UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Segundo Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, D. Bohorquez y C. Aparicio

EJERCICIOS 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Considere un mercado cuyo precio y cantidad de equilibrio son, respectivamente, $\bar{P}$ y $\bar{Q}$. La *elasticidad de demanda* se define como

$$\varepsilon = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \,,$$

donde la derivada alude a la función de demanda $Q = Q(P)$. Encuentre la función de demanda si

$$a)\quad \varepsilon = \text{constante}\,, \qquad b)\quad \varepsilon = \frac{P}{A-P}\,, \qquad c)\quad \varepsilon = \frac{P^2}{P^2+3P+2}\,, \qquad d)\quad \varepsilon = \frac{P}{P^2+5P+6}\,.$$

Asuma que $P > A$.

2. Encuentre las funciones $y = y(x)$, con condición inicial $y(0) = y_0 > 0$, que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y\sqrt{1+x^2}}\,, \qquad b)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(y+1)}{x+2}\,, \qquad c)\quad \frac{dy}{dx} + xy = x\,.$$

3. Encuentre las funciones $y = y(x)$, donde $x > 0$, que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1\,, \qquad b)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x(x+1)} = \frac{x+1}{x^3}\,, \qquad c)\quad \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = x-2 \qquad d)\quad \frac{dy}{dx} + y = e^{-x}\,.$$

Considere como condición inicial $y(1) = y_1$.

4. Encuentre las trayectorias $y = y(t)$ que resuelven las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$a)\quad \dot{y}-ay = b\,, \qquad b)\quad \dot{y}-ay = bt^3\,, \qquad c)\quad \dot{y}-ay = \cos(bt)\,, \qquad d)\quad \dot{y}-ay = e^{bt}\,, \qquad e)\quad \dot{y}-ay = be^{at}\,,$$

donde $a < 0$, $b \neq a$ es una constante y la condición inicial es $y(0) = y_0$. Analice la estabilidad de estas trayectorias.

5. Considere la ecuación diferencial, conocida como *Ecuación de Bernoulli*,

$$\dot{z} - a(t)z = b(t)z^n\,,$$

donde n es un número real.

a) La ecuación de Bernoulli no es lineal. Defina $y = z^{1-n}$ y muestre que se puede conseguir una ecuación diferencial lineal para y.

b) Para el caso $a(t) = a$ y $b(t) = b$ (constantes), encuentre la trayectoria de z, considerando una condición inicial de $z(0) = z_0$. Para ello, primero debe encontrar la trayectoria de y.

c) Resuelva y analice, con los resultados previamente encontrados, el *modelo de crecimiento logístico*

$$\frac{\dot{p}}{p} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)\,,$$

que indica que la tasa de crecimiento de una población p es cercana a una tasa exponencial $r > 0$ cuando ésta es pequeña, pero se aproxima a cero conforme la población se acerca a una máxima capacidad $K > 0$.

d) Resuelva y analice, con los resultados previamente encontrados, el *modelo de crecimiento de Solow*

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - mk\,,$$

que describe la evolución del *stock* de capital per cápita de una economía cuya tasa de inversión es $s \in (0,1)$, se destina una fracción $\alpha \in (0,1)$ para rentar capital y la población crece a una tasa $m \in (0,1)$.

6. Estudie cualitativamente las trayectorias implícitas en las siguientes ecuaciones diferenciales, a través de un diagrama de fase y de la linealización de las ecuaciones diferenciales:

a) El *modelo de crecimiento logístico*

$$\frac{\dot{p}}{p} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)\,,$$

donde $r > 0$ y $K > 0$.

b) El *modelo de crecimiento de Solow*

$$\dot{k} = s\phi(k) - mk\,,$$

donde $\{s, \alpha, m\} \in (0,1)$ y $\phi(\cdot)$ es una función cóncava tal que $\phi(0) = 0$, $\lim_{k\to 0} \phi'(k) \to \infty$, $\phi'(k) > 0$, $\lim_{k\to\infty} \phi'(k) = 0$ y $\phi''(k) < 0$.

c) N denota el número de empleados en una economía y que S denota el tamaño de la población en edad de trabajar. Así, $e = N/S$ es la tasa de empleo. Si N y S evolucionan según las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\dot{N}}{N} = \rho \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{S}}{S} = \alpha + \beta\left(\frac{N}{S - N}\right)\,,$$

donde $\rho > \alpha > \beta > 0$, describa la dinámica de e.

7. Considere la ecuación diferencial

$$\dot{y} = (a_1 - y)(y - a_2)(y - a_3)\,,$$

donde $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

a) Encuentre los estados estacionarios de y, e indique si se tratan de puntos estables o inestables.

b) Con el mayor detalle posible, esboce el diagrama de fase y describa el comportamiento de la trayectoria $y(t)$ considerando diversos puntos iniciales $y(0)$.

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y sistemas lineales

8. Estudie cómo el valor de la constante a afecta las trayectorias que resuelven las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\ddot{y} = a$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = 1$.

b) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^2 + 12t - 23$, donde $y(0) = 2$ e $\dot{y}(0) = a$.

c) $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 6t^2 + 2t + 4$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = a + 2$.

d) $\ddot{y} - (2a + 1)\dot{y} + a(a + 1)y = e^t$, donde $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = a$.

e) $\ddot{y} - \dot{y} - a(a + 1)y = a(a + 1)t + 1$, donde $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -2(a + 1)$.

f) $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = e^{at}$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

g) $\ddot{y} + 16y = \cos(at)$, donde $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 4$.

9. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, donde $y^{(n)} \equiv d^n y/dt^n$:

a) $y^{(3)} + 7y^{(2)} + 10y^{(1)} = 12e^{-3t}$.

b) $y^{(4)} - y^{(2)} - 2y^{(1)} + 2y = 2$.

c) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 7y^{(2)} + 6y^{(1)} + 2y = 2$.

d) $y^{(5)} + 4y^{(4)} - 5y^{(3)} - y^{(2)} - 4y^{(1)} + 5y = 0$.

10. Resuelva los siguientes sistemas diferenciales:

a) $\dot{y} = 2(y + x)$ y $\dot{x} = -9y - 4x + e^{-t}$, donde $y(0) = \frac{2}{9}$ y $x(0) = \frac{1}{6}$.

b) $\dot{y} = -4x + 3y + e^{-t}$ y $\dot{x} = -5(x - y)$, donde $y(0) = \frac{7}{5}$ y $x(0) = \frac{5}{4}$.

c) $\dot{y} = y + 2x$ y $\dot{x} = -x$, donde $y(0) = 1$ y $x(0) = 1$.

11. Considere los siguientes sistemas homogéneos. Clasifique el punto de equilibrio $(0,0)$. En caso de tratarse de un punto de ensilladura, encuentre la pendiente de la senda de ensilladura, $x(t) = \beta y(t)$.

a) $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 2x - 3y.$

b) $\dot{x} = 2x - y, \quad \dot{y} = x - y.$

c) $\dot{x} = x - 3y, \quad \dot{y} = 4x - 5y.$

d) $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x - y.$

e) $\dot{x} = 3x - 4y, \quad \dot{y} = x - y.$

f) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$

g) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x.$

12. Considere el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1(x - \gamma y) + \beta \,, \\ \dot{y} &= \alpha_2(x - \gamma y) \,, \end{aligned}$$

donde $\alpha_2 > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ y $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2\gamma < 0$.

a) Encuentre la trayectoria de $y(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{y}(t)$.

b) Encuentre la trayectoria de $x(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{x}(t)$.

c) Encuentre la trayectoria de $z(t) = x(t) - \gamma y(t)$. Analice su estabilidad.

d) A partir del sistema original, deduzca una ecuación diferencial de primer order para $z = x - \gamma y$ y muestra que su solución es idéntica a la encontrada en la parte *c*).

Análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales

13. A continuación se presentan algunos modelos de ecuaciones diferenciales simultáneas. Estudie la naturaleza de los equilibrios y trayectorias de estos sistemas, a través del uso de diagramas de fase y técnicas de linealización.

a) La función de producción agregada de una economía que utiliza capital K como el único factor de producción es $Y = K^\alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. El *stock* de contaminación P en esta economía se incrementa con la acumulación de capital. Si $0 < s < 1$ es la tasa de inversión, $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación, $\beta > 1$ y $\gamma > 0$, las leyes de movimiento de K y P son

$$\dot{K} = sK^\alpha - \delta K \qquad \text{y} \qquad \dot{P} = K^\beta - \gamma P \,.$$

b) El número de peces P en un lago y la capacidad extractiva de una compañía pesquera K evolucionan de la siguiente manera

$$\dot{P} = P - P^2 - x \qquad \text{y} \qquad \dot{K} = px - cK \,,$$

donde x es la cantidad de peces extraídos, p es el precio de venta y c es el costo variable de extracción. La primera ecuación es una ecuación de crecimiento logístico, después de incluir la extracción, mientras que la segunda indica que la capacidad extractiva se incrementa con los beneficios que obtiene la firma. Considere que $p = c = 1$ y $x = P\sqrt{K}$.

c) El *modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans* establece las siguientes relaciones dinámicas entre el *stock* de capital per cápita de una econoía, k, y el consumo per cápita, c:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m + \rho) \,.$$

La primera ecuación es una regla de acumulación de capital e indica que el capital per cápita se incrementa siempre que la inversión en nuevo capital, que es igual al ahorro $y - c$ donde $y = \phi(k)$ es el nivel de ingreso (producción), supere a la cantidad necesearia para reponer el capital depreciado, mk. La función $\phi(.)$ es cóncava, $\phi'(.) > 0$ y $\phi''(.) < 0$. La segunda ecuación (*llamada ecuación de Euler*) es el resultado de un problema de optimización dinámico, donde $\rho \in (0,1)$ es la tasa de descuento de los hogares.

d) N denota el número de empleados en una economía, mientras que S denota el tamaño de la población en edad de trabajar. Las tasas de crecimiento porcentual de N y S se definen según las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\dot{N}}{N} = \rho\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{S}}{S} = \alpha + \beta\left(\frac{N}{S-N}\right),$$

donde α es la tasa natural de crecimiento poblacional y el segundo término es una medida del efecto del empleo sobre el crecimiento poblacional. Se cumple que $1 > \rho > \alpha > \beta > 0$.

14. Sea x la población de peces en un lago e y el número de barcos de una compañía pesquera. La cantidad de peces varía según

$$\dot{x} = F(x) - H(x,y)\,,$$

y la cantidad de barcos según

$$\dot{y} = \alpha(\,H(x,y) - cy\,)\,.$$

La función $F(x)$ mide el crecimiento de la población de peces en ausencia de extracción, que es medida por $H(x,y)$:

$$F(x) = rx\left(1 - \frac{x}{M}\right) \qquad \text{y} \qquad H(x,y) = xy\,,$$

donde $r \in (0,1)$, $0 < c < M$ y $\alpha > 0$.

a) Asumiendo que $x > 0$ y que $y > 0$, encuentre el estado estacionario del sistema.

b) Esboce el diagrama de fase de este sistema y caracterice al estado estacionario.

c) Calcule el Jacobiano de este sistema y determine si el estado estacionario es estable o inestable.

d) ¿Para qué valores de α el estado estacionario es un nodo? ¿Y un foco? ¿Y un punto de ensilladura?

15. *a*) Considere una versión dinámica del conocido modelo IS-LM, que incorpora un mecanismo de ajuste parcial para el nivel de producción (y) y la tasa de interés (r):

$$\dot{y} = \alpha(I(r,y) - S(r,y)) \qquad \text{and} \qquad \dot{r} = \lambda(L(r,y) - M)\,,$$

donde $I(\cdot)$ es la función de inversión que satisface $I_r < 0$ e $I_y \geq 0$, $S(\cdot)$ es la función de ahorro que satisface $S_r \geq 0$ y $S_y > 0$, $\alpha > 0$ es la tasa de ajuste del producto, $L(\cdot)$ es la demanda de dinero que satisface $L_r < 0$ y $L_y > 0$, $\lambda > 0$ es la tasa de ajuste de la tasa de interés, y M es la oferta monetaria exógena.

Grafique el diagrama de fase correspondiente y analice la dinámica de este sistema. Realice, finalmente, un ejercicio de *dinámica comparativa* donde, partiendo de una situación de equilibrio, se incrementa M.

b) En una segunda versión de este modelo, se asume que el mercado de dinero se "limpia" instantáneamente, pero el producto sigue ajustándose gradualmente. Se asume, además, que tanto ahorro como inversión responden a una tasa de interés de mayor plazo R, en lugar de la tasa que equilibra el mercado de dinero r. Así,

$$\dot{y} = \alpha(I(R,y) - S(R,y))\,, \qquad L(r,y) - M = 0 \qquad \text{y} \qquad R - \dot{R}/R = r\,,$$

donde, como en la parte *a*), $I_R < 0$, $I_y \geq 0$, $S_R \geq 0$, $S_y > 0$, $\alpha > 0$, $L_r < 0$ y $L_y > 0$. La tercera ecuación es una *curva de rendimiento* que vincular a r con R.

Repita el análisis de la parte *a*) para este nuevo modelo.