Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Eduardo Mantilla, Jorge Rodas y Jorge Cortéz

Práctica Calificada 2

1. Demostraciones (4 ptos)

Demuestre **únicamente dos** de las siguientes proposiciones **(2 ptos cada una)**:

a) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz involutiva, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}_n$. Entonces, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son 1 ó -1.

b) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz nilpotente, $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ para algún k positivo y finito. Entonces, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son iguales a cero.

c) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$. Entonces, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son reales.

d) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, con valores propios distintos. Entonces, los vectores propios de $\boldsymbol{A}$ son mutuamente ortogonales.

2. Matrices pequeñas (6 ptos)

Considere las siguientes matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a & a-a^2 \\ 1 & 1-a \end{bmatrix},$$

donde a y b son números reales distintos de cero.

Para cada una de estas matrices:

a) **(1 pto cada una)** Encuentre sus valores y vectores propios.

b) **(1 pto cada una)** Indique para qué valores de a y b las matrices son diagonalizables.

c) **(1 pto cada una)** Encuentre, utilizando la descomposición espectral de las matrices, expresiones lo más simple posible para las matrices $\boldsymbol{A}^k$ y $\boldsymbol{B}^k$, donde k es un entero positivo.

3. Cuadrados mágicos (4 ptos)

Las siguiente matrices cuadradas se conocen como *cuadrados mágicos*:

$$\boldsymbol{M}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 14 & 8 & 11 \\ 15 & 4 & 10 & 5 \\ 12 & 7 & 13 & 2 \\ 6 & 9 & 3 & 16 \end{bmatrix}.$$

Los elementos de estas matrices son valores enteros que no se repiten. Tome una fila cualquiera de $\boldsymbol{M}_3$ o $\boldsymbol{M}_4$; la suma de sus elementos es $m_3 = 15$ o $m_4 = 34$, respectivamente. Tome una columna cualquiera de $\boldsymbol{M}_3$ o $\boldsymbol{M}_4$; la suma de sus elementos es también $m_3 = 15$ o $m_4 = 34$, respectivamente. La traza de $\boldsymbol{M}_3$ o $\boldsymbol{M}_4$ y la suma de los elementos de la diagonal secundaria es también $m_3 = 15$ o $m_4 = 34$, respectivamente.

a) **(1.5 ptos)** Verifique que $m_3 = 15$ es un valor propio de $\boldsymbol{M}_3$.

b) **(1.5 ptos)** Verifique que $m_4 = 34$ es un valor propio de $\boldsymbol{M}_4$.

c) **(1 pto)** ¿Son $\boldsymbol{M}_3$ y $\boldsymbol{M}_4$ matrices definidas positivas?

4. Formas cuadráticas (6 ptos)

a) **(1.5 ptos)** Muestre que si una matriz simétrica $\boldsymbol{A}$ es definida negativa, entonces todos sus valores propios son negativos.

b) **(1.5 ptos)** Muestre lo converso: si los valores propios de una matriz $\boldsymbol{A}$ simétrica y diagonalizable son todos negativos, entonces $\boldsymbol{A}$ es definida negativa.

c) **(3 ptos)** Exprese la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4\,x_1^2 + 6\,x_2^2 + 46\,x_3^2 + 144\,x_1 x_3\,,$$

exclusivamente como una suma de cuadrados.