UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Primer Semestre 2018
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, Y. García, J. Zúñiga y D. Bohorquez

SOLUCIONARIO 5

Ecuaciones en diferencias

Ecuaciones en diferencias de primer orden

1. Encuentre las trayectorias $y(t)$ que resuelven las siguientes ecuaciones en diferencias lineales:

$$a)\quad y_t - ay_{t-1} = b\,, \qquad b)\quad y_t - ay_{t-1} = bt^2\,, \qquad c)\quad y_t - ay_{t-1} = b^t\,, \qquad d)\quad y_t - ay_{t-1} = ba^t\,,$$

donde $0 < a < 1$, $b \neq a$ es una constante y la condición inicial es $y(0) = y_0$. Analice la estabilidad de estas trayectorias.

Solución:

Las soluciones tienen la forma $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, donde $y_c(t)$ es la solución complementaria e $y_p(t)$ es la solución particular. La solución complementaria resuelve la ecuación homogénea $y_c(t) - ay_c(t-1) = 0$ y en todos los casos es igual a $y_c(t) = Ca^t$, donde C es una constante arbitraria. Esta constante se determina al evaluar la solución final en la condición inicial, $y(0) = y_0$. La solución complementaria es estable, $y_c(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$, dado que $0 < a < 1$. La solución particular, y su estabilidad, depende del término de la ecuación. El método de resolución es el de coeficientes indeterminados.

a) Dado que el término es una constante, se conjetura que $y_p(t) = A$, lo que implica que $y_p(t-1) = A$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias se consigue

$$A - aA = b \qquad \to \qquad A = \frac{b}{1-a} \qquad \to \qquad y_p(t) = \frac{b}{1-a}\,.$$

Así, la solución de la ecuación en diferencias, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right) a^t + \frac{b}{1-a}\,.$$

La solución es estable, dado que $0 < a < 1$.

b) Dado que el término es un polinomio de segundo grado, se conjetura que $y_p(t) = A_2t^2 + A_1t + A_0$, lo que implica que $y_p(t-1) = A_2(t-1)^2 + A_1(t-1) + A_0 = A_2t^2 + (A_1 - 2A_2)t + (A_2 - A_1 + A_0)$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias se consigue

$$(A_2t^2 + A_1t + A_0) - a\left[A_2t^2 + (A_1 - 2A_2)t + (A_2 - A_1 + A_0)\right] = bt^2$$

$$\to \quad (1-a)A_2t^2 + \left[(1-a)A_1 + 2aA_2\right]t + \left[(1-a)A_0 - a(A_2 - A_1)\right] = bt^2$$

$$\to \quad (1-a)A_2 = b \qquad \to \qquad A_2 = \frac{b}{1-a}$$

$$\to \quad (1-a)A_1 + 2aA_2 = 0 \qquad \to \qquad A_1 = -\left(\frac{2a}{1-a}\right) A_2$$

$$\to \quad (1-a)A_0 - a(A_2 - A_1) = 0 \qquad \to \qquad A_0 = \frac{a}{1-a}(A_2 - A_1) = \left(\frac{1+a}{1-a}\right) A_2$$

$$\to \quad y_p(t) = \frac{b}{1-a}\left(t^2 - \frac{2a}{1-a}t + \frac{1+a}{1-a}\right)\,.$$

Así, la solución de la ecuación en diferencias, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 - \frac{b(1+a)}{(1-a)^2} \right) a^t + \frac{b}{1-a} \left(t^2 - \frac{2a}{1-a} t + \frac{1+a}{1-a} \right) .$$

Esta trayectoria es inestable por la presencia de potencias de t divergentes.

c) Dado que el término es una potencia de $b \neq a$, se conjetura que $y_p(t) = Ab^t$, lo que implica que $y_p(t-1) = Ab^{t-1} = (A/b)b^t$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias se consigue

$$Ab^t - a\left(\frac{A}{b}\right) b^t = b^t \qquad \rightarrow \qquad A\left(\frac{b-a}{b}\right) b^t = b^t \qquad \rightarrow \qquad A = \frac{b}{b-a} \qquad \rightarrow \qquad y_p(t) = \frac{b^{t+1}}{b-a} .$$

Así, la solución de la ecuación en diferencias, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 - \frac{b}{b-a} \right) a^t + \frac{b^{t+1}}{b-a} .$$

Dado que $|\, a \,| < 1$, la solución será estable siempre que $|\, b \,| \leq 1$.

d) El término es una potencia linealmente dependiente con la solución complementaria. Por ello, se conjetura que $y_p(t) = Ata^t$, lo que implica que $y_p(t-1) = A(t-1)a^{t-1} = (A/a)ta^t - (A/a)a^t$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias se consigue

$$Ata^t - a\left(\frac{A}{a} ta^t - \frac{A}{a} a^t\right) = ba^t \qquad \rightarrow \qquad Aa^t = ba^t \qquad \rightarrow \qquad A = b \qquad \rightarrow \qquad y_p(t) = bta^t .$$

Así, la solución de la ecuación en diferencias, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = y_0 a^t + bta^t = (y_0 + bt)\, a^t .$$

Dado que $|\, a \,| < 1$, la solución será siempre estable.

■

2. En un mercado, la cantidad demandada D_t responde al precio del producto, mientras que la cantidad ofertada S_t depende del precio *esperado* por los productores,

$$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad \text{y} \qquad S_t = -\gamma + \delta P_t^e ,$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. Encuentre la trayectoria de $P(t)$ que implica la condición de equilibrio $D_t = S_t$. Describa el comportamiento de esta trayectoria e indique bajo qué condiciones ésta es estable si ...

a) ... las expectativas son estáticas, $P_t^e = P_{t-1}$ (este es el famoso *Modelo de la Telaraña*),

b) ... las expectativas son adaptativas, $P_t^e = (1-\eta)P_{t-1}^e + \eta P_{t-1}$, donde $\eta \in (0, 1]$.

Solución:

Note que el caso *b*) se reduce al caso *a*) cuando $\eta = 1$. Por ello, resolveremos primero *b*) y analizaremos *a*) como un caso particular.

Al igualar oferta con demanda, $D_t = S_t$, se consigue

$$P_t^e = \frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_t \qquad \text{por lo que} \qquad P_{t-1}^e = \frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_{t-1} .$$

La ecuación de formación de expectativas $P_t^e = (1-\eta)P_{t-1}^e + \eta P_{t-1}$ equivale a $P_t^e - P_{t-1}^e = \eta(P_{t-1} - P_{t-1}^e)$. Al reemplazar nuestros hallazgos sobre P_t^e y su rezago,

$$\frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_t - \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_{t-1} \right) = \eta \left[P_{t-1} - \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} P_{t-1} \right) \right]$$

$$\rightarrow \quad -\frac{\beta}{\delta} P_t + \left((1-\eta)\frac{\beta}{\delta} - \eta \right) P_{t-1} = -\eta \left(\frac{\alpha+\gamma}{\delta} \right) \qquad \rightarrow \qquad P_t - \left((1-\eta) - \eta\frac{\delta}{\beta} \right) P_{t-1} = \eta \left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta} \right) .$$

Hemos llegado a una ecuación en diferencias lineal de primer orden para P_t. La solución complementaria es

$$P_c(t) = C\left((1-\eta) - \eta\frac{\delta}{\beta}\right)^t ,$$

donde C es una constante arbitraria. La solución particular es una constante que satisface $P_t = P_{t-1} = P_p$:

$$P_p = \frac{\eta\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}\right)}{1-\left((1-\eta)-\eta\dfrac{\delta}{\beta}\right)} = \frac{\eta\left(\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}\right)}{\eta\left(1+\dfrac{\delta}{\beta}\right)} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} .$$

Es interesante notar que este valor de estado estacionario no depende de cómo se forman las expectativas (es decir, de η). De hecho, puede verificarse que es el valor de equilibrio de un modelo estático, en donde $P_t^e = P_t$. Dado un precio inicial P_0, se concluye que

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left((1-\eta)-\eta\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} .$$

La trayectoria de $P(t)$ será estable toda vez que

$$-1 < (1-\eta) - \eta\frac{\delta}{\beta} < 1 \qquad \rightarrow \qquad -2 < -\eta - \eta\frac{\delta}{\beta} < 0 \qquad \rightarrow \qquad 0 < \frac{\delta}{\beta} < \frac{2-\eta}{\eta}$$

Recuerde que, en el plano (Q, P), β^{-1} es (el valor absoluto de) la pendiente de la curva de demanda, mientras que δ^{-1} es la pendiente de la curva de oferta. Se tiene que, en general, $(2-\eta)/\eta > 1$ por lo que la estabilidad de $P(t)$ se garantiza si $\beta > \delta$, o $\beta^{-1} < \delta^{-1}$, es decir si la curva de demanda es menos sensible al precio que la curva de oferta.

En el caso del Modelo de la Telaraña de la parte *a*), $\eta = 1$ y la trayectoria de $P(t)$ se reduce a

$$P(t) = \left(P_0 - \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t + \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} .$$

Dado que $\delta/\beta > 0$, ésta es una trayectoria fluctuante. Si $\delta < \beta$, el precio fluctuará en torno a su valor de estado estacionario y lo alcanzará en el largo plazo, como se muestra en los paneles (a) y (c) de la Figura 1. Por el contrario, si $\beta < \delta$ el precio flucturá e irá gradualmente alejándose del equilibrio, como se muestra en los paneles (b) y (d) de la Figura 1. ■

3. En un mercado, las funciones de demanda D_t y de oferta S_t son

$$D_t = \alpha - \beta P_t \qquad \text{y} \qquad S_t = -\gamma + \delta P_t ,$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. El precio se ajusta gradualmente ante desequilibrios en las cantidades demandada y ofertada,

$$\Delta P_t = -\sigma(S_{t-1} - D_{t-1}) ,$$

donde $\sigma > 0$.

a) Encuentre la trayectoria $P(t)$ e indique las condiciones para su estabilidad.

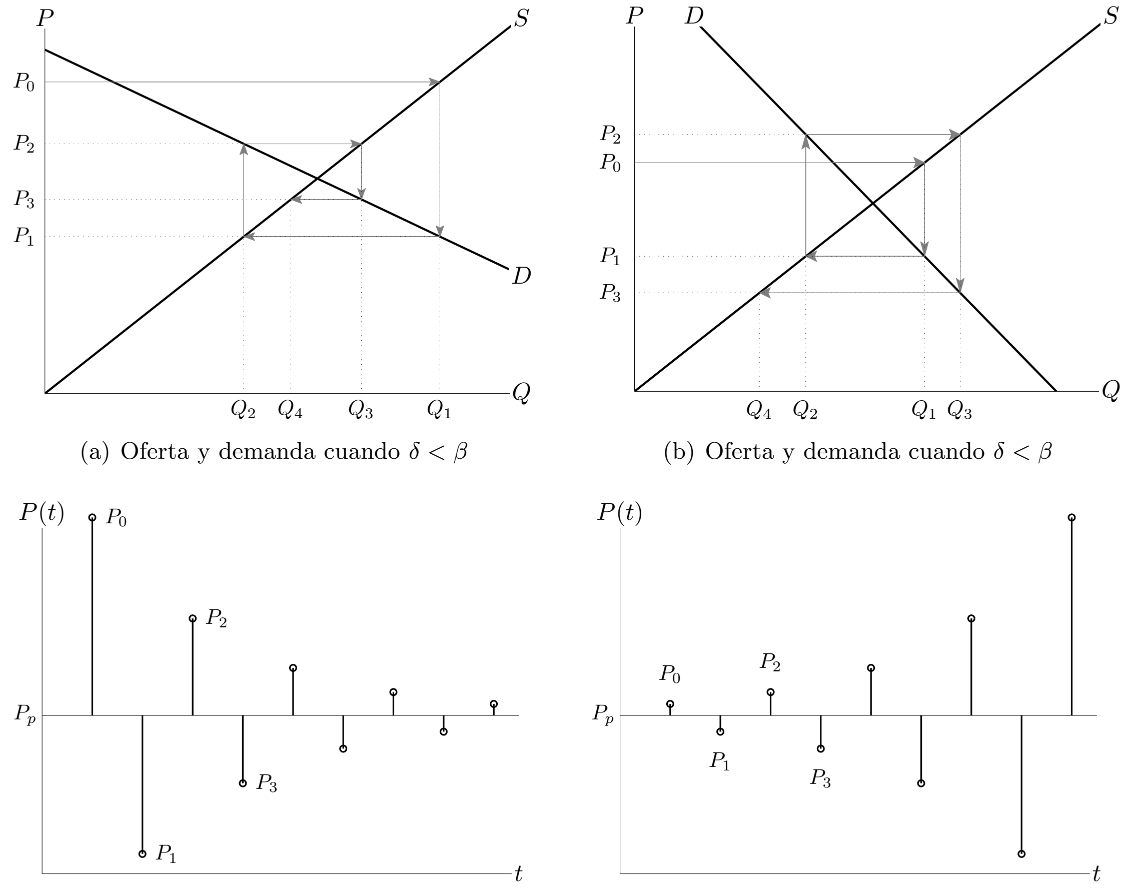
b) Suponga que $\sigma > 2/(\beta+\delta)$. Determine la curva de fase $P_t = f(P_{t-1})$, esboce un diagrama de fase y analice el comportamiento de la trayectoria de P.

c) Suponga nuevamente que $\sigma > 2/(\beta+\delta)$. Imagine que se introduce un control de precio de modo que

$$P_t = \begin{cases} f(P_{t-1}), & \text{si } f(P_{t-1}) < \bar{P} \\ \bar{P}, & \text{si } f(P_{t-1}) \geq \bar{P} \end{cases}$$

donde $\bar{P}$ es el máximo precio permitido. Esboce el diagrama de fase en este nuevo modelo y describa el comportamiento de la trayectoria de P.

Figura 1. *Modelo de la telaraña*



(a) Oferta y demanda cuando $\delta < \beta$

(b) Oferta y demanda cuando $\delta < \beta$

(c) Trayectoria del precio cuando $\delta < \beta$

(d) Trayectoria del precio cuando $\delta > \beta$

Solución:

a) Al reemplazar las definiciones de S_t y D_t en la ecuación de movimiento de P_t se consigue

$$P_t - P_{t-1} + \sigma(S_{t-1} - D_{t-1}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad P_t - P_{t-1} + \sigma\left(-\gamma + \delta P_{t-1} - \alpha + \beta P_{t-1}\right) = 0$$
$$\rightarrow P_t - (1 - \sigma\delta - \sigma\beta)P_{t-1} = \sigma(\alpha + \gamma)\,.$$

Hemos llegado a una ecuación en diferencias lineal de primer orden para P_t. La solución complementaria es

$$P_c(t) = C\left(1 - \sigma(\beta + \delta)\right)^t\,,$$

donde C es una constante arbitraria. La solución particular es una constante que satisface $P_t = P_{t-1} = P_p$:

$$P_p = \frac{\sigma(\alpha + \gamma)}{1 - (1 - \sigma\delta - \sigma\beta)} = \frac{\sigma(\alpha + \gamma)}{\sigma(\beta + \delta)} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\,.$$

Es interesante notar que este valor de estado estacionario no depende de cómo se ajustan los precios ante desequilibrios, es decir de σ. Note que el mismo valor de equilibrio se encuentra en el Modelo de la Telaraña. Finalmente, dado un precio inicial P_0, se concluye que

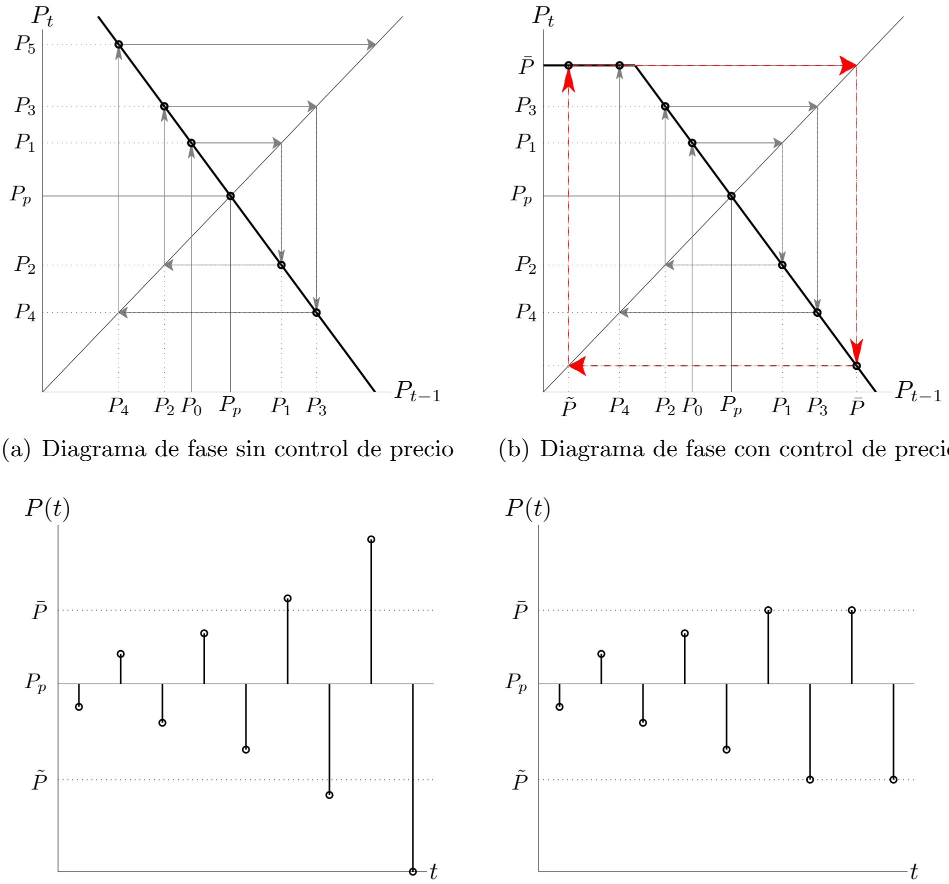
$$P(t) = \left(P_0 - \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\right)\left(1 - \sigma(\beta + \delta)\right)^t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}\,.$$

Esta trayectoria será estable si $-1 < 1 - \sigma(\beta + \delta) < 1$ lo que implica que $\sigma(\beta + \delta) < 2$.

b) La ecuación en diferencias para P_t implica

$$P_t = f(P_{t-1}) = \left(1 - \sigma(\delta + \beta)\right)P_{t-1} + \sigma(\alpha + \gamma)\,.$$

Figura 2. *Modelo de mercado con precio máximo*



(a) Diagrama de fase sin control de precio (b) Diagrama de fase con control de precio

(c) Trayectoria de P sin control de precio (d) Trayectoria de P sin control de precio

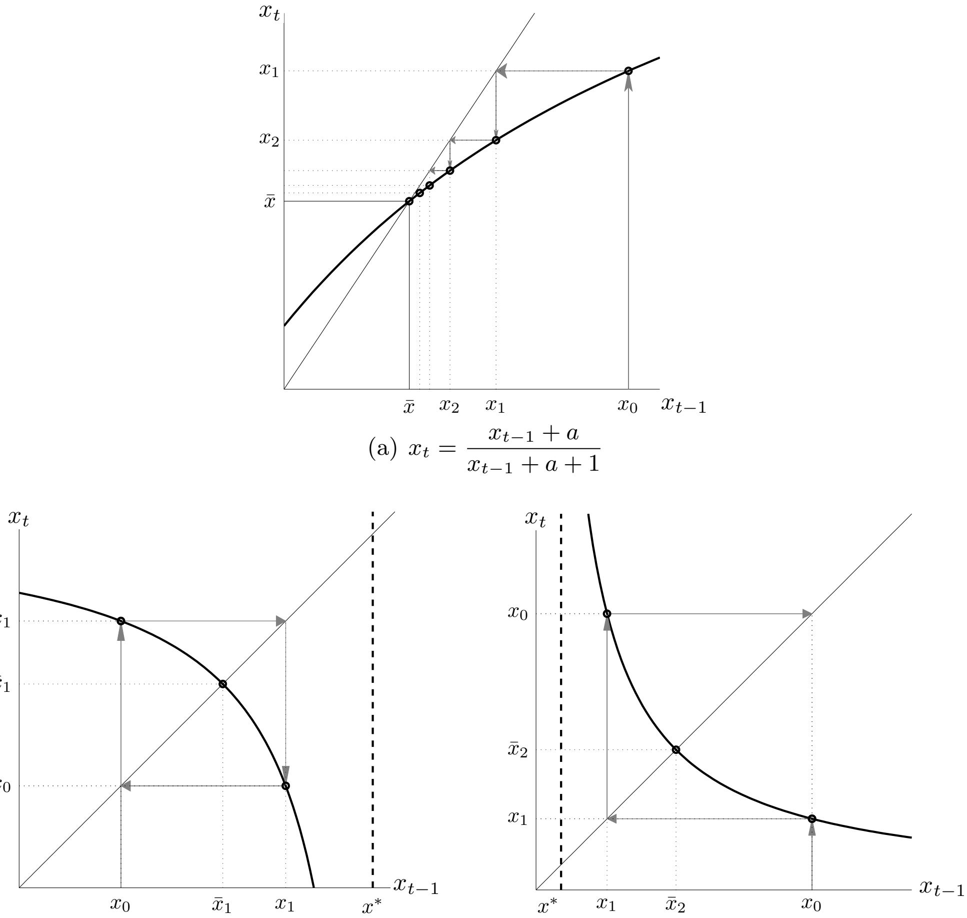
Dado que $\sigma > 2/(\beta + \delta)$, se tiene que $\sigma(\beta + \delta) > 2$ por lo que $1 - \sigma(\delta + \beta) < -1$. La pendiente de la curva de fase $f(.)$ es negativa, lo que implica una trayectoria de $P(t)$ fluctuante, y menor que -1, lo que implica una trayectoria divergente.

La Figura 2(a) muestra el diagrama de fase. La línea delgada de pendiente positiva es la recta de estado estacionario $P_t = P_{t-1}$, mientras que la línea gruesa de pendiente negativa es la curva de fase $P_t = f(P_{t-1})$. Partiendo de un punto $P_0 < P_p$ en el eje horizontal se consigue $P_1 = f(P_0) > P_p$. Luego, se identifica la ubicación de P_1 en el eje horizontal, proyectando el valor de P_1 a través de la recta de estado estacionario, y se consigue $P_2 = f(P_1)$. Se aprecia que $P_2 < P_0$. Un procedimiento similar permite obtener $P_3 > P_1$. Iterando de este modo queda clara la divergencia fluctuante de la trayectoria de P, que se muestra en la Figura 2(c).

c) En este caso, la ecuación en diferencias que gobierna el comportamiento de P_t es no lineal. La curva de fase se muestra en la Figura 2(b). Defina implícitamente $\bar{P} = f(P^*)$. Dado que la función $f(\cdot)$ es decreciente, para valores de $P_{t-1} > P^*$ se tendrá que $P_t = f(P_{t-1}) < \bar{P}$ y, por tanto, en este tramo la curva de fase es idéntica a la mostrada en la Figura 2(a). Sin embargo, para valores de $P_{t-1} < P^*$ se tendrá que $f(P_{t-1}) > \bar{P}$ y, por tanto, en este tramo la curva de fase es horizontal en el valor $P_t = \bar{P}$.

La imposición de un precio máximo altera la dinámica de P. Partiendo de un punto $P_0 < P_p$ inicialmente se aprecia un proceso de divergencia similar al del caso sin restricciones. El último caso en donde se tiene esta dinámica irrestricta es con P_4, ya que $f(P_4) > \bar{P}$. Por ello, ocurre que $P_5 = \bar{P}$. En el siguiente periodo el precio se determina por $\tilde{P} \equiv f(\bar{P}) < \bar{P}$. Éste es un precio reducido (dada el considerable exceso de oferta que implica el precio $\bar{P}$), menor que P_0 y que P_4. Así, $P_6 = \tilde{P}$. Luego, se tiene que $f(\tilde{P}) > \bar{P}$ por lo que se impone $P_7 = \bar{P}$. Seguidamente, $P_8 = f(\bar{P}) = \tilde{P}$ y se inicia un ciclo en donde el precio fluctúa entre los precios $\tilde{P}$ y el máximo permitido $\bar{P}$. Este ciclo se indica con flechas más grandes en la Figura 2(b). La trayectoria $P(t)$ se muestra en la Figura 2(d). ■

Figura 3. *Diagramas de fase*



(a) $x_t = \dfrac{x_{t-1}+a}{x_{t-1}+a+1}$

(b) $x_t = \dfrac{1-x_{t-1}}{1-(1-a)x_{t-1}} < \dfrac{1}{1-a}$ (c) $x_t = \dfrac{1-x_{t-1}}{1-(1-a)x_{t-1}} > \dfrac{1}{1-a}$

4. Estudie cualitativamente las trayectorias implícitas en las siguientes ecuaciones en diferencias no lineales, a través de un diagrama de fase y de la linealización de la curva de fase. Considere que $0 < a < 1$ y que $x_t > 0$.

a) $x_t = \dfrac{x_{t-1}+a}{x_{t-1}+a+1}$,

b) $x_t = \dfrac{1-x_{t-1}}{1-(1-a)x_{t-1}}$.

<u>Solución</u>:

a) Imponiendo la condición de estado estacionario $x = f(x)$ y desarrollando,

$$x = \frac{x+a}{x+a+1} \quad \rightarrow \quad x^2 + (a+1)x = x + a \quad \rightarrow \quad x^2 + ax - a = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sqrt{a^2+4a}-a}{2}.$$

El otro valor de x que resuelve la ecuación cuadrática anterior es negativo y, por tanto, descartado.

La pendiente de la curva de fase es

$$f'(x) = \frac{1}{x+a+1} - \frac{x+a}{(x+a+1)^2} = \frac{1}{(x+a+1)^2}.$$

Se tiene que para todo x, $0 < f'(x) < 1$. Con ello, puede concluirse que el estado estacionario encontrado $\bar{x}$ es un equilibrio estable. Partiendo de un punto arbitrario, $x_0 \neq \bar{x}$, la trayectoria $x(t)$ será convergente monotónicamente. Una ilustración se muestra en la Figura 3(a).

b) Es conveniente notar que en este caso la curva de fase tiene una discontinuidad en el valor $x^* = 1/(1-a)$, donde el denominador es igual a cero. Así, pues el análisis será realizado considerando los tramos $\mathcal{T}_1 = [0, x^*)$ y $\mathcal{T}_2 = (x^*, \infty)$. Imponiendo la condición de estado estacionario $x = f(x)$ y desarrollando,

$$x = \frac{1-x}{1-(1-a)x} \quad \to \quad x - (1-a)x^2 = 1 - x \quad \to \quad (1-a)x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \to \quad \bar{x}_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{a}}{1-a} \,.$$

El primer estado estacionario $\bar{x}_1 = (1-\sqrt{a})/(1-a) < x^*$ se encuentra en $\mathcal{T}_1$, mientras que el segundo $\bar{x}_2 = (1+\sqrt{a})/(1-a) > x^*$ se encuentra en $\mathcal{T}_2$.

La pendiente de la curva de fase es

$$f'(x) = -\frac{}{1-(1-a)x} - \frac{1-x}{(1-(1-a)x)^2} = -\frac{a}{(1-(1-a)x)^2} \,.$$

Puede concluirse hasta el momento que $f'(x) < 0$, dado que $a > 0$. La trayectoria de x será fluctuante alrededor de cualesquiera de sus estados estacionarios. Al evaluar en torno a cualquier estado estacionario,

$$f'(\bar{x}) = -\frac{a}{(1-(1-a)\bar{x})^2} = -\frac{a}{(1-[1\pm\sqrt{a}])^2} = -\frac{a}{(\pm\sqrt{a})^2} = -\frac{a}{a} = -1 \,.$$

Esta condición ocurre tanto para $\bar{x}_1$ como para $\bar{x}_2$. La trayectoria de x fluctuará sin converger ni explotar. La Figura 3(b) muestra el caso $x_t < x^*$, mientras que la Figura 3(c) muestra el caso $x_t > x^*$. ■

Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

5. Estudie cómo el valor de la constante a afecta las trayectorias que resuelven las siguientes ecuaciones en diferencias:

a) $\Delta^2 y_t = a$.

b) $y_t - 4y_{t-1} + 4y_{t-2} = a^t$.

c) $y_t - 2a(y_{t-1} - ay_{t-2}) = 0$.

Solución:

a) Esta ecuación equivale a $y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2} = a$. El polinomio característico de esta ecuación en diferencias es $P(r) = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$ por lo que se tienen dos raíces reales e iguales a uno. Así, la solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1(1)^t + C_2 t(1)^t = C_1 + C_2 t \,.$$

Respecto a la solución particular, note que el término es constante. Si conjeturamos $y_p(t) = A$, entonces tendríamos que $y_p(t)$ es linealmente dependiente de la solución complementaria $C_1(1)^t = C_1$. Asimismo, si conjeturamos $y_p(t) = At$, entonces tendríamos que $y_p(t)$ es linealmente dependiente de la solución complementaria $C_2 t(1)^t = C_2 t$. Así, conjeturamos que $y_p(t) = At^2$. Con ello, $y_p(t-1) = A(t-1)^2 = At^2 - 2At + A$ e $y_p(t-2) = A(t-2)^2 = At^2 - 4At + 4A$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias,

$$At^2 - 2\left(At^2 - 2At + A\right) + \left(At^2 - 4At + 4A\right) = a \quad \to \quad 2A = a \quad \to \quad y_p(t) = \frac{a}{2}t^2 \,.$$

Con ello, la solución final es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 + C_2 t + \frac{a}{2}t^2 \,.$$

Para determinar las constantes, considere $y(0) = C_1 + C_2\cdot(0) + a\cdot(0)^2/2 = C_1 = y_0$ e $y(1) = C_1 + C_2 + (a/2) = y_1$ lo que conlleva a que $C_2 = y_1 - y_0 - (a/2)$. Finalmente,

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t + \frac{a}{2}t(t-1) \,.$$

Esta solución es válida para todo valor de a.

b) El polinomio característico de la ecuación en diferencias es $P(r) = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$. Así, se tienen dos raíces repetidas y, por tanto, una solución complementaria de la forma

$$y_c(t) = C_1(2)^t + C_2 t(2)^t\,,$$

para constantes arbitrarias C_1 y C_2.

El término de la ecuación en diferencias es a^t. Si $a \neq 2$, esta función resulta ser linealmente independiente de la solución complementaria. Así, se conjetura $y_p(t) = Aa^t$, de modo que $y_p(t-1) = (A/a)a^t$ e $y_p(t-2) = (A/a^2)a^t$. Al reemplazar en la ecuación en diferencias,

$$Aa^t - 4\left(\frac{A}{a}\right)a^t + 4\left(\frac{A}{a^2}\right)a^t = a^t \quad \to \quad A\left(1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}\right) = 1 \quad \to \quad A = \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 .$$

Con ello, la solución total es

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)(2)^t + \left(\frac{a}{a-2}\right)^2 a^t\,.$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden determinarse a partir de condiciones iniciales.

Por su parte, si $a = 2$, el término es linealmente dependiente de la solución complementaria. La conjetura válida en este caso, dada la presencia de raíces repetidas, es $y_p(t) = At^2(2)^t$, de modo que $y_p(t-1) = (A/2)\left(t^2 - 2t + 1\right)(2)^t$ e $y_p(t-2) = (A/4)\left(t^2 - 4t + 4\right)(2)^t$. Al reemplazar en la ecuación en diferencias,

$$At^2 - 2A(t^2 - 2t + 1) + A(t^2 - 4t + 4) = 1 \quad \to \quad 2A = 1 \quad \to \quad y_p(t) = \frac{t^2}{2}(2)^t\,.$$

Con ello, la solución total es

$$y(t) = \left(C_1 + C_2 t + \frac{1}{2}t^2\right)(2)^t\,.$$

c) El polinomio característico de esta ecuación en diferencias es $P(r) = r^2 - 2ar + 2a^2$. Las raíces de esta ecuación son complejas conjugadas, $r_{1,2} = a(1 \pm i)$, de módulo $\sqrt{2}a$ y argumento $\theta = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$.

La ecuación en diferencias es, más aún, homogénea. En conclusión, la solución final es

$$y(t) = (\sqrt{2}a)^t \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)\right)\,,$$

para constantes arbitraria C_1 y C_2. En este problema, a no afecta la forma de la solución, mas sí su estabilidad. Se verifica que $y(t)$ será convergente si $\sqrt{2} < 1/a$.

■

6. En un corral se ha determinado que cada pareja de conejos necesita un mes de maduración para hacerse adulta y que tras otro mes de gestación da lugar a una nueva pareja. Una vez adulta, la pareja da a luz a otra pareja cada mes.

a) Deduzca la ecuación en diferencias que represente la dinámica descita de la población de conejos. Considere a la *pareja* como unidad de medida.

b) Resuelva la ecuación y analice su dinámica.

c) Analice la convergencia de la tasa de crecimiento de la población de conejos.

Solución:

a) En el período 0, hoy día, hay una pareja. En el período 1 sigue habiendo una pareja. Ahora bien, en el período 2 la pareja inicial da a luz a una segunda pareja. Ya hay dos parejas. En el período 3 se tienen las dos parejas más una nueva que tuvo la primera pareja. En el período cuatro se tienen las 3 anteriores más una extra por la primera pareja y una extra por la segunda pareja. Entonces cada período habrán tantas parejas como habían en el período anterior (las nuevas parejas) más tantas parejas como habían dos períodos atrás (las parejas viejas).

La ecuación en diferencias que represente la dinámica de la población de parejas de conejos es:

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t \qquad \text{donde} \qquad x(0) = x(1) = 1\,.$$

b) Se tiene una ecuaciones en diferencias homogénea con polinomio característico $P(r) = r^2 - r - 1$ que da como raíces $r_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Luego,

$$x(t) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t .$$

Utilizando las condiciones iniciales pueden determinarse las constantes C_1 y C_2.

La cantidad de conejos es claramente divergente lo que se explica debido al proceso de reproducción acelerado de los mismos. La raíz dominante es positiva y mayor que 1 ($r_1 \simeq 1.68$), mientras que la otra es menor que cero pero mayor que -1 ($r_2 \simeq -0.68$). La interacción de ambas hace que el crecimiento sea, en períodos impares, ligeramente interrumpido en el corto plazo. Ello se debe a la necesidad de cada pareja de conejos de esperar un mes para crear otra pareja más.

c) Expresemos la solución compactamente como $x(t) = C_1 r_1^t + C_2 r_2^t$, donde $r_1 > 1$ y $|\, r_2 \,| < 1$. El límite de la tasa de crecimiento de x es

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \left(\frac{x(t+1)}{x(t)} - 1 \right) &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{C_1 r_1^{t+1} + C_2 r_2^{t+1}}{C_1 r_1^t + C_2 r_2^t} \right) - 1 = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{C_1 r_1 r_1^t + C_2 r_2 r_2^t}{C_1 r_1^t + C_2 r_2^t} \right) - 1 \\ &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{C_1 r_1 + C_2 r_2 (r_2/r_1)^t}{C_1 + C_2 (r_2/r_1)^t} \right) - 1 = \frac{C_1 r_1}{C_1} - 1 = r_1 - 1 \simeq 0.68 .\end{aligned}$$

■

7. Considere el siguiente modelo macroeconómico dinámico

$$Y_t = C_t + I_t + G\,, \qquad C_t = C_0 + \gamma Y_{t-1}\,, \qquad I_t = I_0(g)^t + \alpha(Y_{t-1} - Y_{t-2})\,,$$

donde Y_t es el ingreso, C_t el consumo, I_t la inversión y G es el gasto de gobierno que se asume constante. Los parámetros satisfacen $C_0 > 0$, $\gamma \in (0, 1)$, $I_0 > 0$, $g \geq 1$ y $\alpha > 0$.

a) Reduzca este modelo a una ecuación en diferencias de segundo orden para Y_t. Encuentra la solución particular y las raíces de esta ecuación.

b) Suponga que $g = 1$. Indique qué condiciones deben cumplir los parámetros α y γ para que esta economía presente fluctuaciones. Indique, además, qué condiciones son necesarias para que esas fluctuaciones sean amortiguadas.

c) Suponga que $(\gamma + \alpha)^2 = 4\alpha$ y $g = 1$. Encuentre la trayectoria $Y(t)$ en este caso e indique las condiciones para su convergencia.

d) Suponga que $(\gamma + \alpha)^2 = 4\alpha$, $\alpha > 1$ y $g = 1$ ¿Cuál es la tasa de crecimiento de Y en el largo plazo? *Ayuda*: La tasa de crecimiento se define como $\Delta Y_t / Y_{t-1}$.

Solución:

a) Al reemplazar la segunda y tercera ecuación en la primera,

$$Y_t = C_0 + \gamma Y_{t-1} + I_0(g)^t + \alpha(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + G \quad \rightarrow \quad Y_t - (\gamma + \alpha) Y_{t-1} + \alpha Y_{t-2} = I_0(g^t) + C_0 + G\,.$$

El polinomio característico de esta ecuación en diferencias es $P(r) = r^2 - (\gamma + \alpha) r + \alpha$, y sus raíces son

$$r_{1,2} = \frac{(\gamma + \alpha) \pm \sqrt{(\gamma + \alpha)^2 - 4\alpha}}{2} .$$

Por su parte, para determinar la solución particular, conjeturamos que $Y_p(t) = A_1(g)^t + A_0$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}A_1(g)^t + A_0 - \left(\frac{\gamma + \alpha}{g} \right) A_1(g)^t - (\gamma + \alpha) A_0 + \left(\frac{\alpha}{g^2} \right) A_1(g)^t + \alpha A_0 = I_0(g^t) + C_0 + G \\ \rightarrow \quad \left(\frac{g^2 - (\gamma + \alpha) g + \alpha}{g^2} \right) A_1(g)^t + (1 - \gamma) A_0 = I_0(g^t) + C_0 + G\,.\end{aligned}$$

Así, al determinar los coeficientes desconocidos, se obtiene

$$Y_p(t) = \left(\frac{g^2}{g^2 - (\gamma + \alpha) g + \alpha} \right) I_0(g)^t + \frac{C_0 + G}{1 - \gamma} .$$

b) Cuando $g = 1$, la solución particular se reduce a la constante $Y_p = (C_0+I_0+G)/(1-\gamma)$ y, por tanto, la dinámica del sistema la determina la solución complementaria.

Para observar un comportamiento fluctuante, las raíces características de la ecuación en diferencias deben ser un par de números complejos conjugados. Ello ocurrirá toda vez que $(\gamma+\alpha)^2 < 4\alpha$. Bajo este supuesto, las raíces son

$$r_{1,2} = \frac{(\gamma+\alpha)}{2} \pm \frac{\sqrt{4\alpha-(\gamma+\alpha)^2}}{2} i\,.$$

La estabilidad de $Y(t)$ se relaciona con el *tamaño* de estas raíces. El cuadrado del módulo de r_1 y r_2 es

$$\rho^2 = \left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4\alpha-(\gamma+\alpha)^2}{4} = \frac{(\gamma+\alpha)^2+4\alpha-(\gamma+\alpha)^2}{4} = \alpha\,.$$

Luego, $\alpha < 1$ es una condición necesaria para la convergencia de $Y(t)$.

c) Cuando $(\gamma+\alpha)^2 = 4\alpha$, las raíces de la ecuación en diferencias resultan ser iguales a $r = \frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$. Con ello, la trayectoria de Y es igual a

$$Y(t) = (C_1+C_2t)\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^t + \frac{C_0+I_0+G}{1-\gamma}\,,$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes cualesquiera. Esta trayectoria será estable toda vez que $|\,\gamma+\alpha\,| < 2$. Al tomar cuadrados, $(\gamma+\alpha)^2 < 4$ implica que $4\alpha < 4$ y, por consiguiente, que $\alpha < 1$.

d) En este caso, la raíz repetida será $r > 1$, asociada con una trayectoria divergente.

Respecto a la tasa de crecimiento, note que

$$\frac{Y(t)}{Y(t-1)} = \frac{(C_1+C_2t)(r)^t+Y_p}{(C_1-C_2+C_2t)(r)^t/r+Y_p} = \frac{r(C_1+C_2t)+rY_p(r)^{-t}}{(C_1-C_2+C_2t)+rY_p(r)^{-t}}\,.$$

Conforme $t\to\infty$, $(r)^{-t}\to 0$, dado que $r^{-1} < 1$. Así, los términos $rY_p(r)^{-t}$ son irrelevantes en el límite. Así,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{Y(t-1)} = \lim_{t\to\infty} r\left(\frac{C_1+C_2t}{C_1-C_2+C_2t}\right) = r\,.$$

La tasa de crecimiento de la economía es $Y_t/Y_{t-1}-1$ y converge a $r-1>0$.

■

Sistemas de ecuaciones en diferencias

8. Resuelva los siguientes sistemas en diferencias, utilizando condiciones iniciales arbitrarias.

a) $y_t = 3x_{t-1} - y_{t-1}$ y $x_t = 4x_{t-1} - 2y_{t-1} + 3^{t-1}$.

b) $y_{t+1} = 2x_t - y_t$ y $x_{t+1} = 5x_t - 4y_t + 2^t$.

c) $x_t = x_{t-1}$ e $y_t = y_{t-1} + ax_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

d) $x_t = x_{t-1} + 2ay_{t-1}$ e $y_t = -y_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

e) $x_t = x_{t-1} + a^2y_{t-1}$ e $y_t = y_{t-1} + 9x_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

f) $x_t = x_{t-1} + 4y_{t-1}$ e $y_t = a^2x_{t-1} + y_{t-1}$, donde $a \neq 0$ es una constante.

g) $x_t = -5x_{t-1} - 4y_{t-1}$ e $y_t = 2x_{t-1} + y_{t-1}$.

h) $x_t = -5x_{t-1} - 2y_{t-1}$ e $y_t = 4x_{t-1} + y_{t-1}$.

Solución:

a) De la primera ecuación,

$$3x_{t-1} = y_t + y_{t-1} \qquad \text{y} \qquad 3x_t = y_{t+1} + y_t\,.$$

Al multiplicar la segunda ecuación por 3 y sustitur estas expresiones,

$$3x_t - 4(3x_{t-1}) + 6y_{t-1} = 3^t \quad\to\quad y_{t+1} + y_t - 4(y_t + y_{t-1}) + 6y_{t-1} = 3^t \quad\to\quad y_{t+1} - 3y_t + 2y_{t-1} = 3^t\,.$$

El polinomio característico de esta ecuación de segundo orden es $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r-2)(r-1)$ y sus raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. Así, la solución complementaria de y toma la forma

$$y_c(t) = C_1 + C_2(2)^t .$$

Para obtener la solución particular, se conjetura $y_p(t) = A(3)^t$ de modo que $y_p(t-1) = \frac{1}{3}A(3)^t$ e $y_p(t+1) = 3A(3)^t$. Al evaluar la ecuación en diferencias en esta conjetura,

$$3A(3)^t - 3A(3)^t + \frac{2}{3}A(3)^t = (3)^t \quad \rightarrow \quad A = \frac{3}{2} .$$

Obtenemos, así, la solución general

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 + C_2(2)^t + \frac{3}{2}(3)^t .$$

Luego,

$$x(t) = \frac{1}{3}\left[y(t+1) + y(t)\right] = \frac{1}{3}\left(C_1 + 2C_2(2)^t + \frac{9}{2}(3)^t + C_1 + C_2(2)^t + \frac{3}{2}(3)^t\right) = \frac{2}{3}C_1 + C_2(2)^t + 2(3)^t .$$

Utilizando las condiciones iniciales, $y_0 - 3/2 = C_1 + C_2$ y $3(x_0 - 2) = 2C_1 + 3C_2$, se consigue

$$C_1 = 3\left(y_0 - x_0 + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad C_2 = 3x_0 - 2y_0 - 3 .$$

Se concluye que

$$y(t) = 3\left(y_0 - x_0 + \frac{1}{2}\right) + (3x_0 - 2y_0 - 3)(2)^t + \frac{3}{2}(3)^t \quad \text{y} \quad x(t) = 2\left(y_0 - x_0 + \frac{1}{2}\right) + (3x_0 - 2y_0 - 3)(2)^t + 2(3)^t .$$

b) La segunda ecuación permite obtener

$$x_{t+2} = 5x_{t+1} - 4y_{t+1} + 2^{t+1} .$$

Al sustituir la primera,

$$x_{t+2} = 5x_{t+1} - 4(2x_t - y_t) + 2^{t+1} = 5x_{t+1} - 8x_t + 4y_t + 2^{t+1} .$$

La segunda ecuación también indica que

$$4y_t = 5x_t - x_{t+1} + 2^t ,$$

por lo que, al sustituir nuevamente, se obtiene

$$x_{t+2} = 5x_{t+1} - 8x_t + (5x_t - x_{t+1} + 2^t) + 2^{t+1} = 4x_{t+1} - 3x_t + 2^t + 2^{t+1} \quad \rightarrow \quad x_{t+2} - 4x_{t+1} + 3x_t = 3(2^t) .$$

El prolinomio característico de esta ecuación de segundo orden es $P(r) = r^2 - 4r + 3 = (r-3)(r-1)$ por lo que las raíces son $r_1 = 3$ y $r_2 = 1$. Luego, la solución complementaria de $x(t)$ es

$$x_c(t) = C_1(3)^t + C_2(1)^t = C_1(3)^t + C_2 .$$

Para la solución particular, conjeturamos $x_p(t) = A(2)^t$, de modo que $x_p(t+1) = 2A(2)^t$ y $x_p(t+2) = 4A(2)^t$. Al remplazar en la ecuación en diferencias,

$$4A(2)^t - 8A(2)^t + 3A(2)^t = 3(2)^t \quad \rightarrow \quad A = -3 .$$

Con ello,

$$x(t) = C_1(3)^t + C_2 - 3(2)^t .$$

Este resultado se utiliza para hallar $y(t)$:

$$4y(t) = 5x(t) - x(t+1) + (2)^t = 2C_1(3)^t + 4C_2 - 8(2)^t \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{C_1}{2}(3^t) + C_2 - 2(2^t) .$$

Para expresar las soluciones en términos de x_0 e y_0, note que

$$x_0 = C_1 + C_2 - 3 \quad \text{and} \quad y_0 = \frac{C_1}{2} + C_2 - 2 .$$

Tras resolver,

$$x(t) = 2(x_0 - y_0 + 1)(3)^t + 2y_0 - x_0 + 1 - 3(2)^t \qquad \text{e} \qquad y_t = (x_0 - y_0 + 1)(3)^t + 2y_0 - x_0 + 1 - 2(2)^t .$$

c) La primera ecuación, $x_t = x_{t-1}$, es suficiente para determinar la trayectoria de x. Ésta es simplemente $x(t) = x_0$. Con ello, la segunda ecuación pasa a ser $y_t - y_{t-1} = ax_0$, que tiene como solución complementaria $y_c(t) = C$. Como solución particular se conjetura $y_p(t) = At$ de modo que $y_p(t) - y_p(t-1) = A$, dando así como resultado $y_p(t) = (ax_0)t$. Con ello, se obtiene finalmente que

$$x(t) = x_0 \qquad \text{e} \qquad y(t) = y_0 + (ax_0)t\,.$$

d) La segunda ecuación, $y_t + y_{t-1} = 0$, es suficiente para determinar la trayectoria de y: $y(t) = y_0(-1)^t$. Con ello, la primera ecuación pasa a ser $x_t - x_{t-1} = 2ay_0(-1)^t$, que tiene como solución complementaria $x_c(t) = C$. Como solución particular se conjetura $x_p(t) = A(-1)^t$ de modo que $x_p(t) - x_p(t-1) = 2A(-1)^t$, dando así como resultado $x_p(t) = ay_0(-1)^t$. Con ello, se obtiene finalmente que

$$x(t) = x_0 + ay_0\left[1-(-1)^t\right] \qquad \text{e} \qquad y(t) = y_0(-1)^t\,.$$

e) Resolveremos las siguientes preguntas matricialmente.

El sistema puede ser escrito como $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{t-1}$. Dado que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}^{-1}$, entonces el sistema se "diagonaliza" a $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Z}_{t-1}$, donde $\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X}_t$, que es un sistema muy fácil de resolver. Luego, se obtienen las trayectorias de interés con la identidad $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{Z}(t)$. La matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ contiene los valores propios de $\boldsymbol{A}$, y la matriz $\boldsymbol{H}$, sus vectores propios.

En este caso, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ se determinan como

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\,| = \left|\begin{bmatrix}1 & a^2\\ 9 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix}1-\lambda & a^2\\ 9 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda^2) - 9a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 3a\,.$$

Los vectores propios satisfacen $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Para $\lambda_1 = 1 + 3a$,

$$\begin{bmatrix}-3a & a^2\\ 9 & -3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ 3\end{bmatrix}.$$

Por su parte, para $\lambda_2 = 1 - 3a$,

$$\begin{bmatrix}3a & a^2\\ 9 & 3a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix}v_1\\ v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\ -3\end{bmatrix}$$

De este modo,

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}a & a\\ 3 & -3\end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}1+3a & 0\\ 0 & 1-3a\end{bmatrix}.$$

Los elementos del vector $\boldsymbol{Z}(t)$ son, luego, $z_1(t) = C_1(1+3a)^t$ y $z_2(t) = C_2(1-3a)^t$, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. De esta forma,

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & a\\ 3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1(1+3a)^t\\ C_2(1-3a)^t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}aC_1(1+3a)^t + aC_2(1-3a)^t\\ 3C_1(1+3a)^t - 3C_2(1-3a)^t\end{bmatrix}.$$

A partir de las condiciones iniciales se obtiene

$$x_0 = aC_1 + aC_2 \qquad \text{e} \qquad y_0 = 3C_1 - 3C_2$$

de donde se consigue

$$C_1 = \frac{3x_0 + ay_0}{6a} \qquad \text{y} \qquad C_2 = \frac{3x_0 - ay_0}{6a}\,.$$

Luego,

$$x(t) = \frac{3x_0 + ay_0}{6}(1+3a)^t + \frac{3x_0 - ay_0}{6}(1-3a)^t \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{3x_0 + ay_0}{2a}(1+3a)^t + \frac{3x_0 - ay_0}{2a}(1-3a)^t\,.$$

f) En esta ocasión, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ se determinan como

$$|\,\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}\,| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ a^2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda^2) - 4a^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm 2a\,.$$

Los vectores propios satisfacen la definición $(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. Para $\lambda_1=1+2a$,

$$\begin{bmatrix} -2a & 4 \\ a^2 & -2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ a \end{bmatrix},$$

mientras que para $\lambda_2=1-2a$,

$$\begin{bmatrix} 2a & 4 \\ a^2 & 2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -a \end{bmatrix}$$

Así,

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ a & -a \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} 1+2a & 0 \\ 0 & 1-2a \end{bmatrix}.$$

Los elementos del vector $\boldsymbol{Z}(t)$ son, considerando dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, $z_1(t)=C_1(1+2a)^t$ y $z_2(t)=C_2(1-2a)^t$. Luego,

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ a & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(1+2a)^t \\ C_2(1-2a)^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2C_1(1+2a)^t+2C_2(1-2a)^t \\ aC_1(1+2a)^t-aC_2(1-2a)^t \end{bmatrix}.$$

De las condiciones iniciales, $x_0=2(C_1+C_2)$ e $y_0=a(C_1-C_2)$, se obtiene

$$C_1=\frac{ax_0+2y_0}{4a} \quad \text{y} \quad C_2=\frac{ax_0-2y_0}{4a}.$$

Finalmente,

$$x(t)=\frac{ax_0+2y_0}{2a}(1+2a)^t+\frac{ax_0-2y_0}{2a}(1-2a)^t \quad \text{e} \quad y(t)=\frac{ax_0+2y_0}{4}(1+2a)^t+\frac{ax_0-2y_0}{4}(1-2a)^t.$$

g) Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ se determinan como

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2|=\begin{vmatrix} -5-\lambda & -4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad\to\quad (5+\lambda)(\lambda-1)+8=0 \quad\to\quad \lambda_1=-3 \text{ y } \lambda_2=-1.$$

Respecto a los vectores propios,

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \quad\to\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con ello,

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se concluye que, para dos constantes arbitrarias C_1 y C_2, los elementos del vector $\boldsymbol{Z}(t)$ son $z_1(t)=C_1(-3)^t$ y $z_2(t)=C_2(-1)^t$. Luego,

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1(-3)^t \\ C_2(-1)^t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2C_1(-3)^t-C_2(-1)^t \\ C_1(-3)^t+C_2(-1)^t \end{bmatrix}.$$

Nótese que la solución puede escribirse como $\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es un vector de constantes arbitrarias. Dado que $\boldsymbol{\Lambda}^0=\boldsymbol{I}_2$, las constantes pueden determinarse a través de $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X}(0)$. Explícitamente,

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(x_0+y_0) \\ x_0+2y_0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$x(t)=2(x_0+y_0)(-3)^t-(x_0+2y_0)(-1)^t \quad \text{e} \quad y(t)=-(x_0+y_0)(-3)^t+(x_0+2y_0)(-1)^t.$$

h) Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ se determinan como

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}_2| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (5+\lambda)(\lambda-1)+8=0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1=-3 \text{ y } \lambda_2=-1\,.$$

Respecto a los vectores propios,

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Con ello,

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 recogidas en el vector $\boldsymbol{C}$, los elementos del vector $\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{C}$ son $z_1(t) = C_1(-3)^t$ y $z_2(t) = C_2(-1)^t$. Luego, $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{C}$. Las constantes pueden determinarse a través de $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X}(0)$. Así,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Lambda}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-3)^t & 0 \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-3)^t & (-1)^t \\ -(-3)^t & -2(-1)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)^t & (-1)^t \\ -(-3)^t & -2(-1)^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x_0+y_0 \\ -(x_0+y_0) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente,

$$x(t) = (2x_0+y_0)(-3)^t - (x_0+y_0)(-1)^t \qquad \text{e} \qquad y(t) = -(2x_0+y_0)(-3)^t + 2(x_0+y_0)(-1)^t\,.$$

■

9. Suponga que N_t representa el número de personas empleadas en el periodo t y U_t es el número de desempleados en el mismo periodo. La fuerza laboral $L = N_t + U_t$ se mantiene constante. La dinámica de estas variables está descrita por el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= qN_t + pU_t \\ U_{t+1} &= (1-q)N_t + (1-p)U_t\,, \end{aligned}$$

donde $p \in (0,1)$ y $q \in (0,1)$.

a) A la luz de la dinámica descrita, ¿Cómo se interpretan las constantes q y p?

b) Resuelva completamente el sistema de ecuaciones en diferencias y evalúe si es convergente.

Solución:

a) q se interpreta como la proporción de personas inicialmente empleadas que mantienen su empleo. Luego qN_t es el número de empleados que mantienen su empleo en el periodo t, mientras que $(1-q)N_t$ es el número de empleados que pierden su empleo en el periodo t. Análogamente, p es la proporción de desempleados que encuentran empleo. Así, pU_t es el número de nuevos empleos en el periodo t, mientras que $(1-p)U_t$ es el número de desempleados que mantienen ese estatus en el periodo t.

b) De la primera ecuación,

$$pU_t = N_{t+1} - qN_t \qquad \text{por lo que} \qquad pU_{t+1} = N_{t+2} - qN_{t+1}\,.$$

Al multiplicar la segunda ecuación por p, reordenar y reemplazar estos hallazgos,

$$\begin{aligned} pU_{t+1} - (1-q)pN_t - (1-p)pU_t = 0 \quad &\rightarrow \quad N_{t+2} - qN_{t+1} - (1-q)pN_t - (1-p)(N_{t+1} - qN_t) = 0 \\ &\rightarrow \qquad N_{t+2} - (1+q-p)N_{t+1} + (q-p)N_t = 0\,. \end{aligned}$$

El polinomio característico de esta ecuación en diferencias es $P(\lambda) = \lambda^2 - (1+q-p)\lambda + (q-p)$ y sus raíces satisfacen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1+q-p \pm \sqrt{(1+q-p)^2 - 4(q-p)}}{2} = \frac{1+q-p \pm \sqrt{(q-p-1)^2}}{2} = \frac{1+q-p \pm (q-p-1)}{2},$$

de donde se concluye que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = q-p$. Con ello,

$$N(t) = C_1 + C_2(q-p)^t\,,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Luego,

$$\begin{aligned} U(t) = \frac{N(t+1) - qN(t)}{p} = \frac{C_1 + C_2(q-p)^{t+1} - qC_1 - qC_2(q-p)^t}{p} &= \frac{(1-q)C_1 + C_2(q-p-q)(q-p)^t}{p} \\ &= \left(\frac{1-q}{p}\right) C_1 - C_2(q-p)^t\,. \end{aligned}$$

De las condiciones iniciales, $N_0 = C_1 + C_2$ y $pU_0 = (1-q)C_1 + pC_2$. Al resolver y simplificar,

$$N(t) = \frac{p(N_0 - U_0)}{p+q-1} + \frac{(1-q)N_0 + pU_0}{p+q-1}(q-p)^t \quad \text{y} \quad U(t) = \frac{(1-p)(N_0-U_0)}{p+q-1} - \frac{(1-q)N_0 + pU_0}{p+q-1}(q-p)^t\,.$$

Dado que $|\,q-p\,| < 1$, ambas trayectorias son convergentes. Note que la dirección de ambas trayectorias es opuesta: mientras una se incrementa, la otra disminuye.

■

10. Sean x, y y z los niveles de armamento de tres países vecinos. La dinámica de estas tres variables está descrita por el sistema:

$$\begin{aligned} \Delta x_{t+1} &= -a_1 x_t + k_{12} y_t + k_{13} z_t + g_1 \\ \Delta y_{t+1} &= k_{21} x_t - a_2 y_t + k_{23} z_t + g_2 \\ \Delta z_{t+1} &= k_{31} x_t + k_{32} y_t - a_3 z_t + g_3\,. \end{aligned}$$

Los parámetros g_i expresan las motivaciones estratégicas para cambiar los niveles de armamento. Los parámetros k_{ij} son coeficientes de *defensa* y reflejan la propensión hacia el rearme del país i en vista de que el país j ha alcanzado cierto *stock* de armas. Finalmente, los parámetros a_i son coeficientes de *fatiga* y reflejan el costo económico por destinar recursos en defensa. Todos estos parámetros son positivos y menores a la unidad.

a) Considerando que los países tienen los mismos coeficientes de defensa ($k_{ij} = k$ para todo i y j) y el mismo coeficiente de fatiga ($a_i = a$ para todo i) indique en qué casos el sistema es estable.

b) Suponga que el país z es *pacifista* en el sentido que sus coeficientes de defensa son iguales a cero, $k_{31} = k_{32} = 0$. En tal caso, ¿Cuáles son las condiciones de estabilidad del sistema? Mantenga los supuestos de *a*) para el resto de coeficientes.

c) Considere ahora que y también es pacifista, $k_{31} = k_{32} = k_{21} = k_{23} = 0$. En tal caso, ¿Cuáles son las condiciones de estabilidad del sistema? Mantenga los supuestos de *a*) para el resto de coeficientes.

d) Compare los resultados de *a*), *b*) y *c*) y diga qué ocurre con la *carrera armamentista* en caso de que más países se vuelvan pacifistas.

Solución:

En esta pregunta, se plantea un sistema en diferencias cuya reprsentación matricial es $\Delta \boldsymbol{X}_{t+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{g}$. En formato más estándar, $\boldsymbol{X}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{g}$, donde $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{B}$. La estabilidad del sistema depende de los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Así, se trata de calcular estos valores propios y verificar bajo qué circunstancias sus módulos son menores que uno.

a) En este caso,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1-a & k & k \\ k & 1-a & k \\ k & k & 1-a \end{bmatrix}.$$

Por brevedad, llame $\omega = 1 - a - \lambda$. El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3| = \begin{vmatrix} \omega & k & k \\ k & \omega & k \\ k & k & \omega \end{vmatrix} &= \omega \begin{vmatrix} \omega & k \\ k & \omega \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} k & k \\ k & \omega \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} k & \omega \\ k & k \end{vmatrix} \\ = \omega(\omega^2 - k^2) - k(k\omega - k^2) + k(k^2 - k\omega) &= \omega(\omega^2 - k^2) - 2k^2(\omega - k) = \left[\omega(\omega + k) - 2k^2\right](\omega - k) \\ &= (\omega^2 + \omega k - 2k^2)(\omega - k) = (\omega + 2k)(\omega - k)^2 .\end{aligned}$$

Este polinomio es igual a cero para $\omega_1 = -2k$, o $\lambda_1 = 2k + 1 - a$, y para $\omega_2 = \omega_3 = k$, o $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 - k - a$. Dado que $0 < a < 1$ y $0 < k < 1$, se tiene que $0 < a + k < 2$ por lo que $-1 < a + k - 1 < 1$ y, finalmente, $-1 < \lambda_2 = \lambda_3 < 1$. Dos de las tres raíces del sistema tienen módulo menor que uno. No obstante, es posible que k sea lo suficientemente grande respecto a a como para que $\lambda_1 > 1$. Se requiere que $2k > a$. En este caso, las trayectorias de x, y y z serán divergentes y se da la carrera armamentista.

b) En este caso,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1-a & k & k \\ k & 1-a & k \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

Por brevedad, llame $\omega = 1 - a - \lambda$. El polinomio característico de $\boldsymbol{A}$ es

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_3| = \begin{vmatrix} \omega & k & k \\ k & \omega & k \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \omega \begin{vmatrix} \omega & k \\ k & \omega \end{vmatrix} = \omega(\omega^2 - k^2) = \omega(\omega + k)(\omega - k) .$$

Este polinomio es igual a cero para $\omega_1 = k$, o $\lambda_1 = k + 1 - a$, para $\omega_2 = -k$, o $\lambda_2 = 1 - k - a$ y para $\omega_3 = 0$ o $\lambda_3 = 1 - a$. En esta ocasión, λ_2 y λ_3 son inequívocamente raíces estables. Puede darse el caso, sin embargo, que $\lambda_1 > 1$. Ello ocurre cuando $k > a$.

c) En este caso,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1-a & k & k \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

De donde se concluye que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 - a$. El sistema es estable.

d) Las condiciones de estabilidad se interpretan como que “la fatiga en las compras de armas debe ser mayor a la reacción que cada país tiene cuando se entera que los demás se arman”. En tal caso, es muy costoso comprar armas. En el caso *a*), son dos países extranjeros y, por ende, $2k$ es la reacción total de defensa, mientras que en caso *b*), si bien son dos países extranjeros, uno es pacifista por lo que k es la reacción total de defensa. Luego, se concluye que cuanto más países pacifistas existan, menor la probabilidad de que el sistema sea inestable (o mayor de que sea estable, note que es más factible que $a > k$ que $a > 2k$). En el extremo, caso *c*), cuando sólo hay un país armamentista, pronto caerá en la cuenta de que no tiene los incentivos para armarse (pero sí costos por hacerlo), lo que asegura la estabilidad del sistema.

■

11. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_t &= c(x_{t-1} + y_{t-1}) , \\ y_t &= c(y_{t-1} + z_{t-1}) , \\ z_t &= c(z_{t-1} + x_{t-1}) , \end{aligned}$$

donde c es una constante.

a) ¿Para qué valores de c el sistema anterior es estable? *Ayuda:* Recuerde que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

b) Suponga que $c = \frac{1}{2}$. Describa con el mayor detalle posible la trayectoria de $x(t)$.

Solución:

a) El sistema puede ser escrito matricialmente como $\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_{t-1}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} c & c & 0 \\ 0 & c & c \\ c & 0 & c \end{bmatrix} .$$

El polinomio característico de esta matriz es

$$P(r) = \begin{vmatrix} c-r & c & 0 \\ 0 & c-r & c \\ c & 0 & c-r \end{vmatrix} = (c-r)\begin{vmatrix} c-r & c \\ 0 & c-r \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} 0 & c \\ c & c-r \end{vmatrix} = (c-r)^3 + c^3$$
$$= (2c-r)\left[(c-r)^2 - c(c-r) + c^2\right] = (2c-r)(r^2 - cr + c^2)\,,$$

y sus raíces son

$$r_1 = 2c \qquad \text{y} \qquad r_{2,3} = \frac{c}{2} \pm \frac{c}{2}\sqrt{3}i\,.$$

El módulo de la raíz real es $2c$ y es menor que uno si $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$. Por su parte, el módulo de las raíces complejas conjugadas es

$$\sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{3c^2}{4}} = c\,,$$

y es menor que uno si $-1 < c < 1$. Luego, el sistema será estable si $-\frac{1}{2} < c < \frac{1}{2}$.

b) Si $c = \frac{1}{2}$ la raíz real es $r_1 = 1$, y las complejas conjugadas son $r_{2,3} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$. Para tres constantes arbitrarias C_1, C_2 y C_3 la trayectoria de $x(t)$ es, luego,

$$x(t) = C_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^t \left[C_2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + C_3\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)\right] .$$

Esta trayectoria es fluctuante y muestra fluctuaciones de amplitud decreciente (fluctuaciones amortiguadas) hasta converger a C_1.

■

Operador de rezago

12. Considere la ecuación en diferencias

$$y_t - (r_1 + r_2)y_{t-1} + r_1 r_2 y_{t-2} = b_t\,,$$

donde r_1 y r_2 son dos escalares reales. Si b_t es una función arbitraria de t, la solución particular tendrá la forma

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} w_h b_{t-h}\,.$$

Encuentre una expresión, lo más simple posible y en términos de r_1 y r_1, para el coeficiente w_h, ...

a) ... cuando $r_1 \neq r_2$, $|\,r_1\,| < 1$ y $|\,r_2\,| < 1$.

b) ... cuando $r_1 = r_2 = \bar{r}$ y $|\,\bar{r}\,| < 1$.

Ayuda 1: Recuerde que si $|\,a\,| < 1$, entonces $\dfrac{1}{1-az} = \displaystyle\sum_{h=0}^{\infty}(az)^h$.

Ayuda 2: Recuerde que $\dfrac{1}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)} = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\left(\dfrac{r_1}{1-r_1 z} - \dfrac{r_2}{1-r_2 z}\right)$.

Solución:

a) El polinomio característico de la ecuación en diferencias es $P(r) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2$, que se factoriza como $P(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Luego, r_1 y r_2 son las raíces de este polinomio característico.

Por su parte, sea $A(L) = 1 - (r_1 + r_2)L + r_1 r_2 L^2 = (1 - r_1 L)(1 - r_2 L)$. La ecuación en diferencias se escribe como $A(L)y_t = b_t$ por lo que la solución particular es (utilizando la *Ayuda 2* con L en lugar de z),

$$y_p(t) = \frac{1}{(1 - r_1 L)(1 - r_2 L)} b_t = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1}{1 - r_1 L} - \frac{r_2}{1 - r_2 L} \right) b_t \,.$$

Asimismo, dado que $|\, r_1 \,| < 1$ y $|\, r_2 \,| < 1$, la *Ayuda 2* nos permite escribir

$$\begin{aligned} y_p(t) = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(r_1 \sum_{h=0}^{\infty} r_1^h L^h - r_2 \sum_{h=0}^{\infty} r_2^h L^h \right) b_t &= \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{h=0}^{\infty} (r_1^{h+1} - r_2^{h+1}) L^h b_t \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{r_1^{h+1} - r_2^{h+1}}{r_1 - r_2} \right) b_{t-h} \qquad \rightarrow \qquad w_h = \frac{r_1^{h+1} - r_2^{h+1}}{r_1 - r_2} \,. \end{aligned}$$

b) En este caso, considere que $r_2 = \bar{r}$ y $r_1 = \bar{r} + \epsilon$, donde $\epsilon \to 0$. Así,

$$w_h = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(\bar{r} + \epsilon)^{h+1} - (\bar{r})^{h+1}}{(\bar{r} + \epsilon) - (\bar{r})} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(\bar{r} + \epsilon)^{h+1} - (\bar{r})^{h+1}}{\epsilon} = \frac{d\, (\bar{r})^{h+1}}{d\, \bar{r}} = (h+1)(\bar{r})^h \,.$$

Así,

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} (h+1)(\bar{r})^h b_{t-h} \,.$$

■

13. Considere la ecuación en diferencias

$$y_t - 2\rho \cos(\theta)\, y_{t-1} + \rho^2 y_{t-2} = b_t \,,$$

donde $0 < \rho < 1$ y $\theta \in (0, \pi)$.

a) Si $b_t = b$ (constante), encuentre la trayectoria de $y(t)$ considerando que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = 0$.

b) Si b_t es una función arbitraria de t, la solución particular tendrá la forma

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} w_h b_{t-h} \,.$$

Encuentre una expresión, lo más simple posible y en términos de ρ y θ, para el coeficiente w_h.

Solución:

a) El polinomio característico de esta ecuación es $P(r) = r^2 - 2\rho \cos(\theta) r + \rho^2$, cuyos raíces son

$$\begin{aligned} r_{1,2} = \frac{2\rho \cos(\theta) \pm \sqrt{4\rho^2 \cos(\theta)^2 - 4\rho^2}}{2} = \rho \cos(\theta) \pm \rho \sqrt{\cos(\theta)^2 - 1} &= \rho \cos(\theta) \pm i \rho \sqrt{\sin(\theta)^2} \\ &= \rho \left[\cos(\theta) + i \sin(\theta) \right] \,, \end{aligned}$$

que son complejas conjugadas y que ya están expresadas en forma polar. Con ello, es simple observar que la solución complementaria es

$$y_c(t) = \rho^t \left[C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t) \right] \,,$$

para dos constantes arbitrarias, C_1 y C_2.

La solución particular es una la constante igual a $y_p(t) = b/P(1)$.

Así, la solución final es $y(t) = y_c(t) + b/P(1)$. Al evaluar las condiciones iniciales,

$$y(0) = C_1 + \frac{b}{P(1)} = 0 \qquad \text{e} \qquad y\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = \rho^{\frac{\pi}{2\theta}} C_2 + \frac{b}{P(1)} = 0 \,.$$

Así, $C_1 = -b/P(1)$ y $C_2 = -b\rho^{-\frac{\pi}{2\theta}}/P(1)$ por lo que la solución final se simplifica a

$$y(t) = \frac{b}{1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2}\left(1 - \rho^t\cos(\theta t) - \rho^{t-\frac{\pi}{2\theta}}\sin(\theta t)\right) .$$

b) Sea $A(L) = 1 - 2\rho\cos(\theta)L + \rho^2L^2 = (1 - r_1L)(1 - r_2L)$, donde r_1 y r_2 son las raíces complejas conjugadas encontradas previamente. La ecuación en diferencias se escribe como $A(L)y_t = b_t$ por lo que la solución particular es, dado que el módulo de r_1 y de r_2 es menor que uno (y utilizando la solución de la pregunta 12.a),

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{r_1^{h+1} - r_2^{h+1}}{r_1 - r_2}b_{t-h} ,$$

de donde se aprecia que $w_h = (r_1^{h+1} - r_2^{h+1})/(r_1 - r_2)$. Note que, para $k > 0$,

$$r_1^k - r_2^k = \rho^k\left(\cos(\theta k) + i\sin(\theta k)\right) - \rho^k\left(\cos(\theta k) - i\sin(\theta k)\right) = 2\rho^k i\sin(\theta k) .$$

Así,

$$w_h = \frac{r_1^{h+1} - r_2^{h+1}}{r_1 - r_2} = \frac{2\rho^{h+1}i\sin(\theta(h+1))}{2\rho i\sin(\theta)} = \rho^h\frac{\sin(\theta h + \theta)}{\sin(\theta)} .$$

■