UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, y F. Rosales

Práctica Calificada 4

1. Misceláneos (9 ptos)

a) **(3 ptos)** Calcule la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-t}\,.$$

b) **(3 ptos)** La solución de la *ecuación de Euler-Cauchy*

$$t^2\ddot{x} - 2x = 1 - t\,,$$

tiene la forma habitual $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$. No obstante, en lugar de considerar que $x_c(t) = e^{rt}$, para una constante r por determinar, se debe considerar que $x_c(t) = t^r$. Si se sabe que $x(1) = 0$ y $\dot{x}(1) = 7/2$, calcule $x(t)$.

c) **(3 ptos)** Considere la ecuación diferencial no lineal

$$\dot{x} = \alpha(x^2 - 4x + 3)\,,$$

donde $\alpha \neq 0$ es una constante. Si se sabe que $x(0) = 2$, describa cualitativamente la trayectoria $x(t)$. Su respuesta dependerá del signo de α.

2. Ecuación diferencial no lineal de segundo orden (6 ptos)

Considere la ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0\,,$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante.

a) **(1 pto)** Defina $y = \dot{x}$ y, a partir de la ecuación anterior, construya un sistema autónomo de la forma:

$$\dot{x} = f(x,y) \qquad \text{y} \qquad \dot{y} = g(x,y)\,.$$

b) **(1 pto)** Determine los estados estacionarios del sistema anterior.

c) **(1 pto)** ¿Para qué valores de α todos los estados estacionarios del sistema son estables?

d) **(1 pto)** ¿Para qué valores de α todos los estados estacionarios del sistema son nodos?

e) **(2 ptos)** Suponga que $\alpha = -1$ y que $-1 < x < 1$. Esboce, de la manera más detallada posible, el diagrama de fases del sistema anterior en el plano (x, y).

3. Dinero y consumo (5 ptos)

La cantidad real de dinero de una economía m, evoluciona de acuerdo con:

$$\dot{m} = y - c\,,$$

donde y es el ingreso agregado (exógeno) y c es el consumo.

Sea $U(m,c) = \beta u(m) + u(c)$ una función de utilidad con $\beta > 0$, $u'(\cdot) > 0$ y $u''(\cdot) < 0$. Luego, c evoluciona de acuerdo con:

$$\dot{c} = \frac{\alpha\, u'(c) - \beta u'(m)}{u''(c)}\,,$$

donde $\alpha > 0$.

a) **(2 ptos)** Linealice el sistema alrededor de su estado estacionario $(\bar{c}, \bar{m})$. Es decir, encuentre a_{cc}, a_{cm}, a_{mc} y a_{cc} en la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= a_{mc}(c - \bar{c}) + a_{mm}(m - \bar{m})\,, \\ \dot{c} &= a_{cc}(c - \bar{c}) + a_{cm}(m - \bar{m})\,. \end{aligned}$$

b) **(1 pto)** ¿Qué tipo de equilibrio es el $(\bar{c}, \bar{m})$?

c) **(2 ptos)** Esboce el diagrama de fases del sistema en el plano (m, c) de la manera más detallada posible. *Ayuda:* Solo para fines gráficos, considere que $u(x) = \ln(x)$.