



Departamento Académico de Economía

Matemáticas III (30651)

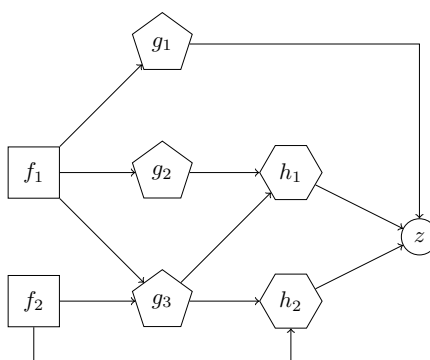
Primer Semestre 2015

Profesores Diego Winkelried, Eduardo Mantilla, Jorge Rodas y Jorge Cortéz

Práctica Calificada 3

1. Transformaciones (4 pts)

Considere el proceso de producción descrito por el siguiente diagrama, donde las transformaciones f , g y h producen bienes intermedios, necesarios para la producción del bien final z :



a) (1.5 pts) Complete el siguiente cuadro, teniendo en cuenta el esquema del proceso productivo.

Funciones	De	A
f_1	\mathbb{R}^4	?
f_2	\mathbb{R}^3	\mathbb{R}^2
g_1	\mathbb{R}^2	?
g_2	\mathbb{R}	?
g_3	\mathbb{R}^2	\mathbb{R}^2
h_1	\mathbb{R}^3	\mathbb{R}^2
h_2	?	?
z	\mathbb{R}^4	\mathbb{R}

Asuma que si el proceso A utiliza como insumo algún bien intermedio producido en el proceso B , entonces A utiliza *todos* los bienes intermedios producidos por B .

b) (2.5 pts) Obtenga una expresión detallada del diferencial de z en función de las matrices Jacobianas de los procesos f , g y h .

2. Modelo de comercio internacional (9 pts)

Considere el siguiente modelo macroeconómico en un mundo de dos países (nacional y extranjero):

$$\begin{aligned}
 Y &= C(Y) + G + X(Y^*, q) - M(Y, q) & 0 < C_Y < 1, \\
 Y^* &= C^*(Y^*) + G^* + X^*(Y, q) - M^*(Y^*, q) & 0 < C_{Y^*}^* < 1, \\
 X^*(Y, q) &= M(Y, q) & 0 < M_Y < 1, \quad M_q < 0, \\
 M^*(Y^*, q) &= X(Y^*, q) & 0 < X_{Y^*} < 1, \quad X_q > 0,
 \end{aligned}$$

donde Y es el ingreso nacional, Y^* es el ingreso extranjero, G es el gasto del gobierno nacional, G^* es el gasto del gobierno extranjero y q es el tipo de cambio entre ambos países. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $X(\cdot)$, $M(\cdot)$, $C^*(\cdot)$, $X^*(\cdot)$ y $M^*(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. Las últimas dos ecuaciones indican que, en un mundo de dos países, las exportaciones de un país son las importaciones del otro, y vice versa.

Tratando a G , G^* y q como variables exógenas:

- a) **(2 ptos)** Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas. *Ayuda:* Plantee un sistema de dos ecuaciones.
- b) **(1 pto)** Asumiendo que estas condiciones se cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G manteniendo G^* y q constantes.
- c) **(1 pto)** Asumiendo que estas condiciones se cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G^* manteniendo G y q constantes.
- d) **(1 pto)** ¿Bajo qué condiciones un incremento en q no tendrá efectos sobre el ingreso mundial $Y + Y^*$?

Tratando a G , G^* e Y^* como variables exógenas:

- e) **(2 ptos)** Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.
- f) **(1 pto)** Asumiendo que estas condiciones se cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en G manteniendo G^* e Y^* constantes.
- g) **(1 pto)** Asumiendo que estas condiciones se cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en Y^* manteniendo G^* y G constantes.

3. Funciones trigonométricas hiperbólicas (7 ptos)

Para x real, las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen como

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- a) **(1 pto)** Encuentre la serie de McLaurin de $\sinh(x)$ y determine su rango de convergencia.
- b) **(1 pto)** Encuentre la serie de McLaurin de $\cosh(x)$ y determine su rango de convergencia.

Única y exclusivamente manipulando series de potencias verifique las siguientes identidades:

- c) **(1 pto)** $\cosh(x) = \cos(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\cos(\cdot)$ es la función coseno,
- d) **(1 pto)** $\sinh(x) = -i \sin(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\sin(\cdot)$ es la función seno,
- e) **(1 pto)** $\frac{d^2 \cosh(x)}{dx^2} = \cosh(x)$,
- f) **(1 pto)** $\frac{d^2 \sinh(x)}{dx^2} = \sinh(x)$,
- g) **(1 pto)** $\int \sinh(ax) dx = \frac{\cosh(ax)}{a} + C$.

Indicación: Puede utilizar sin demostración el desarrollo de series de potencias de las funciones e^x , $\cos(x)$ y $\sin(x)$, siempre y cuando indique claramente que está utilizando un resultado “conocido”.