UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Segundo Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, D. Bohorquez y C. Aparicio

EJERCICIOS 2

Álgebra matricial

Misceláneos

1. Encuentre el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ y diga para qué valores de α la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible. Para estos valores de α, encuentre la inversa de $\boldsymbol{A}$ mediante el método de cofactores.

$$a) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad b) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre las soluciones a los siguientes sistemas lineales, utilizando la Regla de Cramer.

$$a) \quad \begin{aligned} x+y+z &= 6\,, \\ x+2y-z &= 2\,, \\ x-y+2z &= 5\,. \end{aligned} \qquad b) \quad \begin{aligned} 2x-y+z &= 0\,, \\ -x+y+2z &= -1\,, \\ x+2y-z &= 1\,. \end{aligned} \qquad c) \quad \begin{aligned} x+z &= 1\,, \\ 2y+z &= 2\,, \\ x+y+z &= 2\,. \end{aligned}$$

3. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Se tienen dos matrices cuya suma es la matriz identidad. Si una de ellas es idempotente, la otra también lo es.

b) Si el producto de varias matrices cuadradas es una matriz nula, entonces al menos una de tales matrices debe ser la matriz nula.

c) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas del mismo orden, probar que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) - \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$. Además probar que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$. Finalmente, concluir que $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{I}_n$.

d) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden n. Si $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$ para algún $m > 1$, entonces $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ es una matriz de rango completo.

Valores y vectores propios. Diagonalización

4. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Luego, encuentre una expresión lo más simple posible para la potencia $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$ (n veces).

$$a) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

5. Considere la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son escalares, con $b > 0$. Encuentre el valor de a, b y c si se sabe que la traza de $\boldsymbol{A}$ es igual a 1, el mayor valor propio de $\boldsymbol{A}$ es igual a 3 y la multiplicidad algebraica del menor valor propio es igual a 2.

6. La matriz $\boldsymbol{A}$ mostrada tiene dos de sus valores propios iguales a -1. Encuentre sus otros dos valores propios.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Se conoce que toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si la ecuación característica de $\boldsymbol{A}$ es $P(\lambda) = 0$, entonces $P(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$. Verifique esta propiedad con la matriz brindada.

b) Utilice esta propiedad para calcular la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$.

8. Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

9. La matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensión 3×3, tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Defina

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{v}_1$ es el vector propio de $\boldsymbol{A}$ correspondiente a λ_1, y los vectores $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son vectores propios de $\boldsymbol{A}$ correspondientes a λ_2. Encuentre $\boldsymbol{A}$.

10. Evalúe la veracidad de las siguientes afirmaciones, sobre los valores propios de matrices especiales:

a) Los valores propios del producto de una matriz $\boldsymbol{A}$ por su adjunta son todos iguales.

b) Una matriz de Markov es una matriz cuadrada de elementos comprendidos entre 0 y 1, y cuyas columnas suman 1. En una matriz de Markov de orden 2, uno de los valores propios es 1 y el otro es menor a 1.

c) Una matriz Hadamard $\boldsymbol{H}$ es simétrica y todos sus elementos son iguales a 1 ó -1, de manera que $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}' = n\boldsymbol{I}_n$. Una matriz de Hadamard de orden n puede tener valores propios negativos.

d) Una matriz nilpotente satisface $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ para algún k positivo y finito. Una matriz nilpotente, luego, sólo tiene valores propios iguales a cero.

e) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada tal que $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}$, entonces sus valores propios son iguales a 0.

f) $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada de dimensión 6. Su primera columna es un vector de unos (vector suma). Cada una de las columnas restantes se obtienen duplicando la columna inmediata anterior. Esta matriz tiene seis valores propios iguales a cero.

g) $\lambda = \{1, 2, 3\}$ son valores propios de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sean λ_1 y λ_2 valores propios no nulos y distintos de $\boldsymbol{A}$. Sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ vectores linealmente independientes asociados a λ_1, y $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ vectores linealmente independientes asociados a λ_2. Luego, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, y sea $\boldsymbol{x}$ un vector propio de $\boldsymbol{B}$ asociado al valor propio λ. Luego, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado al valor propio λ.

c) Sea $\mathcal{S}_{A,\lambda}(\boldsymbol{v})$ el conjunto formado por todos los vectores propios asociados a un valor propio λ de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Verifique que $\mathcal{S}_{A,\lambda}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

d) Si $\boldsymbol{v}$ es un vector propio tanto de la matriz $\boldsymbol{A}$ como de la matriz $\boldsymbol{B}$, y sus correspondientes valores propios son α y β, entonces $\boldsymbol{v}$ es vector propio de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ y su respectivo valor propio es $\alpha\beta$.

12. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada y simétrica de dimensión n:

a) Defina $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}_n$, donde μ es un escalar. Pruebe que los valores propios de $\boldsymbol{B}$ son iguales a los valores propios de $\boldsymbol{A}$, menos μ.

b) Comente: Si $-\mu$ no es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}_n$ es una matriz no singular.

c) Comente: Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular, es posible encontrar algún escalar $\tau \neq 0$ tal que $\boldsymbol{A} + \tau \boldsymbol{I}_n$ sea una matriz no singular.

d) Muestre que si ningún valor propio de la matriz $\boldsymbol{A}$ se encuentra en el intervalo (α, β), entonces la matriz $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A} - \beta \boldsymbol{I}_n)$ es definida positiva.

13. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz diagonalizable de orden n con todos sus valores propios iguales a μ. Luego, $\boldsymbol{A} = \mu\ I_n$.

b) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices cuadradas de orden n tales que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Si $\boldsymbol{B}$ tiene n valores propios distintos, entonces la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices cuadradas de orden n, siendo al menos una de ellas no singular. Demuestre que si $\boldsymbol{AB}$ es diagonalizable, entonces también $\boldsymbol{BA}$ es diagonalizable.

d) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz diagonalizable de manera que cada uno de sus valores propios es 0 ó 1, entonces $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente ($\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$).

14. Para un polinomio $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se define la *matriz compañera* a la matriz cuadrada

$$\boldsymbol{C}_n = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Encuentre el polinomio característico de la matriz compañera de $p_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

b) Demuestre que si λ es un valor propio de la matriz compañera $\boldsymbol{C}_3$, entonces $\boldsymbol{v} = (\lambda^2, \lambda, 1)'$ es un vector propio correspondiente a λ.

c) Encuentre una matriz cuadrada de orden 3, no diagonal, con valores propios iguales a -2, 1 y 3.

15. Considere la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son tres números reales, tales que $ac > 0$. Encuentre los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y diga bajo qué condiciones $\boldsymbol{A}$ *no es diagonalizable.*

16. ¿Para qué valores de los escalares a, b ($b_1 > b_2 > b_3 > 0$) y c, las siguientes matrices son diagonalizables?

$$a)\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b)\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_1 - b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1 & -b_4 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 \end{bmatrix}, \qquad c)\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 17 & 0 \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Sean $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ dos matrices cuadradas de dimensión $n \times n$, con las siguientes características:

- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son simétricas e idempotentes.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son complementarias: $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n$.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son mutuamente ortogonales: $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{0}_n$.
- $\text{rango}(\boldsymbol{A}_1) = r_1 > 0$ y $\text{rango}(\boldsymbol{A}_2) = r_2 > 0$.

Defina, además, la matriz $\boldsymbol{B} = \theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2$, donde θ_1 y θ_2 son dos escalares distintos de cero ($\theta_1 \neq \theta_2$).

a) Verifique que $r_2 = n - r_1$. Luego, responda ¿son $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ matrices singulares?

b) Encuentre los valores de θ_1 y θ_2 para los que $\boldsymbol{B}$ sea idempotente.

c) La inversa de $\boldsymbol{B}$ tiene la forma $\boldsymbol{B}^{-1} = \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2$. Halle α_1 y α_2.

d) Muestre que los valores propios de $\boldsymbol{B}$ pueden ser iguales únicamente a θ_1 o a θ_2.

e) Finalmente, muestre que $\det(\boldsymbol{B}) = (\theta_1)^{r_1}(\theta_2)^{r_2}$.

18. Para una matriz $\boldsymbol{X}$ de dimensión $n \times n$ y escalares reales $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, defina el polinomio matricial

$$f(\boldsymbol{X}) = c_0 \boldsymbol{I}_n + c_1 \boldsymbol{X} + c_2 \boldsymbol{X}^2 + \cdots + c_m \boldsymbol{X}^m \,.$$

Esta función evaluada en un escalar x da como resultado el polinomio

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_m x^m \,.$$

a) Muestre que si λ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(\boldsymbol{A})$.

b) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente de rango k, encuentre $\det(\, f(\boldsymbol{A})\,)$.

Formas cuadráticas

19. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Sean Q_1 y Q_2 formas cuadráticas en n variables, donde Q_1 es definida positiva y Q_2 es semidefinida positiva, entonces la forma cuadrática definida por $Q(\boldsymbol{x}) = Q_1(\boldsymbol{x}) + Q_2(\boldsymbol{x})$ es definida positiva.

b) Si las matrices $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ son definidas positivas, entonces los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son menores que 1.

c) La suma de los cuadrados de tres matrices simétricas (no nulas) es siempre una matriz definida positiva. Además, la suma de tres matrices simétricas (no nulas) elevada al cuadrado es también una matriz definida positiva.

d) Si $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} > 0$, donde $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) > \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$.

e) Si la traza de una matriz cuadrada es igual a cero, entonces esa matriz no puede ser ni definida positiva ni definida negativa.

20. Sea $\boldsymbol{Z}$ una matriz de dimensión $n \times k$ $(n > k)$, y de rango k. Clasifique la naturaleza de la forma cuadrática $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ en los siguientes casos:

$$a)\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,, \quad b)\quad \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\,, \quad c)\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\,, \quad d)\quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\,.$$

21. Escriba las siguientes formas cuadráticas exclusivamente como sumas de cuadrados. Diga si se tratan de formas definidas.

a) $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 23x_3^2 - 72x_1x_3$,

b) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$,

22. Dada la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\beta x_2 x_3\,,$$

donde $\alpha \neq 0$. Estudie el signo de Q en términos de los valores de α y β.

23. Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$.

b) Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *definida positiva* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

c) Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *no definida* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

Matrices particionadas y producto Kronecker

24. El modelo insumo-producto permite determinar los niveles de producción de industrias interdependientes con el propósito de satisfacer demandas futuras. El modelo se puede presentar como

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\,,$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de producción, $\boldsymbol{A}$ es la matriz de insumo-producto y $\boldsymbol{d}$ el vector de demandas.

En una economía hay cuatro industrias para las cuales la matriz insumo-producto es

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix},$$

siendo las correspondientes demandas proyectadas para el próximo ejercicio de 30, 100, 70 y 80 unidades, respectivamente. Encuentre la producción proyectada para cada industria, $\boldsymbol{x}$.

25. Demuestre las siguientes propiedades:

a) El determinante del producto Kronecker de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden 2 y la matriz $\boldsymbol{Z}$ de orden q es igual al producto del determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ elevado a la q por el determinante de la matriz $\boldsymbol{Z}$ elevado al cuadrado. Asuma que $\det(\boldsymbol{Z}) \neq 0$.

b) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices ortogonales. Luego, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ es ortogonal.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices idempotentes. Luego, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ es idempotente.

d) La traza del producto Kronecker de dos matrices es igual al producto de las trazas de las mismas.

e) El producto Kronecker de dos matrices defindas negativas es definida positiva.

f) Para cualquier par de matrices cuadradas $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del mismo orden y sin importar quiénes sean las matrices $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$, se verifica que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{I}_n\,.$$

26. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada no singular. Encuentre la inversa de la matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & 4\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & 5\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \end{bmatrix}.$$

27. Sea $\boldsymbol{x}$ un vector no nulo tal que $(\boldsymbol{A}^2 \otimes \boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas. Probar que la matriz $\boldsymbol{M}$ es singular:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

28. Sea $\boldsymbol{s}$ un vector suma (lleno de unos) de dimensión n. Defina

$$\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{I}_c \otimes \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{nc} - \boldsymbol{P}\,.$$

Muestre que $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ son simétricas e idempotentes ¿Qué valores propios se esperaría que tengan estas matrices? ¿Cuál es el rango de estas matrices?

29. Encuentre el determinante y los valores propios de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & a & 0 & a^2 \\ 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 & a^2 & 0 & a \\ a & 0 & a^2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & a & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & a & a^2 \\ a & 1 & 0 & 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 & 1 & a \\ a^2 & a & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}.$$