UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2018
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, Y. García, J. Zúñiga y D. Bohorquez

SOLUCIONARIO 2

Álgebra matricial

Misceláneos

1. Encuentre el determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ y diga para qué valores de α la matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible. Para estos valores de α, encuentre la inversa de $\boldsymbol{A}$ mediante el método de cofactores.

$$a) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \qquad\qquad b) \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) Para calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$, utilizamos el método de expansión de filas:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1(-\alpha+1) - 1(-1)(3\alpha+1) + 2(3+1) = 2\alpha + 10\,.$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible cuando su determinante es distinto de cero: $\alpha \neq -5$.

Para calcular la inversa de $\boldsymbol{A}$ utilizamos el *método de cofactores*:

1. Se calculan los *menores* de la matriz. El menor M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j de la matriz $\boldsymbol{A}$.
2. Se calcula la *matriz de cofactores*, con elemento típico $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.
3. La inversa es igual a $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{C}'/\det(\boldsymbol{A})$. En palabras, la traspuesta de la matriz de cofactores (conocida como *matriz adjunta*) dividida por el determinante.

La matriz de cofactores de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & -3\alpha-1 & 4 \\ \alpha+2 & \alpha-2 & -2 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

Con ello, la inversa es

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{C}'}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{1}{2\alpha+10}\begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha+2 & 3 \\ -3\alpha-1 & \alpha-2 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Para calcular el determinante de $\boldsymbol{A}$, la reducimos con operaciones elementales a una matriz triangular:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & \alpha+3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{7}(\alpha+10) \end{vmatrix} = 3(\alpha+10)\,.$$

La matriz $\boldsymbol{A}$ es invertible (no singular) cuando su determinante es distinto de cero. En consecuencia, $\boldsymbol{A}$ es invertible cuando $\alpha + 10 \neq 0$ o $\alpha \neq -10$.

Utilizando el método de cofactores, se tiene que la matriz de cofactores de $\boldsymbol{A}$ es

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+\alpha & -9 & 2\alpha-1 \\ 12+\alpha & 3 & -3-\alpha \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Con ello, la inversa es

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\boldsymbol{C}'}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{1}{3\alpha+30} \begin{bmatrix} 4+\alpha & 12+\alpha & 2 \\ -9 & 3 & 3 \\ 2\alpha-1 & -3-\alpha & 7 \end{bmatrix}.$$

■

2. Encuentre las soluciones a los siguientes sistemas lineales, utilizando la Regla de Cramer.

a)
$$\begin{aligned} x+y+z &= 6\,, \\ x+2y-z &= 2\,, \\ x-y+2z &= 5\,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x-y+z &= 0\,, \\ -x+y+2z &= -1\,, \\ x+2y-z &= 1\,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x+z &= 1\,, \\ 2y+z &= 2\,, \\ x+y+z &= 2\,. \end{aligned}$$

Solución:

Según la Regla de Cramer, la solución al sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{x} = (x, y, z)'$, viene dada por

$$x = \frac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})}\,, \qquad y = \frac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})}\,, \qquad \text{y} \qquad z = \frac{\det(\boldsymbol{A}_z)}{\det(\boldsymbol{A})}\,,$$

donde $\boldsymbol{A}$ es la matriz de coeficientes del sistema y $\boldsymbol{A}_x$, $\boldsymbol{A}_y$ y $\boldsymbol{A}_z$ son matrices auxiliares. La matriz $\boldsymbol{A}_x$ se obtiene al reemplazar la columna de la matriz $\boldsymbol{A}$ asociada con la variable x (es decir, la primera columna) por el vector $\boldsymbol{b}$; análogamente, las matrices $\boldsymbol{A}_y$ y $\boldsymbol{A}_z$ se obtienen al reemplazar las columnas de la matriz $\boldsymbol{A}$ asociadas con las variables y y z, respectivamente (es decir, la segunda y tercera columna, respectivamente), por el vector $\boldsymbol{b}$.

a) Se tiene que

$$\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(3) - 1(3) + 1(-3) = -3\,, \\
\det(\boldsymbol{A}_x) &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 6(3) - 1(9) + 1(-12) = -3\,, \\
\det(\boldsymbol{A}_y) &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(9) - 6(3) + 1(3) = -6\,, \\
\det(\boldsymbol{A}_z) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(12) - 1(3) + 6(-3) = -9\,.
\end{aligned}$$

Así, $x = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{-3}{-3} = 1$, $y = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{-6}{-3} = 2$ y $z = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_z)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{-9}{-3} = 3$.

b) Se tiene que

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -14\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_z) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\,.$$

Con ello, $x = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{2}{7}$, $y = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{1}{7}$ y $z = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_z)}{\det(\boldsymbol{A})} = -\dfrac{3}{7}$.

c) Se tiene que

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1\,,$$

$$\det(\boldsymbol{A}_z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Así, $x = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, $y = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{-1}{-1} = 1$ y $z = \dfrac{\det(\boldsymbol{A}_z)}{\det(\boldsymbol{A})} = \dfrac{0}{-1} = 0$.

■

3. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Se tienen dos matrices cuya suma es la matriz identidad. Si una de ellas es idempotente, la otra también lo es.

b) Si el producto de varias matrices cuadradas es una matriz nula, entonces al menos una de tales matrices debe ser la matriz nula.

c) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas del mismo orden, probar que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$. Además probar que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA})$. Finalmente, concluir que $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{I}_n$.

d) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada de orden n. Si $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$ para algún $m > 1$, entonces $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ es una matriz de rango completo.

Solución:

a) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices tales que $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n$, donde $\boldsymbol{A}$ es idempotente. Luego:

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \quad \to \quad (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B} \quad \to \quad (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B}$$
$$\to \quad \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{B} \quad \to \quad -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^2\,.$$

Así, si $\boldsymbol{A}$ es idempotente, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ es idempotente. La afirmación es verdadera.

b) La afirmación es falsa. Varios contraejemplos:

- Suponga que $\boldsymbol{A}$ es singular. Luego, el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ puede ser resuelto para algún $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Si las columnas de $\boldsymbol{B}$ son colineales a $\boldsymbol{x}$, entonces $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$. Un ejemplo numérico de esta situación es el siguiente:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Suponga que $\boldsymbol{A}$ es idempotente y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$. Acá ocurre también que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{0}$.
- Una generalización del caso previo ocurre cuando las matrices involucradas no son necesariamente cuadradas. Suponga que $\boldsymbol{A}$ es de $n \times k$, de rango k. Defina $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'$. Es fácil verificar que $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$ y que $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

c) Defina $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$. Sobre la diagonal, el elemento típico de $\boldsymbol{C}$ es $c_{ii} = a_{ii} \pm b_{ii}$. Se tiene que

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad \operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\,, \quad \operatorname{tr}(\boldsymbol{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \pm \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\,.$$

Por su parte, defina $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{AB}$ y $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{BA}$. Los elementos sobre la diagonal de estas matrices son

$$m_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \qquad \text{y} \qquad n_{ii} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji}\,.$$

Entonces,

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{N}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})\,.$$

Finalmente, defina $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$. De los resultados anteriores, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{AB}) - \operatorname{tr}(\boldsymbol{BA}) = 0$. Dado que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{G}) = 0$ y $\operatorname{tr}(\boldsymbol{I}_n) = n > 0$, necesariamente $\boldsymbol{G} \neq \boldsymbol{I}_n$.

d) Sea $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{m-1}$. Al premultiplicar por $(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$,

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{m-1}) = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{I}_n\,,$$

donde se ha utilizado el hecho que $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$. Luego, la inversa de $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ es $\boldsymbol{S}$. Además, como $(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$ tiene inversa, esta matriz es de rango completo.

■

Valores y vectores propios. Diagonalización

4. Encuentre los valores y vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Luego, encuentre una expresión lo más simple posible para la potencia $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$ (n veces).

$$a) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad\qquad b) \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Tras calcular los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}$, se llega a la descomposición espectral $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$. Para un número entero positivo n, la descomposición espectral de $\boldsymbol{A}^n$ es, simplemente,

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}\boldsymbol{PDP}^{-1}\cdots\boldsymbol{PDP}^{-1} = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}\,.$$

a) Los valores propios se hallan resolviendo la ecuación

$$|\ \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\ | = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(2+\lambda) + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 1\,.$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Para $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda = -1$,

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Las columnas de $\boldsymbol{P}$ contienen a los vectores propios de $\boldsymbol{A}$, mientras que la matriz $\boldsymbol{D}$ es diagonal y sus elementos vienen dados por los valores propios correspondientes:

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{D}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

por lo que

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (-1)^n - 3 & -3(-1)^n + 3 \\ (-1)^n - 1 & -3(-1)^n + 1 \end{bmatrix}.$$

Note que si n es par de modo que $(-1)^n = 1$, entonces

$$\boldsymbol{A}^n = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}_2,$$

mientras que si n es impar de modo que $(-1)^n = -1$,

$$\boldsymbol{A}^n = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

En resumen, $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{I}_2$ si n es par y $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}$ si n es impar. $\boldsymbol{A}$ es una matriz involutiva.

b) Los valores propios se hallan resolviendo la ecuación

$$|\ \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}\ | = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(3-\lambda)(3+\lambda) + 8 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm 1.$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Para $\lambda = 1$,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda = -1$,

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En resumen,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

De este modo,

$$\boldsymbol{D}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

lo que permite concluir que

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(-1)^n + 2 & -2(-1)^n + 2 \\ (-1)^n - 1 & 2(-1)^n - 1 \end{bmatrix}.$$

Si n es par, $(-1)^n = 1$, se consigue que $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{I}_2$. Si n es impar, $(-1)^n = -1$, se llega a $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ es también una matriz involutiva.

■

5. Considere la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son escalares, con $b > 0$. Encuentre el valor de a, b y c si se sabe que la traza de $\boldsymbol{A}$ es igual a 1, el mayor valor propio de $\boldsymbol{A}$ es igual a 3 y la multiplicidad algebraica del menor valor propio es igual a 2.

Solución:

El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} c-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & b \\ 0 & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (c-\lambda)\left[(a-\lambda)^2 - b^2\right] = (c-\lambda)(a-b-\lambda)(a+b-\lambda)\,.$$

Así, los valores propios son $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = a-b$ y $\lambda_3 = a+b$.

Dado que $b > 0$, se concluye que $\lambda_3 > \lambda_2$. Ello implica que λ_2 es el menor valor propio de $\boldsymbol{A}$. Dado que la multiplicidad alegraica del menor valor propio es igual a 2, debe ocurrir necesariamente que $\lambda_2 = \lambda_1$, es decir $c = a-b$. Asimismo, por dato del problema $\lambda_3 = 3$, es decir $a+b = 3$.

Finalmente, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = c + 2a = 1$. Resolviendo el sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, se encuentra que $a = 1$, $b = 2$ y $c = -1$. ■

6. La matriz $\boldsymbol{A}$ mostrada tiene dos de sus valores propios iguales a -1. Encuentre sus otros dos valores propios.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Sean λ_1 y λ_2 los otros dos valores propios de $\boldsymbol{A}$. Como la traza de $\boldsymbol{A}$ es igual a la suma de los valores propios, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 + (-1) + (-1) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 4$. De aquí, $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$.

Por su parte, $\det(\boldsymbol{A})$ es igual al producto de los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Utilizando operaciones elementales,

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3(-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3(-1)^8 \cdot 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 9\,.$$

Luego, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 9$. De aquí, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 9$. Resolviendo el sistema dado por $\lambda_1 + \lambda_2 = 6$ y $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 9$, obtenemos $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 3$. ■

7. Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Se conoce que toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si la ecuación característica de $\boldsymbol{A}$ es $P(\lambda) = 0$, entonces $P(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$. Verifique esta propiedad con la matriz brindada.

b) Utilice esta propiedad para calcular la inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$.

Solución:

a) El polinomio característico de una matriz de 2×2 es $P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\lambda + \det(\boldsymbol{A})$. Luego,

$$P(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 4 & 20 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-8+4 & 20-20+0 \\ 0-0+0 & 4-8+4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,.$$

b) Al premultiplicar $\boldsymbol{A}^2 - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A} + \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n = \mathbf{0}$ por $\boldsymbol{A}^{-1}$ se consigue $\boldsymbol{A} - \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n + \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = \mathbf{0}$. Luego,

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{I}_n - \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\boldsymbol{A} = \frac{4}{4}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -5\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

■

8. Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$.

Solución:

Considere una matriz $\boldsymbol{A}$ simétrica y semidefinida positiva (sus valores propios no son negativos). La descomposición espectral de $\boldsymbol{A}$ es $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$, donde $\boldsymbol{P}$ es ortogonal. Dado que $\boldsymbol{D}$ es diagonal con valores no negativos, se puede pensar en su "raíz cuadrada" $\boldsymbol{\Lambda}$ tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Lambda}^2$. $\boldsymbol{\Lambda}$ es también diagonal y contiene sobre la diagonal la raíz cuadrada de los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Así, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^2\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}' = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda})'$, donde se usa el hecho que $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}'$. De este modo, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}'$, donde $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$.

El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 3-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda).$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son, pues, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$. Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ -\alpha\end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_3\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_3 = \mathbf{0} \quad\rightarrow\quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix},$$

donde $\alpha = (\sqrt{2})^{-1}$ dado que los vectores propios son ortonormales. Con ello,

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & \alpha\\ 0 & -\alpha & \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2}\alpha & 2\alpha\\ 0 & -\sqrt{2}\alpha & 2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

■

9. La matriz $\boldsymbol{A}$, de dimensión 3×3, tiene valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. Defina

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix},$$

donde $\boldsymbol{v}_1$ es el vector propio de $\boldsymbol{A}$ correspondiente a λ_1, y los vectores $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ son vectores propios de $\boldsymbol{A}$ correspondientes a λ_2. Encuentre $\boldsymbol{A}$.

Solución:

Podemos proceder de dos maneras. La primera es utilizar la descomposición espectral directamente $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$. Para ello, necesitamos invertir $\boldsymbol{P} = [\,\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\,]$. Procedemos reduciendo, mediante operaciones elementales de filas, la matriz $[\,\boldsymbol{P} \mid \boldsymbol{I}_3\,]$ a la forma $\left[\,\boldsymbol{I}_3 \mid \boldsymbol{P}^{-1}\,\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to (F_1 + F_3) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to F_2 \times 2 \text{ y } F_3 \times (-2) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \to (F_3 + F_1) \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Se consiguió la forma $[\,2\boldsymbol{I}_3 \mid \boldsymbol{C}\,]$ por lo que $\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}$. Con ello,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La segunda manera, que es más simple, consiste en notar que los vectores propios provistos son ortogonales. Así, si se normalizaran, la matriz $\boldsymbol{P}$ sería ortogonal y no requeriríamos calcular su inversa. En particular, considere $\boldsymbol{P} = [\,\alpha\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \alpha\boldsymbol{v}_3]$ donde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ normaliza los vectores propios para que tengan módulo unitario. Entonces,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha^2 & 0 & -\alpha^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 3\alpha^2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

llegándose al mismo resultado. ■

10. Evalúe la veracidad de las siguientes afirmaciones, sobre los valores propios de matrices especiales:

a) Los valores propios del producto de una matriz $\boldsymbol{A}$ por su adjunta son todos iguales.

b) Una matriz de Markov es una matriz cuadrada de elementos comprendidos entre 0 y 1, y cuyas columnas suman 1. En una matriz de Markov de orden 2, uno de los valores propios es 1 y el otro es menor a 1.

c) Una matriz Hadamard $\boldsymbol{H}$ es simétrica y todos sus elementos son iguales a 1 ó -1, de manera que $\boldsymbol{H}'\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{H}' = n\boldsymbol{I}_n$. Una matriz de Hadamard de orden n puede tener valores propios negativos.

d) Una matriz nilpotente satisface $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$ para algún k positivo y finito. Una matriz nilpotente, luego, sólo tiene valores propios iguales a cero.

e) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada tal que $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}$, entonces sus valores propios son iguales a 0.

f) $\boldsymbol{A}$ es una matriz cuadrada de dimensión 6. Su primera columna es un vector de unos (vector suma). Cada una de las columnas restantes se obtienen duplicando la columna inmediata anterior. Esta matriz tiene seis valores propios iguales a cero.

g) $\lambda = \{1, 2, 3\}$ son valores propios de la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

a) Los valores propios de $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{I}_n$, donde μ es un escalar, satisfacen

$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I}_n) = 0 \quad \to \quad \det([\mu - \lambda]\boldsymbol{I}_n) = 0 \quad \to \quad (\mu - \lambda)^n \det(\boldsymbol{I}_n) = 0\,.$$

Es decir, $\lambda = \mu$ con multiplicidad n.

Ahora, sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{Adj}(\boldsymbol{A})$. Recuerde que, por definición, $\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{Adj}(\boldsymbol{A})/\det(\boldsymbol{A})$, de modo que $\operatorname{Adj}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \det(\boldsymbol{A})$. Así, $\boldsymbol{B} = \det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n$. Es decir, $\mu = \det(\boldsymbol{A})$ en el análisis anterior. Todos los valores propios de $\boldsymbol{A} \cdot \operatorname{Adj}(\boldsymbol{A})$ son iguales a $\det(\boldsymbol{A})$.

b) Sean p y q dos números entre cero y uno. La matriz de Markov mencionada tiene la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\lambda + \det(\boldsymbol{A})$ y es resuelto por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})^2 - 4\det(\boldsymbol{A})}}{2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4[pq - (1-p)(1-q)]}}{2} \\ &= \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4(p+q) + 4}}{2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q-2)^2}}{2} = \frac{(p+q) \pm (p+q-2)}{2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\lambda_1 = \frac{(p+q) - (p+q-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{(p+q) + (p+q-2)}{2} = \frac{2(p+q-1)}{2} = p+q-1 < 2-1 = 1.$$

c) Sea λ un valor propio de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{v}$ su correspondiente vector propio. Recuerde que $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'$. Luego,

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \quad \to \quad \boldsymbol{H}'\boldsymbol{H}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{H}'\lambda\boldsymbol{v} \quad \to \quad n\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{H}'\boldsymbol{v} \quad \to \quad n\boldsymbol{v} = \lambda(\boldsymbol{H}\boldsymbol{v}) \quad \to \quad n\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v}.$$

Como $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $n - \lambda^2 = 0$ necesariamente. Luego, $\lambda = \pm\sqrt{n}$. Los valores propios de $\boldsymbol{H}$ pueden ser negativos, e iguales a $-\sqrt{n}$.

d) Sean λ los valores propios de $\boldsymbol{A}$, y α los valores propios de $\boldsymbol{A}^k$. Dado que $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$, necesariamente ocurre que $\alpha = 0$: todos los valores propios de una matriz nula son cero. Por su parte, como $\boldsymbol{A}^k$ es una potencia de $\boldsymbol{A}$, ocurre necesariamente que $\lambda^k = \alpha$. Los valores propios de $\boldsymbol{A}$, luego, son todos iguales a cero.

e) La afirmación es falsa. Sea λ un valor propio de $\boldsymbol{A}$. Luego, λ^3 es un valor propio de $\boldsymbol{A}^3$. Pero como $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}$, debe ocurrir que $\lambda = \lambda^3$ o que $\lambda^3 - \lambda = 0$. Luego, $\lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$, de donde se aprecia que los posibles valores de λ son 0, -1 y 1.

f) Sea $\boldsymbol{A}$ dicha matriz. Como todas las columnas de $\boldsymbol{A}$ son múltiplos de la primera, el rango de la matriz es 1. Luego, la matriz tiene al menos $(6-1)$ valores propios nulos. Pero $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}) = 1+2+4+8+16+32 = 63$, por lo que no todos los valores propios son cero. En consecuencia, $\boldsymbol{A}$ tiene necesariamente cinco valores propios nulos y uno igual a 63.

g) Basta con probar que $\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_5) = 0$ para $\lambda = \{1, 2, 3\}$. Se tiene que

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} - 3\boldsymbol{I}_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

En todos los casos obtenemos una dependencia lineal entre las filas de estas matrices. De hecho, es simple verificar que para $\lambda = 1$, $F_2 - F_1 = F_4 - F_5$, mientras que para $\lambda = \{2, 3\}$, $F_1 + F_2 = F_4 + F_5$. Por ello, el determinante de todas estas matrices es igual a cero. ■

11. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sean λ_1 y λ_2 valores propios no nulos y distintos de $\boldsymbol{A}$. Sean $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ vectores linealmente independientes asociados a λ_1, y $\boldsymbol{w}_1$ y $\boldsymbol{w}_2$ vectores linealmente independientes asociados a λ_2. Luego, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) Sea $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, y sea $\boldsymbol{x}$ un vector propio de $\boldsymbol{B}$ asociado al valor propio λ. Luego, $\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado al valor propio λ.

c) Sea $\mathcal{S}_{A,\lambda}(\boldsymbol{v})$ el conjunto formado por todos los vectores propios asociados a un valor propio λ de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}_{n\times n}$. Verifique que $\mathcal{S}_{A,\lambda}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

d) Si $\boldsymbol{v}$ es un vector propio tanto de la matriz $\boldsymbol{A}$ como de la matriz $\boldsymbol{B}$, y sus correspondientes valores propios son α y β, entonces $\boldsymbol{v}$ es vector propio de $\boldsymbol{AB}$ y su respectivo valor propio es $\alpha\beta$.

Solución:

a) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ escalares tales que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\beta_1\boldsymbol{w}_1+\beta_2\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$. Luego, $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2 = -\beta_1\boldsymbol{w}_1-\beta_2\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{z}$. Este vector $\boldsymbol{z}$ es combinación lineal de dos vectores propios correspondientes a λ_1, por lo que $\boldsymbol{Az} = \lambda_1\boldsymbol{z}$. Del mismo modo, $\boldsymbol{z}$ es también combinación lineal de dos vectores propios correspondientes a λ_2, por lo que $\boldsymbol{Az} = \lambda_2\boldsymbol{z}$. Ello implica que que $(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$. Considerando que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ necesariamente. Así tenemos que $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ y que $\beta_1\boldsymbol{w}_1 + \beta_2\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$. Pero como $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son vectores linealmente independientes, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. De igual forma, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Esto prueba que el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ es linealmente independiente.

b) Partimos de la definición $\boldsymbol{Bx} = \lambda\boldsymbol{x}$. Note que $\boldsymbol{SB} = \boldsymbol{AS}$. Así, $\boldsymbol{SBx} = \lambda\boldsymbol{Sx}$ conlleva a $\boldsymbol{ASx} = \lambda\boldsymbol{Sx}$ o, de modo más compacto, $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Sx}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado al valor propio λ.

c) Si $\boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{S}_{A,\lambda}$, entonces $\boldsymbol{Av}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1$. Asimismo, si $\boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{S}_{A,\lambda}$, entonces $\boldsymbol{Av}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_2$. Defina la combianción lineal $\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2$. Al combinar ambas igualdades, $\alpha_1\boldsymbol{Av}_1 + \alpha_2\boldsymbol{Av}_2 = \alpha_1\lambda\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\lambda\boldsymbol{v}_2$, se llega a $\boldsymbol{Aw} = \lambda\boldsymbol{w}$. Dado que $\boldsymbol{w} \in \mathcal{S}_{A,\lambda}$, se concluye que $\mathcal{S}_{A,\lambda}$ es un subespacio vectorial.

d) Se tiene que, por definición, $\boldsymbol{Av} = \alpha\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{Bv} = \beta\boldsymbol{v}$. Al premutliplicar la última igualdad por $\boldsymbol{A}$ se obtiene $\boldsymbol{ABv} = \beta(\boldsymbol{Av}) = \alpha\beta\boldsymbol{v}$, lo que establece el resultado. ■

12. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada y simétrica de dimensión n:

a) Defina $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}_n$, donde μ es un escalar. Pruebe que los valores propios de $\boldsymbol{B}$ son iguales a los valores propios de $\boldsymbol{A}$, menos μ.

b) Comente: Si $-\mu$ no es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}_n$ es una matriz no singular.

c) Comente: Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz singular, es posible encontrar algún escalar $\tau \neq 0$ tal que $\boldsymbol{A} + \tau\boldsymbol{I}_n$ sea una matriz no singular.

d) Muestre que si ningún valor propio de la matriz $\boldsymbol{A}$ se encuentra en el intervalo (α, β), entonces la matriz $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A} - \beta\boldsymbol{I}_n)$ es definida positiva.

Solución:

a) El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$P_A(\lambda) = |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_n| = |\boldsymbol{A} - \mu\boldsymbol{I}_n - \lambda\boldsymbol{I}_n + \mu\boldsymbol{I}_n| = |\boldsymbol{B} - (\lambda-\mu)\boldsymbol{I}_n| = P_B(\lambda-\mu)\,.$$

Así, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son λ y los valores propios de $\boldsymbol{B}$ son $\lambda - \mu$

b) El polinomio caracterstico de $\boldsymbol{A}$ es $P(x) = |\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I}_n|$. Si λ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, se cumple por definición que $P(\lambda) = 0$. Si $-\mu$ no es un valor propio, entonces se cumple que $P(-\mu) = |\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}_n| \neq 0$. El determinante de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}_n$ es distinto de cero, por lo que se concluye que $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}_n$ es no singular.

c) Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son λ y los de $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \tau\boldsymbol{I}_n$ son $\lambda + \tau$. Basta que $\tau \neq -\lambda$ para que $\boldsymbol{B}$ sea no singular.

d) De la descomposición espectral, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}'$, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}'$ y $\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{PP}'$. Así,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{I}_n)(\boldsymbol{A} - \beta\boldsymbol{I}_n) = \boldsymbol{A}^2 - (\alpha+\beta)\boldsymbol{A} + \alpha\beta\boldsymbol{I}_n &= \boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}' - (\alpha+\beta)\boldsymbol{P\Lambda P}' + \alpha\beta\boldsymbol{PP}' \\ &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Lambda}^2 - (\alpha+\beta)\boldsymbol{\Lambda} + \alpha\beta\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{PDP}'\,.\end{aligned}$$

La matriz $\boldsymbol{D}$ es diagonal y se aprecia que es la matriz diagonal semejante a $\boldsymbol{B}$, es decir contiene sobre la diagonal a los valores propios de $\boldsymbol{B}$. El elemento típico de $\boldsymbol{D}$ tiene la forma $d = \lambda^2 - (\alpha+\beta)\lambda + \alpha\beta = (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$, donde λ representa a los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Por dato del problema, los valores propios son tales que $\lambda < \alpha$ o $\lambda > \beta$. En el primer caso se tiene también que $\lambda < \beta$ por lo que $\lambda - \alpha < 0$, $\lambda - \beta < 0$ y $d > 0$. En el segundo caso se tiene también que $\lambda > \alpha$ por lo que $\lambda - \alpha > 0$, $\lambda - \beta > 0$ y $d > 0$. Los valores propios de $\boldsymbol{B}$ son siempre positivos y, por tanto, la matriz $\boldsymbol{B}$ es definida positiva.

■

13. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz diagonalizable de orden n con todos sus valores propios iguales a μ. Luego, $\boldsymbol{A} = \mu\ \boldsymbol{I}_n$.

b) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices cuadradas de orden n tales que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Si $\boldsymbol{B}$ tiene n valores propios distintos, entonces la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices cuadradas de orden n, siendo al menos una de ellas no singular. Demuestre que si $\boldsymbol{AB}$ es diagonalizable, entonces también $\boldsymbol{BA}$ es diagonalizable.

d) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz diagonalizable de manera que cada uno de sus valores propios es 0 ó 1, entonces $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente ($\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$).

Solución:

a) Dado que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, entonces existen la matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz $\boldsymbol{P}$ no singular tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$. Pero como $\boldsymbol{D}$ lleva el mismo valor propio μ en cada posición de la diagonal, entonces $\boldsymbol{D} = \mu\boldsymbol{I}_n$. Luego, $\boldsymbol{A} = \mu\boldsymbol{PI}_n\boldsymbol{P}^{-1} = \mu\boldsymbol{PP}^{-1} = \mu\boldsymbol{I}_n$.

b) Si $\boldsymbol{B}$ tiene n valores propios distintos entonces es diagonalizable. Luego, existen la matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y la matriz $\boldsymbol{P}$ no singular tales que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}$. Luego, dado que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, entonces

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} \quad &\to \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{PP}^{-1})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{PP}^{-1})\boldsymbol{A} \quad \to \quad \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PP}^{-1})\boldsymbol{BP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{PP}^{-1})\boldsymbol{AP}\\ &\to \quad (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}) = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) \quad \to \quad \boldsymbol{YD} = \boldsymbol{DY},\ \text{donde } \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\,.\end{aligned}$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los elementos de la diagonal de la matriz $\boldsymbol{D}$. Luego, un elemento arbitrario m_{ij} de la matriz $\boldsymbol{YD}(i \neq j)$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de $\boldsymbol{Y}$ por la j-ésima columna de $\boldsymbol{D}$, esto es $\lambda_j y_{ij}$. De manera análoga, un elemento arbitrario de la matriz $\boldsymbol{DY}(i \neq j)$ se obtiene multiplicando la i-ésima fila de $\boldsymbol{D}$ por la j-ésima columna de $\boldsymbol{Y}$, esto es $\lambda_i y_{ij}$. Pero como $\boldsymbol{YD} = \boldsymbol{DY}$, entonces $\lambda_j y_{ij} = \lambda_i y_{ij}$. Siendo $\lambda_i \neq \lambda_j$, ello sólo es posible con $y_{ij} = 0$. De aquí se deduce que Y es una matriz diagonal donde $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. Esto implica que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Es interesante notar que la matriz $\boldsymbol{P}$ que diagonaliza a $\boldsymbol{A}$, también diagonaliza a $\boldsymbol{B}$. Ello ocurre porque $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ conmutan ($\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$).

c) Como $\boldsymbol{AB}$ es diagonalizable, entonces existen las matrices $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{D}$ tales que $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{DP}$. Emergen dos casos:

- $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe: $\boldsymbol{BA} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{DPA} = (\boldsymbol{PA})^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{PA}) \equiv \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{DQ}$. Es decir, $\boldsymbol{BA}$ es diagonalizable. Los valores propios son los mismos que los de $\boldsymbol{AB}$.
- $\boldsymbol{B}^{-1}$ existe: $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{BA}(\boldsymbol{BB}^{-1}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{BP}^{-1}\boldsymbol{DPB}^{-1} = (\boldsymbol{PB}^{-1})^{-1}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{PB}^{-1}) \equiv \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{DQ}$. Es decir, $\boldsymbol{BA}$ es diagonalizable. Los valores propios son los mismos que los de $\boldsymbol{AB}$.

d) Como $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable, entonce existen una matriz diagonal $\boldsymbol{D}$ y una matriz $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. Luego, $\boldsymbol{D}^2 = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{PP}^{-1})\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AAP} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$. Pero la matriz $\boldsymbol{D}^2$ es una matriz diagonal cuyos elementos son los cuadrados de los elementos de $\boldsymbol{D}$. Como los elementos de la diagonal de $\boldsymbol{D}$ son 0 ó 1, y estos números al cuadrado no cambian de valor, entonces $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^2$. De aquí, $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$, de donde se obtiene la idempotencia $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

■

14. Para un polinomio $p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ se define la *matriz compañera* a la matriz cuadrada

$$\boldsymbol{C}_n = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Encuentre el polinomio característico de la matriz compañera de $p_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

b) Demuestre que si λ es un valor propio de la matriz compañera $\boldsymbol{C}_3$, entonces $\boldsymbol{v} = (\lambda^2, \lambda, 1)'$ es un vector propio correspondiente a λ.

c) Encuentre una matriz cuadrada de orden 3, no diagonal, con valores propios iguales a -2, 1 y 3.

Solución:

a) El polinomio solicitado es $P(\lambda) = \det(\boldsymbol{C}_3 - \lambda \boldsymbol{I}_3)$. Utilizando la definición de $\boldsymbol{C}_3$,

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -a_2 - \lambda & -a_1 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda + a_2)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-a_0)\begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda^2(\lambda + a_2) - a_1\lambda - a_0 = -(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)\,.$$

Es decir, el polinomio característico de $\boldsymbol{C}_3$ es $P(x) \equiv -p_3(\lambda)$.

b) Se tiene que

$$\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -a_2 & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Pero como λ es un valor propio de $\boldsymbol{C}_3$, se cumple que $-\lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0 = 0$. Entonces

$$\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^3 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Luego, como $\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, entonces $\boldsymbol{v}$ es un vector propio correspondiente a λ.

c) El polinomio característico de una matriz cuadrada de orden 3 con valores propios -2, 1 y 3 es

$$P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)\,.$$

Expandiendo, se obtiene $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6$. Se reconoce que, en $p_3(x)$, $a_2 = -2$, $a_1 = -5$ y $a_0 = 6$. Usando el concepto de matriz compañera, este polinomio característico corresponde a la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

15. Considere la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son tres números reales, tales que $ac > 0$. Encuentre los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y diga bajo qué condiciones $\boldsymbol{A}$ *no es diagonalizable.*

Solución:

El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & c \\ 0 & b - \lambda & 0 \\ a & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (b - \lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & c \\ a & -\lambda \end{vmatrix} = (b - \lambda)(\lambda^2 - ac)\,.$$

Dado que $ac > 0$, los valores propios son $\lambda_1 = b$, $\lambda_2 = \sqrt{ac}$ y $\lambda_3 = -\sqrt{ac}$.

Se tiene que $\lambda_2 = -\lambda_3$ son valores propios distintos. Si $b^2 \neq ac$, entonces λ_1 será también distinto y $\boldsymbol{A}$ será diagonalizable. Por ello, la matriz $\boldsymbol{A}$ podría no ser diagonalizable cuando $b^2 = ac$. Bajo esta condición, $\lambda_1 = b$ es igual a λ_2 o a λ_3.

Defina $\mathcal{E}_b = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = b\boldsymbol{x}\}$. El vector propio asociado con b es

$$(\boldsymbol{A} - b\boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} -b & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La primera ecuación es $x = (c/b)z$ y la segunda $x = (b/a)z$.

Cuando $b = \sqrt{ac}$, ambas ecuaciones se reducen a $x = (\sqrt{c/a})z$, haciendo que el vector propio tenga la forma

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} t\sqrt{c} & s & t\sqrt{a} \end{bmatrix}' = t\begin{bmatrix} \sqrt{c} & 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}' + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}',$$

donde s y t son reales arbitrarios. Se aprecia que $\dim(\mathcal{E}_b) = 2$ que es la mutliplicidad algebraica de $\lambda_1 = b$, por lo que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Por otro lado, cuando $b = -\sqrt{ac}$, ambas ecuaciones se reducen a $x = -(\sqrt{c/a})z$, por lo que

$$\boldsymbol{v} = t\begin{bmatrix} -\sqrt{c} & 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}' + s\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}',$$

Nuevamente, $\dim(\mathcal{E}_b) = 2$ y $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Se concluye que, sin importar la configuración de los escalares a, b y c, $\boldsymbol{A}$ es *siempre* diagonalizable. ■

16. ¿Para qué valores de los escalares a, b ($b_1 > b_2 > b_3 > 0$) y c, las siguientes matrices son diagonalizables?

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 5 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 & b_1 - b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1 & -b_4 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 \end{bmatrix}, \qquad c)\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 17 & 0 \\ c_2 & c_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) Los valores propios de $\boldsymbol{A}$, que es triangular, son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 5$, ambos con multiplicidad 2.

Para que una matriz sea diagonalizable, la dimensión del subespacio vectorial asociado al valor propio repetido debe ser igual a la multiplicidad del mismo. Además, dicha dimensión es igual a $n - \rho(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$.

Se tiene que

$$\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_4 = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 3 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_4 \begin{bmatrix} -3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primero, se debe cumplir que el $\rho(\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}) = 4 - 2 = 2$. La única forma en que eso ocurra es que $\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_4$ tenga dos columnas linealmente independientes y eso se logra cuando $a_1 = 0$.

Por su parte, se debe cumplir que el $\rho(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}) = 4 - 2 = 2$. La única forma en que eso ocurra es que $\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_4$ tenga dos filas linealmente independientes y eso se logra cuando $a_6 = 0$.

En conclusión, la matriz $\boldsymbol{A}$ será diagonalizable si y sólo si $a_1 = a_6 = 0$.

b) El polinomio característico es de $\boldsymbol{B}$ es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_3 & b_1 - b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1 - \lambda & -b_4 & b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & b_2 - \lambda & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - \lambda & b_3 \\ b_3 & b_1 - \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_2 - \lambda & b_3 \\ b_3 & b_2 - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= ((b_1 - \lambda)^2 - b_3^2)((b_2 - \lambda)^2 - b_3^2) = (\lambda - b_1 - b_3)(\lambda - b_1 + b_3)(\lambda - b_2 - b_3)(\lambda - b_2 + b_3).$$

Los valores propios son $\lambda_1 = b_1 + b_3$, $\lambda_2 = b_1 - b_3$, $\lambda_3 = b_2 + b_3$ y $\lambda_4 = b_2 - b_3$. Como $b_1 > b_2 > b_3 > 0$, entonces:

$$b_1 + b_3 > b_1 - b_3 > b_2 - b_3 \qquad \text{y} \qquad b_1 + b_3 > b_2 + b_3 > b_2 - b_3.$$

Por lo tanto, los únicos valores propios que pueden ser iguales son λ_2 y λ_3. Si esto ocurre, $b_1 = b_2 + 2b_3$ y el valor propio repetido sería $\lambda_2 = \lambda_3 = b_2 + b_3$. Para este valor propio, los vectores propios satisfacen

$$\begin{bmatrix} b_1-(b_1-b_3) & b_3 & b_1-b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1-(b_1-b_3) & -b_4 & b_2+b_3 \\ 0 & 0 & b_2-(b_2+b_3) & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & b_2-(b_2+b_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} b_3 & b_3 & b_2+b_3 & b_4 \\ b_3 & b_3 & -b_4 & b_2+b_3 \\ 0 & 0 & -b_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & -b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De aquí, se aprecia que $v_3 = v_4 = s \in \mathbb{R}$. También,

$$b_3(v_1+v_2) + (b_2+b_3+b_4)s = 0 \qquad \text{y} \qquad b_3(v_1+v_2) + (b_2+b_3-b_4)s = 0\,.$$

Restando estas dos ecuaciones, $2b_4 s = 0$. Luego, si $b_4 \neq 0$, necesariamente $s = 0$ y $v_1 = -v_2$, con lo que el vector propio sería únicamente $\boldsymbol{v} = (t, -t, 0, 0)'$ para $t \in \mathbb{R}$. La dimensión del subespacio generado por $\boldsymbol{v}$ es 1, que es menor que la mutliplicidad del valor propio repetido. Con $b_4 \neq 0$, $\boldsymbol{B}$ no sería diagonalizable.

Por otro lado, si $b_4 = 0$, en ese caso $\boldsymbol{v} = (-s - t(b_2+b_3)/b_3, t, s, s)'$, con lo cual la dimensión del subespacio generado por $\boldsymbol{v}$ es 2, que coincide con la mutliplicidad del valor propio repetido.

En resumen:

- Si $b_1 \neq b_2 + 2b_3$, la matriz es diagonalizable, pues sus 4 valores propios son distintos.
- Si $b_1 = b_2 + 2b_3$ y $b_4 = 0$, la matriz también es diagonalizable.
- Si $b_1 = b_2 + 2b_3$ y $b_4 = 0$, la matriz no es diagonalizable.

c) La matriz triangular $\boldsymbol{C}$ tiene como valores propios a 17 y 1, este último con multiplicidad 2. Para que $\boldsymbol{C}$ sea diagonalizable, se requiere $\dim(\mathcal{E}_\lambda) = 2$ para $\lambda = 1$. Los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ satisfacen

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ c_1 & 17-1 & 0 \\ c_2 & c_3 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \begin{bmatrix} c_1 & 16 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si este sistema tuviera solución única para v_1 y v_2, entonces el vector propio sería $\boldsymbol{v} = (0, 0, s)'$ para $s \in \mathbb{R}$ y tendría $\dim(\mathcal{E}_\lambda) = 1 < 2$. Por otro lado, si el sistema fuera indeterminado pero consistente, el vector propio sería $\boldsymbol{v} = (t, -t\,c_1/16, s)'$ y se conseguiría $\dim(\mathcal{E}_\lambda) = 2$.

Para alcanzar la consistencia se requiere que $c_1c_3 - 16c_2 = 0$. Entonces $\boldsymbol{C}$ es diagonalizable solamente cuando $c_1c_3 = 16c_2$. ■

17. Sean $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ dos matrices cuadradas de dimensión $n \times n$, con las siguientes características:

- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son simétricas e idempotentes.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son complementarias: $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n$.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son mutuamente ortogonales: $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{0}_n$.
- $\text{rango}(\boldsymbol{A}_1) = r_1 > 0$ y $\text{rango}(\boldsymbol{A}_2) = r_2 > 0$.

Defina, además, la matriz $\boldsymbol{B} = \theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2$, donde θ_1 y θ_2 son dos escalares distintos de cero ($\theta_1 \neq \theta_2$).

a) Verifique que $r_2 = n - r_1$. Luego, responda ¿son $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ matrices singulares?

b) Encuentre los valores de θ_1 y θ_2 para los que $\boldsymbol{B}$ sea idempotente.

c) La inversa de $\boldsymbol{B}$ tiene la forma $\boldsymbol{B}^{-1} = \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2$. Halle α_1 y α_2.

d) Muestre que los valores propios de $\boldsymbol{B}$ pueden ser iguales únicamente a θ_1 o a θ_2.

e) Finalmente, muestre que $\det(\boldsymbol{B}) = (\theta_1)^{r_1}(\theta_2)^{r_2}$.

Solución:

a) Dado que $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son idempotentes, rango$(\boldsymbol{A}_i) = \text{tr}(\boldsymbol{A}_i)$. Al tomar trazas a la identidad $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n$, se consigue que $r_1 + r_2 = n$, que es la igualdad requerida.

Dado que $r_1 > 0$ y $r_2 > 0$, se concluye que $r_1 < n$ y $r_2 < n$. $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ no tienen rango completo y, por tanto, son singulares.

b) Note que

$$\boldsymbol{B}^2 = (\theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2)^2 = (\theta_1)^2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1 + (\theta_2)^2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2 + \theta_1\theta_2(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1) = (\theta_1)^2\boldsymbol{A}_1 + (\theta_2)^2\boldsymbol{A}_2\,.$$

Se tiene que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$ si $(\theta_1)^2 = \theta_1$ y $(\theta_2)^2 = \theta_2$. Dado que $\theta_i \neq 0$, ello ocurre para $\theta_i = 1$.

c) Por definición $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{I}_n$. Luego,

$$(\theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2)(\alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2) = \theta_1\alpha_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\alpha_2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_2 + \theta_1\alpha_2\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 + \theta_2\alpha_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 = \theta_1\alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\alpha_2\boldsymbol{A}_2\,.$$

Dado que $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n$, se requiere que $\theta_i\alpha_i = 1$. En consecuencia, $\alpha_i = 1/\theta_i$.

d) *Primer enfoque.* Se tiene que $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$, ya que es simétrica. Así,

$$\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D})\boldsymbol{P}'.$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}_1$ son 1 menos los valores propios de $\boldsymbol{A}_2$. Al ser idempotentes, estos son sólo 0 y 1. Cuando $\lambda(\boldsymbol{A}_1) = 1$, entonces $\lambda(\boldsymbol{A}_2) = 0$ y viceversa. Respecto a $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B} = \theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2 = \theta_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}' + \theta_2\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D})\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\left[\theta_1\boldsymbol{D} + \theta_2(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D})\right]\boldsymbol{P}'\,.$$

La matriz $\theta_1\boldsymbol{D} + \theta_2(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D})$ es diagonal y contiene los valores propios de $\boldsymbol{B}$, que son claramente θ_1 y θ_2.

Note más aún que, dado que $\text{tr}(\boldsymbol{A}_i) = r_i$, la multiplicidad de θ_1 es r_1 y la de θ_2 es r_2.

Segundo enfoque. Note que $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_i = \theta_i\boldsymbol{A}_i$. Recuerde que $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{v} = \lambda_A\boldsymbol{v}$ define los valores y vectores propios de $\boldsymbol{A}_i$. Al premultiplicar por $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{B}(\lambda_A\boldsymbol{v}) \quad \rightarrow \quad \theta_i(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{v}) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{w} = \theta_i\boldsymbol{w}\,,$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{v}$. Es decir, θ_i es un valor propio de $\boldsymbol{B}$ asociado al vector propio $\boldsymbol{w}$.

Tercer enfoque. El polinomio característico de $\boldsymbol{B}$ es

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B} - \lambda\boldsymbol{I}_n| = |\theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2 - \lambda\boldsymbol{I}_n| = |\theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_1) - \lambda\boldsymbol{I}_n| &= |(\theta_1 - \theta_2)\boldsymbol{A}_1 - (\lambda - \theta_2)\boldsymbol{I}_n| \\ &= (\theta_1 - \theta_2)^n\left|\boldsymbol{A}_1 - \frac{\lambda - \theta_2}{\theta_1 - \theta_2}\boldsymbol{I}_n\right|\,.\end{aligned}$$

Note que $(\lambda - \theta_2)/(\theta_1 - \theta_2)$ es un valor propio de $\boldsymbol{A}_1$. Esto sólo puede tomar dos valores: uno con multiplicidad r_1, en cuyo caso $\lambda = \theta_1$, o cero con multiplicidad $r_2 = n - r_1$, en cuyo caso $\lambda = \theta_2$.

e) Se deduce inmediatamente que $\det(\boldsymbol{B}) = (\theta_1)^{r_1}(\theta_2)^{r_2}$, al notar que la multiplicidad de θ_1 es r_1 y la de θ_2 es r_2, y que el determinante es el producto de valores propios.

■

18. Para una matriz $\boldsymbol{X}$ de dimensión $n \times n$ y escalares reales $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, defina el polinomio matricial

$$f(\boldsymbol{X}) = c_0\boldsymbol{I}_n + c_1\boldsymbol{X} + c_2\boldsymbol{X}^2 + \cdots + c_m\boldsymbol{X}^m\,.$$

Esta función evaluada en un escalar x da como resultado el polinomio

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m\,.$$

a) Muestre que si λ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(\boldsymbol{A})$.

b) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente de rango k, encuentre $\det(\, f(\boldsymbol{A})\,)$.

Solución:

a) Se sabe que si $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, entonces para cualquier i entero $\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{v} = \lambda^i\boldsymbol{v}$. Al multiplicar esta igualdad por c_i para $i = 0, 1, \ldots, m$ y sumar, se consigue

$$c_0\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{v} + c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + c_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{v} + \cdots + c_m\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{v} = c_0\boldsymbol{v} + c_1\lambda\boldsymbol{v} + c_2\lambda^2\boldsymbol{v} + \cdots + c_m\lambda^m\boldsymbol{v}\,.$$

Compactamente,

$$(c_0\boldsymbol{I}_n + c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + c_m\boldsymbol{A}^m)\boldsymbol{v} = (c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots + c_m\lambda^m)\boldsymbol{v} \qquad \rightarrow \qquad f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{v} = f(\lambda)\boldsymbol{v}\,,$$

de donde se deduce que $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(\boldsymbol{A})$, asociado con el vector propio $\boldsymbol{v}$.

Alternativamente, se sabe que $\boldsymbol{A}^i = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^i\boldsymbol{P}^{-1}$, donde $\boldsymbol{D}$ es la matriz diagonal que recoge los valores propios de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{P}$ es la matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes. Luego,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{A}) = c_0\boldsymbol{I}_n + c_1\boldsymbol{A} + c_2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + c_m\boldsymbol{A}^m &= c_0\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} + c_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} + c_2\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{P}^{-1} + \cdots + c_m\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^m\boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \boldsymbol{P}(c_0\boldsymbol{I}_n + c_1\boldsymbol{D} + c_2\boldsymbol{D}^2 + \cdots + c_m\boldsymbol{D}^m)\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}f(\boldsymbol{D})\boldsymbol{P}^{-1}\,. \end{aligned}$$

La matriz $f(\boldsymbol{D})$ es diagonal y contiene los valores propios de $f(\boldsymbol{A})$. Sobre la diagonal, $f(\boldsymbol{D})$ contiene a $f(\lambda)$, estableciendo así que $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(\boldsymbol{A})$.

b) Que $\boldsymbol{A}$ sea idempotente de rango k quiere decir que tiene k valores propios iguales a 1 y $n-k$ valores propios iguales a 0. Luego, $f(\boldsymbol{A})$ tendrá k valores propios iguales a $f(1) = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m$ y $n-k$ valores propios iguales a $f(0) = c_0$. Recordando que el determinante es el producto de valores propios,

$$\det(\, f(\boldsymbol{A})\,) = f(1)^k f(0)^{n-k} = (c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_m)^k (c_0)^{n-k}\,.$$

■

Formas cuadráticas

19. Comente las siguientes afirmaciones:

a) Sean Q_1 y Q_2 formas cuadráticas en n variables, donde Q_1 es definida positiva y Q_2 es semidefinida positiva, entonces la forma cuadrática definida por $Q(\boldsymbol{x}) = Q_1(\boldsymbol{x}) + Q_2(\boldsymbol{x})$ es definida positiva.

b) Si las matrices $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}$ son definidas positivas, entonces los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son menores que 1.

c) La suma de los cuadrados de tres matrices simétricas (no nulas) es siempre una matriz definida positiva. Además, la suma de tres matrices simétricas (no nulas) elevada al cuadrado es también una matriz definida positiva.

d) Si $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} > 0$, donde $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) > \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$.

e) Si la traza de una matriz cuadrada es igual a cero, entonces esa matriz no puede ser ni definida positiva ni definida negativa.

Solución:

a) Verdadero. Como Q_2 es semidefinida positiva, $Q_2(\boldsymbol{x}) \geq 0$, y como Q_1 es definida positiva, $Q_1(\boldsymbol{x}) > 0$. En consecuencia, $Q_1(\boldsymbol{x}) + Q_2(\boldsymbol{x}) > 0$ es definida positiva.

b) La forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$ es simétrica, puede expresarse como $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{D}$ es la matriz diagonal semejante a $\boldsymbol{A}$ (contiene los valores propios λ).

Luego, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} > 0$ indica que los elementos en la diagonal $\boldsymbol{D}$ son todos positivos. Se concluye que $\lambda > 0$.

Por su parte, $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}' - \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}')\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D})\boldsymbol{y}$ indica que los elementos en la diagonal $\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{D}$ son todos positivos. De ahí, se concluye que $\lambda < 1$.

c) Sea $\boldsymbol{A}$ el cuadrado de una matriz simétrica. Luego, sin pérdida de generalidad, $\boldsymbol{A}$ puede escribirse como $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}$, donde $\boldsymbol{L}$ es también simétrica. Defina $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}$. La forma cuadrática asociada a la matriz $\boldsymbol{A}$ es, luego, $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{L}'\boldsymbol{L}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} > 0$, lo que nos lleva a concluir que $Q(\boldsymbol{x})$ es definida positiva. Dado que la suma de matrices definidas positivas es definida positiva, la primera afirmación es cierta.

Por su parte, la suma de matrices simétricas es también simétrica. Se llega al mismo análisis anterior, si se permite que $\boldsymbol{L}$ represente dicha suma. La segunda afirmación es también cierta.

d) $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}>0$ ocurre para todo $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. Así, $\boldsymbol{e}_i{}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_i>0$, donde $\boldsymbol{e}_i$ es el i-ésimo vector unidad. Pero $\boldsymbol{e}_i{}'(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}_i=a_{ii}-b_{ii}$. Se tiene luego que $a_{ii}>b_{ii}$. Al sumar a lo largo de i, se concluye que $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})>\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})$.

e) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz con traza igual a cero. Como la traza es igual a la suma de los valores propios, entonces se cumple que la suma de los valores propios de $\boldsymbol{A}$ es cero. Luego, $\boldsymbol{A}$ no puede ser definida positiva, pues para este tipo de matrices todos los valores propios son mayores que cero y, por tanto, su suma sería mayor que cero. De forma similar, $\boldsymbol{A}$ no puede ser definida negativa, pues para este tipo de matrices todos los valores propios son menores que cero y, por tanto, su suma sería menor que cero. La afirmación es verdadera. ■

20. Sea $\boldsymbol{Z}$ una matriz de dimensión $n\times k$ $(n>k)$, y de rango k. Clasifique la naturaleza de la forma cuadrática $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ en los siguientes casos:

$$a)\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\,,\quad b)\quad \boldsymbol{A}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\,,\quad c)\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\,,\quad d)\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\,.$$

Solución:

a) Note que $\rho(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})=k$ por lo que $\boldsymbol{A}$ es no singular. Más aún, $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}$ donde $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{x}$. Dado que $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}>0$, esta forma cuadrática es definida positiva.

b) Recuerde que si $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$, ocurre que $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$. Dado que $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ es definida positiva, entonces $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}$ es también definida positiva.

c) Conviene notar que la matriz $\boldsymbol{A}$ es idempotente: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'=\boldsymbol{A}$. El rango de esta matriz, que es de dimensión $n\times n$, es $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}')=\operatorname{tr}((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{I}_k)=k<n$. Por tanto, k valores propios de $\boldsymbol{A}$ son iguales a 1, y los restantes $n-k$ valores propios de $\boldsymbol{A}$ son iguales a cero. $\boldsymbol{A}$ es semidefinida positiva.

d) La matriz $\boldsymbol{A}$ es también idempotente, al ser la diferencia entre $\boldsymbol{I}_n$ y una matriz idempotente de rango k. Asimismo, el rango de $\boldsymbol{A}$, que es de dimensión $n\times n$, es $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=n-k<n$. Por tanto, $n-k$ valores propios de $\boldsymbol{A}$ son iguales a 1, y los restantes k valores propios de $\boldsymbol{A}$ son iguales a cero. $\boldsymbol{A}$ es semidefinida positiva. ■

21. Escriba las siguientes formas cuadráticas exclusivamente como sumas de cuadrados. Diga si se tratan de formas definidas.

a) $Q(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+23x_3^2-72x_1x_3$,

b) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

c) $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2-x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$,

Solución:

La descomposición espectral de una matriz simétrica es $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$, donde $\boldsymbol{P}$ es ortogonal y $\boldsymbol{D}$ es diagonal. Con ello, una forma cuadrática $Q(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ puede expresarse como $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{x})\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}=Q(\boldsymbol{y})$, donde $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}'\boldsymbol{x}$. Al ser $\boldsymbol{D}$ diagonal, $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{y})$ expresa la misma cantidad que $Q(\boldsymbol{x})$ pero como una suma ponderada de cuadrados (sin productos cruzados).

a) La matriz simétrica asociada a $Q(\boldsymbol{x})$ es

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&-36\\0&3&0\\-36&0&23\end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&-36\\0&3-\lambda&0\\-36&0&23-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-36\\-36&23-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)[(2-\lambda)(23-\lambda)-36^2]=(3-\lambda)(\lambda-50)(\lambda+25)\,.$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son, luego, $\lambda_1=3$, $\lambda_2=50$ y $\lambda_3=-25$. Dados los diversos signos de estos valores propios, se concluye que $Q(\boldsymbol{x})$ no es una forma definida.

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 20 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -48 & 0 & -36 \\ 0 & -47 & 0 \\ -36 & 0 & -27 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_2 = \alpha \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 27 & 0 & -36 \\ 0 & 28 & 0 \\ -36 & 0 & 48 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_3 = \alpha \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = \frac{1}{5}$ normaliza $\|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_3\| = 1$. Con ello,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3\alpha & 0 & 4\alpha \\ 4\alpha & 0 & 3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} x_2 \\ 4x_3 - 3x_1 \\ 3x_3 + 4x_1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2 = 3(x_2)^2 + 2(4x_3 - 3x_1)^2 - (3x_3 + 4x_1)^2.$$

b) La matriz simétrica asociada a $Q(\boldsymbol{x})$ es

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1).$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son, luego, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -1$. Dados los diversos signos de estos valores propios, se concluye que $Q(\boldsymbol{x})$ no es una forma definida.
Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_3 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ normalizan los vectores propios. Con ello,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & -2\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(x_2 - x_1) \\ \alpha_2(x_1 + x_2 + x_3) \\ \alpha_3(x_1 + x_2 - 2x_3) \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2 - \frac{1}{6}(x_1 + x_2 - 2x_3)^2.$$

c) La matriz simétrica asociada a $Q(\boldsymbol{x})$ es

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Su polinomio característico es

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} - (-1)\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} + 1\cdot \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2)\,.$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son, luego, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = -2$. Dados los diversos signos de estos valores propios, se concluye que $Q(\boldsymbol{x})$ no es una forma definida.

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \quad \to \quad \boldsymbol{v}_3 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

donde $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ normalizan los vectores propios. Con ello,

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}'\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_3 & -2\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(x_1+x_2+x_3) \\ \alpha_2(x_1-x_2) \\ \alpha_3(x_1+x_2-2x_3) \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$Q(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i y_i^2 = \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)^2 + (x_1-x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_1+x_2-2x_3)^2\,.$$

■

22. Dada la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\beta x_2 x_3\,,$$

donde $\alpha \neq 0$. Estudie el signo de Q en términos de los valores de α y β.

Solución:

La matriz simétrica asociada a Q es

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{bmatrix},$$

cuya polinomio característico es

$$P(\lambda) = (\alpha - \lambda)\big[(1-\lambda)^2 - \beta^2\big] = (\alpha-\lambda)(1+\beta-\lambda)(1-\beta-\lambda) = 0\,.$$

Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son, entonces, $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1+\beta$ y $\lambda_3 = 1-\beta$.

Note que si $\beta > 0$, entonces $\lambda_2 > 0$, mientras que si $\beta < 0$, entonces $\lambda_3 > 0$. Se concluye, de momento, que $\boldsymbol{A}$ no puede ser (semi)definida negativa.

Cuando $\alpha > 0$, $1+\beta > 0$ y $1-\beta > 0$, Q será definida positiva. Esto implica que $\alpha > 0$ y $-1 < \beta < 1$. Por su parte, Q será semidefinida positiva cuando, además de $\alpha > 0$, λ_2 o λ_3 sean iguales a cero, lo cual implica que el otro sea igual a 2. Estos casos corresponden a $\beta = \pm 1$.

En resumen:

- Si $\alpha > 0$ y $-1 < \beta < 1$, Q será definida positiva,
- Si $\alpha > 0$ y $\beta = \pm 1$, Q será semidefinida positiva,
- En otros casos, Q será indefinida.

■

23. Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}'$.

b) Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *definida positiva* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

c) Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *no definida* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

Solución:

a) El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -5 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ -5 & -5 & 11-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -4+\lambda & 0 \\ 1 & 5-\lambda & -5 \\ -5 & -5 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -5 \\ -5 & 11-\lambda \end{vmatrix} + (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 11-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)[(5-\lambda)(11-\lambda) - 25 + (11-\lambda) - 25] = (4-\lambda)(\lambda^2 - 17\lambda + 16) = -(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-16)\,. \end{aligned}$$

Así, los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 16$.

Los vectores propios son:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -5 \\ -5 & -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = z \\ y = z \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{v}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -5 \\ -5 & -5 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = -y \\ z = 0 \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_3 \boldsymbol{I}_3)\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0} \rightarrow \begin{bmatrix} -11 & 1 & -5 \\ 1 & -11 & -5 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = y \\ 2y = -z \end{matrix} \rightarrow \boldsymbol{v}_3 = \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & -2\alpha_3 \end{bmatrix},$$

donde se utiliza $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$. en la normalización.

b) Considere una matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}$ tal que $\boldsymbol{\Lambda}^2 = \boldsymbol{D}$. Luego, si $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P\Lambda P}'$, entonces se cumplirá que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{PDP}' = \boldsymbol{A}$.

Note que $\boldsymbol{\Lambda}$ contiene las raíces de los valores propios de $\boldsymbol{A}$. Así, para que $\boldsymbol{B}$ sea definida positiva, los elementos sobre la diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}$ deben ser positivos y por tanto se consideran las raíces positivas. Así,

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P\Lambda P}'=\begin{bmatrix}\alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & 0 & -2\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\alpha_1\\-\alpha_2&\alpha_2&0\\\alpha_3&\alpha_3&-2\alpha_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha_1 & -2\alpha_2 & 4\alpha_3\\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & 4\alpha_3\\ \alpha_1 & 0 & -8\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\alpha_1\\-\alpha_2&\alpha_2&0\\\alpha_3&\alpha_3&-2\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1^2+2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2\\ \alpha_1^2-2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2+2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2\\ \alpha_1^2-8\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2 & \alpha_1^2+16\alpha_3^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}.$$

c) Asimismo, para que $\boldsymbol{B}$ sea no definida, los elementos sobre la diagonal de $\boldsymbol{\Lambda}$ deben tener signos distintos. Luego, una alternativa es

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P\Lambda P}'=\begin{bmatrix}\alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \alpha_1 & 0 & -2\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\alpha_1\\-\alpha_2&\alpha_2&0\\\alpha_3&\alpha_3&-2\alpha_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha_1 & 2\alpha_2 & 4\alpha_3\\ \alpha_1 & -2\alpha_2 & 4\alpha_3\\ \alpha_1 & 0 & -8\alpha_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1&\alpha_1&\alpha_1\\-\alpha_2&\alpha_2&0\\\alpha_3&\alpha_3&-2\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1^2-2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2+2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2\\ \alpha_1^2+2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-2\alpha_2^2+4\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2\\ \alpha_1^2-8\alpha_3^2 & \alpha_1^2-8\alpha_3^2 & \alpha_1^2+16\alpha_3^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&2&-1\\2&0&-1\\-1&-1&3\end{bmatrix}.$$

■

Matrices particionadas y producto Kronecker

24. El modelo insumo-producto permite determinar los niveles de producción de industrias interdependientes con el propósito de satisfacer demandas futuras. El modelo se puede presentar como

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{D}\,,$$

donde $\boldsymbol{x}$ es el vector de producción, $\boldsymbol{A}$ es la matriz de insumo-producto y $\boldsymbol{d}$ el vector de demandas.

En una economía hay cuatro industrias para las cuales la matriz insumo-producto es

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.6&0.3&0&0\\0.2&0.6&0&0\\0.1&0&0.6&0.1\\0&0.1&0.4&0.4\end{bmatrix},$$

siendo las correspondientes demandas proyectadas para el próximo ejercicio de 30, 100, 70 y 80 unidades, respectivamente. Encuentre la producción proyectada para cada industria, $\boldsymbol{x}$.

Solución:

Al despejar $\boldsymbol{x}$,

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{d}\quad\to\quad\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{d}\quad\to\quad(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}\quad\to\quad\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d}\,.$$

Ahora, hemos de invertir la matriz $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}$, que es igual a

$$\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.6&0.3&0&0\\0.2&0.6&0&0\\0.1&0&0.6&0.1\\0&0.1&0.4&0.4\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\left[\begin{array}{rr|rr}4&-3&0&0\\-2&4&0&0\\\hline -1&0&4&-1\\0&-1&-4&6\end{array}\right].$$

Note que $\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A}=\frac{1}{10}\boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es particionada en 4 bloques, de 2×2 cada uno. La inversa requerida es $10\cdot\boldsymbol{C}^{-1}$.

Llamemos $\bar{\boldsymbol{C}}$ a la inversa de $\boldsymbol{C}$. Luego, usando matrices particionadas, los bloques de la inversa son

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{C}}_{11} &= (\boldsymbol{C}_{11} - \boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{C}_{22}^{-1}\boldsymbol{C}_{21})^{-1} = \boldsymbol{C}_{11}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \\
\bar{\boldsymbol{C}}_{22} &= (\boldsymbol{C}_{22} - \boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{C}_{12})^{-1} = \boldsymbol{C}_{22}^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \\
\bar{\boldsymbol{C}}_{21} &= -\boldsymbol{C}_{22}^{-1}\boldsymbol{C}_{21}\bar{\boldsymbol{C}}_{11} = -\left(\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\right)(-\boldsymbol{I}_2)\left(\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{200}\begin{bmatrix} 26 & 22 \\ 24 & 28 \end{bmatrix} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}, \\
\bar{\boldsymbol{C}}_{12} &= -\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{C}_{12}\bar{\boldsymbol{C}}_{22} = -\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{0}\bar{\boldsymbol{C}}_{22} = \boldsymbol{0}\,.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{d} = 10 \cdot \bar{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1.3 & 1.1 & 3 & 0.5 \\ 1.2 & 1.4 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 30 \\ 100 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 420 \\ 460 \\ 399 \\ 476 \end{bmatrix}.$$

■

25. Demuestre las siguientes propiedades:

a) El determinante del producto Kronecker de una matriz $\boldsymbol{A}$ de orden 2 y la matriz $\boldsymbol{Z}$ de orden q es igual al producto del determinante de la matriz $\boldsymbol{A}$ elevado a la q por el determinante de la matriz $\boldsymbol{Z}$ elevado al cuadrado. Asuma que $\det(\boldsymbol{Z}) \neq 0$.

b) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices ortogonales. Luego, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ es ortogonal.

c) Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices idempotentes. Luego, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ es idempotente.

d) La traza del producto Kronecker de dos matrices es igual al producto de las trazas de las mismas.

e) El producto Kronecker de dos matrices defindas negativas es definida positiva.

f) Para cualquier par de matrices cuadradas $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ del mismo orden y sin importar quiénes sean las matrices $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{F}$, se verifica que

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{I}_n\,.$$

Solución:

a) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Luego, $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} a\boldsymbol{Z} & b\boldsymbol{Z} \\ c\boldsymbol{Z} & d\boldsymbol{Z} \end{bmatrix}$. De aquí, utilizando particiones, Luego,

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{Z}| &= |a\boldsymbol{Z}| \cdot |d\boldsymbol{Z} - c\boldsymbol{Z}(a\boldsymbol{Z})^{-1}(b\boldsymbol{Z})| = |a\boldsymbol{Z}| \cdot \left|d\boldsymbol{Z} - c\boldsymbol{Z} \cdot \left(\frac{1}{a}\boldsymbol{Z}^{-1}\right) \cdot (b\boldsymbol{Z})\right| \\
&= |a\boldsymbol{Z}| \cdot \left|d\boldsymbol{Z} - \frac{bc}{a}(\boldsymbol{Z}\boldsymbol{Z}^{-1}) \cdot \boldsymbol{Z}\right| = |a\boldsymbol{Z}| \cdot \left|\left(d - \frac{bc}{a}\right)\boldsymbol{Z}\right| = a^q|\boldsymbol{Z}|\left(d - \frac{bc}{a}\right)^q|\boldsymbol{Z}| = (ad-bc)^q|\boldsymbol{Z}|^2\,.
\end{aligned}$$

b) Como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices ortogonales, $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1}$ y $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}^{-1}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})' = (\boldsymbol{A}' \otimes \boldsymbol{B}') = (\boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{B}^{-1}) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-1}\,.$$

En consecuencia, $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})$ es también ortogonal.

c) Como $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices idempotentes, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$. Luego,

$$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}^2 \otimes \boldsymbol{B}^2) = (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})\,.$$

En consecuencia, $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})$ es también idempotente.

d) La matiz $\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}$ tiene una estructura particionada, y los bloques sobre su diagonal tienen la forma $a_{ii}\boldsymbol{B}$, donde a_{ii} es un elemento sobre la diagonal de $\boldsymbol{A}$. Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(a_{11}\boldsymbol{B}) + \operatorname{tr}(a_{22}\boldsymbol{B}) + \cdots + \operatorname{tr}(a_{nn}\boldsymbol{B}) &= a_{11}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) + a_{22}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) + \cdots + a_{nn}\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) \\
&= (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\operatorname{tr}(\boldsymbol{B}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{A})\operatorname{tr}(\boldsymbol{B})\,.
\end{aligned}$$

e) Sean $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{P}'$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{Q}'$, dos matrices definidas negativas. $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ son ortogonales, mientras que $\boldsymbol{D}_A$ y $\boldsymbol{D}_B$ contiene números negativos sobre la diagonal. Luego,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{P}'\otimes\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{Q}') = (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{D}_A\boldsymbol{P}'\otimes\boldsymbol{D}_B\boldsymbol{Q}') &= (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{D}_A\otimes\boldsymbol{D}_B)(\boldsymbol{P}'\otimes\boldsymbol{Q}')\\ &= (\boldsymbol{P}'\otimes\boldsymbol{Q}')'(\boldsymbol{D}_A\otimes\boldsymbol{D}_B)(\boldsymbol{P}'\otimes\boldsymbol{Q}') \equiv \boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{D}_A\otimes\boldsymbol{D}_B)\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}\,.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ es expresado como la forma cuadrática matricial $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}$ y, por tanto, hereda la definición de la matriz $\boldsymbol{\Lambda}$. Es simple verificar que $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{D}_A\otimes\boldsymbol{D}_B$ es diagonal con elementos *positivos*. Así, se concluye que $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ es definida positiva.

f) Dado que sólo interesa la naturaleza de los bloques diagonales, utilizaremos la traza. La traza de la primera matriz es $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB})$. Por su parte, la traza de la segunda matriz es $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) + \mathrm{tr}(\boldsymbol{B})\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$. Esto es, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_2)$ por lo que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}_1 - \boldsymbol{M}_2) = 0$. tal matriz no puede ser una matriz identidad. ■

26. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada no singular. Encuentre la inversa de la matriz

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & 4\boldsymbol{A} \\ 2\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A} & 5\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A} \end{bmatrix}.$$

Solución:

Claramente, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{A}$, donde

$$\boldsymbol{D} = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Luego, $\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{D}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}$. El reto está en encontrar $\bar{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D}^{-1}$ y para ello utilizamos resultados de matrices particionadas, considerando la partición previamente mostrada. Así,

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{D}}_{11} &= (\boldsymbol{D}_{11} - \boldsymbol{D}_{12}\boldsymbol{D}_{22}^{-1}\boldsymbol{D}_{21})^{-1} = (\boldsymbol{D}_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},\\
\bar{\boldsymbol{D}}_{22} &= (\boldsymbol{D}_{21} - \boldsymbol{D}_{11}\boldsymbol{D}_{12}^{-1}\boldsymbol{D}_{21})^{-1} = (\boldsymbol{D}_{22}^{-1}) = -1\,,\\
\bar{\boldsymbol{D}}_{12} &= -\boldsymbol{D}_{11}^{-1}\boldsymbol{D}_{12}\bar{\boldsymbol{D}}_{22} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}(-1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix},\\
\bar{\boldsymbol{D}}_{21} &= -\boldsymbol{D}_{22}^{-1}\boldsymbol{D}_{21}\bar{\boldsymbol{D}}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

De aquí, $\boldsymbol{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces, $\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{D}^{-1}\otimes\boldsymbol{A}^{-1}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1} \\ -2\boldsymbol{A}^{-1} & 3\boldsymbol{A}^{-1} & 7\boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{A}^{-1} \end{bmatrix}$. ■

27. Sea $\boldsymbol{x}$ un vector no nulo tal que $(\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, donde $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son matrices cuadradas. Probar que la matriz $\boldsymbol{M}$ es singular:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

Solución:

Calculemos el determinante de $\boldsymbol{M}$ utilizando la estructura en bloques de $\boldsymbol{M}$:

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{I}_n|\cdot\left|\boldsymbol{0} - (\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}_n)^{-1}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\right| = \left|(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})^2 - \boldsymbol{I}_n^2\right| = \left|(\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{B}^2) - \boldsymbol{I}_n\right|.$$

Se sabe que $(\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{B}^2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, de donde $(\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. La matriz $(\boldsymbol{A}^2\otimes\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{I}_n)$ no puede tener inversa, pues de lo contrario se obtendría $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, que contradice el dato del problema. Luego, $|\boldsymbol{M}| = 0$ y se concluye que $\boldsymbol{M}$ es singular. ■

28. Sea $\boldsymbol{s}$ un vector suma (lleno de unos) de dimensión n. Defina

$$\boldsymbol{P} = \left(\boldsymbol{I}_c \otimes \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'}{n}\right) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{nc} - \boldsymbol{P}\,.$$

Muestre que $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{PQ}$ son simétricas e idempotentes ¿Qué valores propios se esperaría que tengan estas matrices? ¿Cuál es el rango de estas matrices?

Solución:

Note primero que

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_{nc} - \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{I}_n) - \left(\boldsymbol{I}_c \otimes \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'}{n}\right) = \left(\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{I}_n - \frac{\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'}{n}\right)\,.$$

Luego, tanto $\boldsymbol{P}$ como $\boldsymbol{Q}$ tienen la forma $(\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A})$. Estas matrices serán simétricas si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, dado que $(\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A})' = (\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A}')$ y serán idempotentes si $\boldsymbol{A}$ es idempotente, dado que $(\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A})^2 = (\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A}^2)$.

Para el caso de la matriz $\boldsymbol{P}$ se tiene que $\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n$, que es claramente simétrica, $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n)' = (\boldsymbol{s}')'(\boldsymbol{s})'/n = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n$, e idempotente, $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n)(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n) = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n^2 = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s})\boldsymbol{s}'/n^2 = (\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}')\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n^2 = \boldsymbol{s}\boldsymbol{s}'/n$, dado que $\boldsymbol{s}'\boldsymbol{s} = n$. El rango de $\boldsymbol{P}$ es igual a su traza, $\text{tr}(\boldsymbol{I}_c \otimes \boldsymbol{A}_P) = \text{tr}(\boldsymbol{I}_c)\text{tr}(\boldsymbol{A}_P) = c\text{tr}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{s}')/n = c$. Así, $\boldsymbol{P}$ tendrá c valores propios iguales a 1 y $nc - c = (n-1)c$ valores propios iguales a cero.

Para el caso de la matriz $\boldsymbol{Q}$ se tiene que $\boldsymbol{A}_Q = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_P$. Dado que $\boldsymbol{A}_P$ es simétrica e idempotente, necesariamente $\boldsymbol{A}_Q$ será simétrica e idempotente. El rango de $\boldsymbol{Q}$ es igual a su traza, $\text{tr}(\boldsymbol{I}_c)\text{tr}(\boldsymbol{A}_Q) = c(n-1)$. Así, $\boldsymbol{Q}$ tendrá $(n-1)c$ valores propios iguales a 1 y c valores propios iguales a cero.

Finalmente, note que $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_{nc} - \boldsymbol{P}) = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{PP} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{PQ}$ es la matriz nula, que es simétrica e idempotente de rango 0. ■

29. Encuentre el determinante y los valores propios de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & a & 0 & a^2 \\ 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 \\ a & 0 & 1 & a^2 & 0 & a \\ a & 0 & a^2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & a & a & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 & a & a^2 \\ a & 1 & 0 & 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & a & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 & 0 & 1 & a \\ a^2 & a & 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Solución:

Emergen ciertos patrones al inspeccionar ambas matrices. En particular, se verifica que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \otimes \boldsymbol{A}_2$ y que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_2 \otimes \boldsymbol{A}_1$, donde

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Los polinomios característicos de $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son

$$P_1(\lambda) = |\,\boldsymbol{A}_1 - \lambda\boldsymbol{I}_2\,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2 = (\lambda - 1 + a)(\lambda - 1 - a)\,,$$

$$P_2(\lambda) = |\,\boldsymbol{A}_2 - \lambda\boldsymbol{I}_3\,| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ a & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - a)(\lambda - 1 + a)(\lambda - 1 - a)\,.$$

Respecto a los determinantes, dado que $\boldsymbol{A}_1$ es de dimensión 2 y $\boldsymbol{A}_2$ es de dimensión 3, por propiedad del producto Kronecker $|\,\boldsymbol{A}\,| = |\,\boldsymbol{A}_1\,|^3|\,\boldsymbol{A}_2\,|^2 = |\,\boldsymbol{A}_2\,|^2|\,\boldsymbol{A}_1\,|^3 = |\,\boldsymbol{B}\,|$. Asimismo, se tiene que $|\,\boldsymbol{A}_i\,| = P_i(0)$. Luego,

$$|\,\boldsymbol{A}\,| = |\,\boldsymbol{B}\,| = P_1(0)^3 P_2(0)^2 = \left[1 - a^2\right]^3 \left[a(1-a^2)\right]^2 = a^2(1-a^2)^5\,.$$

En cuanto a los valores propios, se tiene que $\lambda_1(\boldsymbol{A}_1) = 1 - a$ y $\lambda_2(\boldsymbol{A}_1) = 1 + a$, mientras que $\lambda_1(\boldsymbol{A}_2) = a$, $\lambda_2(\boldsymbol{A}_2) = 1 - a$ y $\lambda_3(\boldsymbol{A}_2) = 1 + a$. Los valores propios del producto Kronecker tienen la forma $\lambda(\boldsymbol{A}) = \lambda(\boldsymbol{B}) = \lambda_i(\boldsymbol{A}_1)\lambda_j(\boldsymbol{A}_2)$ para $i = 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$. Así, $\lambda(\boldsymbol{A}) = \{a - a^2, (1-a)^2, 1 - a^2, a + a^2, 1 - a^2, (1+a)^2\}$. ■

30. (Opcional) Sean $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{C}$ matrices de dimensión $n \times n$. Suponga que $\boldsymbol{F} = [f_{ij}]$, y denote por $\boldsymbol{x}_j$ y $\boldsymbol{c}_j$ a las j-ésima columnas de $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{C}$, respectivamente. Además, denote por $\text{vec}(\boldsymbol{X})$ a la *vectorización* de $\boldsymbol{X}$, es decir:

$$\text{vec}(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}.$$

a) Exprese $\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n$ como una matriz particionada.

b) Suponga que $\boldsymbol{X}$ satisface el sistema lineal

$$(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n)\text{vec}(\boldsymbol{X}) = \text{vec}(\boldsymbol{C}).$$

Pruebe que para cualquier j se cumple

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_j + \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{c}_j$$

c) Concluya que $\boldsymbol{X}$ satisface la ecuación matricial

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{C}.$$

En este caso, se dice que $\boldsymbol{X}$ es solución del *problema de Lyapunov* asociado con $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{C}$.
Sugerencia: Determine la j-ésima columna de $\boldsymbol{F}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}'$.

d) Suponga ahora que $\boldsymbol{X}$ cumple $\boldsymbol{F}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{C}$. Pruebe que $\boldsymbol{X}$ es solución de

$$(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n)\text{vec}(\boldsymbol{X}) = \text{vec}(\boldsymbol{C}).$$

Solución:

a) Observe que

$$\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} f_{11}\boldsymbol{I}_n & f_{12}\boldsymbol{I}_n & \cdots & f_{1n}\boldsymbol{I}_n \\ f_{21}\boldsymbol{I}_n & f_{22}\boldsymbol{I}_n & \cdots & f_{2n}\boldsymbol{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}\boldsymbol{I}_n & f_{n2}\boldsymbol{I}_n & \cdots & f_{nn}\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F} + f_{11}\boldsymbol{I}_n & f_{12}\boldsymbol{I}_n & \cdots & f_{1n}\boldsymbol{I}_n \\ f_{21}\boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{F} + f_{22}\boldsymbol{I}_n & \cdots & f_{2n}\boldsymbol{I}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}\boldsymbol{I}_n & f_{n2}\boldsymbol{I}_n & \cdots & \boldsymbol{F} + f_{nn}\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}.$$

b) Al multiplicar $\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n$ por $\text{vec}(\boldsymbol{X})$ obtenemos la matriz particionada

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_1 + f_{11}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + f_{1n}\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_2 + f_{21}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + f_{2n}\boldsymbol{x}_n \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_n + f_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + f_{nn}\boldsymbol{x}_n \end{bmatrix}$$

Igualando con la vectorización de $\boldsymbol{C}$, obtenemos

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_j + \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{c}_j$$

para cualquier columna j.

c) Sea $\boldsymbol{f}_j{}' = [f_{j1}, \ldots, f_{jn}]$ la j-ésima fila de $\boldsymbol{F}$, luego $\boldsymbol{f}_j$ es la j-ésima columna de $\boldsymbol{F}'$. Luego, la j-ésima columna de $\boldsymbol{FX} + \boldsymbol{XF}'$ es

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_j + \boldsymbol{X}\boldsymbol{f}_j$$

Como $\boldsymbol{f}_j = [f_{j1}, \ldots, f_{jn}]'$ entonces $\boldsymbol{X}\boldsymbol{f}_j$ se expresa como la combinación lineal

$$f_{j1}\boldsymbol{x}_1 + \ldots + f_{jn}\boldsymbol{x}_n.$$

Juntando lo anterior, tenemos que la j-ésima columna de $\boldsymbol{FX} + \boldsymbol{XF}'$ es precisamente

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_j + \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\boldsymbol{x}_k.$$

En la parte *c*) concluimos que toda columna de $\boldsymbol{FX} + \boldsymbol{XF}'$ coincide con la columna correspondiente de $\boldsymbol{C}$. Luego $\boldsymbol{FX} + \boldsymbol{XF}' = \boldsymbol{C}$.

d) Si $\boldsymbol{X}$ satisface $\boldsymbol{FX} + \boldsymbol{XF}' = \boldsymbol{C}$ si y solo si para toda columna j se tiene

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_j + \sum_{k=1}^{n} f_{jk}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{c}_j,$$

que equivale a que $(\boldsymbol{I}_n \otimes \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n)\mathrm{vec}(\boldsymbol{X}) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{C})$. ■