UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2018
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, Y. García, J. Zúñiga y D. Bohorquez

EJERCICIOS 1

Espacios vectoriales y dependencia lineal

Vectores

1. Responda las siguientes preguntas sobre álgebra vectorial:

a) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores tales que $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\|$. Encuentre $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b}$.

b) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos. Si el conjunto $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\}$ contiene tres vectores mutuamente ortogonales, determine en qué razón se encuentran los módulos de los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

c) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos, tales que $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\|$. Se sabe que $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\|$. Si el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es θ, muestre que el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ es $\pi-\theta$.

d) Sean $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vectores no nulos tales que el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es igual al ángulo entre $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$. Determine el valor del escalar τ para que el vector $\boldsymbol{d} = \|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{b}$ sea ortogonal a $\boldsymbol{c}$.

e) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ vectores no nulos. Si se define $\boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}+\|\boldsymbol{b}\|\boldsymbol{a}$, halle el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, considerando que el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es $30°$.

f) Considere tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ mutuamente ortogonales y con el mismo módulo. Encuentre el coseno del ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

g) Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ dos vectores no nulos y no colineales. Se dice que el vector $\boldsymbol{c}$ es una *bisectriz* de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ si el ángulo entre $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{c}$ es igual al ángulo entre $\boldsymbol{c}$ y $\boldsymbol{b}$. Determine el valor de los escalares λ_1 y λ_2 para que el vector $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$ sea una bisectriz de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

h) Considere los siguientes vectores no nulos de $\mathbb{R}^2$: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)'$ y $\boldsymbol{b} = (-a_2, a_1)'$. Muestre que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales. Además, dado un vector $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)' \in \mathbb{R}^2$, determine el valor los escalares λ_1 y λ_2 tales que $\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$.

2. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Si se tienen dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tales que los vectores suma $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ y diferencia $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ son ortogonales, entonces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales.

b) Para dos vectores no nulos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{a}\|+\|\boldsymbol{b}\|$ cuando $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales.

c) Si $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es ortogonal a $\boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es ortogonal a $\boldsymbol{c}$.

d) Si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son ortogonales, se cumple que:

$$\|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\cdots+\boldsymbol{a}_n\| = \|\boldsymbol{a}_1\|+\|\boldsymbol{a}_2\|+\|\boldsymbol{a}_3\|+\cdots+\|\boldsymbol{a}_n\|\,.$$

3. Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)'$ y $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)'$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$. El *producto cruzado* (o *producto vectorial*) de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ es el vector de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (\,a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-b_3a_1,\ a_1b_2-b_1a_2\,)'\,.$$

a) Muestre que $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ es ortogonal a $\boldsymbol{a}$ y es ortogonal a $\boldsymbol{b}$.

b) Muestre que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales, entonces $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

c) Muestre que si $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son colineales.

d) Muestre que si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ no son colineales, entonces $\{\,\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,\}$ es un conjunto ortogonal.

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.

4. Sean θ_1 y θ_2 dos números reales tales que $0 < \theta_1 < \theta_2$. Defina los vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix} .$$

Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ otros dos vectores en $\mathbb{R}^2$ definidos como $\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_2$, donde $\boldsymbol{Q}$ es la matriz

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

para $\alpha > 0$. Finalmente, las siguientes Figuras grafican los vectores previamente definidos:

Figura 1

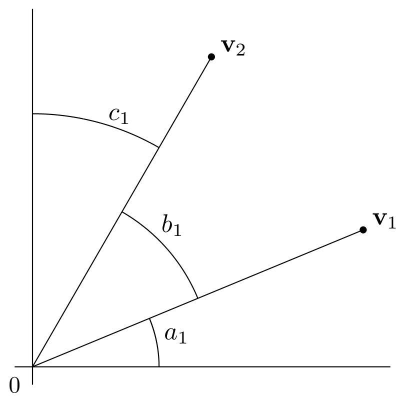
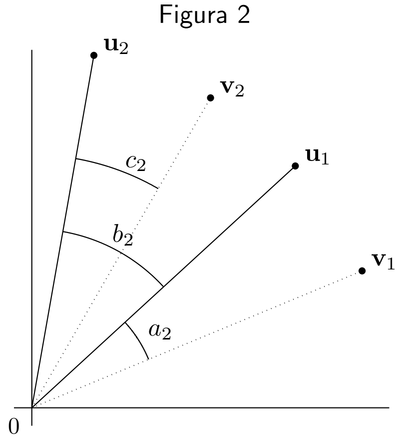


Figura 2



a) Encuentre los ángulos a_1, b_1 y c_1 de la Figura 1 en términos de θ_1 y θ_2.

b) Encuentre los ángulos a_2, b_2 y c_2 de la Figura 2 en términos de θ_1, θ_2 y α.

c) Comente sobre la relación existente entre los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Ayuda: Recuerde que $\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \cos(\omega_1)\cos(\omega_2) \mp \sin(\omega_1)\sin(\omega_2)$ y $\sin(\omega_1 \pm \omega_2) = \sin(\omega_1)\cos(\omega_2) \pm \cos(\omega_1)\sin(\omega_2)$.

5. Sea $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ un conjunto de n números reales. Utilizando la Desigualdad de Cauchy-Schwarz muestre que:

a) $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \geq 0\,.$

b) $\displaystyle \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) \geq 1\,.$

Eliminación de Gauss-Jordan y rango

6. Evalúe cómo la constante α afecta las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 2\,, \\ 3x + y - z &= 2\,, \\ -2x + \alpha y + 6z &= 4\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3\,, \\ 6x - y - z &= 4\,, \\ -4x + \alpha y + 3z &= 2\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1\,, \\ 3x - y + 2z &= 0\,, \\ 2x + y - z &= \alpha\,. \end{aligned}$$

7. Determine los valores de la constante a para que los siguientes sistemas de ecuaciones sean consistentes. Encuentre las soluciones a los sistemas para ese valor de a.

a)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 6\,, \\ x + 2y - z &= 2\,, \\ x - y + 2z &= 5\,, \\ x + 3y - z &= a\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8\,, \\ x - 3y + 2z &= -1\,, \\ x + y - 2z &= 3\,, \\ x - 2y + 2z &= a\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + z &= 1\,, \\ 2y + z &= 2\,, \\ x + y + z &= 2\,, \\ x + y + 3z &= a\,. \end{aligned}$$

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.

8. Encuentre una relación entre los escalares a y b para que los siguientes sistemas de ecuaciones tengan solución. Asumiendo que esa relación se cumple, encuentre las soluciones.

$$a)\quad \begin{aligned} u+v+w+x&=a\,,\\ u-2v+w-2x&=2\,,\\ u-v+w-x&=b\,,\\ 2u-v-w-x&=1\,. \end{aligned} \qquad\qquad b)\quad \begin{aligned} u+v+w+x&=a\,,\\ u-3v+w-3x&=2\,,\\ u-v+w-x&=b\,,\\ 2u-v-w+2x&=1\,. \end{aligned}$$

9. Considere una matriz $\boldsymbol{A}$, que depende de un escalar real α, y los vectores $\boldsymbol{x}=(x,y,z)'$ y $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)'$.

- Encuentre el determinante de $\boldsymbol{A}$ y diga para qué valores de α la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible.
- Cuando α es tal que $\boldsymbol{A}$ no es invertible, encuentre qué condición deberían satisfacer los escalares b_1, b_2 y b_3 para que el sistema de ecuaciones $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ sea consistente. Encuentre $\boldsymbol{x}$ en este caso.

$$a)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad\qquad b)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}.$$

10. Utilizando operaciones elementales, encuentre la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$. Luego, encuentre $\boldsymbol{x}$, la solución al sistema $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, si $\boldsymbol{b}=(1,1,1)'$.

$$a)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad c)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

11. Encuentre la matriz inversa de la siguiente matriz triangular:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Comente las siguientes afirmaciones sobre el rango:

a) Dadas las matrices $\boldsymbol{A}$, de orden $m\times p$, y $\boldsymbol{B}$, de orden $p\times n$, se verifica que $\rho(\boldsymbol{AB})\leq \min\{\rho(\boldsymbol{A}),\rho(\boldsymbol{B})\}$.

b) Si la matriz $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ tiene inversa y $\boldsymbol{X}$ es una matriz no cuadrada (de dimensión $n\times k$), entonces el rango de $\boldsymbol{X}$ debe ser igual a su número de columnas k.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices del mismo orden. Luego, $\rho(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geq \min\{\rho(\boldsymbol{A}),\rho(\boldsymbol{B})\}$.

d) Sean las matrices $\boldsymbol{A}_{3n\times 2n}$, $\boldsymbol{B}_{2n\times n}$, $\boldsymbol{C}_{n\times p}$ y $\boldsymbol{D}_{p\times 3n}$. Entonces, la matriz $\boldsymbol{ABCD}$ es singular.

Espacios vectoriales

13. Analice si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales:

a) $\mathbb{R}^n$.

b) Un plano en $\mathbb{R}^3$.

c) La bisectriz del primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$.

d) $\mathcal{F}_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y\leq z\}$

e) $\mathcal{F}_2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz dada de orden $n\times n$ y $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^n$ es un vector no nulo.

14. Sobre espacios con estructura de espacios vectoriales:

a) Se define un espacio de funciones $\mathcal{C}=\{f:\mathbb{R}\to[0,1], f \text{ es continua}\}$. Considere los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{W}_1=\left\{f\in\mathcal{C}\,\middle|\,\int_0^1 f(t)dt=0\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W}_2=\left\{f\in\mathcal{C}\,\middle|\,\int_0^1 f(t)dt=1\right\}.$$

Verifique si estos conjuntos son subespacios de $\mathcal{C}$.

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.

b) Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ dos espacios vectoriales. Se dice que una función $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ es *par* cuando $f(-\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u})$ para todo $\boldsymbol{u} \in \mathcal{E}$. Muestre que el conjunto $\mathcal{A}$ de todas las funciones pares es un subespacio de $\mathcal{C}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, el espacio de todas las funciones definidas sobre $\mathcal{E}$ y con valores en $\mathcal{F}$.

c) Se define $\mathbb{P}_n$ como el espacio de todos los polinomios con grado menor o igual a n en la variable x con coeficientes reales. Muestre que $\mathbb{P}_n$ tiene estructura de espacio vectorial.

d) Verifique si el siguiente conjunto tiene características de subespacio vectorial

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{A}, \delta) = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_{n\times n} \,\middle|\, \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}' = \delta \mathrm{tr}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{A} \right\} ,$$

donde $\mathbb{M}_{n\times n}$ es el espacio formado por todas las matrices de orden $n \times n$ con elementos reales, $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $n \times n$ y δ es un número real.

e) Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio de matrices de dimensión 2×2. Defina el subespacio vectorial

$$\mathcal{M} = \{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \mid \boldsymbol{X} \text{ es simétrica} \} .$$

¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{M}$?

f) Determine la dimensión del espacio de matrices *antisimétricas* 3×3,

$$\mathcal{M} = \{ \boldsymbol{X} \,:\, \boldsymbol{X} \text{ es una matriz de } 3 \times 3 \text{ tal que } \boldsymbol{X} = -\boldsymbol{X}' \} .$$

15. A continuación se presentan diferentes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{M}_2$ de matrices cuadradas de orden 2. Determine si cada conjunto satisface las leyes de cerradura interna y cerradura externa. Mencione además si las matrices $\mathbf{0}$ y $\boldsymbol{I}_2$ pertenecen a dichos conjuntos.

a) $\mathcal{A} = \{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \,|\, \boldsymbol{X} \text{ es triangular superior} \}$,

b) $\mathcal{B} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \,|\, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix},\ 0 < p, q < 1 \right\}$,

c) $\mathcal{C} = \{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \,|\, \boldsymbol{X}^k = \mathbf{0} \text{ para algún } k > 0 \}$,

d) $\mathcal{D} = \left\{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \,|\, \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ a, b, c, d \geq 0 \right\}$,

e) $\mathcal{E} = \{ \boldsymbol{X} \in \mathbb{M}_2 \,|\, \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}) = 0 \}$.

16. Pruebe que la unión de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{E}$ también será un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$ solo si uno de ellos está contenido en el otro.

Independencia lineal y generación de espacios

17. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Si $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ forman una base ortonormal del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ y $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ son vectores que se generan como combinaciones lineales de dicha base, entonces $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ son vectores ortogonales.

b) Si los vectores $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\boldsymbol{a}_n$ puede ser expresado como una combinación lineal de $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$.

c) En $\mathbb{R}^n$ se tiene un conjunto generador formado por $n+1$ vectores. Si retiramos un vector cualquiera, los restantes n vectores constituyen una base de $\mathbb{R}^n$.

d) Si $\mathcal{W}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes que pertenecen al subespacio vectorial $\mathcal{V}$, no existe ningún subconjunto de $\mathcal{W}$ que sea generador de $\mathcal{V}$.

18. Diga para qué valores del número real k los siguientes conjuntos forman una base de $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(k, 1, 1), (1, k, 1), (1, 1, k)\}$.

b) $\{(k, 1, 0), (1, k, 1), (0, 1, k)\}$.

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.

19. Sea a un escalar. Considere vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ (para $n > 1$) tales que el i-ésimo elemento de $\mathbf{v}_i$ es igual a 1 y los elementos restantes son iguales a a ($i = 1, 2, \dots, n$). Por ejemplo, para $n = 4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El escalar a debe satisfacer dos condiciones para que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sea linealmente independiente ¿Cuáles son estas condiciones?

20. Misceláneos:

a) Si $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ son vectores linealmente independientes, determine si $\{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}), (3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}), (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

b) Sea $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ un conjunto base de un espacio vectorial. Defina los vectores: $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{w}_3$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_3$ y $\boldsymbol{v}_3 = 3\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + 3\boldsymbol{w}_3$. Demuestre que el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es linealmente independiente.

c) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los dos conjuntos de vectores $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ y $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$, donde $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ y $\boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}$ ¿Se puede concluir que los subespacios generados por $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son los mismos?

d) Sea $\mathcal{A} = \{(1, 1, -2), (1, r - s, -9), (2, -1, 3), (r + 1, 3, s - 6)\}$. Encuentre los números reales s y r tales que el conjunto $\mathcal{A}$ no genere $\mathbb{R}^3$.

21. Compruebe que $\{(4, 8, 0, 0), (0, 4, 4, 0), (0, -4, 0, 4)\}$ es una base del subespacio vectorial

$$\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

22. Se define $\mathbb{P}_n$ como el espacio de todos los polinomios con grado menor o igual a n en la variable x con coeficientes reales. Determine si el conjunto $\mathcal{A}_n$ es base de dicho espacio en los siguientes casos:

a) $\mathcal{A}_2 = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$.

b) $\mathcal{A}_3 = \{x^3, (x - 1)^3, (x + 1)^3, x^2\}$.

23. Analice si el conjunto $\mathcal{D}$, mostrado a continuación, es generador del espacio de las matrices de 2×2. Encuentre una base de dicho espacio.

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

24. *a*) Encuentre una base y la dimensión del subespacio vectorial generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) ¿Cuál de los siguientes espacios vectoriales es el generado en la parte *a*)? ¿Por qué?

$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$, $\quad \mathcal{B} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

$\mathcal{C} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$, $\quad \mathcal{D} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$, $\quad \mathcal{E} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$.

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.

25. Sean

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -11 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

dos conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$. El conjunto R genera el subespacio vectorial $\mathcal{R}$, mientras que el conjunto S genera el subespacio vectorial $\mathcal{S}$.

a) Calcule bases de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ que sean subconjuntos de R y S.

b) En la parte *a*), en caso de eliminar un vector de cualquiera de los conjuntos para obtener la base, calcule la combinación lineal del vector eliminado en función de los vectores de la base.

c) Determine si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ representan el mismo subespacio vectorial.

26. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ un conjunto del subespacio $\mathcal{W}$. Demuestre que si $\mathcal{A}$ es un conjunto linealmente dependiente, entonces existe al menos un subconjunto $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ que también genera a $\mathcal{W}$.

b) Sean $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ vectores que pertenecen a $\mathcal{V}$. Demuestre que el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que pueden expresarse como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ tiene estructura de espacio vectorial.

27. Sea $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{v}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente. Defina

$$\boldsymbol{u}_1 = (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2),\ \boldsymbol{u}_2 = (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3),\ \boldsymbol{u}_3 = (\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4),\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{v}_n + \boldsymbol{v}_1)\,.$$

a) Evalúe la dependencia lineal de $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ \ldots \ , \boldsymbol{u}_n\}$, si se conoce que n es impar.

b) ¿Cambiarían los resultados si n fuese par?

28. Esta pregunta generaliza las nociones vectoriales de producto interno, norma y base canónica para un contexto matricial. Sean $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1\leq i\leq n} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Definimos las *matrices canónicas* de orden $n \times n$ como el producto matricial

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j{}',$$

mientras que el producto interno de dos matrices canónicas se define como

$$\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{rs} \rangle = (\boldsymbol{e}_i{}' \boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_j{}' \boldsymbol{e}_s)\,.$$

a) Para el caso $n = 3$, calcule $\boldsymbol{E}_{21}$ y $\boldsymbol{E}_{33}$.

b) Pruebe que, para cualquier n, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} = \{\boldsymbol{E}_{11}, \ldots, \boldsymbol{E}_{1n}, \ldots, \boldsymbol{E}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{ij}, \ldots, \boldsymbol{E}_{in}, \ldots, \boldsymbol{E}_{n1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{nn}\}$$

genera el espacio de matrices de orden $n \times n$.

c) Utilizando el producto interno matricial, muestre que $\mathcal{S}$ es un conjunto ortogonal.

d) Muestre que todos los elementos de $\mathcal{S}$ tienen norma unitaria.

e) Usando matrices canónicas, determine una base del subespacio $\mathcal{T}$ de matrices triangulares superiores de orden $n \times n$, justificando debidamente la condición de base.

f) Calcule la dimensión de $\mathcal{T}$.

Derechos reservados © 2018. Prohibida su reproducción y distribución fuera de la Universidad del Pacífico.