UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Segundo Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, D. Bohorquez y C. Aparicio

SOLUCIONARIO 3

Números complejos. Tópicos de cálculo

Números complejos

1. Verifique las siguientes propiedades para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

c) $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2$

d) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Solución:
Considere los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$:

a) Dado que $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$, entonces $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$

b) Se tiene que $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ por lo que $\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$. Por su parte, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{z_1 \cdot z_2}$.

c) Directamente, $z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$.

d) Recuerde que $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Luego,

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2 + b^2)c^2 + (a^2 + b^2)d^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2\,. \end{aligned}$$

Al tomar raíces cuadradas, se verifica que $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

■

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $\left|\dfrac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i}\right|$, donde $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 2i$.

b) $(1 + i)^5$.

c) $\dfrac{(1 - i)^2(1 + i)^{-2}}{(\sqrt{3} + i)^{-4}}$.

d) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^{30}$.

Solución:

a) El numerador es $n = 2z_2 + z_1 - 5 - i = 2(3 - 2i) + (2 + i) - 5 - i = 3 - 4i$. Por su parte, el denominador es $d = 2z_1 - z_2 + 3 - i = 2(2 + i) - (3 - 2i) + 3 - i = 4 + 3i$. Con ello,

$$\frac{2z_2 + z_1 - 5 - i}{2z_1 - z_2 + 3 - i} = \frac{3 - 4i}{4 + 3i} = \frac{3 - 4i}{4 + 3i}\left(\frac{4 - 3i}{4 - 3i}\right) = -\frac{25i}{25} = -i\,.$$

Así, el módulo de este número complejo es igual a 1.

b) Note que $(1+i)^2 = 2i$. Así, $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Finalmente, $(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = -4-4i$.

c) Dado que $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$, $1+i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ y $\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$,

$$\frac{(1-i)^2(\sqrt{3}+i)^4}{(1+i)^2} = \frac{(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^2(2e^{\frac{\pi}{6}i})^4}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^2} = 16e^{-\frac{\pi}{3}i} = 8 - 8\sqrt{3}i\,.$$

d) Dado que $1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ y $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$,

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{30} = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}}\right)^{30} = \frac{2^{30}e^{(10\pi)i}}{2^{15}e^{-\frac{15\pi}{2}i}} = 2^{15}e^{(10\pi+\frac{15\pi}{2})i} = 2^{15}e^{(16\pi+\frac{3\pi}{2})i} = 2^{15}e^{(16\pi)i}e^{\frac{3\pi}{2}i} = -2^{15}i\,.$$

■

3. Resuelva las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$.

b) $x^5 - 9x^3 - x^2 + 9 = 0$.

c) $x^2 - (2+i)x + (-1+7i) = 0$.

d) $x^6 + 1 = 0$. En este caso, grafique las raíces en el plano complejo.

Solución:

a) Primero, note la factorización $x^8 + 17x^4 + 16 = (x^4+16)(x^4+1)$. Al igualar esta expresión a cero, se llega a $x^4 = -16$ y $x^4 = -1$. Las ocho raíces de esta ecuación son 4 pares de complejos conjugados.

Utilizando la forma polar para $x^4 = -16$,

$$x^4 = 16\left[\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right] \qquad \rightarrow \qquad x = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3$. Sea α_k el argumento de x. Para $k = 0$ y $k = 3$, $\cos(\alpha_k) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, mientras que para $k = 1$ y $k = 2$, $\cos(\alpha_k) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Asimismo, para $k = 0$ y $k = 1$, $\sin(\alpha_k) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, mientras que para $k = 2$ y $k = 3$, $\sin(\alpha_k) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Con ello, las primeras 4 raíces son

$$x_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad x_2 = \sqrt{2}(-1+i), \quad x_3 = \overline{x_2} = \sqrt{2}(-1-i), \quad x_4 = \overline{x_1} = \sqrt{2}(1-i)\,.$$

El análisis para $x^4 = -1$ es idéntico, con la diferencia que los módulos del número complejo y de su raíz cuarta son iguales a 1 (en lugar de 16 y 2, respectivamente). Así,

$$x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad x_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i), \quad x_7 = \overline{x_6} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i), \quad x_8 = \overline{x_5} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\,.$$

b) Utilizamos la factorización $x^5 - 9x^3 - x^2 + 9 = (x^3-1)(x^2-9)$. Así, $x^3 = 1$ y $x^2 = 9$. Tres de las cinco raíces son reales:

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = -3, \qquad x_3 = 1\,.$$

Las restantes forman un par de complejos conjugados. De la forma polar para $x^3 = 1$,

$$x^3 = \cos(0) + i\sin(0) \qquad \rightarrow \qquad x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}k\right)$$

para $k = 1, 2$ (el caso $k = 0$ corresponde a $x_3 = 1$). Así,

$$x_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \qquad x_5 = \overline{x_4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

c) De la fórmula general para las raíces de ecuaciones cuadráticas ($a = 1$, $b = -(2+i)$ y $c = -1+7i$):

$$x = \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(-1+7i)}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{7-24i}}{2}\,.$$

Sea $w = 7 - 24i = 25\,[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$, donde $\cos(\theta) = 7/25$. Luego,

$$\sqrt{w} = 5\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 5\left(\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}\right) = 5\left(\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} - i\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}\right) = 4 - 3i\,.$$

La otra raíz cuadrada de w es el negativo de este número complejo, $\sqrt{w} = -4 + 3i$. En consecuencia,

$$x = \frac{2 + i \pm (4 - 3i)}{2} \qquad \to \qquad x_1 = 3 - i, \qquad x_2 = -1 + 2i\,.$$

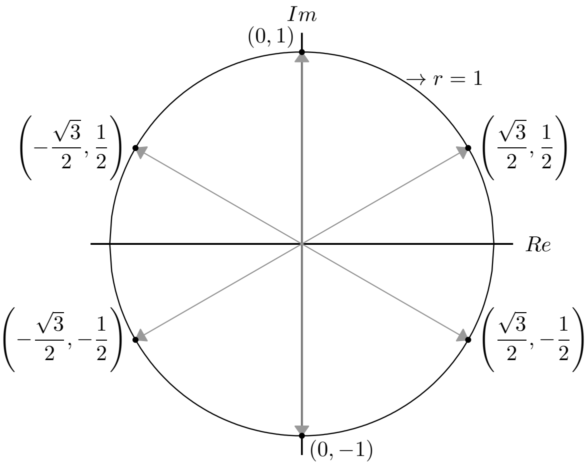
d) Se tiene $x^6 = -1$, que en forma polar es igual a $x^6 = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$. Luego,

$$x = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right),$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Dado que $\alpha_k = (\pi + 2\pi k)/6$, se tiene que (en grados) $\alpha_k = 30(1 + 2k)$. Así, si x_{k+1} denota la raíz asociada a α_k, se consigue

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad x_2 = i, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad x_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad x_5 = -i, \quad x_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\,.$$

Gráficamente:



■

4. Si $1 + \sqrt{3}i$ es una de las raíces sextas del número complejo z, ¿cuáles son las otras?

Solución:

Las raíces sextas de un complejo adoptan la forma $w = r^{\frac{1}{6}} e^{\left(\frac{\theta}{6} + \frac{\pi}{3}k\right)i}$ donde r es el módulo del número complejo y θ es su argumento. Note que $w = r^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\theta}{6}i} e^{\frac{\pi}{3}ik}$, de modo que las raíces tienen el mismo módulo y solo se diferencian en su argumento, el cual se va incrementando en $\frac{\pi}{3}$ con cada nueva raíz.

Así, partiendo de $z_1 = 1 + 3i \equiv r^{\frac{1}{6}} e^{\frac{\theta}{6}i}$, las otras raíces se pueden obtener multiplicando sucesivamente por $e^{\frac{\pi}{3}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)$. Luego,

$$\begin{aligned}
w_1 &= 1 + \sqrt{3}i\,, \\
w_2 &= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)^2 = -1 + \sqrt{3}i\,, \\
w_3 &= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_2 = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = -2\,, \\
w_4 &= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_3 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)(-2) = -(1 + \sqrt{3}i)\,, \\
w_5 &= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_4 = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)^2 = 1 - \sqrt{3}i\,, \\
w_6 &= \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_5 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i) = 2\,.
\end{aligned}$$

Note que $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)w_6 = 1 + \sqrt{3}i = w_1$, lo que cierra el ciclo. ■

5. Encuentre todos los complejos z para los cuales se cumple que:

a) $\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right| = 1.$

b) $\overline{z} = z^{n-1}$, donde $n > 2$ es un número entero.

Solución:

a) Dados dos números complejos $z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ y $z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$, se verifica que $z_1 \div z_2 = (r_1 \div r_2)e^{(\theta_1-\theta_2)i}$. Así pues, el módulo del ratio $z_1 \div z_2$ es igual al ratio de módulos, $r_1 \div r_2$.

Por su parte,

$$\left|\frac{1+z}{1-z}\right| = 1 \qquad \to \qquad \left|\frac{1+z}{1-z}\right|^2 = 1 \qquad \to \qquad |1+z|^2 = |1-z|^2 \,.$$

Luego, dado el número complejo $z = a + bi$, entonces la igualdad $|1+z|^2 = |1-z|^2$ implica que

$$|(1+a)+bi|^2 = |(1-a)-bi|^2 \quad \to \quad (1+a)^2 + b^2 = (1-a)^2 + b^2 \quad \to \quad (1+a)^2 = (1-a)^2 \,,$$

de donde se obtiene que $a = -a$. El único valor real que satisface esta condición es $a = 0$. En conclusión, únicamente los números imaginarios puros cumplen con la condición planteada en el problema.

b) Multiplicando $\overline{z} = z^{n-1}$ por z se obtiene $z \cdot \overline{z} = z^n$ o $r^2 = z^n$. Es decir, z^n da como resultado un número real, igual cuadrado del módulo de z.

Luego, dado que $z = re^{\theta i}$ tenemos $r^2 = r^n e^{(n\theta)i}$. Mejor aún, $r^2 e^{0i} = r^n e^{(n\theta)i}$. Se desprende, primero, que $r^2 = r^n$; dado que $n > 2$, esta igualdad ocurre sólo para $r = 1$. Así, $z^n = 1$ y se concluye que z es una de las raíces n-ésimas de la unidad, $e^{0i} = e^{(n\theta)i}$. De aquí, se concluye que $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

■

6. Resuelva:

a) Utilizando la fórmula de Euler, muestre que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{\theta i} + e^{-\theta i}}{2}$.

b) Recuerde que si $y = \arccos(a)$, entonces $\cos(y) = a$. Si usted le solicita a su calculadora el valor y para $a > 1$, posiblemente obtenga un mensaje de error. Esto no significa necesariamente que no exista el valor de y. De hecho, y es un número complejo. Con la ayuda del resultado obtenido en *a*), encuentre $y = \arccos(a)$ para $a > 1$. Verifique que si $a = 1$, entonces $y = 0$.

Solución:

a) La fórmula de Euler es $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, de donde se deduce que $e^{-\theta i} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$. Al sumar, $e^{\theta i} + e^{-\theta i} = 2\cos(\theta)$, estableciendo así el resultado.

b) Se tiene que

$$\frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} = \cos(y) \qquad \to \qquad e^{yi} + e^{-yi} = 2a \qquad \to \qquad e^{yi} - 2a + e^{-yi} = 0 \qquad \to \qquad \left(e^{yi}\right)^2 - 2ae^{yi} + 1 = 0\,.$$

Sea $x = e^{yi}$. Se tiene la ecuación cuadrática $x^2 - 2ax + 1 = 0$, que es resuelta por

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 2}}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}\,.$$

Dado que $a > 1$, entonces $a^2 > 1$ por lo que $\sqrt{a^2-1}$ es un número real. Asimismo, $a - \sqrt{a^2-1} > a - \sqrt{a^2} = 0$. Finalmente,

$$e^{yi} = a \pm \sqrt{a^2-1} \quad \to \quad yi = \ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right) \quad \to \quad y = -i\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right)\,.$$

Cuando $a = 1$, entonces $a \pm \sqrt{a^2-1} = 1$ por lo que $y = -i\ln(1) = 0$.

■

7. Encuentre la traza, el determinante y los valores y vectores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$.

$$a)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix},\qquad b)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\qquad c)\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\quad \text{para } \theta\in(-\pi,\pi)\,.$$

<u>**Solución:**</u>

a) Los valores propios se hallan resolviendo la ecuación

$$\mid \boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\mid=0\quad\rightarrow\quad\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+5\quad\rightarrow\quad\lambda=1\pm 2i\,.$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Para $\lambda=1+2i$,

$$\begin{bmatrix}2-2i & -2\\ 4 & -2-2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1-i\end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda=1-2i$,

$$\begin{bmatrix}2+2i & -2\\ 4 & -2+2i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1+i\end{bmatrix}.$$

Tanto los valores propios como los vectores propios son complejos conjugados. Por su parte, La traza de $\boldsymbol{A}$ es $\lambda_1+\lambda_2=(1+2i)+(1-2i)=2$ y el determinante es $\lambda_1\lambda_2=(1+2i)+(1-2i)=1^2-2^2(-1)=-3$.

b) Se tiene que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=1+1=2$ y $\det(\boldsymbol{A})=1^2-(1)(-1)=2$.
Los valores propios se hallan resolviendo, en el caso de una matriz de dimensión 2, la ecuación:

$$\lambda^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda+\det(\boldsymbol{A})=0\quad\rightarrow\quad\lambda^2-2\lambda+2=0\quad\rightarrow\quad\lambda=1\pm i\,.$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Para $\lambda=1+i$,

$$\begin{bmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad -i\,v_1=v_2 \text{ o } v_1=i\,v_2\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda=1-i$,

$$\begin{bmatrix}i & -1\\ 1 & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad i\,v_1=v_2 \text{ o } v_1=-i\,v_2\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}.$$

Tanto los valores propios como los vectores propios son complejos conjugados.

c) Se tiene que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2\cos(\theta)$ y $\det(\boldsymbol{A})=\cos(\theta)^2+\sin(\theta)^2=1$. Los valores propios satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned}&\lambda^2-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\lambda+\det(\boldsymbol{A})=0\quad\rightarrow\quad\lambda^2-2\cos(\theta)\lambda+1=0\\ &\qquad\rightarrow\quad\lambda=\frac{2\cos(\theta)\pm\sqrt{4\cos(\theta)^2-4}}{2}=\cos(\theta)\pm i\sqrt{1-\cos(\theta)^2}=\cos(\theta)\pm i\sin(\theta)\equiv e^{\pm\theta i}\,.\end{aligned}$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Para $\lambda=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$,

$$\begin{bmatrix}-i\sin(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & -i\sin(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad i\,v_1=v_2 \text{ o } v_1=-i\,v_2\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda=\cos(\theta)-i\sin(\theta)$,

$$\begin{bmatrix}i\sin(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & i\sin(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=0\quad\rightarrow\quad i\,v_1=-v_2 \text{ o } v_1=i\,v_2\quad\rightarrow\quad\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}.$$

Tanto los valores propios como los vectores propios son complejos conjugados.

■

8. Demuestre las siguientes propiedades sobre valores y vectores propios:

a) Los vectores propios correspondientes a valores propios complejos conjugados son complejos conjugados.

b) Si una matriz tiene dos valores propios complejos conjugados, entonces los vectores propios asociados a dichos valores formarán un conjunto linealmente independiente.

c) Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica con términos reales, entonces sus valores propios son reales.

Solución:

a) Considere dos números complejos conjugados $\lambda_1 = p + qi$ y $\lambda_2 = p - qi$, y dos vectores complejos conjugados $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}i$ y $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}i$. Probaremos dos propiedades (que son generalizaciones de casos ya estudiados):

1. El (vector) complejo conjugado de $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ es $\lambda_2 \boldsymbol{v}_2$.
   Se tiene que $\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 = (p+qi)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}i) = (p\boldsymbol{a} - q\boldsymbol{b}) + (q\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b})i$. Su conjugado es $(p\boldsymbol{a} - q\boldsymbol{b}) - (q\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b})i$.
   Por su parte, $\lambda_2 \boldsymbol{v}_2 = (p-qi)(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}i) = (p\boldsymbol{a} - q\boldsymbol{b}) - (q\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b})i$, lo que establece la equivalencia.
2. El (vector) complejo conjugado de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1$, donde $\boldsymbol{A}$ contiene elementos reales, es $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2$.
   Se tiene que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}i$. Su conjugado es $\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}i$.
   Por su parte, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}i$, lo que establece la equivalencia.

Si λ_1 es el valor propio de $\boldsymbol{A}$ asociado con el vector propio $\boldsymbol{v}_1$, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$. Tras conjugar ambos lados de esta igualdad se consigue que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2$: λ_2 es el valor propio de $\boldsymbol{A}$ asociado con el vector propio $\boldsymbol{v}_2$. Valores propios complejos conjugados se asocian con vectores propios complejos conjugados.

b) Previamente se mostró que $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}i$ y $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}i$. Al tomar una combinación lineal, $\boldsymbol{z} = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2$ se consigue $\boldsymbol{z} = (\beta_1 + \beta_2)\boldsymbol{a} + (\beta_1 - \beta_2)\boldsymbol{b}i$. Para que $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, debe cumplirse que $\beta_1 + \beta_2 = 0$ y $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Ello ocurre únicamente para $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Se concluye que $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son linealmente independientes.

c) Suponga que $\lambda_1 = p + qi$ y $\lambda_2 = p - qi$ son valores propios de $\boldsymbol{A}$, asociados con los vectores propios $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}i$ y $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}i$. Se tiene que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \quad \rightarrow \quad {\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 {\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{v}_1 \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 \boldsymbol{v}_2 \quad \rightarrow \quad {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2 = \lambda_2 {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{v}_2$$

En general, ${\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = ({\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1)' = {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{v}_2$. Como $\boldsymbol{A}$ es simétrica ocurre entonces que ${\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_1 = {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_2$ y, por lo tanto, que $\lambda_1 {\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{v}_1 - \lambda_2 {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{v}_2 = 0$. Asimismo, $D \equiv {\boldsymbol{v}_1}'\boldsymbol{v}_2 = {\boldsymbol{v}_2}'\boldsymbol{v}_1 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2 > 0$. Por ello, se deduce que $(\lambda_1 - \lambda_2)D = 0$ lo que implica que $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Dado que $\lambda_1 - \lambda_2 = 2qi$, esta igualdad ocurre sólo cuando $q = 0$. Los valores propios de una matriz simétrica con términos reales son siempre reales.

■

Polinomios y series de Taylor

Nota: El símbolo $\mathcal{O}(g(x))$ se lee como una "función que crece al menos tan rápidamente como $g(x)$".

9. Encuentre las series de McLaurin de las siguientes funciones e indique sus intervalos de convergencia:

$$a)\quad e^x\,, \qquad b)\quad \cos(x)\,, \qquad c)\quad \sin(x)\,, \qquad d)\quad \ln(1+x)\,, \qquad e)\quad \frac{1}{1-x}\,.$$

Solución:
La serie de McLaurin de la función $f(x)$ tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{!k} x^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} s_k\,.$$

El rango de convergencia, es decir los valores de x para los cuales esta serie converge a $f(x)$, se puede calcular con la prueba del ratio: se trata de determinar los valores de x tal que $L = \lim_{k\to\infty} |s_{k+1}/s_k| < 1$.

a) En el caso de $f(x)=e^x$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(k)}(x)$
x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
$x=0$	1	1	1	1	1	1	1

Así, $c_k = f^{(k)}(0)/k! = 1/k!$ por lo que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| = |x| \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right) = |x|\cdot 0 = 0\,.$$

Se tiene que $L<1$ siempre. El desarrollo de series de potencias de e^x converge para todo valor de x.

b) Para $f(x)=\cos(x)$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$	$f^{(7)}(x)$
x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$x=0$	1	0	-1	0	1	0	-1	0

Así, si k es impar $c_k = f^{(k)}(0)/k! = 0$, mientras que $c_k = \pm 1/!k$ (signos intercalados) si k es par. Con ello,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{x^{2k}}\right| = x^2 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\right) = x^2\cdot 0 = 0\,.$$

Se tiene que $L<1$ siempre. La serie de McLaurin de $\cos(x)$ converge para todo valor de x.

c) Para $f(x)=\sin(x)$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$	$f^{(7)}(x)$
x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$x=0$	0	1	0	-1	0	1	0	-1

Así, si k es par $c_k = f^{(k)}(0)/k! = 0$, mientras que $c_k = \pm 1/!k$ (signos intercalados) si k es impar. Con ello,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\right| = x^2 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\right) = 0\,.$$

Se tiene que $L<1$ siempre. El desarrollo de series de potencias de $\sin(x)$ converge para todo valor de x.

d) Para $f(x)=\ln(1+x)$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^{-1}$	$-(1+x)^{-2}$	$2(1+x)^{-3}$	$-6(1+x)^{-4}$	$24(1+x)^{-5}$	$-120(1+x)^{-6}$
$x=0$	0	1	$-1!$	$2!$	$-3!$	$4!$	$-5!$

Emerge un patrón para $k > 0$: $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}(k-1)!(1+x)^{-k}$. Así, $c_k = f^{(k)}(0)/k! = (-1)^{k+1}/k$ y

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}\,.$$

Note que la sumatoria se inicia en $k = 1$. La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{k}{x^k}\right| = |x|\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right) = |x|\cdot 1 = |x|\,.$$

La serie de McLaurin de $\ln(1+x)$ converge para $|\,x\,| < 1$.

e) Para $f(x) = (1-x)^{-1}$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
x	$(1-x)^{-1}$	$(1-x)^{-2}$	$2(1-x)^{-3}$	$6(1-x)^{-4}$	$24(1-x)^{-5}$	$120(1-x)^{-6}$
$x=0$	1	$1!$	$2!$	$3!$	$4!$	$5!$

Emerge el patrón $f^{(k)}(x) = k!(1-x)^{-(k+1)}$. Así, $c_k = f^{(k)}(0)/k! = 1$ y

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| = |x|\,.$$

El desarrollo de series de potencias de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ converge para $|\,x\,| < 1$.

■

10. Utilizando series de McLaurin, verifique las siguiente identidades:

a) $\dfrac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}$.

b) $\displaystyle\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$.

c) $\dfrac{d\sin(ax)}{dx} = a\cos(ax)$.

d) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\cos(x)dx = 2\sin(a)$.

e) La fórmula de Euler: $e^{\theta i} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Solución:

a) Derivamos término por término la serie de McLaurin de e^{ax} y factorizamos para conseguir, nuevamente, términos de la forma $(ax)^k$. Finalmente, identificamos el desarrollo de McLaurin de e^{ax}:

$$\frac{de^{ax}}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!} = \frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k x^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k x^{k-1}}{(k-1)!} = a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ax)^{k-1}}{(k-1)!} = a\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!} \equiv ae^{ax}\,.$$

b) Integramos término por término la serie de McLaurin de e^{ax}. Este proceso genera una constante de integración arbitraria que denominamos c. Luego, simples manipulaciones nos permiten identificar nuevamente la serie de McLaurin de e^{ax} tras la integración. Para ello, es importante sumar un término constante a la serie infinita. Este término, no obstante, es absorbido por la constante de integración $C = c - a^{-1}$ que también es arbitraria:

$$\begin{aligned}\int e^{ax}dx = \int\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k x^{k+1}}{(k+1)!} + c = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^{k+1}}{(k+1)!} + c = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!} + c\\ = \frac{1}{a}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!} - 1\right) + c = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ax)^k}{k!} + C \equiv \frac{e^{ax}}{a} + C\,.\end{aligned}$$

c) Derivamos término por término la serie de McLaurin de $\sin(ax)$ y factorizamos para conseguir términos de la forma $(ax)^{2k}$. Finalmente, identificamos el desarrollo de McLaurin de $\cos(ax)$:

$$\frac{d\sin(ax)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(ax)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}x^{2k}}{(2k)!} = a\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(ax)^{2k}}{(2k)!} \equiv a\cos(ax)\,.$$

d) Integramos término por término la serie de McLaurin de $\cos(x)$. Esta integral es evaluada en a y $-a$. Emergen términos de la forma $(-a)^{2k+1}$. Dado que para todo k, $2k+1$ es impar, se tiene que $(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1}$. Finalmente, identificamos el desarrollo de McLaurin de $\sin(a)$:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\cos(x)dx &= \int_{-a}^{a}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\Bigg|_{-a}^{a} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(-a)^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} \equiv 2\sin(a)\,.\end{aligned}$$

e) Este importante resultado se verifica fácilmente. Primero, se evalúa la serie de McLaurin de e^x en $x = \theta i$. Luego, se reemplazan los valores de las potencias de i de acuerdo con el ciclo $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$. Finalmente, se agrupan los términos que acompañan a 1 y los que acompañan a i, para luego identificar las series de McLaurin de las funciones $\cos(\theta)$ y $\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}e^{\theta i} &= 1 + \theta i + \frac{(\theta i)^2}{2!} + \frac{(\theta i)^3}{3!} + \frac{(\theta i)^4}{4!} + \frac{(\theta i)^5}{5!} + \frac{(\theta i)^6}{6!} + \frac{(\theta i)^7}{7!} + \frac{(\theta i)^8}{8!} + \frac{(\theta i)^9}{9!} + \frac{(\theta i)^{10}}{10!} + \frac{(\theta i)^{11}}{11!} + \cdots\\ &= 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \frac{i^7\theta^7}{7!} + \frac{i^8\theta^8}{8!} + \frac{i^9\theta^9}{9!} + \frac{i^{10}\theta^{10}}{10!} + \frac{i^{11}\theta^{11}}{11!} + \cdots\\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - i\frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^8}{8!} + i\frac{\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{10}}{10!} - i\frac{\theta^{11}}{11!} + \cdots\\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \frac{\theta^{10}}{10!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \frac{\theta^{11}}{11!} + \cdots\right) \equiv \cos(\theta) + i\sin(\theta)\,.\end{aligned}$$

■

11. Se tiene que, para $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots\,.$$

A partir de esta igualdad, determine el desarrollo en series de potencias y el radio de convergencia de:

$$a)\ \ \frac{1}{1+x}\,, \qquad b)\ \ \left(\frac{1}{1-x}\right)^2, \qquad c)\ \ \ln(1-x)\,, \qquad d)\ \ \frac{x}{a+x^2}\,.$$

Solución:

Sea

$$F(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k\,.$$

a) Note que

$$\frac{1}{1+x} = F(-x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k\,.$$

Es decir, $c_k = (-1)^k$. El radio de convergencia es $R = 1$, al igual que el radio de convergencia de F.

b) Note que

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k\,.$$

Es decir, $c_k = k+1$. El radio de convergencia es también $R = 1$, al igual que el radio de convergencia de F.

c) Note que

$$\ln(1-x) = -\int\left(\frac{1}{1-x}\right)dx = -\int F(x)dx = -\int\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)dx = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\,.$$

Es decir, $c_k = -1/k$. El radio de convergencia es también $R = 1$, al igual que el radio de convergencia de F.

d) Se tiene que

$$\frac{x}{a+x^2} = \frac{1}{a}\left(\frac{x}{1+x^2/a}\right) = \frac{x}{a}F\left(-\frac{x^2}{a}\right) = \frac{x}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{a}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{a^{k+1}}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}}{a^{k+2}}\cdot\frac{a^{k+1}}{x^{2k+1}}\right| = \frac{x^2}{|a|}\,.$$

La serie será convergente siempre que $x^2 < |a|$. Esta condición es la misma que $|z| < 1$ para $z = -x^2/a$. ■

12. Encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 para la funciones $f(x)$ y $g(x)$, en torno a $x = 0$. Luego, encuentre el polinomio de Taylor de grado 4 para el producto $f(x)g(x)$:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y $g(x) = \ln(1+x)$, b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ y $g(x) = \ln(1-x)$.

Solución:

El teorema de Taylor establece que

$$f(x) = f(0) + f^{(1)}(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\,.$$

Es decir, la función $f(x)$ se puede expresar como el polinomio de Taylor de grado 4 alrededor de $x = 0$ más un término $\mathcal{O}(x^5)$ que recoge los términos que acompañan a potencias de x mayores o iguales a 5. La misma formulación es válida para $g(x)$. La representación de $f(x)g(x)$ como series de potencias equivale al producto de los polinomios de Taylor de $f(x)$ y $g(x)$.

a) Para $f(x) = 1/(1+x)$ y $g(x) = \ln(1+x)$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$
x	$(1+x)^{-1}$	$-(1+x)^{-2}$	$2(1+x)^{-3}$	$-6(1+x)^{-4}$	$24(1+x)^{-5}$
$x=0$	1	-1	2	-6	24
	$g(x)$	$g^{(1)}(x)$	$g^{(2)}(x)$	$g^{(3)}(x)$	$g^{(4)}(x)$
x	$\ln(1+x)$	$(1+x)^{-1}$	$-(1+x)^{-2}$	$2(1+x)^{-3}$	$-6(1+x)^{-4}$
$x=0$	0	1	-1	2	6

Así, tomando únicamente los términos hasta x^4 se encuentra que

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5) \qquad \text{y} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\,.$$

Para calcular el polinomio de Taylor de grado 4 de $\ln(1+x)/(1+x)$ en torno a $x = 0$, desarrollamos

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)\right)$$

y retenemos los términos hasta x^4. El lado derecho de la ecuación anterior se simplifica a

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - x\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + x^2\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - x^3\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \mathcal{O}(x^5)$$
$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right) - x^4 + \mathcal{O}(x^5) = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\,,$$

dando así el polinomio de grado 4 requerido.

b) Para $f(x) = 1/(1-x)$ y $g(x) = \ln(1-x)$ se tiene que

	$f(x)$	$f^{(1)}(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$f^{(4)}(x)$
x	$(1-x)^{-1}$	$(1+x)^{-2}$	$2(1-x)^{-3}$	$6(1-x)^{-4}$	$24(1-x)^{-5}$
$x=0$	1	1	2	6	24
	$g(x)$	$g^{(1)}(x)$	$g^{(2)}(x)$	$g^{(3)}(x)$	$g^{(4)}(x)$
x	$\ln(1-x)$	$-(1-x)^{-1}$	$-(1-x)^{-2}$	$-2(1-x)^{-3}$	$-6(1-x)^{-4}$
$x=0$	0	-1	-1	-2	-6

Así, tomando únicamente los términos hasta x^4 se encuentra que

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5) \qquad \text{y} \qquad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\,.$$

Para calcular el polinomio de Taylor de grado 4 de $\ln(1-x)/(1-x)$ en torno a $x=0$, desarrollamos

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5)\right)$$

y retenemos los términos hasta x^4. El lado derecho de la ecuación anterior se simplifica a

$$\begin{aligned}
&-\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - x^2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - x^3\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) + \mathcal{O}(x^5) \\
&= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) - \left(x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) - \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) - x^4 + \mathcal{O}(x^5) = -x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \mathcal{O}(x^5)\,,
\end{aligned}$$

dando así el polinomio de grado 4 requerido.

■

13. Encuentre una aproximación polinómica de grado 5 para $f(x) = e^{\sin(x)}$.

<u>Solución</u>:
Se sabe que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6) \qquad \text{y} \qquad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} = 1 &+ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^2 + \cdots \\
\cdots &+ \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^4 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^5 + \mathcal{O}(x^6)\,.
\end{aligned}$$

Reteniendo únicamente los términos hasta x^5,

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right) \\
&= (x)(x) - x\left(\frac{x^3}{3!}\right) - \left(\frac{x^3}{3!}\right)x + \mathcal{O}(x^6) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\,, \\
\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^3 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)\right) \\
&= (x)(x^2) - x\left(\frac{x^4}{3}\right) - \left(\frac{x^3}{3!}\right)x^2 + \mathcal{O}(x^6) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^6)\,, \\
\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)^4 &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \mathcal{O}(x^6)\right)\left(x^3 - \frac{x^5}{2} + \mathcal{O}(x^6)\right) = (x)(x^3) + \mathcal{O}(x^6) = x^4 + \mathcal{O}(x^6)\,,
\end{aligned}$$

$$\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathcal{O}(x^6)\right)^5 \quad = \quad \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathcal{O}(x^6)\right)\left(x^4+\mathcal{O}(x^6)\right)=(x)(x^4)+\mathcal{O}(x^6)=x^5+\mathcal{O}(x^6)\,.$$

Al juntar los resultados se obtiene, finalmente,

$$\begin{aligned}
e^{\sin(x)} &= 1+\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\right)+\frac{1}{2!}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{1}{3!}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}(x^6)\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)x^4+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{12}+\frac{1}{120}\right)x^5+\mathcal{O}(x^6)\\
&= 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{15}+\mathcal{O}(x^6)\,.
\end{aligned}$$

■

14. El objetivo de esta pregunta es probar la *fórmula del binomio de Newton*, a saber:

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!\,k!}a^{m-k}b^k\,, \qquad (\spadesuit)$$

donde $a, b \neq 0$. Para esto, sea $m \in \mathbb{N}$ (un entero positivo) fijo y considere la función

$$f(x)=(1+x)^m\,.$$

a) Calcule $f^{(k)}(x)$ y muestre que $f^{(k)}(x)=0$ para $k>m$.

b) Represente $f(x)$ como una serie de MacLaurin con un número finito de términos.

c) Concluya que $(a+b)^m$ tiene la forma dada en ($\spadesuit$). *Ayuda*: Evalúe $f(x)$ en $x=b/a$.

Solución:

a) Derivando sucesivamente tenemos

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= m(1+x)^{m-1}\\
f^{(2)}(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}\\
f^{(3)}(x) &= m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}\\
&\;\;\vdots\\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-(k-1))(1+x)^{m-k}=\frac{m!}{(m-k)!}(1+x)^{m-k}\,.
\end{aligned}$$

La expersión para $f^{(k)}(x)$ es válida para $k \leq m$. Observe que $f^{(m)}(x)=m!$ no depende de x; por ende, para $k>m$, $f^{(k)}(x)=0$.

b) Por lo anterior, los coeficientes de orden $k>m$ de la serie de MacLaurin son cero, por lo tanto

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!\,k!}x^k.$$

En este caso, la serie de MacLaurin es una suma finita.

c) Si $x=b/a$, entonces reemplazando en las expresiones de $f(x)$:

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m=a^{-m}(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}a^{-k}b^k\,.$$

Multiplicando ambas expresiones por a^m obtenemos el resultado.

■

15. Resuelva los siguientes límites indeterminados, utilizando aproximaciones de McLaurin:

$$a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}\,,\qquad b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}\,,\qquad c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos(x)}}{x^2}\,.$$

Solución:

a) Recuerde que $\cos(x)\tan(x)=\sin(x)$. Luego, el numerador multiplicado por $\cos(x)$ es

$$x\cos(x)-\sin(x)=x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4)\right)-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^4)\right)=x-\frac{x^3}{2}-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)+\mathcal{O}(x^4)=-\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)\,.$$

Por su lado, el denominador multiplicado por $\cos(x)$ es

$$\cos(x)\left[x-\sin(x)\right]=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\mathcal{O}(x^4)\right]\left[x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^4)\right)\right]=\frac{x^3}{6}\left(1-\frac{x^2}{2!}\right)+\mathcal{O}(x^4)=\frac{x^3}{6}+\mathcal{O}(x^4)\,.$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{\cos(x)\left[x-\sin(x)\right]}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3/3+\mathcal{O}(x^4)}{x^3/6+\mathcal{O}(x^4)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+\mathcal{O}(x)}{1+\mathcal{O}(x)}=-2\,.$$

b) En el numerador se tiene que

$$e^{x}-e^{-x}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^4)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^4)\right)=2x+\frac{x^3}{3}+\mathcal{O}(x^4)\,.$$

En el denominador,

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\mathcal{O}(x^4)\,.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\mathcal{O}(x^3)}{x+\mathcal{O}(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x^2)}=2\,.$$

c) Sea $f(x)=e^{\cos(x)}$. Se tiene que $f(0)=e$. Asimismo, $f^{(1)}(x)=-e^{\cos(x)}\sin(x)$ por lo que $f^{(1)}(0)=0$. Finalmente, $f^{(2)}(x)=e^{\cos(x)}[\sin^2(x)-\cos(x)]$ por lo que $f^{(2)}(0)=-e$. Así,

$$e^{\cos(x)}=e-\frac{e}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)\,.$$

Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos(x)}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{e}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e}{2}+\mathcal{O}(x)\right)=\frac{e}{2}\,.$$

■

16. Para x real, las funciones seno hiperbólico y coseno hiperbólico se definen como

$$\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\qquad \text{y}\qquad \cosh(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\,.$$

a) Encuentre la series de McLaurin de $\sinh(x)$ y de $\cosh(x)$, y determine su rango de convergencia.

b) Verifique que $\cosh(x)=\cos(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\cos(\cdot)$ es la función coseno,

c) Verifique que $\sinh(x)=-i\sin(ix)$, donde i es la unidad imaginaria y $\sin(\cdot)$ es la función seno,

d) Verifique que $\dfrac{d^2\cosh(x)}{dx^2}=\cosh(x)$,

e) Verifique que $\dfrac{d^2\sinh(x)}{dx^2}=\sinh(x)$,

f) Verifique que $\displaystyle\int\sinh(ax)dx=\frac{\cosh(ax)}{a}+C$.

Solución:

Se sabe que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad \text{y} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

a) Al restar,

$$e^x - e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

Luego,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+3}}{(2k+3)!}\cdot\frac{(2k+1)!}{x^{2k+1}}\right| = x^2 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(2k+3)(2k+2)}\right) = x^2\cdot 0 = 0\,.$$

Se tiene que $L < 1$ siempre. El desarrollo de series de potencias de $\sinh(x)$ converge para todo valor de x.

Por su parte, al sumar,

$$e^x + e^{-x} = 2\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)$$

Luego,

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

La prueba del ratio es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{s_{k+1}}{s_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}\cdot\frac{(2k)!}{x^{2k}}\right| = x^2 \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(2k+2)(2k+1)}\right) = x^2\cdot 0 = 0\,.$$

Se tiene que $L < 1$ siempre. El desarrollo de series de potencias de $\cosh(x)$ converge para todo valor de x.

b) Recuerde que

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Además, note el patrón $i^0 = 1$, $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^6 = -1$, etc. Luego, para $k = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que $i^{2k} = (-1)^k$. Así,

$$\cos(ix) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)\,.$$

c) Recuerde que

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,.$$

Así,

$$\sin(ix) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{i^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = i\sinh(x)\,.$$

Luego $i\sin(ix) = i^2\sinh(x)$ lo que conlleva a que $\sinh(x) = -i\sin(ix)$.

d) Derivamos, término por término, la serie de potencias:

$$\frac{d\cosh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(x)\,.$$

Derivamos por segunda vez,

$$\frac{d^2\cosh(x)}{dx^2} = \frac{d\sinh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cosh(x)\,.$$

e) Repitiendo el procedimiento anterior,

$$\frac{d\sinh(x)}{dx} = \cosh(x) \qquad \to \qquad \frac{d^2\sinh(x)}{dx^2} = \frac{d\cosh(x)}{dx} = \sinh(x)\,.$$

f) Integramos término por término y sumamos una constante:

$$\begin{aligned}\int \sinh(ax)dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int \frac{a^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+1}x^{2k+2}}{(2k+2)!} + c = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2k+2}}{(2k+2)!} + c \\ &= \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^{2k}}{(2k)!} + c = \frac{1}{a}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^{2k}}{(2k)!}\right) + c - \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ax)^{2k}}{(2k)!} + C = \frac{\cosh(ax)}{a} + C\,.\end{aligned}$$

■

17. Sobre series de potencias:

a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}\,.$$

Calcule $f^{(2003)}(0)$. *Ayuda:* $2003 = 6 \times 333 + 5$.

b) Encuentre una expresión para

$$S = \int_0^a e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

como una suma infinita que depende del escalar a.

Solución:

a) Basta observar que $f(x) = x^5 g(x^6)$, donde $g(z) = (1+z)^{-1}$. La serie de MacLaurin de $g(z)$ es dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k.$$

Luego, la serie de MacLaurin de $f(x)$ es dada por

$$f(x) = x^5\frac{1}{1+x^6} = x^5\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x^6)^k = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k x^{6k+5}.$$

Así, el coeficiente de x^{2003} es $\dfrac{f^{(2003)}(0)}{2003!}$, y como $2003 = 6 \times 333 + 5$, entonces para $k = 333$,

$$\frac{f^{(2003)}(0)}{2003!} = (-1)^{333} = -1,$$

es decir, $f^{(2003)}(0) = -2003!$.

b) Recordemos que la serie de MacLaurin de e^x es

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,.$$

Luego, haciendo $x = -\frac{1}{2}t^2$ y reemplazando en la expresión anterior, tenemos

$$e^{-\frac{1}{2}t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}t^2\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}t^{2k}.$$

Luego, integrando de 0 a a, y observando que la integral definida entra dentro de la sumatoria

$$S = \int_0^a e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\int_0^a t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}\left(\frac{1}{2k+1}\right)a^{2k+1}\,.$$

■

18. *Opcional.* Encuentre una aproximación de Taylor de segundo orden de las siguientes funciones de dos variables, en torno al origen:

$$a)\quad e^x\cos(y)\,, \qquad\qquad b)\quad \ln(\alpha x+\beta y+1)\,, \qquad\qquad c)\quad \frac{1-y}{1+x}\,.$$

Solución:

a) El gradiente y Hessiano de $f(x,y)=e^x\cos(y)$ son

$$\nabla f(x,y)' = \begin{bmatrix} e^x\cos(y) \\ -e^x\sin(y) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(x,y) = \begin{bmatrix} e^x\cos(y) & -e^x\sin(y) \\ -e^x\sin(y) & -e^x\cos(y) \end{bmatrix}$$

Evaluando en $x=y=0$,

$$f(0,0)=1\,, \qquad \nabla f(0,0)' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así, la aproximación requerida es

$$p_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0}) + \nabla f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\,.$$

b) El gradiente y Hessiano de $f(x,y)=\ln(\alpha x+\beta y+1)$ son

$$\nabla f(x,y)' = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha x+\beta y+1)^{-1} \\ \beta(\alpha x+\beta y+1)^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(x,y) = \begin{bmatrix} -\alpha^2(\alpha x+\beta y+1)^{-2} & -\alpha\beta(\alpha x+\beta y+1)^{-2} \\ -\alpha\beta(\alpha x+\beta y+1)^{-2} & -\beta^2(\alpha x+\beta y+1)^{-2} \end{bmatrix}$$

Evaluando en $x=y=0$,

$$f(0,0)=0\,, \qquad \nabla f(0,0)' = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(0,0) = -\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Así, la aproximación requerida es

$$p_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0}) + \nabla f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} = \alpha x + \beta y - \frac{1}{2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+2\alpha\beta xy) = \alpha x+\beta y - \frac{1}{2}(\alpha x+\beta y)^2\,.$$

c) El gradiente y Hessiano de $f(x,y)=(1-y)(1+x)^{-1}$ son

$$\nabla f(x,y)' = \begin{bmatrix} -(1-y)(1+x)^{-2} \\ -(1+x)^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 2(1-y)(1+x)^{-3} & (1+x)^{-2} \\ (1+x)^{-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Evaluando en $x=y=0$,

$$f(0,0)=1\,, \qquad \nabla f(0,0)' = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{H}(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, la aproximación requerida es

$$p_2(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{0}) + \nabla f(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{H}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x} = 1 - x - y + x^2 + xy\,.$$

■

19. *Opcional.* Dos funciones de producción muy conocidas son

$$a)\quad Q(K,N) = K^\alpha L^{1-\alpha} \qquad \text{y} \qquad b)\quad Q(K,N) = (\alpha K^\rho + (1-\alpha)L^\rho)^{1/\rho}\,,$$

donde $0\le\alpha\le 1$ y $\rho\ge 0$. Realice una aproximación de segundo orden de cada función de producción en torno al punto $(\bar{K},\bar{N})$ tal que $\bar{Q}=Q(\bar{K},\bar{N})$. Exprese sus resultados de manera compacta, utilizando las definiciones

$$q = \frac{Q-\bar{Q}}{\bar{Q}}\,, \qquad k = \frac{K-\bar{K}}{\bar{K}} \qquad \text{y} \qquad n = \frac{N-\bar{N}}{\bar{N}}\,.$$

Finalmente, indique qué ocurre con la segunda función de producción cuando $\rho\to 0$.

Solución:

Para una función de dos variables $Q = Q(K,N)$, el polinomio de Taylor de segundo orden alrededor del punto $(\bar{K},\bar{N})$ es

$$Q \simeq \bar{Q} + \bar{Q}_K(K-\bar{K}) + \bar{Q}_N(N-\bar{N}) + \frac{1}{2}\left[\bar{Q}_{KK}(K-\bar{K})^2 + \bar{Q}_{NN}(N-\bar{N})^2 + 2\bar{Q}_{KN}(K-\bar{K})(N-\bar{N})\right] ,$$

donde $\bar{Q} = Q(\bar{K},\bar{N})$ y se entiende que las derivadas parciales son también evaluadas en este punto.

Considere las definiciones de k y de n. Se tiene que $K-\bar{K} = k\bar{K}$ y $N-\bar{N} = n\bar{N}$. Así, tras restar $\bar{Q}$ y dividir entre $\bar{Q}$, la expresión anterior se reduce a

$$q \simeq \frac{\bar{Q}_K\bar{K}}{\bar{Q}}k + \frac{\bar{Q}_N\bar{N}}{\bar{Q}}n + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{Q}_{KK}\bar{K}^2}{\bar{Q}}k^2 + \frac{\bar{Q}_{NN}\bar{N}^2}{\bar{Q}}n^2 + 2\frac{\bar{Q}_{KN}\bar{K}\bar{N}}{\bar{Q}}kn\right) . \qquad (*)$$

a) Para la función de producción Cobb-Douglas, $Q = K^\alpha N^{1-\alpha}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
Q_K &= \alpha K^{\alpha-1}N^{1-\alpha} = \alpha\frac{Q}{K} ,\\
Q_N &= (1-\alpha)K^\alpha N^{-\alpha} = (1-\alpha)\frac{Q}{N} ,\\
Q_{KK} &= \alpha\left(\frac{Q_K}{K} - \frac{Q}{K^2}\right) = -\alpha(1-\alpha)\frac{Q}{K^2} ,\\
Q_{NN} &= (1-\alpha)\left(\frac{Q_N}{N} - \frac{Q}{N^2}\right) = -\alpha(1-\alpha)\frac{Q}{N^2} ,\\
Q_{KN} &= \alpha\frac{Q_N}{K} = \alpha(1-\alpha)\frac{Q}{KN} ,
\end{aligned}$$

De modo que

$$\frac{Q_KK}{Q} = \alpha , \quad \frac{Q_LL}{Q} = (1-\alpha) , \quad \frac{Q_{KK}K^2}{Q} = -\alpha(1-\alpha) , \quad \frac{Q_{LL}N^2}{Q} = -\alpha(1-\alpha) , \quad \frac{Q_{KN}KN}{Q} = \alpha(1-\alpha) ,$$

para todo valor de K, N y Q. Así, la aproxiamación (*) se simplifica a

$$q \simeq \alpha k + (1-\alpha)n - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\left(k^2+n^2-2kn\right) = \alpha k + (1-\alpha)n - \frac{1}{2}\alpha(1-\alpha)(k-n)^2 .$$

b) El álgebra es algo más engorrosa en el caso de la función de producción de elasticidad de sustitución constante (CES), $Q = (\alpha K^\rho + (1-\alpha)N^\rho)^{1/\rho}$. Por brevedad, conviene definir $\theta_K = (Q/K)^{-\rho}$ y $\theta_N = (Q/N)^{-\rho}$. Luego,

$$\begin{aligned}
Q_K &= \alpha\left(\alpha K^\rho + (1-\alpha)N^\rho\right)^{1/\rho-1}K^{\rho-1} = \alpha Q^{1-\rho}K^{\rho-1} = \alpha\left(\frac{Q}{K}\right)^{1-\rho} = \alpha\theta_K\frac{Q}{K} ,\\
Q_N &= (1-\alpha)\left(\alpha K^\rho + (1-\alpha)N^\rho\right)^{1/\rho-1}N^{\rho-1} = (1-\alpha)Q^{1-\rho}N^{\rho-1} = (1-\alpha)\left(\frac{Q}{N}\right)^{1-\rho} = (1-\alpha)\theta_N\frac{Q}{N} ,\\
Q_{KK} &= \alpha(1-\rho)\left(\frac{Q}{K}\right)^{-\rho}\left(\frac{Q_K}{K} - \frac{Q}{K^2}\right) = \alpha(1-\rho)\theta_K\left(\frac{Q_KK}{Q} - 1\right)\frac{Q}{K^2} = \alpha(1-\rho)\theta_K\left(\alpha\theta_K - 1\right)\frac{Q}{K^2} ,\\
Q_{NN} &= (1-\alpha)(1-\rho)\left(\frac{Q}{N}\right)^{-\rho}\left(\frac{Q_N}{N} - \frac{Q}{N^2}\right) = (1-\alpha)(1-\rho)\theta_N\left((1-\alpha)\theta_N - 1\right)\frac{Q}{N^2} ,\\
Q_{KN} &= \alpha(1-\rho)\left(\frac{Q}{K}\right)^{-\rho}\frac{Q_N}{K} = \alpha(1-\alpha)(1-\rho)\theta_K\theta_N\frac{Q}{KN} .
\end{aligned}$$

Con ello,

$$\frac{Q_KK}{Q} = \alpha\theta_K , \qquad \frac{Q_NN}{Q} = (1-\alpha)\theta_N , \qquad \frac{Q_{KN}KN}{Q} = \alpha(1-\alpha)\theta_K\theta_N(1-\rho) ,$$
$$\frac{Q_{KK}K^2}{Q} = \alpha\theta_K(\alpha\theta_K-1)(1-\rho) , \quad \text{y} \quad \frac{Q_{NN}N^2}{Q} = (1-\alpha)\theta_N((1-\alpha)\theta_N-1)(1-\rho) .$$

Al evaluar estos hallazgos en (*) se consigue

$$q \simeq \alpha\theta_K k + (1-\alpha)\theta_N n - \frac{\alpha(1-\alpha)\theta_K\theta_N(1-\rho)}{2}\left[\left(\frac{1-\alpha\theta_K}{\theta_N-\alpha\theta_N}\right)k^2 + \left(\frac{1-(1-\alpha)\theta_N}{\alpha\theta_K}\right)n^2 - 2kn\right],$$

donde θ_K y θ_N, al depender de K, N y Q, deben ser evaluados en $\bar{K}$, $\bar{N}$ y $\bar{Q}$.

El análisis se simplifica considerablemente cuando $\rho = 0$ ya que $\theta_K = \theta_L = 1-\rho = 1$. Así, la aproximación anterior es idéntica a la obtenida en la parte a). La función CES se comporta como la función Cobb-Douglas en este caso. ■

Transformaciones de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$

20. Considere una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(\boldsymbol{x})$. Suponga que $\boldsymbol{x}$ experimenta un cambio pequeño, de $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{x} + \epsilon\boldsymbol{u}$, donde $\epsilon \simeq 0$ y $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Utilizando la noción de derivada direccional, explique por qué se dice que el máximo cambio que y puede experimentar "se da en la dirección del gradiente" ¿A cuánto asciende este cambio?

Solución:

Al tomar diferenciales,

$$dy = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u},$$

que corresponde a la definición de la derivada direccional de f hacia la dirección de $\boldsymbol{u}$. Esto no es más que el producto interno del gradiente (que es un vector fila, por convención) y $\boldsymbol{u}$. Utilizando las propiedades del producto interno,

$$dy = \|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \cdot \cos(\theta) = \|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\| \cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre el gradiente y $\boldsymbol{u}$. Recuerde que $\cos(\theta)$ alcanza su valor máximo en $\cos(\theta) = 1$, lo que ocurre cuando $\theta = 0$. Es decir, cuando $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ son colineales. En otras palabras, cuando el cambio "se da en la dirección del gradiente". Para $\cos(\theta) = 1$, se tiene que el máximo cambio que y experimenta es $\|\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})\|$. ■

21. Una empresa utiliza cuatro insumos (x, y, z, m) a fin de producir tres productos (U, V, W) según la siguiente función de producción:

$$(U, V, W) = f(x, y, z, m) = \left(\ln(x^2y) + z, (y^3zm)^{\frac{1}{2}}, e^m z^2 x + y^2\right)$$

Calcule la productividad marginal del insumo Z en la producción de los tres productos, considerando que se están utilizando las cantidades de insumos $(x, y, z, m) = (1, 1, 1, 1)$.

Solución:

Se observa que $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. Se pueden definir, a su vez, las funciones de (x, y, z, m):

$$U = f_1 = \ln(x^2y) + z\,, \quad V = f_2 = (y^3zm)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad W = f_3 = e^m z^2 x + y^2$$

El Jacobiano de la transformación f tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial w} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} & \frac{\partial V}{\partial w} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} & \frac{\partial W}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

La tercera columna es de interés. Las derivadas parciales solicitadas son

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1\,, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{1}{2z}(y^3zm)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial z} = 2e^m zx\,.$$

Reemplazando $x = y = z = m = 1$, se consigue $df = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2e \end{bmatrix}' dz$. ■

22. Considere las transformaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$f(u,v) = \left(u + v^2, u - v\right) \qquad \text{y} \qquad g(x,y,z) = \left(x + y^2 - z, -y^2 + xz\right) .$$

a) Evalúe $f \circ g$ en los puntos $(1,0,-1)$ y $(1,1,1)$.

b) Halle la matriz Jacobiana de $f \circ g$.

c) Aproxime $f \circ g(1.1, 0.1, -1)$ y $f \circ g(1.1, 0.9, 1.1)$.

Solución:

a) Se tiene que $(w_1, w_2) \equiv f \circ g(x,y,z) = f(u,v)$ donde $(u,v) = g(x,y,z)$.
Para $x = 1$, $y = 0$ y $z = -1$, se tiene que $u = 1 + 0^2 - (-1) = 2$ y $v = -0^2 + 1(-1) = -1$. Luego, para $u = 2$ y $v = -1$ se tiene que $w_1 = 2 + (-1)^2 = 3$ y $w_2 = 2 - (-1) = 3$. Así, $f \circ g(1,0,-1) = (3,3)'$.
Por otro lado, para $x = 1$, $y = 1$ y $z = 1$, se tiene que $u = 1 + 1^2 - 1 = 1$ y $v = -1^2 + 1 = 0$. Luego, para $u = 1$ y $v = 0$ se tiene que $w_1 = 1 + 0^2 = 1$ y $w_2 = 1 - 0 = 1$. Así, $f \circ g(1,1,1) = (1,1)'$.

b) Se sabe que

$$\boldsymbol{D} f \circ g = \boldsymbol{D} f \boldsymbol{D} g .$$

La matriz Jacobiana de la transformación compuesta $f \circ g$ es de dimensión 2×3, y es el resultado de multiplicar la matriz Jacobiana de la transformación f, de dimensión 2×2, por la matriz Jacobiana de la transformación g, de dimensión 2×3. Se tiene que

$$\boldsymbol{D} f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2v \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2(-y^2 + xz) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ,$$

donde se ha reemplazado la definición de u y v en términos de x, y y z (los argumentos de la transformación compuesta). Asimismo,

$$\boldsymbol{D} g = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y & -1 \\ z & -2y & x \end{bmatrix} .$$

Finalmente,

$$\boldsymbol{D} f \circ g = \begin{bmatrix} 1 & 2(-y^2 + xz) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2y & -1 \\ z & -2y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2y^2 z + 2xz^2 & 2y + 4y^3 - 4xyz & -1 - 2xy^2 + 2x^2 z \\ 1 - z & 4y & -1 - x \end{bmatrix} .$$

c) Defina la transformación $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ con diferencial $\boldsymbol{D} h(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$. El uso común de este diferencial es el de aproximar el valor de $h(\boldsymbol{x})$ tras un cambio pequeño en $\boldsymbol{x}$. Partiendo del punto $\boldsymbol{x}_0$, la aproximación de $h(\boldsymbol{x}_1)$ es $h(\boldsymbol{x}_1) \simeq h(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{D} h(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)$.
Para aproximar $f \circ g(1.1, 0.1, -1)$ tomamos como punto de referencia $(x,y,z) = (1,0,-1)$. Así, al evaluar $\boldsymbol{D} f \circ g$,

$$\boldsymbol{D} f \circ g(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} .$$

Dado que el vector de cambios es $(0.1, 0.1, 0)$, se consigue que

$$f \circ g(1.1, 0.1, -1) \simeq \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.3 \\ 3.2 \end{bmatrix} .$$

Por otro lado, para aproximar $f \circ g(1.1, 0.9, 1.1)$ tomamos como punto de referencia $(x,y,z) = (1,1,1)$. Así,

$$\boldsymbol{D} f \circ g(1,0,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} .$$

Dado que el vector de cambios es $(0.1, -0.1, 0.1)$, se consigue que

$$f \circ g(1.1, 0.9, 1.1) \simeq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix} .$$

■

23. El precio del bien i es p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ y su función de demanda es $D_i(\boldsymbol{p})$, donde $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$. Los bienes son complementarios, lo que implica que para $i \neq j$,

$$\frac{\partial D_j(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} \leq 0\,.$$

La matriz Jacobiana de la transformación $F(\boldsymbol{p}) = (D_1(\boldsymbol{p}), D_2(\boldsymbol{p}), \ldots, D_n(\boldsymbol{p}))'$ es la matriz $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$.

a) Calcule la traza de $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$ y determine su signo, considerando que se cumple la ley de demanda.

b) Sea $\boldsymbol{s}$ el vector suma de $\mathbb{R}^n$. Calcule $\boldsymbol{s}'\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}$ y determine su signo.

c) Si $D_i(\boldsymbol{p})$ es una función homogénea de grado α, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\det(\,\boldsymbol{J}_F(\lambda\boldsymbol{p})\,) = \lambda^{\beta} \det(\,\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\,)\,.$$

Halle β.

Solución:

a) La ley de demanda nos dice que para todo i

$$\frac{\partial D_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} < 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{traza}(\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} < 0\,.$$

b) Como los bienes son complementarios se comprueba que

$$\boldsymbol{s}'\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial D_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \frac{\partial D_i(\boldsymbol{p})}{\partial p_j} < 0\,.$$

c) Como $D_i(\boldsymbol{p})$ es homogénea de grado α, entonces $\partial D_i(\boldsymbol{p})/\partial p_j$ es homogénea de grado $\alpha - 1$. Luego,

$$\det(\,\boldsymbol{J}_F(\lambda\boldsymbol{p})\,) = \begin{vmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial p_1}(\lambda\boldsymbol{p}) & \frac{\partial D_1}{\partial p_2}(\lambda\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial D_1}{\partial p_n}(\lambda\boldsymbol{p}) \\ \frac{\partial D_2}{\partial p_1}(\lambda\boldsymbol{p}) & \frac{\partial D_2}{\partial p_2}(\lambda\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial D_2}{\partial p_n}(\lambda\boldsymbol{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial D_n}{\partial p_1}(\lambda\boldsymbol{p}) & \frac{\partial D_n}{\partial p_2}(\lambda\boldsymbol{p}) & \cdots & \frac{\partial D_n}{\partial p_n}(\lambda\boldsymbol{p}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_1}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}) & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_1}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_1}{\partial p_n}(\boldsymbol{p}) \\ \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_2}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}) & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_2}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_2}{\partial p_n}(\boldsymbol{p}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_n}{\partial p_1}(\boldsymbol{p}) & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_n}{\partial p_2}(\boldsymbol{p}) & \cdots & \lambda^{\alpha-1}\frac{\partial D_n}{\partial p_n}(\boldsymbol{p}) \end{vmatrix} = \lambda^{(\alpha-1)n} \det(\,\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\,)\,.$$

Se concluye que $\beta = \alpha(n-1)$.

■

24. Sean F_a, F_b, F_c y F_d transformaciones que van de $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^p$ tal que

$$F_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x}\,, \qquad F_b(x) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\,, \qquad F_c(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\,, \qquad F_d(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{W}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Z}\boldsymbol{x})\,,$$

donde $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{A}$ es una matriz de dimensión $k \times k$, $\boldsymbol{C}$ es una matriz de dimensión $k \times k$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{Z}$ es una matriz de dimensión $n \times k$ y $\boldsymbol{W}$ es una matriz simétrica de dimensión $n \times n$.

a) Encuentre $\boldsymbol{\nabla} F_a(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función $F_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

b) Encuentre $\boldsymbol{\nabla} F_b(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función $F_b : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ¿Cómo se simplifica $\boldsymbol{\nabla} F_b(x)$ si $\boldsymbol{A}$ es simétrica?

c) Encuentre $\boldsymbol{D}F_c(\boldsymbol{x})$, la matriz Jacobiana de la transformación $F_c : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.

d)
- Encuentre $\boldsymbol{\nabla} F_d(\boldsymbol{x})$, el gradiente de la función F_d.
- Defina $S(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\nabla} F_d(\boldsymbol{x}))'$, la traspuesta del gradiente ($S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$). Encuentre $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}S(\boldsymbol{x})$, la matriz Jacobiana de S. Esta matriz involucra dos operaciones de derivación y es el *Hessiano* de F_d.
- Encuentre, además, el vector $\boldsymbol{x}^*$ tal que $S(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. Indique cuáles son los supuestos que el Hessiano debe satisfacer para que $\boldsymbol{x}^*$ sea único.

Solución:

a) La función F_a es un producto interno:

$$F_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}'\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_k a_k \,,$$

y su gradiente es

$$\boldsymbol{\nabla} F_a(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_a}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_a}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_a}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{bmatrix} = \boldsymbol{a}' \,.$$

b) La función F_b es una forma cuadrática:

$$\begin{aligned} F_b(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} x_i x_j a_{ij} = x_1^2 a_{11} + x_1(x_2 a_{21} + x_3 a_{31} + \cdots + x_k a_{k1}) + \cdots \\ \cdots + x_2^2 a_{22} + x_2(x_1 a_{12} + x_3 a_{32} + \cdots + x_k a_{k2}) + \cdots + x_k^2 a_{kk} + x_k(x_k a_{1k} + x_k a_{3k} + \cdots + x_{k-1} a_{k-1,k}) \,. \end{aligned}$$

La derivada parcial respecto a x_1 es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_b}{\partial x_1} &= 2x_1 a_{11} + (x_2 a_{21} + x_3 a_{31} + \cdots + x_k a_{k1}) + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} \cdots + x_k a_{1k} \\ &= (x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + x_3 a_{31} + \cdots + x_k a_{k1}) + (x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + x_3 a_{13} + \cdots + x_k a_{1k}) \,. \end{aligned}$$

Emerge un patrón bastante claro, de modo que la derivada parcial de F_b respecto a x_i es

$$\frac{\partial F_b}{\partial x_i} = (x_1 a_{1i} + x_2 a_{2i} + \cdots + x_i a_{ii} + \cdots + x_k a_{ki}) + (x_1 a_{i1} + x_2 a_{i2} + \cdots + x_i a_{ii} + \cdots + x_k a_{ik}) \,.$$

Se aprecia que el primer término es el producto interno del vector $\boldsymbol{x}$ y del vector formado por la i-ésima *columna* de la matriz $\boldsymbol{A}$, mientras que el segundo término es el producto interno del vector $\boldsymbol{x}$ y del vector formado por la i-ésima *fila* de $\boldsymbol{A}$. Recuerde que la i-ésima fila de $\boldsymbol{A}$ es igual a la i-ésima columna de $\boldsymbol{A}'$. Así, si llamamos $\boldsymbol{a}_i$ a la i-ésima columna de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{b}_i$ a la i-ésima columna de $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A}'$ se tiene, compactamente, que

$$\frac{\partial F_b}{\partial x_i} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{b}_i \,.$$

Al agrupar términos,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} F_b(\boldsymbol{x}) &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_b}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_b}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_b}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}'\boldsymbol{b}_k \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{x}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_k \end{bmatrix} + \boldsymbol{x}' \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_k \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A} + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}') \,. \end{aligned}$$

Cuando $\boldsymbol{A}$ es simétrica ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$), el gradiente se reduce a $\boldsymbol{\nabla} F_b(x) = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}') = 2\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}$.

c) La transformación F_c es lo que se conoce como una *transformación lineal*. Dado que $\boldsymbol{C}$ no depende de $\boldsymbol{x}$ es simple notar que $\boldsymbol{D}F_c(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{C}$. Más formalmente, sea $\boldsymbol{c}_i$ la i-ésima *fila* de $\boldsymbol{C}$. Defina, asimismo, $F_{ci} = \boldsymbol{c}_i\boldsymbol{x}$ tal que $F_{ci} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Luego, utilizando los resultados de la parte *a*),

$$F_c(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} F_{c1}(\boldsymbol{x}) \\ F_{c2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ F_{c3}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_k\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \boldsymbol{D}F_c(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\nabla} F_{c1}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{\nabla} F_{c2}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\nabla} F_{c3}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_k \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{C} \,.$$

d) Tras desarrollar, F_d se puede escribir como

$$F_d(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} - 2(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}\,.$$

El gradiente de F_d es la suma del gradiente de $-2(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}$, que es un producto interno como el analizado en la parte *a*), más el gradiente de $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}$, que es una forma cuadrática como la analizada en la parte *b*). Note que la matriz $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}$ es simétrica. Así,

$$\boldsymbol{\nabla} F_d(\boldsymbol{x}) = -2(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}) + 2\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\,.$$

Por su parte, la matriz Jacobiana de la función $S(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\nabla} F_d(\boldsymbol{x}))' = -2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}) + 2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}$ es igual a la matriz Jacobiana de la función $2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}$, que es una transformación lineal como la analizada en la parte *c*). Con ello,

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{D}S(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\,.$$

Para hallar $\boldsymbol{x}^*$ utilizamos la definición $S(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$. Ello lleva a la igualdad $(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}$. Éste es un sistema lineal que tendrá una única solución siempre que $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z}$ (que es proporcional al Hessiano) sea una matriz no singular. En este caso,

$$\boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}\,.$$

■

Estática comparativa

Repaso:

Sea $\boldsymbol{y}$ el vector de variables endógenas y $\boldsymbol{x}$ el vector de variables exógenas de un sistema de variables. El sistema puede expresarse como $F(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ para un punto dado $(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})$. Tras tomar diferenciales y resolver para $d\boldsymbol{y}$,

$$\boldsymbol{D}_y d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{D}_x d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \rightarrow \qquad d\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{D}_y^{-1}\boldsymbol{D}_x d\boldsymbol{x}\,,$$

donde $\boldsymbol{D}_y \equiv \boldsymbol{D}F_y(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ y $\boldsymbol{D}_x \equiv \boldsymbol{D}F_x(\bar{\boldsymbol{y}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ son las matrices Jacobianas de la transformación $F(\cdot)$ respecto a $\boldsymbol{y}$ y a $\boldsymbol{x}$, respectivamente. El sistema define una función implícita $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ siempre que la inversa de $\boldsymbol{D}_y$ exista. Una condición suficiente para ello es que el Jacobiano $|\boldsymbol{D}_y| \neq 0$.

25. El siguiente modelo describe el comportamiento de un mercado:

$$\begin{array}{llcll} \text{Demanda} & Q^D & = & D(P,Y) & D_P < 0, \quad D_Y \geq 0 \\ \text{Oferta} & Q^S & = & S(P,A) & S_P > 0, \quad S_A \geq 0 \\ \text{Equilibrio} & Q & \equiv & Q^D = Q^S & \end{array}$$

donde Q es la cantidad, P es el precio, Y es el ingreso de los consumidores y A es la productividad de las empresas. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $D(\cdot)$ y $S(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables Y y A son tratadas como exógenas.

a) Escriba la condición de equilibrio en una sola ecuación. Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de una función implícita para P en términos de Y y A.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre P y Q de un incremento en Y y de un incremento en A.

c) Repita el análisis anterior pero analizando un modelo de dos ecuaciones.

Solución:

a) Igualando oferta y demanda, se consigue

$$F(P, Y, A) = D(P, Y) - S(P, A)\,.$$

En equilibrio, $F(\bar{P}, Y, A) = 0$. Note que

$$F_P(P, Y, A) = D_P(P, Y) - S_P(P, A) < 0\,,$$

para todos los valores de P, de acuerdo con los supuestos sobre las funciones $D(\cdot)$ y $S(\cdot)$. Dado que esto también ocurre para $P = \bar{P}$, $F_P(\bar{P}, Y, A) \neq 0$, se concluye la existencia de una función implícia $P = f(Y, A)$.

b) Se tiene que, alrededor del equilibrio,

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = -\frac{F_Y}{F_P} = -\frac{D_Y}{D_P - S_P} = (-)\frac{(+)}{(-)} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial A} = -\frac{F_A}{F_P} = \frac{S_A}{D_P - S_P} = \frac{(+)}{(-)} < 0\,.$$

Un incremento en Y expande la curva de demanda, lo que incrementa P. Por su parte, un incremento en A expande la curva de oferta, lo que reduce P.

Dado que $Q = D(P,Y) = S(P,A)$, los efectos sobre Q se pueden determinar con el uso de la regla de la cadena. A saber,

$$\frac{\partial Q^D}{\partial Y} = D_P\frac{\partial P}{\partial Y} + D_Y = \frac{-D_PD_Y + D_Y(D_P - S_P)}{D_P - S_P} = \frac{-D_YS_P}{D_P - S_P} \quad \text{o} \quad \frac{\partial Q^S}{\partial Y} = S_P\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{-D_YS_P}{D_P - S_P} > 0\,,$$

$$\frac{\partial Q^D}{\partial A} = D_P\frac{\partial P}{\partial A} = \frac{D_PS_A}{D_P - S_P} \quad \text{o} \quad \frac{\partial Q^S}{\partial Y} = S_P\frac{\partial P}{\partial A} + S_A = \frac{S_PS_A + S_A(D_P - S_P)}{D_P - S_P} = \frac{D_PS_A}{D_P - S_P} > 0\,.$$

Un incremento en Y expande la curva de demanda, lo que incrementa Q. Por su parte, un incremento en A expande la curva de oferta, lo que también incrementa Q.

c) Considerando que $Q^S = Q$ y $Q^D = Q$, al tomar diferenciales y reordenar se consigue

$$dQ - D_PdP = D_YdY \qquad \text{y} \qquad dQ - S_PdP = S_AdA\,.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -D_P \\ 1 & -S_P \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dQ \\ dP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_YdY \\ S_AdA \end{bmatrix}.$$

Al resolver,

$$\begin{bmatrix} dQ \\ dP \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -D_P \\ 1 & -S_P \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} D_YdY \\ S_AdA \end{bmatrix} = \frac{1}{D_P - S_P}\begin{bmatrix} -S_P & D_P \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_YdY \\ S_AdA \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{D_P - S_P}\begin{bmatrix} -D_YS_PdY + D_PS_AdA \\ -D_YdY + S_AdA \end{bmatrix}.$$

Note que el determinante de la matriz de coeficientes del sistema linealizado es idéntico a $F_P = D_P - S_P$, calculado en la parte *a*). Así, las condiciones para las que el sistema defina funciones implícitas son exactamente las mismas ($F_P \neq 0$). Asimismo, note las soluciones para dQ y dP. Puede verificarse inmediatamente que los resultados que obtendremos de este sistema ante cambios en Y y A serán idénticos a los encontrados en la parte *b*). ■

26. Considere el siguiente modelo macroeconómico (Keynesiano, donde el ingreso nacional es determinado por la demanda agregada y los precios se asumen constantes):

$$\begin{aligned} Y &= C + I + G \\ C &= C(Y - T, R) \qquad 0 < C_Y < 1, \quad C_R \leq 0 \\ I &= I(R, A) \qquad I_R < 0, \quad I_A \geq 0 \\ M &= L(Y, R) \qquad L_Y > 0, \quad L_R \leq 0 \end{aligned}$$

donde Y es el ingreso nacional, C es el consumo, I es la inversión, G es el gasto de gobierno, T es la recaudación de impuestos, R es la tasa de interés, M es la cantidad de dinero y A es un indicador de confianza empresarial. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $I(\cdot)$ y $L(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables G, T, A y M son tratadas como exógenas.

a) Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y R de un incremento en G manteniendo T constante, y de un incremento en G y T, manteniendo $G - T$ constante.

c) Indique, además, cuál es el efecto sobre Y y R de un incremento en M.

d) Las tres primeras ecuaciones pueden resumirse en una única relación entre Y y R, la famosa curva IS. La última ecuación corresponde a la curva LM. Encuentre el signo de las pendientes de estas curvas.

e) Resuelva el sistema IS-LM de dos variables y compare sus resultados con los obtenidos previamente.

Solución:

a) Al tomar diferenciales a cada una de las ecuaciones del modelo, recolectar $d\boldsymbol{y}$ a la izquierda y $d\boldsymbol{x}$ a la derecha, se obtiene

$$\begin{array}{rclcrcl} dY &=& dC+dI+dG & \rightarrow & dY-dC-dI &=& dG \\ dC &=& C_Y dY - C_Y dT + C_R dR & \rightarrow & C_Y dY - dC + C_R dR &=& C_Y dT \\ dI &=& I_R dR + I_A dA & \rightarrow & dI - I_R dR &=& I_A dA \\ dM &=& L_Y dY + L_R dR & \rightarrow & L_Y dY + L_R dR &=& dM. \end{array}$$

Matricialmente,

$$\boldsymbol{D}_y d\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{D}_x d\boldsymbol{x} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ C_Y & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ L_Y & 0 & 0 & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dC \\ dI \\ dR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG \\ C_Y dT \\ I_A dA \\ dM \end{bmatrix}.$$

El Jacobiano de este sistema es

$$|\boldsymbol{D}_y| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ C_Y & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ L_Y & 0 & 0 & L_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-C_Y & 0 & 0 & -(C_R+I_R) \\ C_Y & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ L_Y & 0 & 0 & L_R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \theta \\ C_Y & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ L_Y & 0 & 0 & L_R \end{vmatrix}$$

$$= -\theta \begin{vmatrix} C_Y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ L_Y & 0 & 0 \end{vmatrix} = \theta \begin{vmatrix} C_Y & -1 \\ L_Y & 0 \end{vmatrix} = \theta L_Y = -\left[L_Y(C_R+I_R) + L_R(1-C_Y)\right].$$

Recuerde que el determinante de una matriz es invariante a operaciones elementales donde el múltiplo de una fila es sumado a otra fila. Las dos primeras igualdades utilizan este tipo de operaciones, para llegar a un "pivote" en función de θ (definido implícitamente). Luego, se pasa a reducir la dimensión del determinante secuencialmente, tras identificar varios pivotes.

Note que $C_R + I_R < 0$ y $L_Y > 0$ por lo que $L_Y(C_R+I_R) < 0$. Además, $1-C_Y > 0$ y $L_R \leq 0$ por lo que $L_R(1-C_Y) \leq 0$. Así, se concluye que $|\boldsymbol{D}_y| > 0$ (estrictamente) por lo que el sistema define funciones implícitas de las variables endógenas.

b) En este ejercicio se asume que $dA = dM = 0$. Para encontrar dY y dR en este contexto, utilizamos la Regla de Cramer:

$$|\boldsymbol{A}_Y| = \begin{vmatrix} dG & -1 & -1 & 0 \\ C_Y dT & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ 0 & 0 & 0 & L_R \end{vmatrix} = L_R \begin{vmatrix} dG & -1 & -1 \\ C_Y dT & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = L_R \begin{vmatrix} dG & -1 \\ C_Y dT & -1 \end{vmatrix} = -L_R\left(dG - C_Y dT\right),$$

$$|\boldsymbol{A}_R| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & dG \\ C_Y & -1 & 0 & C_Y dT \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_Y & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -L_Y \begin{vmatrix} -1 & -1 & dG \\ -1 & 0 & C_Y dT \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = L_Y \begin{vmatrix} -1 & dG \\ -1 & C_Y dT \end{vmatrix} = L_Y\left(dG - C_Y dT\right).$$

Así,

$$dY = \frac{|\boldsymbol{A}_Y|}{|\boldsymbol{D}_y|} = \frac{L_R\left(dG - C_Y dT\right)}{L_Y(C_R+I_R) + L_R(1-C_Y)} \qquad \text{y} \qquad dR = \frac{|\boldsymbol{A}_R|}{|\boldsymbol{D}_y|} = \frac{-L_Y\left(dG - C_Y dT\right)}{L_Y(C_R+I_R) + L_R(1-C_Y)}.$$

Cuando G se incrementa, pero T se mantiene constante, entonces $dG > 0$ y $dT = 0$. Los cambios sobre Y y R de este estímulo son

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{L_R}{L_Y(C_R+I_R) + L_R(1-C_Y)} = \frac{(-)}{(-)} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial G} = \frac{-L_Y}{L_Y(C_R+I_R) + L_R(1-C_Y)} = \frac{(-)}{(-)} > 0.$$

En este modelo, una expansión fiscal incrementa el ingreso nacional y la tasa de interés.

Por su parte, si dG y dT se incrementan de modo que $dG = dT$ ($G - T$ no varía), se consigue

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{L_R(1-C_Y)}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} = \frac{(-)}{(-)} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial G} = \frac{-L_Y(1-C_Y)}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} = \frac{(-)}{(-)} > 0\,.$$

En este modelo, una expansión fiscal plenamente financiada con impuestos incrementa también el ingreso nacional y la tasa de interés. Dado que $0 < 1 - C_Y < 1$, estos efectos son menores que cuando $dT = 0$.

c) En este ejercicio se asume que $dA = dG = dT = 0$. Nuevamente, utilizamos la Regla de Cramer:

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}_Y| &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & C_R \\ 0 & 0 & 1 & -I_R \\ dM & 0 & 0 & L_R \end{vmatrix} = -dM \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & C_R \\ 0 & 1 & -I_R \end{vmatrix} = -(C_R+I_R)dM\,, \\
|\boldsymbol{A}_R| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ C_Y & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_Y & 0 & 0 & dM \end{vmatrix} = dM \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ C_Y & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = dM \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ C_Y & -1 \end{vmatrix} = -(1-C_Y)dM\,.
\end{aligned}$$

Así,

$$dY = \frac{|\boldsymbol{A}_Y|}{|\boldsymbol{D}_y|} = \frac{(C_R+I_R)dM}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} \qquad \text{y} \qquad dR = \frac{|\boldsymbol{A}_R|}{|\boldsymbol{D}_y|} = \frac{(1-C_Y)dM}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)}\,.$$

Los cambios sobre Y y R propiciados por el cambio en M son

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{C_R+I_R}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} = \frac{(-)}{(-)} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial M} = \frac{1-C_Y}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} = \frac{(+)}{(-)} < 0\,.$$

En este modelo, una expansión monetaria incrementa el ingreso nacional y reduce la tasa de interés.

d) Considere el sistema linealizado y $dA = 0$. Al reemplazar dC y dI en la primera ecuación se llega a

$$\begin{aligned}
(1-C_Y)dY - (C_R+I_R)dR &= dG - C_Y dT \\
L_Y dY + L_R dR &= dM.
\end{aligned}$$

La pendiente de las curvas $R = f(Y)$ implícitas en estas ecuaciones se consiguen con una simple aplicación del teorema de la función implícita en un contexto *ceteris paribus* ($dG = dT = dM = 0$):

$$\left.\frac{\partial R}{\partial Y}\right|_{\text{IS}} = \frac{1-C_Y}{C_R+I_R} = \frac{(+)}{(-)} < 0 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial R}{\partial Y}\right|_{\text{LM}} = -\frac{L_Y}{L_R} = -\frac{(+)}{(-)} > 0\,.$$

e) Matricialmente, el sistema reducido es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1-C_Y & -(C_R+I_R) \\ L_Y & L_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG - C_Y dT \\ dM \end{bmatrix}.$$

Asumiendo que la matriz de este sistema, que llamamos $\boldsymbol{D}$, es no singular,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} dY \\ dR \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1-C_Y & -(C_R+I_R) \\ L_Y & L_R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} dG - C_Y dT \\ dM \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} \begin{bmatrix} L_R & C_R+I_R \\ -L_Y & 1-C_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dG - C_Y dT \\ dM \end{bmatrix}. \\
&= \frac{1}{L_Y(C_R+I_R)+L_R(1-C_Y)} \begin{bmatrix} L_R(dG - C_Y dT) + (C_R+I_R)dM \\ -L_Y(dG - C_Y dT) + (1-C_Y)dM \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dos puntos importantes por notar. Primero el determinante de $\boldsymbol{D}$ en este caso es idéntico al encontrado en la parte *a*). Así, las condiciones para los que el sistema defina funciones implícitas son exactamente las mismas. Segundo, note las soluciones para dY y dR. Visualmente puede verificarse que los resultados que obtendremos de este sistema ante cambios en G, T y M serán idénticos a los encontrados previamente.

■

27. Considere el siguiente modelo macroeconómico (Neoclásico, donde el ingreso nacional es determinado por la oferta agregada y los precios se asumen flexibles):

$$\begin{aligned}
Y &= C(Y-T)+I(R)+G & 0<C_Y<1,\quad I_R<0\\
Y &= F(N,K) & F_N>0,\quad F_K>0\\
w &= F_N(N,K) & F_{NN}<0,\quad F_{NK}\geq 0\\
w &= S(N) & S_N>0\\
M &= P\,L(Y,R) & L_Y>0,\quad L_R\leq 0
\end{aligned}$$

donde Y es el ingreso (o producción) nacional, $C(\cdot)$ es el consumo, $I(\cdot)$ es la inversión, G es el gasto de gobierno, T es la recaudación de impuestos, R es la tasa de interés, K es el *stock* de capital, N es el *stock* de mano de obra, w es el salario *real*, M es la cantidad *nominal* de dinero y P es el nivel de precios. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $I(\cdot)$, $F(\cdot)$, $S(\cdot)$ y $L(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. En este modelo, las variables G, T, K y M son tratadas como exógenas.

a) Verifique y mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y, N, w, R y P de movimientos en G y T.

c) Indique, además, cuál es el efecto de un incremento en M.

d) A la luz de sus resultados previos, ¿cuál es la variable exógena que más efectos tiene sobre Y, N y w en esta economía?

Solución:

a) Al tomar diferenciales a cada una de las ecuaciones del modelo, recolectar las variables endógenas a la izquierda y las exógenas a la derecha, se obtiene

$$\begin{aligned}
dY &= C_Y(dY-dT)+I_RdR+dG & \rightarrow\ (1-C_Y)dY-I_RdR &= dG-C_YdT\\
dY &= F_NdN+F_KdK & \rightarrow\ dY-F_NdN &= F_KdK\\
dw &= F_{NN}dN+F_{NK}dK & \rightarrow\ dw-F_{NN}dN &= F_{NK}dK\\
dw &= S_NdN & \rightarrow\ dw-S_NdN &= 0\\
dM &= P(L_YdY+L_RdR)+L(\cdot)dP & \rightarrow\ P\,L_YdY+P\,L_RdR+\bar{M}dP &= dM.
\end{aligned}$$

donde $\bar{M}=M/P$ es la cantidad *real* de dinero. Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1-C_Y & -I_R & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -F_N & 0 & 0\\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -S_N & 1 & 0\\ PL_Y & PL_R & 0 & 0 & \bar{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dY\\ dR\\ dN\\ dw\\ dP\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dG-C_YdT\\ F_KdK\\ F_{NK}dK\\ 0\\ dM\end{bmatrix}.$$

El Jacobiano de este sistema es

$$|\boldsymbol{D}_y|=\begin{vmatrix} 1-C_Y & -I_R & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -F_N & 0 & 0\\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1 & 0\\ 0 & 0 & -S_N & 1 & 0\\ PL_Y & PL_R & 0 & 0 & \bar{M}\end{vmatrix}=\bar{M}\begin{vmatrix} 1-C_Y & -I_R & 0 & 0\\ 1 & 0 & -F_N & 0\\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1\\ 0 & 0 & -S_N & 1\end{vmatrix}$$

$$=I_R\bar{M}\begin{vmatrix} 1 & -F_N & 0\\ 0 & -F_{NN} & 1\\ 0 & -S_N & 1\end{vmatrix}=I_R\bar{M}\begin{vmatrix} -F_{NN} & 1\\ -S_N & 1\end{vmatrix}=I_R\bar{M}(S_N-F_{NN})<0\,.$$

Dado que $|\boldsymbol{D}_y|\neq 0$, el sistema define funciones implícitas de las variables endógenas.

b) En este ejercicio, se asume que $dK = dM = 0$. Por simplicidad, asumimos también (sin consecuencias) que $dT = 0$. Para calcular los efectos que cambios en G inducen sobre Y y N, utilizamos la Regla de Cramer:

$$dY = \frac{|\boldsymbol{A}_Y|}{|\boldsymbol{D}_y|} \qquad \text{y} \qquad dN = \frac{|\boldsymbol{A}_N|}{|\boldsymbol{D}_y|}\,,$$

donde

$$|\boldsymbol{A}_Y| \;=\; \begin{vmatrix} dG & -I_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -S_N & 1 & 0 \\ 0 & PL_R & 0 & 0 & \bar{M} \end{vmatrix} = \bar{M} \begin{vmatrix} dG & -I_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_N & 0 \\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1 \\ 0 & 0 & -S_N & 1 \end{vmatrix} = \bar{M}dG \begin{vmatrix} 0 & -F_N & 0 \\ 0 & -F_{NN} & 1 \\ 0 & -S_N & 1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

$$|\boldsymbol{A}_N| \;=\; \begin{vmatrix} 1-C_Y & -I_R & dG & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ PL_Y & PL_R & 0 & 0 & \bar{M} \end{vmatrix} = \bar{M} \begin{vmatrix} 1-C_Y & -I_R & dG & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{M}dG \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Es decir, Y y N *no cambian* ante cambios en G. Dada la estructura del modelo, lo mismo es cierto si los cambios los experimentara T. Dado que $dN = 0$, se desprende inmediatamente que $dw = S_N dN = 0$.

Por otro lado, dado que $dY = 0$, la primera ecuación se reduce a $-I_R dR = dG$ o $dR = -(1/I_R)dG$. Con ello, de la última ecuación se consigue que $P\,L_R dR + \bar{M}dP = 0$ o $dP = -L_R(M/P^2)dR$. En resumen,

$$\frac{\partial R}{\partial G} = -\frac{1}{I_R} = \frac{(-)}{(-)} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial P}{\partial G} = \frac{L_R}{I_R}\left(\frac{M}{P^2}\right)^{-1} = \frac{(-)}{(-)}(+) > 0\,.$$

En este modelo, una expansión fiscal afecta únicamente a la tasa de interés y al nivel de precios, incrementándolos. No tiene efectos sobre las variables "de oferta" Y, N y w.

c) En este ejercicio, se asume que $dG = dT = dK = 0$. Al utilizar la Regla de Cramer para determinar dY encontramos que

$$|\boldsymbol{A}_Y| = \begin{vmatrix} 0 & -I_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_{NN} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -S_N & 1 & 0 \\ dM & PL_R & 0 & 0 & \bar{M} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Este determinante es igual a cero debido a la dependencia lineal que existe entre la columna del estímulo monetario (la primera) y la columna asociada con dP en el sistema linealizado (la última). Ello lleva a concluir que $dY = 0$. Note, más aún, que la mencionada dependencia lineal emergerá al aplicar la Regla de Cramer en *todos* los casos, menos para dP. Así, se concluye que $dN = dw = dR = 0$.

En este modelo, una expansión monetaria sólo genera inflación. De la última ecuación se verifica que la tasa de crecimiento de P (la inflación) es igual la tasa de crecimiento de M: $dP/P = dM/M$.

d) La única variable exógena que afecta a Y, N y w es K. Siguiendo un procedimiento muy similar al de la parte *b*) se encuentra que, para $dG = dT = dM = 0$,

$$|\boldsymbol{A}_N| = \begin{vmatrix} 1-C_Y & -I_R & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & F_K dK & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{NK}dK & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ PL_Y & PL_R & 0 & 0 & \bar{M} \end{vmatrix} = \bar{M}I_R \begin{vmatrix} 1 & F_K dK & 0 \\ 0 & F_{NK}dK & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{M}I_R \begin{vmatrix} F_{NK}dK & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{M}I_R F_{NK}dK\,.$$

Así,

$$dN = \frac{|\boldsymbol{A}_N|}{|\boldsymbol{D}_y|} = \frac{F_{NK}}{S_N - F_{NN}}dK\,, \qquad dY = F_N dN + F_K dK = \frac{F_N F_{NK} + F_K(S_N - F_{NN})}{S_N - F_{NN}}dK$$

$$\text{y} \qquad dw = S_N dN = \frac{S_N F_{NK}}{S_N - F_{NN}}dK\,.$$

Incrementos en K, incrementan N, Y y w.

■

28. Considere el siguiente modelo macroeconómico en un mundo de dos países (nacional y extranjero):

$$\begin{aligned}
Y &= C(Y) + G + X(Y^*, q) - M(Y, q) && 0 < C_Y < 1\,, \\
Y^* &= C^*(Y^*) + G^* + X^*(Y, q) - M^*(Y^*, q) && 0 < C^*_{Y^*} < 1\,, \\
X^*(Y, q) &= M(Y, q) && 0 < M_Y < 1, \quad M_q < 0\,, \\
M^*(Y^*, q) &= X(Y^*, q) && 0 < X_{Y^*} < 1, \quad X_q > 0\,,
\end{aligned}$$

donde Y es el ingreso nacional, Y^* es el ingreso extranjero, G es el gasto del gobierno nacional, G^* es el gasto del gobierno extranjero y q es el tipo de cambio entre ambos países. Los signos de las derivadas parciales de las funciones $C(\cdot)$, $X(\cdot)$, $M(\cdot)$, $C^*(\cdot)$, $X^*(\cdot)$ y $M^*(\cdot)$ son provistos por la teoría económica. Las últimas dos ecuaciones indican que, en un mundo de dos países, las exportaciones de un país son las importaciones del otro, y vice versa.

Tratando a G, G^* y q como variables exógenas:

a) Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

b) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G manteniendo G^* y q constantes.

c) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y e Y^* de un incremento en G^* manteniendo G y q constantes.

d) ¿Bajo qué condiciones un incremento en q no tendrá efectos sobre el ingreso mundial $Y + Y^*$?

Tratando a G, G^* e Y^* como variables exógenas:

e) Mencione cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en términos de las variables exógenas.

f) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en G manteniendo G^* e Y^* constantes.

g) Asumiendo que estas condiciones su cumplen, indique cuál es el efecto sobre Y y q de un incremento en Y^* manteniendo G^* y G constantes.

Solución:

a) Reemplazamos las dos últimas ecuaciones en las dos primeras y tomamos diferenciales:

$$\begin{aligned}
&Y = C(Y) + G + X(Y^*, q) - M(Y, q) && \to \quad dY = (C_Y - M_Y)dY + dG + X_{Y^*}dY^* + (X_q - M_q)dq \\
&Y^* = C^*(Y^*) + G^* + M(Y, q) - X(Y^*, q) && \to \quad dY^* = (C^*_{Y^*} - X_{Y^*})dY^* + dG^* + M_Y dY + (M_q - X_q)dq\,.
\end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1 - C_Y + M_Y & -X_{Y^*} \\ -M_Y & 1 - C^*_{Y^*} + X_{Y^*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dY^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dG + (X_q - M_q)dq \\ dG^* - (X_q - M_q)dq \end{bmatrix}.$$

El Jacobiano de este sistema es

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} 1 - C_Y + M_Y & -X_{Y^*} \\ -M_Y & 1 - C^*_{Y^*} + X_{Y^*} \end{vmatrix} &= (1 - C_Y + M_Y)(1 - C^*_{Y^*} + X_{Y^*}) - M_Y X_{Y^*} \\
&= (1 - C_Y)(1 - C^*_{Y^*}) + (1 - C_Y)X_{Y^*} + (1 - C^*_{Y^*})M_Y > 0\,.
\end{aligned}$$

Dado que este determinante es siempre distinto de cero, se concluye que el sistema siempre define funciones implícitas de las variables endógenas.

b) Resolvemos *todo* el sistema, dado que es un ejercicio simple. Al tomar inversas,

$$\begin{bmatrix} dY \\ dY^* \end{bmatrix} = \frac{1}{|\boldsymbol{J}|} \begin{bmatrix} 1 - C^*_{Y^*} + X_{Y^*} & X_{Y^*} \\ M_Y & 1 - C_Y + M_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dG + (X_q - M_q)dq \\ dG^* - (X_q - M_q)dq \end{bmatrix}.$$

de donde se resuelve

$$
\begin{aligned}
dY &= \frac{(1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})(dG+(X_q-M_q)dq)+X_{Y^*}(dG^*-(X_q-M_q)dq)}{|\boldsymbol{J}|}\,.\\
dY^* &= \frac{M_Y(dG+(X_q-M_q)dq)+(1-C_Y+M_Y)(dG^*-(X_q-M_q)dq)}{|\boldsymbol{J}|}\,.
\end{aligned}
$$

Al considerar $dG^*=dq=0$, se consigue

$$
\frac{\partial Y}{\partial G}=\frac{1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*}}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(+)}>0\,,\qquad \frac{\partial Y^*}{\partial G}=\frac{M_Y}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(+)}>0\,.
$$

c) Al considerar $dG=dq=0$, se consigue

$$
\frac{\partial Y}{\partial G^*}=\frac{X_{Y^*}}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(+)}>0\,,\qquad \frac{\partial Y^*}{\partial G^*}=\frac{1-C_Y+M_Y}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(+)}>0\,.
$$

d) Finalmente, al considerar $dG^*=dG=0$,

$$
\frac{\partial Y}{\partial q}=\frac{(X_q-M_q)(1-C^*_{Y^*})}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(+)}>0\,,\qquad \frac{\partial Y^*}{\partial q}=-\frac{(X_q-M_q)(1-C_Y)}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(-)}{(+)}<0\,.
$$

Así,

$$
\frac{\partial(Y+Y^*)}{\partial q}=\frac{(X_q-M_q)(C_Y-C^*_{Y^*})}{|\boldsymbol{J}|}\,.
$$

Esta expresión será igual a cero si $C_Y=C^*_{Y^*}$.

e) La representación matricial del sistema de ecuaciones es, en esta ocasión,

$$
\begin{bmatrix} 1-C_Y+M_Y & -(X_q-M_q)\\ M_Y & -(X_q-M_q)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dY\\ dq\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} dG+X_{Y^*}dY^*\\ (1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})dY^*-dG^*\end{bmatrix}.
$$

El Jacobiano de este sistema es

$$
|\boldsymbol{J}|=\begin{vmatrix} 1-C_Y+M_Y & -(X_q-M_q)\\ M_Y & -(X_q-M_q)\end{vmatrix}=-(X_q-M_q)(1-C_Y+M_Y)+(X_q-M_q)M_Y=-(X_q-M_q)(1-C_Y)<0\,.
$$

Dado que $|\boldsymbol{J}|\neq 0$, se concluye que el sistema siempre define funciones implícitas de las variables endógenas.

f) Al tomar inversas,

$$
\begin{bmatrix} dY\\ dq\end{bmatrix}=\frac{1}{|\boldsymbol{J}|}\begin{bmatrix} -(X_q-M_q) & X_q-M_q\\ -M_Y & 1-C_Y+M_Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} dG+X_{Y^*}dY^*\\ (1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})dY^*-dG^*\end{bmatrix}.
$$

de donde se resuelve

$$
\begin{aligned}
dY &= \frac{(X_q-M_q)\left[(1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})dY^*-dG^*-dG-X_{Y^*}dY^*\right]}{|\boldsymbol{J}|}\,.\\
dq &= \frac{(1-C_Y+M_Y)\left[(1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})dY^*-dG^*\right]-M_Y(dG+X_{Y^*}dY^*)}{|\boldsymbol{J}|}\,.
\end{aligned}
$$

Al considerar $dG^*=dY^*=0$, se consigue

$$
\frac{\partial Y}{\partial G}=-\frac{(X_q-M_q)}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(-)}{(-)}>0\,,\qquad \frac{\partial q}{\partial G}=-\frac{M_Y}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(-)}{(-)}>0\,.
$$

g) Finalmente, al considerar $dG^*=dG=0$,

$$
\frac{\partial Y}{\partial Y^*}=\frac{(X_q-M_q)(1-C^*_{Y^*})}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(-)}<0\,,\qquad \frac{\partial q}{\partial Y^*}=\frac{(1-C_Y+M_Y)(1-C^*_{Y^*}+X_{Y^*})-M_YX_{Y^*}}{|\boldsymbol{J}|}=\frac{(+)}{(-)}<0\,.
$$

■

29. Una firma produce un bien de acuerdo con la función de producción

$$Y = F(N, K)\,, \tag{1}$$

donde Y es la cantidad producida, N es mano de obra y K es capital. Las derivadas parciales (de primer y segundo orden) de la función $F(\cdot,\cdot)$ satisfacen, para todo (N, K),

$$F_N > 0\,, \qquad F_K > 0\,, \qquad F_{NN} < 0\,, \qquad F_{KK} < 0 \qquad \text{y} \qquad F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2 > 0\,.$$

Sea $P > 0$ el precio del bien, que se asume exógeno. En el corto plazo, K es exógeno y N se determina a partir de la ecuación

$$P \times F_N(N, K) - 1 = 0\,. \tag{2}$$

En el largo plazo, N se determina nuevamente a partir de (2) mientras que K pasa a ser endógeno y se determina a partir de

$$P \times F_K(N, K) - 1 = 0\,. \tag{3}$$

Para el modelo de corto plazo:

a) Plantee un sistema linealizado (en términos de diferenciales o de derivadas parciales) que relacione las variables endógenas con las variables exógenas.

b) ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $Y = f_{\text{CP}}(P, K)$ y $N = g(P, K)$?

c) La función $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ es la curva de oferta de corto plazo. Calcule la derivada parcial de $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta) y con respecto a K.

Para el modelo de largo plazo:

d) Plantee un sistema linealizado que relacione las variables N y K con P.

e) ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $N = G_1(P)$ y $K = G_2(P)$?

f) Calcule las derivadas de $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ con respecto a P.

g) La función $f_{\text{LP}}(P) = F(G_1(P), G_2(P))$ es la curva de oferta de largo plazo. Calcule la derivada de $f_{\text{LP}}(\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta).

h) Asuma por simplicidad que $F_{NK} = 0$. El *principio de Le Châtelier* sostiene que la pendiente de la curva de oferta de largo plazo es mayor que la pendiente de la curva de oferta de corto plazo ¿Se cumple el principio de Le Châtelier en este modelo?

Solución:

a) Al tomar diferenciales de (1), $dY = F_N dN + F_K dK$. Asimismo, al tomar diferenciales de (2),

$$P \times F_{NN}dN + P \times F_{NK}dK + F_N dP = 0\,.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 1 & -F_N \\ 0 & P \times F_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dY \\ dN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_K dK \\ -F_N dP - P \times F_{NK}dK \end{bmatrix}.$$

b) El Jacobiano del sistema es

$$\det(\boldsymbol{J}) = \begin{vmatrix} 1 & -F_N \\ 0 & P \times F_{NN} \end{vmatrix} = P \times F_{NN} < 0\,,$$

para todo N, K y P. Así, el sistema define implícitamente las funciones $f_{\text{SR}}(\cdot,\cdot)$ y $g(\cdot)$.

c) Al resolver

$$\begin{bmatrix} dY \\ dN \end{bmatrix} = \frac{1}{P \times F_{NN}} \begin{bmatrix} P \times F_{NN} & F_N \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_K dK \\ -F_N dP - P \times F_{NK}dK \end{bmatrix}.$$

La solución para dY es

$$dY = F_K dK - \frac{(F_N)^2}{P \times F_{NN}}dP - \frac{F_N F_{NK}}{F_{NN}}dK = \left(F_K - \frac{F_N F_{NK}}{F_{NN}}\right)dK - \frac{(F_N)^2}{P \times F_{NN}}dP\,.$$

Se concluye que

$$\frac{\partial f_{\text{SR}}(\cdot,\cdot)}{\partial P} = -\frac{(F_N)^2}{P \times F_{NN}} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f_{\text{SR}}(\cdot,\cdot)}{\partial K} = F_K - \frac{F_N F_{NK}}{F_{NN}}\,.$$

d) Al tomar diferenciales de (2) y de (3),

$$P \times F_{NN} dN + P \times F_{NK} dK = -F_N dP \qquad \text{y} \qquad P \times F_{NK} dN + P \times F_{KK} dK = -F_K dP\,.$$

Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} P \times F_{NN} & P \times F_{NK} \\ P \times F_{NK} & P \times F_{KK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dN \\ dK \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_N \\ F_K \end{bmatrix} dP\,.$$

e) El Jacobiano del sistema es

$$\det(\boldsymbol{J}) = \begin{vmatrix} P \times F_{NN} & P \times F_{NK} \\ P \times F_{NK} & P \times F_{KK} \end{vmatrix} = P^2(F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2) > 0\,,$$

para todo N, K y P. Así, el sistema define implícitamente las funciones $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$.

f) Al resolver

$$\begin{bmatrix} dN \\ dK \end{bmatrix} = \frac{-1}{\det(\boldsymbol{J})} \begin{bmatrix} P \times F_{KK} & -P \times F_{NK} \\ -P \times F_{NK} & P \times F_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_N \\ F_K \end{bmatrix} dP\,.$$

La solución para dN es

$$dN = -\frac{P \times F_{KK}F_N - P \times F_{NK}F_K}{\det(\boldsymbol{J})} dP\,,$$

de modo que

$$\frac{dG_1(\cdot)}{dP} = -\frac{F_{KK}F_N - F_{NK}F_K}{P(F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2)}\,.$$

La solución para dK es

$$dK = -\frac{P \times F_{NN}F_K - P \times F_{NK}F_N}{\det(\boldsymbol{J})} dP\,,$$

de modo que

$$\frac{dG_2(\cdot)}{dP} = -\frac{F_{NN}F_K - F_{NK}F_N}{P(F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2)}\,.$$

g) La derivada de $f_{\text{LR}}(\cdot)$ es

$$\begin{aligned} \frac{df_{\text{LR}}(\cdot)}{dP} = F_N \frac{dG_1(\cdot)}{dP} + F_K \frac{dG_2(\cdot)}{dP} &= -\frac{F_{KK}(F_N)^2 - F_{NK}F_NF_K + F_{NN}(F_K)^2 - F_{NK}F_NF_K}{P(F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2)} \\ &= -\frac{F_{KK}(F_N)^2 + F_{NN}(F_K)^2 - 2F_{NK}F_NF_K}{P(F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2)}\,. \end{aligned}$$

h) Cuando $F_{NK} = 0$,

$$\frac{df_{\text{LR}}(\cdot)}{dP} = -\frac{F_{KK}(F_N)^2 + F_{NN}(F_K)^2}{P(F_{NN}F_{KK})} = -\frac{(F_N)^2}{P \times F_{NN}} - \frac{(F_K)^2}{P \times F_{KK}} = \frac{\partial f_{\text{SR}}(\cdot)}{\partial P} - \frac{(F_K)^2}{P \times F_{KK}}\,.$$

Así,

$$\frac{df_{\text{LR}}(\cdot)}{dP} - \frac{\partial f_{\text{SR}}(\cdot)}{\partial P} = \frac{(F_K)^2}{P \times (-F_{KK})} > 0\,,$$

lo que satisface el principio de Le Châtelier. ■