UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, y F. Rosales

Práctica Calificada 2

1. Conmutación de matrices (4 ptos)

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices de dimensión $n \times n$ que conmutan, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

a) **(1 pto)** Muestre que si $\boldsymbol{v}$ es vector propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{Bv}$ es también vector propio de $\boldsymbol{A}$.

b) **(1 pto)** Suponga que $\boldsymbol{A}$ posee n valores propios distintos. Muestre que todo vector propio de $\boldsymbol{A}$ es también vector propio de $\boldsymbol{B}$.

c) **(1 pto)** Suponga que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ poseen, cada una, n valores propios distintos. Muestre que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ pueden ser diagonalizadas *en simultáneo*. Es decir, que existe una matriz $\boldsymbol{P}$ y matrices diagonales $\boldsymbol{D}_A$ y $\boldsymbol{D}_B$ tales que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{P}^{-1} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{P}^{-1}\,.$$

d) **(1 pto)** Suponga ahora que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ poseen n valores propios distintos, son simétricas y definidas positivas. Pruebe que $\boldsymbol{AB}$ es simétrica y definida positiva.

2. Simetría e idempotencia (5 ptos)

Para $\alpha \neq 0$, considere la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

a) **(2 ptos)** Encuentre los valores propios y vectores propios de $\boldsymbol{A}$.

b) **(1 pto)** ¿Para qué valores de α la matriz $\boldsymbol{A}$ es idempotente? En este caso, ¿Cuál es el rango de $\boldsymbol{A}$?

c) **(2 ptos)** Encuentre una matriz ortogonal $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}^{-1}$ tal que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}'$.

Ayuda: Si $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ forman una base del subespacio vectorial $\mathcal{W}$, entonces

$$\left\{\boldsymbol{w}_1,\, \boldsymbol{w}_2 - \left(\frac{\boldsymbol{w}_1{}'\boldsymbol{w}_2}{\boldsymbol{w}_1{}'\boldsymbol{w}_1}\right)\boldsymbol{w}_1\right\},$$

forman una base *ortogonal* del subespacio vectorial $\mathcal{W}$.

3. Diagonalización y raíz cuadrada (5 ptos)

Dados $\beta \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) **(2 ptos)** Indique para qué valores de α y β, la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

b) **(3 ptos)** Para $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, encuentre la matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{I}_3$.

4. Forma cuadrática (6 ptos)

Considere la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_4\,,$$

y sea $\boldsymbol{A}$ una matriz simétrica tal que $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

a) **(3 ptos)** Encuentre las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$.

b) **(1 pto)** ¿Cuál es el signo de Q?

c) **(2 ptos)** Escriba Q exclusivamente como una suma de cuadrados.