Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2016
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, E. Mantilla, D. Bohorquez y C. Aparicio

Examen Parcial

SECCIÓN I

1. Diagonalización (4 ptos)

Considere un escalar $a \leq 4$ y la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) **(2 ptos)** Si $a < 4$, ¿es la matriz $\boldsymbol{A}$ diagonalizable?

b) **(2 ptos)** Si $a = 4$, ¿es la matriz $\boldsymbol{A}$ diagonalizable?

2. Exponencial matricial (7 ptos)

En analogía con la serie de MacLaurin para e^x, la exponencial de una matriz $\boldsymbol{X}$ de dimensión $n \times n$, se define como

$$\exp\{\boldsymbol{X}\} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{X} + \frac{\boldsymbol{X}^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{X}^3}{3!} + \frac{\boldsymbol{X}^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{X}^k}{k!}.$$

a) **(1 pto)** Calcule $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ si

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) **(1 pto)** Calcule $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ si

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) **(1 pto)** Calcule $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ si $\boldsymbol{A}$ es idempotente.

d) **(1 pto)** Dados n números reales $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$, calcule $\exp\{\boldsymbol{D}\}$ si

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

e) **(1 pto)** Considere una matriz $\boldsymbol{S}$ no singular. Muestre que

$$\boldsymbol{S} \exp\left\{\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}\right\} \boldsymbol{S}^{-1} = \exp\{\boldsymbol{A}\}.$$

f) **(1 pto)** Si $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, muestre que

$$\det(\exp\{\boldsymbol{A}\}) = e^{\mathrm{tr}(A)}.$$

g) **(1 pto)** Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, muestre que $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ es simétrica. Además, muestre que $\exp\{\boldsymbol{A}\}$ es una matriz definida positiva.