Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Segundo Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Orestes Bueno, Diego Bohorquez y Jorge Cortez

Examen Final

SECCIÓN I

1. Modelo de mercado con inventarios (5 ptos)

Considere un mercado donde la cantidad demandada D_t responde al precio del producto, mientras que la cantidad ofertada S_t depende del precio *esperado* por los productores,

$$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad \text{y} \qquad S_t = -\gamma + \delta P_t^e \,,$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. Asimismo, los productores acumulan inventarios según

$$I_t = \phi(P_{t+1}^e - P_t)\,,$$

donde $\phi > 0$, de modo que la condición de equilibrio del mercado es $S_t = D_t + (I_t - I_{t-1})$. Asuma *previsión perfecta*: $P_t^e = P_t$.

a) **(1 pto)** Calcule $\bar{P}$, $\bar{I}$ y $\bar{D}$, los valores de estado estacionario del precio, los inventarios y la cantidad demandada.

b) **(2 ptos)** Muestre que la trayectoria del precio en este mercado está dada por

$$P(t) = C_1\lambda^t + C_2\lambda^{-t} + \bar{P}\,,$$

donde $\bar{P}$ es el valor de estado estacionario, C_1 y C_2 son constantes arbitrarias y $\lambda > 1$.

c) **(2 ptos)** Suponga que inicialmente $P(0) = P_0$ e $I(0) = I_0$. Encuentre la trayectoria de $I(t)$ e indique qué condición debe cumplir I_0 para que este sistema sea estable. Muestra las trayectorias de $P(t)$ y de $I(t)$ bajo esta condición. Si gusta, puede expresar sus respuestas en términos de λ.

2. Sistema diferencial (6 ptos)

Considere el sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1(x - \gamma y) + \beta\,, \\ \dot{y} &= \alpha_2(x - \gamma y)\,, \end{aligned}$$

donde $\alpha_2 > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ y $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2\gamma < 0$.

a) **(2 ptos)** Encuentre la trayectoria de $y(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{y}(t)$.

b) **(1 pto)** Encuentre la trayectoria de $x(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{x}(t)$.

c) **(1 pto)** Encuentre la trayectoria de $z(t) = x(t) - \gamma y(t)$. Analice su estabilidad.

d) **(2 ptos)** A partir del sistema original, deduzca una ecuación diferencial de primer order para $z = x - \gamma y$ y muestra que su solución es idéntica a la encontrada en la parte *c*).