Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Eduardo Mantilla, Jorge Rodas y Jorge Cortéz

Examen Final

SECCIÓN I

1. Inestabilidad de parámetros (4 ptos)

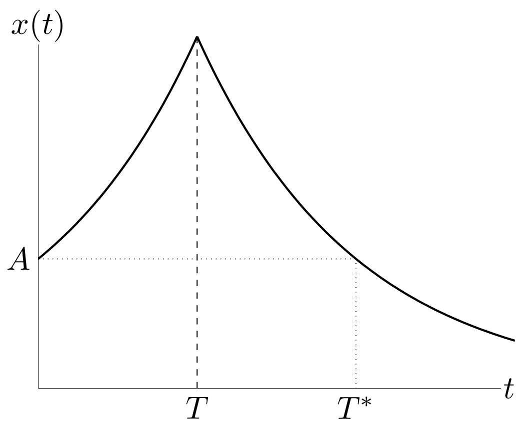
Considere una variable x cuya dinámica es gobernada por la ecuación diferencial

$$\dot{x} - a(t)x = b\,,$$

donde b es una constante. El coeficiente $a(t)$ cambia abruptamente de valor en el instante $t = T$. Específicamente,

$$a(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T \\ -1, & \text{si } t \geq T \end{cases}$$

Este cambio, evidentemente, altera la trayectoria $x(t)$. Esta trayectoria es mostrada en la siguiente Figura, tomando como condición inicial $x(0) = A$:



a) **(2.5 ptos)** Encuentre explícita y completamente la trayectoria $x(t)$.

b) **(1.5 ptos)** Encuentre, además, el valor de T^* mostrado en la Figura y diga cuál es el valor de largo plazo de x.

2. Población y empleo (6 ptos)

N denota el número de empleados en una economía, mientras que S denota el tamaño de la población en edad de trabajar. De esta forma, $e = N/S$ es la tasa de empleo (es decir, la proporción de personas en edad de trabajar que se encuentran empleadas).

La tasa de crecimiento porcentual de N se define según la ecuación diferencial

$$\frac{\dot{N}}{N} = \rho\left(1 - \gamma\frac{N}{K}\right)\,,$$

donde se aprecia que si $\gamma = 0$, entonces N crece exponencialmente a una tasa ρ, mientras que si $\gamma = 1$, la dinámica de N responde a un modelo de crecimiento logístico con capacidad K.

Por su parte, la tasa de crecimiento de la población en edad de trabajar es

$$\frac{\dot{S}}{S} = \alpha + \beta\left(\frac{N}{S-N}\right),$$

donde α es la tasa natural de crecimiento poblacional y el segundo término es una medida del efecto del empleo sobre el crecimiento poblacional.

Se cumple que $1 > \rho > \alpha > \beta > 0$.

a) **(2 ptos)** Asuma que $\gamma = 1$. Encuentre el estado estacionario de N y S, esboce el diagrama de fase relevante en el plano (N, S) y caracterice al estado estacionario.

b) **(1 pto)** Asuma que $\gamma = 1$. Confirme lo encontrado en la parte *a*) mediante el análisis de un sistema linealizado.

c) **(1 pto)** Asuma que $\gamma = 0$. Encuentre una ecuación diferencial que describa la dinámica de la tasa de empleo, $\dot{e} = f(e)$.

d) **(2 ptos)** Asuma que $\gamma = 0$. Determine el valor de estado estacionario de e y estudie su estabilidad, a partir de un diagrama de fase y de la linealización de la ecuación diferencial obtenida en la parte *c*).