UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, y F. Rosales

Práctica Calificada 3

1. Transformaciones (5 ptos)

Considere las transformaciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(u_1, u_2) = \ln(u_1^2 + u_2^2) \qquad \text{y} \qquad g(r, \theta) = \begin{bmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

a) **(1 pto)** Calcule las matrices Jacobianas de las transformaciones f y g. Calcule, además, el determinante de la matriz Jacobiana de g.

b) **(2 ptos)** Calcule (de la manera más simple posible):

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial r} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f \circ g}{\partial \theta}.$$

c) **(2 ptos)** Se dice que $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación inversa de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si la matriz Jacobiana de la transformación compuesta $h \circ g$ es $\boldsymbol{I}_2$ (la matriz identidad de orden 2). Encuentre una expresión para $\boldsymbol{D}h(u_1, u_2)$ utilizando la transformación $g(r, \theta)$ de la parte *a*).

2. Estática comparativa I (5 ptos)

Las variables endógenas y_1, y_2 e y_3 se relacionan con las variables exógenas x_1 y x_2 a través de:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 y_3 + x_1^2 y_2 + y_1^3 + y_1 + y_2 y_3 &= 1\,, \\ x_1 x_2 y_3 + y_2 y_3^2 + \alpha y_2 &= 2\,, \\ \ln(x_1 + x_2) + e^{y_3} &= 3\,, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 0$ es una constante.

a) **(1 pto)** Plantee el sistema linealizado (en términos de diferenciales) que relacione las variables endógenas con las variables exógenas.

b) **(1 pto)** ¿Cuáles son las condiciones para la existencia de funciones implícitas de las variables endógenas en función de las exógenas.

c) **(1.5 ptos)** Bajo las condiciones halladas anteriormente, las derivadas parciales de y_3 con respecto a x_1 y a x_2.

d) **(1.5 ptos)** Indique el efecto sobre y_2 e y_3 si x_1 aumenta y x_2 disminuye, pero manteniendo $x_1 + x_2$ constante.

3. Estática comparativa II (5 ptos)

Un individuo elige cuánto consumir en el presente (C_1) y en el futuro (C_2). Para ello, recibe un ingreso exógeno igual a Y en el presente y en el futuro y enfrenta una tasa de interés, también exógena, igual a $R-1$. El problema de elección del individuo se resume en las siguientes ecuaciones:

$$U'(C_1) = \beta\, R\, U'(C_2) \qquad \text{y} \qquad R\, C_1 + C_2 = (R+1)Y\,,$$

donde $U(\cdot)$ es una función de utilidad que, para todo C, satisface $U'(C) > 0$ y $U''(C) < 0$, y $\beta \in (0,1)$ es un factor de descuento.

a) **(1 pto)** Plantee el sistema linealizado (en términos de diferenciales) que relacione las variables endógenas con las variables exógenas.

b) **(1 pto)** ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $C_1 = f_1(R,Y)$ y $C_2 = f_2(R,Y)$?

c) **(1 pto)** Calcule las derivadas parciales de las funciones $f_1(\cdot,\cdot)$ y $f_2(\cdot,\cdot)$ con respecto a Y. Determine el signo de estas derivadas.

d) **(2 ptos)** Suponga que R se incrementa, manteniendo Y constante. ¿Qué ocurre con C_1 si $Y - C_1 < 0$? y ¿Qué ocurre con C_2 si $Y - C_1 > 0$?

4. Ecuaciones diferenciales (5 ptos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden y encuentre, en ambos casos, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

a) **(2.5 ptos)** $\dot{y} = t\,y + 2t + y + 2$, donde $y(0) = 0$.

b) **(2.5 ptos)** $\left(\dfrac{t+a}{y-a}\right)\dot{y} = \dfrac{y}{a}$, donde $a > 1$, $t \geq 0$ e $y(0) = 1$.