Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Eduardo Mantilla, Jorge Rodas y Jorge Cortéz

Práctica Calificada 4

1. Ecuaciones diferenciales de primer orden (3 ptos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $y(0)$:

a) **(1.5 ptos)** $\sin(t) - \frac{y}{t}\dot{y} = 0\,, \quad y(0) = 0$

b) **(1.5 ptos)** $\dot{y} + 4y = -50\int_0^t \cos(s)\,ds\,, \quad y(0) = y_0$

2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden (7 ptos)

a) **(2 ptos)** Si la ecuación característica de la ecuación diferencial $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$ tiene raíces r y s, muestre que la función

$$g(t) = \frac{e^{rt} - e^{st}}{r - s}$$

es una solución de la ecuación diferencial.

b) **(3 ptos)** Dados dos números reales p y q, muestre que las funciones

$$g_1(t) = e^{pt}\cos(qt) \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = e^{pt}\sin(qt)$$

son soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{y} - 2p\dot{y} + (p^2 + q^2)y = 0$.

c) **(2 ptos)** Una ecuación diferencial lineal y homogénea de la forma

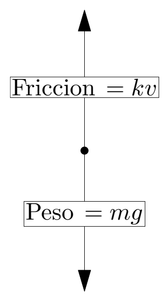
$$a_2t^2\ddot{y} + a_1t\dot{y} + a_0y = 0\,,$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes, se conoce como *ecuación de Cauchy-Euler*. Se sabe que una solución posible es $y(t) = t^r$ (análoga a la solución $y(t) = e^{rt}$ para una ecuación diferencial lineal y homogénea de coeficientes constantes). Con la definición anterior, resuelva

$$t^2\ddot{y} + 5t\dot{y} + 3y = 0\,, \qquad y(1) = \dot{y}(1) = 1\,.$$

3. Mecánica clásica (3 ptos)

La segunda ley de movimiento de Newton enuncia que "*la fuerza es proporcional a la masa y a la aceleración*" (es decir, $F = ma$). Por otro lado, se conoce que cuando un objeto cae existen dos fuerzas opuestas: el peso (la masa del cuerpo m, por la gravedad g) y la fricción del viento (un escalar k, por la velocidad de caída del cuerpo v). La aceleración a se define como el cambio de la velocidad por unidad de tiempo. Además, los escalares m, g y k son estrictamente positivos.



a) **(2 ptos)** Resuelva la ecuación diferencial para la velocidad de caída con un valor inicial $v(0) = v_0$.

b) **(1 pto)** Utilice la solución de la parte *a*) para determinar la velocidad límite o terminal de la masa.

4. Modelo dinámico de Mundell-Fleming (7 ptos)

Considere un modelo macroeconómico para una economía pequeña y abierta

$$\begin{array}{rcll} \dot{e} & = & i - i^* & \\ p & = & \sigma e\,, & 0 < \sigma < 1\,, \\ m - p & = & ky - \delta i\,, & k, \delta > 0\,, \\ \dot{y} & = & \chi\left(y^d - y\right)\,, & \chi > 0\,, \\ y^d & = & \alpha + \mu e - \psi i\,, & \mu, \psi > 0, \quad \mu\delta - \sigma\psi > 0 \end{array}$$

donde e es el tipo de cambio, p es el nivel agregado de precios, i e i^* son las tasas de interés local e internacional, m es la cantidad de dinero, y es el producto nacional e y^d es la demanda agregada. La primera ecuación es la paridad descubierta de tasas de interés, la tercera es la demanda por saldos reales de dinero y la cuarta muestra que la variación del producto responde a la diferencia entre demanda y oferta agregadas.

a) **(1 pto)** Encuentre un sistema dinámico para las variables e, y.
Ayuda: Asegúrese que las funciones $\dot{e}$ y $\dot{y}$ dependan de e, y, m e i^*.

b) **(2 ptos)** Esboce un diagrama de fases en el plano (y, e) y caracterice al punto de equilibrio. En particular, muestre que la curva $\dot{y} = 0$ tiene pendiete positiva y que la curva $\dot{e} = 0$ tiene pendiente negativa.

c) **(2 ptos)** Caracterice el equilibrio (tipo y estabilidad) mediante el uso de la matriz Jacobiana.

d) **(2 ptos)** Considere que el valor de la pendiente de la curva $\dot{y} = 0$ es menor (en valor absoluto) que el de la curva $\dot{e} = 0$. Suponga que ocurre un incremento en m. Muestre gráficamente que es posible que el tipo de cambio experimente un *overshooting*. Este fenómeno se da cuando, ante un cambio del valor de equilibrio (de $\bar{e}_0$ a $\bar{e}_1 > \bar{e}_0$), en el corto plazo el tipo de cambio excede el valor de su nuevo equilibrio ($e_t > \bar{e}_1$). Esboce la trayectoria de e hacia su nuevo equilibrio.