Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2015
Profesores Diego Winkelried, Eduardo Mantilla, Jorge Rodas y Jorge Cortéz

Examen Parcial

SECCIÓN I

1. Vectores y sus ángulos (5 ptos)

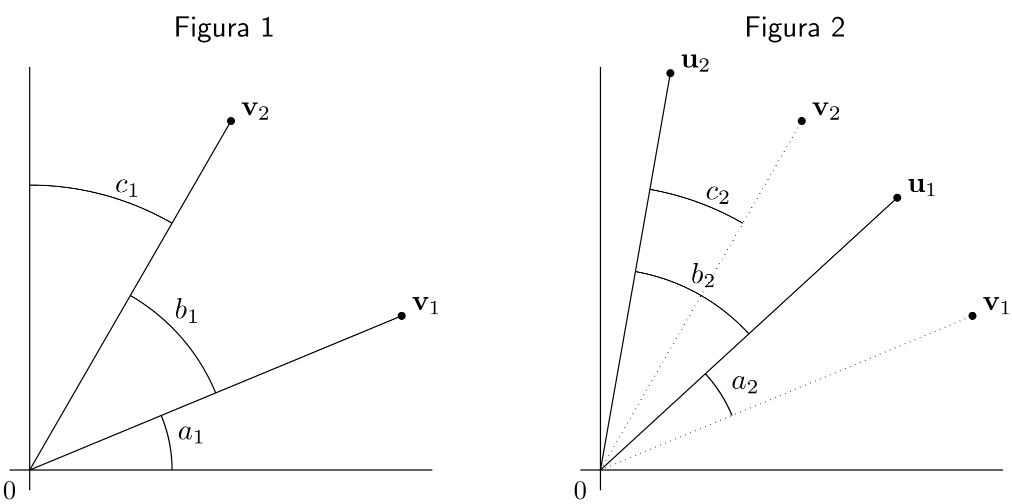
Sean θ_1 y θ_2 dos números reales tales que $0 < \theta_1 < \theta_2$. Defina los vectores de $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{bmatrix}.$$

Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ otros dos vectores en $\mathbb{R}^2$ definidos como $\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{Q}\mathbf{v}_2$, donde $\boldsymbol{Q}$ es la matriz

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

para $\alpha > 0$. Finalmente, las siguientes Figuras grafican los vectores previamente definidos:



a) **(2 ptos)** Encuentre los ángulos a_1, b_1 y c_1 de la Figura 1 en términos de θ_1 y θ_2.

b) **(2 ptos)** Encuentre los ángulos a_2, b_2 y c_2 de la Figura 2 en términos de θ_1, θ_2 y α.

c) **(1 pto)** Comente sobre la relación existente entre los vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Ayuda: Recuerde que $\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \cos(\omega_1)\cos(\omega_2) \mp \sin(\omega_1)\sin(\omega_2)$ y $\sin(\omega_1 \pm \omega_2) = \sin(\omega_1)\cos(\omega_2) \pm \cos(\omega_1)\sin(\omega_2)$.

2. Matrices y sus propiedades (6 ptos)

Sean $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ dos matrices cuadradas de dimensión $n \times n$, con las siguientes características:

- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son simétricas e idempotentes.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son complementarias: $\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{I}_n$.
- $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ son mutuamente ortogonales: $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{0}_n$.
- $\text{rango}(\boldsymbol{A}_1) = r_1 > 0$ y $\text{rango}(\boldsymbol{A}_2) = r_2 > 0$.

Defina, además, la matriz

$$\boldsymbol{B} = \theta_1\boldsymbol{A}_1 + \theta_2\boldsymbol{A}_2\,,$$

donde θ_1 y θ_2 son dos escalares distintos de cero.

Utilizando estas propiedades,

a) **(1 pto)** Verifique que $r_2 = n - r_1$. Luego, responda ¿son $\boldsymbol{A}_1$ y $\boldsymbol{A}_2$ matrices singulares?

b) **(1 pto)** Encuentre los valores de θ_1 y θ_2 para los que $\boldsymbol{B}$ sea idempotente.

c) **(1 pto)** La inversa de $\boldsymbol{B}$ tiene la forma $\boldsymbol{B}^{-1} = \alpha_1\boldsymbol{A}_1 + \alpha_2\boldsymbol{A}_2$. Halle α_1 y α_2.

d) **(2 ptos)** Muestre que los valores propios de $\boldsymbol{B}$ pueden ser iguales únicamente a θ_1 o a θ_2.

e) **(1 pto)** Finalmente, muestre que $\det(\boldsymbol{B}) = (\theta_1)^{r_1}(\theta_2)^{r_2}$.