UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2018
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, Y. García, J. Zúñiga y D. Bohorquez

EJERCICIOS 5

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias de primer orden

1. Encuentre las trayectorias $y(t)$ que resuelven las siguientes ecuaciones en diferencias lineales:

$$a) \quad y_t - ay_{t-1} = b\,, \qquad b) \quad y_t - ay_{t-1} = bt^2\,, \qquad c) \quad y_t - ay_{t-1} = b^t\,, \qquad d) \quad y_t - ay_{t-1} = ba^t\,,$$

donde $0 < a < 1$, $b \neq a$ es una constante y la condición inicial es $y(0) = y_0$. Analice la estabilidad de estas trayectorias.

2. En un mercado, la cantidad demandada D_t responde al precio del producto, mientras que la cantidad ofertada S_t depende del precio *esperado* por los productores,

$$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad \text{y} \qquad S_t = -\gamma + \delta P_t^e\,,$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. Encuentre la trayectoria de $P(t)$ que implica la condición de equilibrio $D_t = S_t$. Describa el comportamiento de esta trayectoria e indique bajo qué condiciones ésta es estable si ...

a) ... las expectativas son estáticas, $P_t^e = P_{t-1}$ (este es el famoso *Modelo de la Telaraña*),

b) ... las expectativas son adaptativas, $P_t^e = (1-\eta)P_{t-1}^e + \eta P_{t-1}$, donde $\eta \in (0, 1]$.

3. En un mercado, las funciones de demanda D_t y de oferta S_t son

$$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad \text{y} \qquad S_t = -\gamma + \delta P_t\,,$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. El precio se ajusta gradualmente ante desequilibrios en las cantidades demandada y ofertada,

$$\Delta P_t = -\sigma(S_{t-1} - D_{t-1})\,,$$

donde $\sigma > 0$.

a) Encuentre la trayectoria $P(t)$ e indique las condiciones para su estabilidad.

b) Suponga que $\sigma > 2/(\beta + \delta)$. Determine la curva de fase $P_t = f(P_{t-1})$, esboce un diagrama de fase y analice el comportamiento de la trayectoria de P.

c) Suponga nuevamente que $\sigma > 2/(\beta + \delta)$. Imagine que se introduce un control de precio de modo que

$$P_t = \begin{cases} f(P_{t-1}), & \text{si } f(P_{t-1}) < \bar{P} \\ \bar{P}, & \text{si } f(P_{t-1}) \geq \bar{P} \end{cases}$$

donde $\bar{P}$ es el máximo precio permitido. Esboce el diagrama de fase en este nuevo modelo y describa el comportamiento de la trayectoria de P.

4. Estudie cualitativamente las trayectorias implícitas en las siguientes ecuaciones en diferencias no lineales, a través de un diagrama de fase y de la linealización de la curva de fase. Considere que $0 < a < 1$ y que $x_t > 0$.

a) $x_t = \dfrac{x_{t-1} + a}{x_{t-1} + a + 1}$,

b) $x_t = \dfrac{1 - x_{t-1}}{1 - (1-a)x_{t-1}}$.

Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

5. Estudie cómo el valor de la constante a afecta las trayectorias que resuelven las siguientes ecuaciones en diferencias:

a) $\Delta^2 y_t = a$.

b) $y_t - 4y_{t-1} + 4y_{t-2} = a^t$.

c) $y_t - 2a(y_{t-1} - ay_{t-2}) = 0$.

6. En un corral se ha determinado que cada pareja de conejos necesita un mes de maduración para hacerse adulta y que tras otro mes de gestación da lugar a una nueva pareja. Una vez adulta, la pareja da a luz a otra pareja cada mes.

a) Deduzca la ecuación en diferencias que represente la dinámica descita de la población de conejos. Considere a la *pareja* como unidad de medida.

b) Resuelva la ecuación y analice su dinámica.

c) Analice la convergencia de la tasa de crecimiento de la población de conejos.

7. Considere el siguiente modelo macroeconómico dinámico

$$Y_t = C_t + I_t + G\,, \qquad C_t = C_0 + \gamma Y_{t-1}\,, \qquad I_t = I_0(g)^t + \alpha(Y_{t-1} - Y_{t-2})\,,$$

donde Y_t es el ingreso, C_t el consumo, I_t la inversión y G es el gasto de gobierno que se asume constante. Los parámetros satisfacen $C_0 > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, $I_0 > 0$, $g \geq 1$ y $\alpha > 0$.

a) Reduzca este modelo a una ecuación en diferencias de segundo orden para Y_t. Encuentra la solución particular y las raíces de esta ecuación.

b) Suponga que $g = 1$. Indique qué condiciones deben cumplir los parámetros α y γ para que esta economía presente fluctuaciones. Indique, además, qué condiciones son necesarias para que esas fluctuaciones sean amortiguadas.

c) Suponga que $(\gamma + \alpha)^2 = 4\alpha$ y $g = 1$. Encuentre la trayectoria $Y(t)$ en este caso e indique las condiciones para su convergencia.

d) Suponga que $(\gamma + \alpha)^2 = 4\alpha$, $\alpha > 1$ y $g = 1$ ¿Cuál es la tasa de crecimiento de Y en el largo plazo? *Ayuda*: La tasa de crecimiento se define como $\Delta Y_t / Y_{t-1}$.

Sistemas de ecuaciones en diferencias

8. Resuelva los siguientes sistemas en diferencias, utilizando condiciones iniciales arbitrarias.

a) $y_t = 3x_{t-1} - y_{t-1}$ y $x_t = 4x_{t-1} - 2y_{t-1} + 3^{t-1}$.

b) $y_{t+1} = 2x_t - y_t$ y $x_{t+1} = 5x_t - 4y_t + 2^t$.

c) $x_t = x_{t-1}$ e $y_t = y_{t-1} + ax_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

d) $x_t = x_{t-1} + 2ay_{t-1}$ e $y_t = -y_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

e) $x_t = x_{t-1} + a^2 y_{t-1}$ e $y_t = y_{t-1} + 9x_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

f) $x_t = x_{t-1} + 4y_{t-1}$ e $y_t = a^2 x_{t-1} + y_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

g) $x_t = -5x_{t-1} - 4y_{t-1}$ e $y_t = 2x_{t-1} + y_{t-1}$.

h) $x_t = -5x_{t-1} - 2y_{t-1}$ e $y_t = 4x_{t-1} + y_{t-1}$.

9. Suponga que N_t representa el número de personas empleadas en el periodo t y U_t es el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral $L = N_t + U_t$ se mantiene constante. La dinámica de estas variables está descrita por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= qN_t + pU_t \\ U_{t+1} &= (1-q)N_t + (1-p)U_t\,, \end{aligned}$$

donde $p \in (0, 1)$ y $q \in (0, 1)$.

a) A la luz de la dinámica descrita, ¿Cómo se interpretan las constantes q y p?

b) Resuelva completamente el sistema de ecuaciones en diferencias y evalúe si es convergente.

10. Sean x, y y z los niveles de armamento de tres países vecinos. La dinámica de estas tres variables está descrita por el sistema:

$$\begin{aligned}\Delta x_{t+1} &= -a_1 x_t + k_{12} y_t + k_{13} z_t + g_1\\ \Delta y_{t+1} &= k_{21} x_t - a_2 y_t + k_{23} z_t + g_2\\ \Delta z_{t+1} &= k_{31} x_t + k_{32} y_t - a_3 z_t + g_3\,.\end{aligned}$$

Los parámetros g_i expresan las motivaciones estratégicas para cambiar los niveles de armamento. Los parámetros k_{ij} son coeficientes de *defensa* y reflejan la propensión hacia el rearme del país i en vista de que el país j ha alcanzado cierto *stock* de armas. Finalmente, los parámetros a_i son coeficientes de *fatiga* y reflejan el costo económico por destinar recursos en defensa. Todos estos parámetros son positivos y menores a la unidad.

a) Considerando que los países tienen los mismos coeficientes de defensa ($k_{ij} = k$ para todo i y j) y el mismo coeficiente de fatiga ($a_i = a$ para todo i) indique en qué casos el sistema es estable.

b) Suponga que el país z es *pacifista* en el sentido que sus coeficientes de defensa son iguales a cero, $k_{31} = k_{32} = 0$. En tal caso, ¿Cuáles son las condiciones de estabilidad del sistema? Mantenga los supuestos de a) para el resto de coeficientes.

c) Considere ahora que y también es pacifista, $k_{31} = k_{32} = k_{21} = k_{23} = 0$. En tal caso, ¿Cuáles son las condiciones de estabilidad del sistema? Mantenga los supuestos de a) para el resto de coeficientes.

d) Compare los resultados de a), b) y c) y diga qué ocurre con la *carrera armamentista* en caso de que más países se vuelvan pacifistas.

11. Considere el sistema

$$\begin{aligned}x_t &= c(x_{t-1} + y_{t-1})\,,\\ y_t &= c(y_{t-1} + z_{t-1})\,,\\ z_t &= c(z_{t-1} + x_{t-1})\,,\end{aligned}$$

donde c es una constante.

a) ¿Para qué valores de c el sistema anterior es estable? *Ayuda:* Recuerde que $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.

b) Suponga que $c = \frac{1}{2}$. Describa con el mayor detalle posible la trayectoria de $x(t)$.

Operador de rezago

12. Considere la ecuación en diferencias

$$y_t - (r_1 + r_2) y_{t-1} + r_1 r_2 y_{t-2} = b_t\,,$$

donde r_1 y r_2 son dos escalares reales. Si b_t es una función arbitraria de t, la solución particular tendrá la forma

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} w_h b_{t-h}\,.$$

Encuentre una expresión, lo más simple posible y en términos de r_1 y r_1, para el coeficiente w_h, ...

a) ... cuando $r_1 \neq r_2$, $|\,r_1\,| < 1$ y $|\,r_2\,| < 1$.

b) ... cuando $r_1 = r_2 = \bar{r}$ y $|\,\bar{r}\,| < 1$.

Ayuda 1: Recuerde que si $|\,a\,| < 1$, entonces $\dfrac{1}{1 - az} = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty} (az)^h\,.$

Ayuda 2: Recuerde que $\dfrac{1}{(1 - r_1 z)(1 - r_2 z)} = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\left(\dfrac{r_1}{1 - r_1 z} - \dfrac{r_2}{1 - r_2 z}\right)\,.$

13. Considere la ecuación en diferencias

$$y_t - 2\rho\cos(\theta)\, y_{t-1} + \rho^2 y_{t-2} = b_t\,,$$

donde $0 < \rho < 1$ y $\theta \in (0, \pi)$.

a) Si $b_t = b$ (constante), encuentre la trayectoria de $y(t)$ considerando que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = 0$.

b) Si b_t es una función arbitraria de t, la solución particular tendrá la forma

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} w_h b_{t-h}\,.$$

Encuentre una expresión, lo más simple posible y en términos de ρ y θ, para el coeficiente w_h.