UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Segundo Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Orestes Bueno, Diego Bohorquez y Jorge Cortez

Práctica Calificada 3

1. Derivada direccional (3 ptos)

Sea $a \in \mathbb{R}$ y defina $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^a$.

Se sabe que $Df_u(\boldsymbol{x})$, la derivada direccional de f respecto al vector unitario $\boldsymbol{u}$, se puede escribir como

$$Df_u(\boldsymbol{x}) = Af(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}'\boldsymbol{u}\,.$$

Encuentre A.

2. Binomio de Newton (6 ptos)

El objetivo de esta pregunta es probar la *fórmula del binomio de Newton*, a saber:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{(m-k)!\,k!} a^{m-k} b^k\,, \tag{$\spadesuit$}$$

donde $a, b \neq 0$. Para esto, sea $m \in \mathbb{N}$ (un entero positivo) fijo y considere la función

$$f(x) = (1+x)^m\,.$$

a) **(2 ptos)** Calcule $f^{(k)}(x)$ y muestre que $f^{(k)}(x) = 0$ para $k > m$.

b) **(2 ptos)** Represente $f(x)$ como una serie de MacLaurin con un número finito de términos.

c) **(2 ptos)** Concluya que $(a+b)^m$ tiene la forma dada en ($\spadesuit$). *Ayuda*: Evalúe $f(x)$ en $x = b/a$.

3. Manipulación de series de potencias (6 ptos)

a) **(3 ptos)** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}\,.$$

Calcule $f^{(2003)}(0)$. *Ayuda:* $2003 = 6 \times 333 + 5$.

b) **(3 ptos)** Encuentre una expresión para

$$S = \int_0^a e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

como una suma infinita que depende del escalar a.

4. Estática comparativa (5 ptos)

El siguiente modelo describe el comportamiento de los mercado de dos productos relacionados, A y B:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{Demanda } A & Q_A^D & = & D_A(P_A - P_B) & D'_A(\cdot) < 0 \\
\text{Oferta } A & Q_A^S & = & N \times S_A(P_A) & S'_A(\cdot) > 0 \\
\text{Equilibrio } A & Q_A & \equiv & Q_A^D = Q_A^S & \\
\text{Demanda } B & Q_B^D & = & D_B(P_B - P_A) & D'_B(\cdot) < 0 \\
\text{Oferta } B & Q_B^S & = & S_B(P_B) & S'_B(\cdot) > 0 \\
\text{Equilibrio } B & Q_B & \equiv & Q_B^D = Q_B^S &
\end{array}
$$

donde Q_A y Q_B son cantidades, P_A y P_B son precios y N es la productividad de las empresas que producen el bien A. Los signos de las derivadas de las funciones $D_A(\cdot)$, $S_A(\cdot)$, $D_B(\cdot)$ y $S_B(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, la variable N es tratada como exógena.

a) **(2 ptos)** ¿Bajo qué condiciones existen funciones implícitas para P_A y P_B en términos de N?

b) **(2 ptos)** Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre P_A y P_B de un incremento en N.

c) **(1 pto)** Indique, a su vez, cuál es el efecto sobre Q_A y Q_B de un incremento en N.