UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, y F. Rosales

Examen Parcial

SECCIÓN I

1. Producto externo de vectores (6 ptos)

Sean $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ vectores no nulos. El producto externo se define como la matriz

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'.$$

a) **(1 pto)** Determine el rango de $\boldsymbol{A}$.

b) **(1 pto)** Muestre que $\boldsymbol{a}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$.

c) **(1 pto)** Muestre que si $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ es ortogonal a $\boldsymbol{b}$, entonces $\boldsymbol{v}$ es vector propio de $\boldsymbol{A}$.

d) **(1 pto)** Recíprocamente, pruebe que si $\boldsymbol{v}$ es vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado al valor propio $\lambda = 0$, entonces $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a $\boldsymbol{b}$.

e) **(1 pto)** Muestre que $\lambda = 0$ tiene multiplicidad geométrica $n - 1$.

f) **(1 pto)** Muestre que si $\boldsymbol{a}'\boldsymbol{b} \neq 0$, entonces $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

2. Constantes como sumas infinitas (5 ptos)

a) **(1 pto)** Calcule la serie de Taylor de $f(x) = (1 - x)^{-1}$ alrededor de $a = 0$.

b) **(1 pto)** Recordando que

$$\frac{d}{dx}\ln(1 + x) = \frac{1}{1 + x}\,,$$

calcule la serie de Taylor de $g(x) = \ln(1 + x)$ alrededor de $a = 0$.

c) **(0.5 ptos)** Muestre que

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots .$$

d) **(2 ptos)** Recordando que

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

calcule la serie de Taylor de $h(x) = \arctan(x)$ alrededor de $a = 0$.

e) **(0.5 ptos)** Muestre que

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + \cdots .$$