_S) = 3$.

■

25. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ un conjunto del subespacio $\mathcal{W}$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces existe al menos un subconjunto $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que también genera a $\mathcal{W}$.

b) Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vectores que pertenecen a $\mathcal{V}$. Demuestre que el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que pueden expresarse como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ tiene estructura de espacio vectorial.

Solución:

a) Por ser $\mathcal{A}$ un conjunto generador y suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\boldsymbol{u}_1$ es linealmente dependiente de $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, se tiene que para todo $\boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$ existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ y $\beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{u}_m \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{u}_1 = \beta_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \beta_m \boldsymbol{u}_m \,.$$

Al reemplazar $\boldsymbol{u}_1$ en la definición de $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{v} = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)\boldsymbol{u}_2 + (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3)\boldsymbol{u}_3 + \cdots + (\alpha_1\beta_m + \alpha_m)\boldsymbol{u}_m \,.$$

Por lo tanto, el subconjunto $\mathcal{A}' = \{\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \ldots, \boldsymbol{u}_n\} \subset \mathcal{A}$ es un conjunto generador de $\mathcal{W}$.

b) Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$. Esto es,

$$\mathcal{L} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \,\middle|\, \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \,, \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\} .$$

Considere $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in \mathcal{L}$ tales que

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{v}_i \,.$$

Comprobamos la ley de cerradura interna:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) \boldsymbol{v}_i \equiv \sum_{i=1}^{m} \theta_i \boldsymbol{v}_i \in \mathcal{L} \,.$$

Comprobando la ley de cerradura externa:

$$\lambda \boldsymbol{u} = \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda \alpha_i \boldsymbol{v}_i \equiv \sum_{i=1}^{m} \theta_i \boldsymbol{v}_i \in \mathcal{L} \,.$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial.

■

26. Sea $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{v}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Defina

$$\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2),\ \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3),\ \boldsymbol{u}_3 = (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4),\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_1) \,.$$

a) Evalúe la dependencia lineal de $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{u}_n\}$, si se conoce que n es impar.

b) ¿Cambiarían los resultados si n fuese par?

Solución:

a) Para probar la independencia lineal se plantea el contraste

$$\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{u}_3 + \cdots + \alpha_{n-1} \boldsymbol{u}_{n-1} + \alpha_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}\,.$$

Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$, el conjunto de vectores será linealmente independiente. Caso contrario, es decir algún $\alpha_i \neq 0$, será linealmente dependiente.

Utilizando las definiciones de los vectores $\boldsymbol{u}_i$,

$$\alpha_1(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) + \alpha_2(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3) + \alpha_3(\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4) + \cdots + \alpha_{n-1}(\boldsymbol{v}_{n-1} + \boldsymbol{v}_n) + \alpha_n(\boldsymbol{u}_n + \boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{0}\,.$$

Al factorizar los vectores $\boldsymbol{v}_i$,

$$(\alpha_1 + \alpha_n)\boldsymbol{v}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\boldsymbol{v}_2 + (\alpha_2 + \alpha_3)\boldsymbol{v}_3 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}\,.$$

Dado que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{v}_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independiente, debe ocurrir necesariamente que los coeficientes que acompañan a $\boldsymbol{v}_i$ en el contraste son iguales a cero. Así, se consigue

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1 + \alpha_n = 0 & \rightarrow & \alpha_1 = -\alpha_n \\
\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \rightarrow & \alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha_n \\
\alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \rightarrow & \alpha_3 = -\alpha_2 = -\alpha_n \\
\alpha_3 + \alpha_4 = 0 & \rightarrow & \alpha_4 = -\alpha_3 = \alpha_n
\end{array}$$

En general, se aprecia que $\alpha_i = -\alpha_n$ cuando i es impar y $\alpha_i = \alpha_n$ cuando i es par. Compactamente, $\alpha_i = (-1)^i \alpha_n$.

El último coeficiente del contraste es $\alpha_{n-1} + \alpha_n$ y, dado que es igual a cero, $\alpha_{n-1} = -\alpha_n$. Ello debe compararse con el patrón previamente encontrado: $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\alpha_n$. Así, cuando n es impar se tiene que $(-1)^{n-1} = 1$ e igualando ambas formas de determinar α_{n-1} se consigue que $\alpha_n = -\alpha_n$. Esta igualdad ocurre únicamente para $\alpha_n = 0$ lo que conlleva a que $\alpha_i = 0$ para todo i. Con n impar, el conjunto de los vectores $\boldsymbol{u}_i$ es linealmente independiente.

b) Cuando n es par, en cambio, se da que $(-1)^{n-1} = -1$. Por consiguiente, ambas formas de determinar α_{n-1} nos llevan al resultado trivial $-\alpha_n = -\alpha_n$. Por ello, cualquier vector (de dimensión par) de la forma $\boldsymbol{\alpha} = (-s, s, -s, s, \ldots, -s, s)$ resuelve el contrasate. Como esto ocurre para $s \neq 0$, se concluye que con n par, el conjunto de los vectores $\boldsymbol{u}_i$ es linealmente dependiente. ■

27. Esta pregunta generaliza las nociones vectoriales de producto interno, norma y base canónica para un contexto matricial. Sean $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1\leq i\leq n} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Definimos las *matrices canónicas* de orden $n \times n$ como el producto matricial

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i {\boldsymbol{e}_j}'\,,$$

mientras que el producto interno de dos matrices canónicas se define como

$$\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{rs} \rangle = ({\boldsymbol{e}_i}' \boldsymbol{e}_r)({\boldsymbol{e}_j}' \boldsymbol{e}_s)\,.$$

a) Para el caso $n = 3$, calcule $\boldsymbol{E}_{21}$ y $\boldsymbol{E}_{33}$.

b) Pruebe que, para cualquier n, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} = \{\boldsymbol{E}_{11}, \ldots, \boldsymbol{E}_{1n}, \ldots, \boldsymbol{E}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{ij}, \ldots, \boldsymbol{E}_{in}, \ldots, \boldsymbol{E}_{n1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{nn}\}$$

genera el espacio de matrices de orden $n \times n$.

c) Utilizando el producto interno matricial, muestre que $\mathcal{S}$ es un conjunto ortogonal.

d) Muestre que todos los elementos de $\mathcal{S}$ tienen norma unitaria.

e) Usando matrices canónicas, determine una base del subespacio $\mathcal{T}$ de matrices triangulares superiores de orden $n \times n$, justificando debidamente la condición de base.

f) Calcule la dimensión de $\mathcal{T}$.

Solución:

a) El elemento (i, j) de la matriz $\boldsymbol{E}_{ij}$ es igual a uno, mientras que los elementos restantes son iguales a cero. Para $n = 3$,

$$\boldsymbol{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{E}_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

b) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de dimensión $n \times n$, cuyo elemento típico es a_{ij}. Es simple verificar que

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{E}_{ij} .$$

Dado que cualquier matriz arbitraria $\boldsymbol{A}$ puede expresarse como una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}$, se concluye que $\mathcal{S}$ genera el espacio de matrices de orden $n \times n$.

c) Si $\boldsymbol{E}_{ij} \neq \boldsymbol{E}_{rs}$ entonces existen dos casos. En el primero, $i \neq r$ se tiene que $\boldsymbol{e}_i{}'\boldsymbol{e}_r = 0$ y, por lo tanto, $\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{rs} \rangle = (\boldsymbol{e}_i{}'\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_j{}'\boldsymbol{e}_s) = 0$. El segundo $j \neq s$ implica, análogamente, que $\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{rs} \rangle = 0$. Así el conjunto es ortogonal.

d) Dado que $< \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{ij} >= (\boldsymbol{e}_i{}'\boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{e}_j{}'\boldsymbol{e}_j) = (1)^2 = 1$, entonces la norma cumple

$$\|\boldsymbol{E}_{ij}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{ij} \rangle} = \sqrt{1} = 1 .$$

Los elementos de $\mathcal{S}$ tienen norma unitaria.

e) Como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} \boldsymbol{E}_{ij} ,$$

las matrices triangulares superiores pueden expresarse como una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$, se concluye que $\mathcal{R}$ genera el espacio $\mathcal{T}$. Asimismo, como $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ es un conjunto linealmente independiente (recuerde que, al ser ortogonal, $\mathcal{S}$ es un conjunto linealmente independiente). Se concluye que $\mathcal{R}$ es una base de $\mathcal{T}$.

f) Para la dimensión, basta notar que por cada a_{ij} existe un $\boldsymbol{E}_{ij}$. Así,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \quad n \text{ elementos} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \longrightarrow \quad 2 \text{ elementos} \\ \longrightarrow \quad 1 \text{ elemento} \end{array}$$

y, por lo tanto, la base tiene $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ elementos, que es igual a $\dim(\mathcal{T})$. ■

