UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2018
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, Y. García, J. Zúñiga y D. Bohorquez

EJERCICIOS 3

Números complejos. Tópicos de cálculo

Números complejos

1. Verifique las siguientes propiedades para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$

d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|$, donde $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$.

b) $(1 + i)^5$.

c) $\dfrac{(1 - i)^2(1 + i)^{-2}}{(\sqrt{3} + i)^{-4}}$.

d) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{30}$.

3. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$.

b) $x^5 - 9x^3 - x^2 + 9 = 0$.

c) $x^2 - (2 + i)x + (-1 + 7i) = 0$.

d) $x^6 + 1 = 0$. En este caso, grafique las raíces en el plano complejo.

4. Si $1 + \sqrt{3}i$ es una de las raíces sextas del número complejo z, ¿cuáles son las otras?

5. Encuentre todos los complejos z para los cuales se cumple que:

a) $\left|\dfrac{1 + z}{1 - z}\right| = 1$.

b) $\overline{z} = z^{n-1}$, donde $n > 2$ es un número entero.

6. Resuelva:

a) Utilizando la fórmula de Euler, muestre que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$.

b) Recuerde que si $y = \arccos(a)$, entonces $\cos(y) = a$. Si usted le solicita a su calculadora el valor y para $a > 1$, posiblemente obtenga un mensaje de error. Esto no significa necesariamente que no exista el valor de y. De hecho, y es un número complejo. Con la ayuda del resultado obtenido en a), encuentre $y = \arccos(a)$ para $a > 1$. Verifique que si $a = 1$, entonces $y = 0$.

7. Encuentre la traza, el determinante y los valores y vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$.

a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, *b)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *c)* $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ para $\theta \in (-\pi, \pi)$.

8. Demuestre las siguientes propiedades sobre valores y vectores propios:

a) Los vectores propios correspondientes a valores propios complejos conjugados son complejos conjugados.

b) Si una matriz tiene dos valores propios complejos conjugados, entonces los vectores propios asociados a dichos valores formarán un conjunto linealmente independiente.

c) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica con términos reales, entonces sus valores propios son reales.

Polinomios y series de Taylor

9. Encuentre las series de McLaurin de las siguientes funciones e indique sus intervalos de convergencia:

$$a)\quad e^x\,, \qquad b)\quad \cos(x)\,, \qquad c)\quad \sin(x)\,, \qquad d)\quad \ln(1+x)\,, \qquad e)\quad \frac{1}{1-x}\,.$$

10. Utilizando series de McLaurin, verifique las siguiente identidades:

a) $\dfrac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$.

b) $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$.

c) $\dfrac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$.

d) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \cos(x)dx = 2\sin(a)$.

e) La fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

11. Se tiene que, para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\,.$$

A partir de esta igualdad, determine el desarrollo en series de potencias y el radio de convergencia de:

$$a)\quad \frac{1}{1+x}\,, \qquad b)\quad \left(\frac{1}{1-x}\right)^2\,, \qquad c)\quad \ln(1-x)\,, \qquad d)\quad \frac{x}{a+x^2}\,.$$

12. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 para la funciones $f(x)$ y $g(x)$, en torno a $x = 0$. Luego, encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 para el producto $f(x)g(x)$:

$$a)\quad f(x) = \frac{1}{1+x} \;\text{ y }\; g(x) = \ln(1+x)\,, \qquad b)\quad f(x) = \frac{1}{1-x} \;\text{ y }\; g(x) = \ln(1-x)\,.$$

13. Encuentre una aproximación polinómica de grado 5 para $f(x) = e^{\sin(x)}$.

14. El objetivo de esta pregunta es probar la *fórmula del binomio de Newton*, a saber:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!\,k!} a^{m-k} b^k\,, \tag{$\spadesuit$}$$

donde $a, b \neq 0$. Para esto, sea $m \in \mathbb{N}$ (un entero positivo) fijo y considere la función

$$f(x) = (1+x)^m\,.$$

a) Calcule $f^{(k)}(x)$ y muestre que $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > m$.

b) Represente $f(x)$ como una serie de MacLaurin con un número finito de términos.

c) Concluya que $(a+b)^m$ tiene la forma dada en ($\spadesuit$). *Ayuda*: Evalúe $f(x)$ en $x = b/a$.

15. Resuelva los siguientes límites indeterminados, utilizando aproximaciones de McLaurin:

$$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{x - \sin(x)}\,, \qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}\,, \qquad c)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos(x)}}{x^2}\,.$$

16. Para x real, las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen como

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

a) Encuentre la series de McLaurin de $\sinh(x)$ y de $\cosh(x)$, y determine su rango de convergencia.

b) Verifique que $\cosh(x) = \cos(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\cos(\cdot)$ es la función coseno,

c) Verifique que $\sinh(x) = -i\sin(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\sin(\cdot)$ es la función seno,

d) Verifique que $\dfrac{d^2\cosh(x)}{dx^2} = \cosh(x)$,

e) Verifique que $\dfrac{d^2\sinh(x)}{dx^2} = \sinh(x)$,

f) Verifique que $\displaystyle\int \sinh(ax)dx = \frac{\cosh(ax)}{a} + C$.

17. Sobre series de potencias:

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}\,.$$

Calcule $f^{(2003)}(0)$. *Ayuda:* $2003 = 6 \times 333 + 5$.

b) Encuentre una expresión para

$$S = \int_0^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

como una suma infinita que depende del escalar a.

18. *Opcional.* Encuentre una aproximación de Taylor de segundo orden de las siguientes funciones de dos variables, en torno al origen:

$$a) \quad e^x\cos(y)\,, \qquad b) \quad \ln(\alpha x + \beta y + 1)\,, \qquad c) \quad \frac{1-y}{1+x}\,.$$

19. *Opcional.* Dos funciones de producción muy conocidas son

$$a) \quad Q(K,N) = K^\alpha L^{1-\alpha} \qquad \text{y} \qquad b) \quad Q(K,N) = \left(\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho\right)^{1/\rho}\,,$$

donde $0 \le \alpha \le 1$ y $\rho \ge 0$. Realice una aproximación de segundo orden de cada función de producción en torno al punto $(\bar{K}, \bar{N})$ tal que $\bar{Q} = Q(\bar{K}, \bar{N})$. Exprese sus resultados de manera compacta, utilizando las definiciones

$$q = \frac{Q - \bar{Q}}{\bar{Q}}\,, \qquad k = \frac{K - \bar{K}}{\bar{K}} \qquad \text{y} \qquad n = \frac{N - \bar{N}}{\bar{N}}\,.$$

Finalmente, indique qué ocurre con la segunda función de producción cuando $\rho \to 0$.

Transformaciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

20. Considere una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(\boldsymbol{x})$. Suponga que $\boldsymbol{x}$ experimenta un cambio pequeño, de $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{u}$, donde $\epsilon \simeq 0$ y $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Utilizando la noción de derivada direccional, explique por qué se dice que el máximo cambio que y puede experimentar "se da en la dirección del gradiente" ¿A cuánto asciende este cambio?

21. Una empresa utiliza cuatro insumos (x, y, z, m) a fin de producir tres productos (U, V, W) según la siguiente función de producción:

$$(U, V, W) = f(x, y, z, m) = \left(\ln(x^2y) + z, (y^3zm)^{\frac{1}{2}}, e^m z^2 x + y^2\right)$$

Calcule la productividad marginal del insumo Z en la producción de los tres productos, considerando que se están utilizando las cantidades de insumos $(x, y, z, m) = (1, 1, 1, 1)$.

22. Considere las transformaciones $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tales que

$$f(u,v)=\big(u+v^2,u-v\big) \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z)=\big(x+y^2-z,-y^2+xz\big)\ .$$

a) Evalúe $f\circ g$ en los puntos $(1,0,-1)$ y $(1,1,1)$.

b) Halle la matriz Jacobiana de $f\circ g$.

c) Aproxime $f\circ g(1.1,0.1,-1)$ y $f\circ g(1.1,0.9,1.1)$.

23. El precio del bien i es p_i $(i=1,2,\ldots,n)$ y su función de demanda es $D_i(\boldsymbol{p})$, donde $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)'$. Los bienes son complementarios, lo que implica que para $i\neq j$,

$$\frac{\partial D_j(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}\leq 0\,.$$

La matriz Jacobiana de la transformación $F(\boldsymbol{p})=(D_1(\boldsymbol{p}),D_2(\boldsymbol{p}),\ldots,D_n(\boldsymbol{p}))'$ es la matriz $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$.

a) Calcule la traza de $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$ y determine su signo, considerando que se cumple la ley de demanda.

b) Sea $\boldsymbol{s}$ el vector suma de $\mathbb{R}^n$. Calcule $\boldsymbol{s}'\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}$ y determine su signo.

c) Si $D_i(\boldsymbol{p})$ es una función homogénea de grado α, entonces para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$ se cumple que:

$$\det(\,\boldsymbol{J}_F(\lambda\boldsymbol{p})\,)=\lambda^{\beta}\det(\,\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\,)\,.$$

Halle β.

24. Sean F_a, F_b, F_c y F_d transformaciones que van de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^p$ tal que

$$F_a(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}\,,\qquad F_b(x)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,,\qquad F_c(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\,,\qquad F_d(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})\,,$$

donde $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $k\times k$, $\boldsymbol{C}$ es una matriz de dimensión $k\times k$, $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Z}$ es una matriz de dimensión $n\times k$ y $\boldsymbol{W}$ es una matriz simétrica de dimensión $n\times n$.

a) Encuentre $\boldsymbol{\nabla}F_a(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función $F_a:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$.

b) Encuentre $\boldsymbol{\nabla}F_b(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función $F_b:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ ¿Cómo se simplifica $\boldsymbol{\nabla}F_b(x)$ si $\boldsymbol{A}$ es simétrica?

c) Encuentre $\boldsymbol{D}F_c(\boldsymbol{x})$, la matriz Jacobiana de la transformación $F_c:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$.

d)
- Encuentre $\boldsymbol{\nabla}F_d(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función F_d.
- Defina $S(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{\nabla}F_d(\boldsymbol{x}))'$, la traspuesta del gradiente ($S:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^k$). Encuentre $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{D}S(\boldsymbol{x})$, la matriz Jacobiana de S. Esta matriz involucra dos operaciones de derivación y es el *Hessiano* de F_d.
- Encuentre, además, el vector $\boldsymbol{x}^*$ tal que $S(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{0}$. Indique cuáles son los supuestos que el Hessiano debe satisfacer para que $\boldsymbol{x}^*$ sea único.

Estática comparativa

25. El siguiente modelo describe el comportamiento de un mercado:

$$\begin{array}{llcll}
\text{Demanda} & Q^D & = & D(P,Y) & D_P<0,\quad D_Y\geq 0\\
\text{Oferta} & Q^S & = & S(P,A) & S_P>0,\quad S_A\geq 0\\
\text{Equilibrio} & Q & \equiv & Q^D=Q^S &
\end{array}$$

donde Q es la cantidad, P es el precio, Y es el ingreso de los consumidores y A es la productividad de las empresas. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $D(\cdot)$ y $S(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables Y y A son tratadas como exógenas.

a) Escriba la condición de equilibrio en una sola ecuación. Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de una función implícita para P en términos de Y y A.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre P y Q de un incremento en Y y de un incremento en A.

c) Repita el análisis anterior pero analizando un modelo de dos ecuaciones.

26. Considere el siguiente modelo macroeconómico (Keynesiano, donde el ingreso nacional es determinado por la demanda agregada y los precios se asumen constantes):

$$\begin{aligned}
Y &= C + I + G \\
C &= C(Y - T, R) && 0 < C_Y < 1, \quad C_R \leq 0 \\
I &= I(R, A) && I_R < 0, \quad I_A \geq 0 \\
M &= L(Y, R) && L_Y > 0, \quad L_R \leq 0
\end{aligned}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo, I es la inversión, G es el gasto de gobierno, T es la recaudación de impuestos, R es la tasa de interés, M es la cantidad de dinero y A es un indicador de confianza empresarial. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $I(\cdot)$ y $L(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables G, T, A y M son tratadas como exógenas.

a) Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y R de un incremento en G manteniendo T constante, y de un incremento en G y T, manteniendo $G - T$ constante.

c) Indique, además, cuál es el efecto sobre Y y R de un incremento en M.

d) Las tres primeras ecuaciones pueden resumirse en una única relación entre Y y R, la famosa curva IS. La última ecuación corresponde a la curva LM. Encuentre el signo de las pendientes de estas curvas.

e) Resuelva el sistema IS-LM de dos variables y compare sus resultados con los obtenidos previamente.

27. Considere el siguiente modelo macroeconómico (Neoclásico, donde el ingreso nacional es determinado por la oferta agregada y los precios se asumen flexibles):

$$\begin{aligned}
Y &= C(Y - T) + I(R) + G && 0 < C_Y < 1, \quad I_R < 0 \\
Y &= F(N, K) && F_N > 0, \quad F_K > 0 \\
w &= F_N(N, K) && F_{NN} < 0, \quad F_{NK} \geq 0 \\
w &= S(N) && S_N > 0 \\
M &= P\,L(Y, R) && L_Y > 0, \quad L_R \leq 0
\end{aligned}$$

donde Y es el ingreso (o producción) nacional, $C(\cdot)$ es el consumo, $I(\cdot)$ es la inversión, G es el gasto de gobierno, T es la recaudación de impuestos, R es la tasa de interés, K es el *stock* de capital, N es el *stock* de mano de obra, w es el salario *real*, M es la cantidad *nominal* de dinero y P es el nivel de precios. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $I(\cdot)$, $F(\cdot)$, $S(\cdot)$ y $L(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables G, T, K y M son tratadas como exógenas.

a) Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y, N, w, R y P de movimientos en G y T.

c) Indique, además, cuál es el efecto de un incremento en M.

d) A la luz de sus resultados previos, ¿cuál es la variable exógena que más efectos tiene sobre Y, N y w en esta economía?

28. Considere el siguiente modelo macroeconómico en un mundo de dos países (nacional y extranjero):

$$\begin{aligned}
Y &= C(Y) + G + X(Y^*, q) - M(Y, q) && 0 < C_Y < 1\,, \\
Y^* &= C^*(Y^*) + G^* + X^*(Y, q) - M^*(Y^*, q) && 0 < C^*_{Y^*} < 1\,, \\
X^*(Y, q) &= M(Y, q) && 0 < M_Y < 1, \quad M_q < 0\,, \\
M^*(Y^*, q) &= X(Y^*, q) && 0 < X_{Y^*} < 1, \quad X_q > 0\,,
\end{aligned}$$

donde Y es el ingreso nacional, Y^* es el ingreso extranjero, G es el gasto del gobierno nacional, G^* es el gasto del gobierno extranjero y q es el tipo de cambio entre ambos países. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $X(\cdot)$, $M(\cdot)$, $C^*(\cdot)$, $X^*(\cdot)$ y $M^*(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. Las últimas dos ecuaciones indican que, en un mundo de dos países, las exportaciones de un país son las importaciones del otro, y vice versa.

Tratando a G, G^* y q como variables exógenas:

a) Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G manteniendo G^* y q constantes.

c) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G^* manteniendo G y q constantes.

d) ¿Bajo qué condiciones un incremento en q no tendrá efectos sobre el ingreso mundial $Y + Y^*$?

Tratando a G, G^* e Y^* como variables exógenas:

e) Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

f) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en G manteniendo G^* e Y^* constantes.

g) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en Y^* manteniendo G^* y G constantes.

29. Una firma produce un bien de acuerdo con la función de producción

$$Y = F(N, K)\,, \tag{1}$$

donde Y es la cantidad producida, N es mano de obra y K es capital. Las derivadas parciales (de primer y segundo orden) de la función $F(\cdot,\cdot)$ satisfacen, para todo (N, K),

$$F_N > 0\,, \qquad F_K > 0\,, \qquad F_{NN} < 0\,, \qquad F_{KK} < 0 \qquad \text{y} \qquad F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2 > 0\,.$$

Sea $P > 0$ el precio del bien, que se asume exógeno. En el corto plazo, K es exógeno y N se determina a partir de la ecuación

$$P \times F_N(N, K) - 1 = 0\,. \tag{2}$$

En el largo plazo, N se determina nuevamente a partir de (2) mientras que K pasa a ser endógeno y se determina a partir de

$$P \times F_K(N, K) - 1 = 0\,. \tag{3}$$

Para el modelo de corto plazo:

a) Plantee un sistema linealizado (en términos de diferenciales o de derivadas parciales) que relacione las variables endógenas con las variables exógenas.

b) ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $Y = f_{\text{CP}}(P, K)$ y $N = g(P, K)$?

c) La función $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ es la curva de oferta de corto plazo. Calcule la derivada parcial de $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta) y con respecto a K.

Para el modelo de largo plazo:

d) Plantee un sistema linealizado que relacione las variables N y K con P.

e) ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $N = G_1(P)$ y $K = G_2(P)$?

f) Calcule las derivadas de $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ con respecto a P.

g) La función $f_{\text{LP}}(P) = F(G_1(P), G_2(P))$ es la curva de oferta de largo plazo. Calcule la derivada de $f_{\text{LP}}(\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta).

h) Asuma por simplicidad que $F_{NK} = 0$. El *principio de Le Châtelier* sostiene que la pendiente de la curva de oferta de largo plazo es mayor que la pendiente de la curva de oferta de corto plazo ¿Se cumple el principio de Le Châtelier en este modelo?