**4. Desigualdad de Cauchy-Schwarz (5 ptos)**

*a*) **(3 ptos)** Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, muestre que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2\right| \leq \sum_{i=1}^{n} i^2 \,.$$

*b*) **(2 ptos)** Considere tres escalares $x_1$, $x_2$ y $x_3$, tales que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Determine el máximo valor de $x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

**Solución:**

Para dos vectores de la misma dimensión, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que:

$$\left|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}\right| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \,.$$

*a*) Considere los vectores $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3, 4, \ldots, n)'$ e $\boldsymbol{y} = (1, -2, 3, -4, \ldots, n)'$. En este caso,

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = 1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots \pm n^2 = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}i^2 \,,$$

que corresponde al lado izquierdo de la desigualdad provista. Asimismo, note que

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 + (-4)^2 + \ldots + (\pm n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 \,,$$

de donde se concluye que $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$ y, por tanto, $\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}\|^2$. Al notar que

$$\|\boldsymbol{y}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 \,,$$

se consigue el lado derecho de la desigualdad.

*b*) Considere los vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)'$ e $\boldsymbol{y} = (1, 2, 3)$. Note que la función objetivo puede ser escrita como:

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = x_1 + 3x_2 + 5x_3 \,.$$

Además, $\|\boldsymbol{x}\| = 1$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece, entonces, que $-\|\boldsymbol{y}\| \leq \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} \leq \|\boldsymbol{y}\|$, por lo que el máximo valor es $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{14}$.

$\blacksquare$