UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, y F. Rosales

Práctica Calificada 1

1. Manipulación de vectores (4 ptos)

Sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos conjuntos en $\mathbb{R}^3$ definidos como:

$$\mathcal{L}_1 = \{\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{a},\ t \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{L}_2 = \{\boldsymbol{y}_s \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{q} + s\boldsymbol{b},\ s \in \mathbb{R}\},$$

donde $\boldsymbol{p} = (2,-5,3)'$, $\boldsymbol{q} = (1,1,1)'$, $\boldsymbol{a} = (2,1,-1)'$ y $\boldsymbol{b} = (1,0,2)'$. Considere además el vector $\boldsymbol{v}_{ts} = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_s$.

a) **(2 ptos)** Determine explícitamente $\boldsymbol{v}_{ts}$ y calcule $\|\boldsymbol{v}_{ts}\|^2$.

b) **(1 pto)** Encuentre los valores de t y s que minimizan $\|\boldsymbol{v}_{ts}\|^2$. Calcule además la distancia mínima entre $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$, definida como:

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \sqrt{\min_{\boldsymbol{x}_t \in \mathcal{L}_1,\ \boldsymbol{y}_s \in \mathcal{L}_2} \|\,\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{y}_s\,\|^2}\,.$$

c) **(1 pto)** Encuentre los valores de t y s para los que $\{\boldsymbol{v}_{ts}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ es un conjunto ortogonal.

2. Bases y dimensión (6 ptos)

Considere los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

a) **(1 pto)** Muestre que $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son linealmente independientes.

b) **(2 ptos)** Sea $\mathcal{V}$ el espacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Muestre que $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ pertenecen a $\mathcal{V}$.

c) **(1 pto)** Encuentre una base de $\mathcal{V}$ y determine su dimensión.

d) **(2 ptos)** Determine, si existe, una base de $\mathcal{V}$ que contenga a los vectores $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$.

3. Espacios vectoriales (6 ptos)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. La suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ se define como

$$\mathcal{U}+\mathcal{V}=\{\mathbf{u}+\mathbf{v} \ \mid \ \mathbf{u}\in\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}\in\mathcal{V}\}\,.$$

a) **(2 ptos)** Demuestre que $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

b) **(1 pto)** Encuentre una base del subespacio:

$$\mathcal{U}=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ \mid \ x+z+3w=0 \quad \text{y} \quad y+2z-4w=0\}\,.$$

c) **(1 pto)** Encuentre una base del subespacio:

$$\mathcal{V}=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \ \mid \ x+3w=0 \quad \text{y} \quad y-z+4w=0\}\,.$$

d) **(2 ptos)** Considere los subespacios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ definidos en las partes *b*) y *c*), respectivamente. Encuentre una base de $\mathcal{U}+\mathcal{V}$.

Ayuda: Se sabe que si $\mathcal{U}$ es generado por $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_k\}$ y $\mathcal{V}$ es generado por $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_p\}$, entonces $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ es generado por $\{\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_k,\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$.

4. Misceláneos (4 ptos)

a) **(2 ptos)** Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, pruebe que si $u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=1$, entonces $(u_1+u_2+\cdots+u_n)^2\le n$ para todo $u_1,u_2,\ldots,u_n\in\mathbb{R}$.

b) **(2 ptos)** Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ los conjuntos de matrices de dimensión 2×2 invertibles y no invertibles, respectivamente. Ilustre, usando contraejemplos, que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ *no* son espacios vectoriales.