UNIVERSIDAD DEL PACÍFICO
Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130233)
Segundo Semestre 2017
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, F. Rosales, D. Bohorquez y C. Aparicio

SOLUCIONARIO 4

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales de primer orden

1. Considere un mercado cuyo precio y cantidad de equilibrio son, respectivamente, $\bar{P}$ y $\bar{Q}$. La *elasticidad de demanda* se define como

$$\varepsilon = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \,,$$

donde la derivada alude a la función de demanda $Q = Q(P)$. Encuentre la función de demanda si

$$a) \quad \varepsilon = \text{constante}\,, \qquad b) \quad \varepsilon = \frac{P}{A-P}\,, \qquad c) \quad \varepsilon = \frac{P^2}{P^2+3P+2}\,, \qquad d) \quad \varepsilon = \frac{P}{P^2+5P+6}\,.$$

Asuma que $P > A$.

Solución:

Note que en todos los casos $\varepsilon = f(P)$. Por ello, se consigue una ecuación diferencial separable de la forma

$$f(P) = -\frac{P}{Q} \cdot \frac{dQ}{dP} \qquad \to \qquad \frac{dQ}{Q} = -\frac{f(P)}{P} dP \,.$$

Al integrar ambos lados (recuerde que $Q = |Q| > 0$),

$$\ln Q = -\int \frac{f(P)}{P} dP + c \qquad \to \qquad Q = C \exp\left\{ -\int \frac{f(P)}{P} dP \right\} \,,$$

donde C es una constante de integración arbitraria. Ésta se determina al evaluar la función de demanda Q en el equilibrio $Q(\bar{P}) = \bar{Q}$.

a) Cuando $f(P) = K$, una constante (recuerde que $P = |P| > 0$),

$$Q = C \exp\left\{ -K \int \frac{1}{P} dP \right\} = C \exp\left\{ -K \ln(P) \right\} = C \exp\left\{ \ln(P^{-K}) \right\} = CP^{-K} \,.$$

En equilibrio, $\bar{Q} = C\bar{P}^{-K}$ por lo que $C = \bar{Q}\bar{P}^{K}$. Así,

$$Q(P) = \bar{Q} \left(\frac{\bar{P}}{P} \right)^{\varepsilon} \,,$$

donde se ha utilizado el hecho que $K = \varepsilon$.

b) En este caso, $f(P)/P = (A-P)^{-1}$. Luego, asumiendo que $P > A$,

$$Q = C \exp\left\{ \int \frac{1}{P-A} dP \right\} = C \exp\left\{ \ln(P-A) \right\} = C(P-A) \,.$$

En equilibrio, $\bar{Q} = C(\bar{P} - A)$ por lo que $C = \bar{Q}/(\bar{P} - A)$. Así,

$$Q(P) = \left(\frac{\bar{Q}}{\bar{P} - A} \right) (P - A) \,.$$

Note que la función de demanda tendrá pendiente negativa (lo que es razonable de esperar) toda vez que $\bar{P} < A$.

c) En este caso, $f(P)/P = P(P^2 + 3P + 2)^{-1}$. Utilizando fracciones parciales,

$$\frac{P}{P^2 + 3P + 2} = \frac{P}{(P+2)(P+1)} = \frac{2}{P+2} - \frac{1}{P+1}\,.$$

Así, dado que $P > 0$,

$$Q = C\exp\left\{\int \frac{1}{P+1}dP - \int \frac{2}{P+2}dP\right\} = C\exp\left\{\ln(P+1) - 2\ln(P+2)\right\} = C\frac{P+1}{(P+2)^2}\,.$$

La constante C satisface $C = \bar{Q}(\bar{P}+2)^2/(\bar{P}+1)$.

d) En este caso, $f(P)/P = (P^2 + 5P + 6)^{-1}$. Utilizando fracciones parciales,

$$\frac{1}{P^2 + 5P + 6} = \frac{1}{(P+2)(P+3)} = \frac{1}{P+2} - \frac{1}{P+3}\,.$$

Así, dado que $P > 0$,

$$Q = C\exp\left\{\int \frac{1}{P+3}dP - \int \frac{1}{P+2}dP\right\} = C\exp\left\{\ln(P+3) - \ln(P+2)\right\} = C\left(\frac{P+3}{P+2}\right)\,.$$

Al determinar la constante C utilizando la situación de equilibrio,

$$Q(P) = \bar{Q}\left(\frac{\bar{P}+2}{\bar{P}+3}\right)\frac{P+3}{P+2}\,.$$

■

2. Encuentre las funciones $y = y(x)$, con condición inicial $y(0) = y_0 > 0$, que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y\sqrt{1+x^2}}\,,$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(y+1)}{x+2}\,,$ *c*) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x\,.$

Solución:

a) Tras simples manipulaciones

$$\int y dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx\,.$$

La integral al lado derecho puede evaluarse mediante sustitución de variables. En particular, defina $u = x^2$ de modo que $du = 2xdx$. Luego,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\int (1+u)^{-1/2}du = (1+u)^{1/2}\,.$$

De esta manera,

$$\frac{y^2}{2} = (1+x^2)^{1/2} + c \quad \to \quad y^2 = 2(1+x^2)^{1/2} + C\,,$$

donde $C = 2c$ es una constante de integración. De $y(0) = y_0$, se consigue $C = y_0^2 - 2$, por lo que la solución final es

$$y(x) = \sqrt{2\sqrt{1+x^2} + (y_0^2 - 2)}\,.$$

Note que elegimos la raíz positiva dado que $y(0) > 0$.

b) La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\int \frac{1}{y(y+1)}dy = \int \frac{1}{x+2}dx$$

Para evaluar la integral del lado izquierdo, considere la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\,,$$

de modo que

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \int \frac{1}{x+2} dx \quad \rightarrow \quad \ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x+2| + c\,,$$

donde c es una constante de integración. Ello conlleva a que

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|x+2| + c \quad \rightarrow \quad \frac{y}{y+1} = e^{\ln|x+2|+c} = C(x+2)\,,$$

donde $C = e^c$ es una constante arbitraria. Dado que $y(0) = y_0$, se encuentra que $2C = y_0/(1+y_0)$. Luego, la función $y(x)$ requerida es

$$\frac{y}{y+1} = \left(\frac{y_0}{y_0+1}\right)\frac{x+2}{2} \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{2y_0 + x}{2 - y_0 x}\,.$$

c) La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = x(1-y) \qquad \rightarrow \qquad \frac{dy}{1-y} = xdx\,.$$

Al integrar ambos lados,

$$-\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + c \qquad \rightarrow \qquad \ln|1-y| = -\frac{x^2}{2} - c\,.$$

Al tomar exponenciales,

$$|1-y| = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \rightarrow \qquad y(x) = 1 - Ce^{-\frac{1}{2}x^2}\,,$$

donde $C = e^{-c}$ es una constante de integración.

La condición inicial $y(0) = y_0$ implica que $C = 1 - y_0$, por lo que la solución final es

$$y(x) = 1 - (1-y_0)e^{-\frac{1}{2}x^2}\,.$$

■

3. Encuentre las funciones $y = y(x)$, donde $x > 0$, que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 1\,,$ *b*) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x(x+1)} = \dfrac{x+1}{x^3}\,,$ *c*) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x+1} = x - 2$ *d*) $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}\,.$

Considere como condición inicial $y(1) = y_1$.

Solución:

Estas ecuaciones corresponden a la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)\,.$$

Para resolverlas, la ecuación es multiplicada por el *factor de integración* $\mu(x)$ y se reduce a la ecuación más simple

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y(x)] = \mu(x)Q(x)\,,$$

que puede ser resuelta mediante integración directa. El factor de integración es $\mu(x) = \exp\left\{\int P(x)dx\right\}$.

a) Al comparar la ecuación diferencial con la forma general, se concluye que $P(x) = x^{-1}$. Luego,

$$\mu(x) = \exp\left\{\int P(x)dx\right\} = \exp\left\{\int x^{-1}dx\right\} = \exp\{\ln x\} = x\,.$$

Así, al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por x, se consigue

$$\frac{dy}{dx}x + y = x \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}[xy] = x\,.$$

Al integrar ambos lados con respecto a x,

$$xy = \frac{x^2}{2} + C \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}\,,$$

donde C es una constante de integración. Para determinarla, utilizamos el hecho que $y(1) = y_1$ y obtenemos $C = y_1 - 1/2$. Luego, la solución es

$$y(x) = \frac{x^2 + (2y_1 - 1)}{2x}\,.$$

b) La ecuación diferencial toma la forma general para $P(x) = x^{-1}(x+1)^{-1}$. Utilizando fracciones parciales,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

de modo que (recuerde que $x > 0$)

$$\int P(x)dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

Ello significa que el factor de integración es

$$e^{\int P(x)dx} = \frac{x}{x+1}.$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por este factor,

$$\frac{x}{x+1}\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{x+1}y\right] = \frac{1}{x^2}.$$

Al integrar ambos lados con respecto a x,

$$\frac{x}{x+1}y = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C \qquad \rightarrow \qquad y(x) = \frac{x+1}{x}\left(C - \frac{1}{x}\right),$$

donde C es una constante de integración. Dado que $y(1) = y_1$, se encuentra que $C = y_1/2 + 1$. Así,

$$y(x) = \frac{x+1}{x}\left(\frac{y_1}{2} + 1 - \frac{1}{x}\right).$$

c) La ecuación diferencial toma la forma general para $P(x) = (x+1)^{-1}$. Dado que $\int P(x)dx = \ln(x+1)$, el factor de integración es igual a $x+1$. Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por este factor,

$$(x+1)\frac{dy}{dx} + y = (x-2)(x+1) \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}[(x+1)y] = x^2 - x - 2.$$

Al integrar ambos lados con respecto a x,

$$(x+1)y = \int (x^2 - x - 2)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \qquad \rightarrow \qquad y(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 12x + C}{6(x+1)}.$$

donde $C = 6c$ es una constante de integración arbitraria. La condición inicial es satisfecha para $C = 12y_1 + 13$.

d) En este caso, $P(x) = 1$ por lo que el factor de integración es simplemente e^x. Al multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por este factor,

$$\frac{d}{dx}[e^x y] = 1.$$

Al integrar ambos lados con respecto a x,

$$e^x y = \int dx = x + C \quad \rightarrow \quad y(x) = (C+x)e^{-x},$$

donde C es una constante de integración arbitraria. Se sabe que $y_1 = (C+1)e^{-1}$ de donde se concluye que $C = y_1 e - 1$. Así,

$$y(x) = y_1 e^{1-x} + (x-1)e^{-x}.$$

■

4. Encuentre las trayectorias $y = y(t)$ que resuelven las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dot{y} - ay = b$, *b*) $\dot{y} - ay = bt^3$, *c*) $\dot{y} - ay = \cos(bt)$, *d*) $\dot{y} - ay = e^{bt}$, *e*) $\dot{y} - ay = be^{at}$,

donde $a < 0$, $b \neq a$ es una constante y la condición inicial es $y(0) = y_0$. Analice la estabilidad de estas trayectorias.

Solución:

Las soluciones tienen la forma $y(t) = y_c(t) + y_p(t)$, donde $y_c(t)$ es la solución complementaria e $y_p(t)$ es la solución particular. La solución complementaria resuelve la ecuación homogénea $\dot{y}_c(t) - ay_c(t) = 0$ y en todos los casos es igual a $y_c(t) = Ce^{at}$, donde C es una constante arbitraria. Esta constante se determina al evaluar la solución final en la condición inicial, $y(0) = y_0$. La solución complementaria es estable, $y_c(t) \to 0$ conforme $t \to \infty$, dado que $a < 0$. La solución particular, y su estabilidad, depende del término de la ecuación. El método de resolución es el de coeficientes indeterminados.

a) Dado que el término es una constante, se conjetura que $y_p(t) = A$, lo que implica que $\dot{y}_p(t) = 0$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación diferencial se consigue

$$0 - aA = b \qquad \to \qquad A = -\frac{b}{a} \qquad \to \qquad y_p(t) = -\frac{b}{a}\,.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{at} - \frac{b}{a}\,.$$

La solución es estable, dado que $a < 0$.

b) Dado que el término es un polinomio de tercer grado, se conjetura que $y_p(t) = A_3t^3 + A_2t^2 + A_1t + A_0$, lo que implica que $\dot{y}_p(t) = 3A_3t^2 + 2A_2t + A_1$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación diferencial se consigue

$$(3A_3t^2+2A_2t+A_1)-a(A_3t^3+A_2t^2+A_1t+A_0) = bt^3 \quad \to \quad -aA_3t^3+(3A_3-aA_2)t^2+(2A_2-aA_1)t+(A_1-aA_0) = bt^3$$

$$\begin{aligned}
&\to \quad -aA_3 = b \qquad \to \qquad A_3 = -\frac{b}{a}\\
&\to \quad 3A_3 - aA_2 = 0 \qquad \to \qquad A_2 = \frac{3A_3}{a} = -\frac{3b}{a^2}\\
&\to \quad 2A_2 - aA_1 = 0 \qquad \to \qquad A_1 = \frac{2A_2}{a} = -\frac{6b}{a^3}\\
&\to \quad A_1 - aA_0 = 0 \qquad \to \qquad A_0 = \frac{A_1}{a} = -\frac{6b}{a^4}\\
&\qquad\qquad \to \quad y_p(t) = -\frac{b}{a}\left(t^3 + \frac{3}{a}t^2 + \frac{6}{a^2}t + \frac{6}{a^3}\right).
\end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación diferencial, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 + \frac{6b}{a^4}\right) e^{at} - \frac{b}{a}\left(t^3 + \frac{3}{a}t^2 + \frac{6}{a^2}t + \frac{6}{a^3}\right).$$

Esta trayectoria es inestable por la presencia de potencias de t divergentes.

c) Dado que el término es una función coseno, se conjetura que $y_p(t) = A_1\cos(bt) + A_2\sin(bt)$, lo que implica que $\dot{y}_p(t) = -A_1b\sin(bt) + A_2b\cos(bt)$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación diferencial se consigue

$$\begin{aligned}
&[A_2b\cos(bt) - A_1b\sin(bt)] - a\,[A_1\cos(bt) + A_2\sin(bt)] = \cos(bt)\\
&\to \quad (A_2b - aA_1)\cos(bt) - (aA_2 + A_1b)\sin(bt) = \cos(bt) \qquad \to \qquad A_2b - aA_1 = 1 \text{ y } aA_2 + A_1b = 0\\
&\to \quad A_1 = -\frac{a}{a^2+b^2} \text{ y } A_2 = \frac{b}{a^2+b^2} \qquad \to \qquad y_p(t) = \frac{1}{a^2+b^2}\,[b\sin(bt) - a\cos(bt)]\,.
\end{aligned}$$

Así, la solución de la ecuación diferencial, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 + \frac{a}{a^2+b^2}\right) e^{at} + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)\sin(bt) - \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)\cos(bt)\,.$$

La solución no es estable dado que $\cos(bt)$ y $\sin(bt)$ no son funciones convergentes.

d) Dado que el término es una función exponencial, se conjetura que $y_p(t) = Ae^{bt}$, lo que implica que $\dot{y}_p(t) = Abe^{bt}$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación diferencial se consigue

$$Abe^{bt} - aAe^{bt} = e^{bt} \qquad \to \qquad A(b-a)e^{bt} = e^{bt} \qquad \to \qquad A = \frac{1}{b-a} \qquad \to \qquad y_p(t) = \left(\frac{1}{b-a}\right) e^{bt} \,.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = \left(y_0 - \frac{1}{b-a}\right) e^{at} + \left(\frac{1}{b-a}\right) e^{bt} \,.$$

Dado que $a < 0$, la solución será estable siempre que $b \leq 0$.

e) El término es una función exponencial que es linealmente dependiente con la solución complementaria. Por ello, se conjetura que $y_p(t) = Ate^{at}$, lo que implica que $\dot{y}_p(t) = Ae^{at} + Aate^{at}$. Al reemplazar esta conjetura en la ecuación diferencial se consigue

$$(Ae^{at} + Aate^{at}) - aAte^{at} = be^{at} \qquad \to \qquad Ae^{at} = be^{at} \qquad \to \qquad A = b \qquad \to \qquad y_p(t) = bte^{at} \,.$$

Así, la solución de la ecuación diferencial, que satisface $y(0) = y_0$, es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = y_0 e^{at} + bte^{at} = (y_0 + bt)\, e^{at} \,.$$

Dado que $a < 0$, la solución será siempre estable.

■

5. Considere la ecuación diferencial, conocida como *Ecuación de Bernoulli*,

$$\dot{z} - a(t)z = b(t)z^n \,,$$

donde n es un número real.

a) La ecuación de Bernoulli no es lineal. Defina $y = z^{1-n}$ y muestre que se puede conseguir una ecuación diferencial lineal para y.

b) Para el caso $a(t) = a$ y $b(t) = b$ (constantes), encuentre la trayectoria de z, considerando una condición inicial de $z(0) = z_0$. Para ello, primero debe encontrar la trayectoria de y.

c) Resuelva y analice, con los resultados previamente encontrados, el *modelo de crecimiento logístico*

$$\frac{\dot{p}}{p} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right) \,,$$

que indica que la tasa de crecimiento de una población p es cercana a una tasa exponencial $r > 0$ cuando ésta es pequeña, pero se aproxima a cero conforme la población se acerca a una máxima capacidad $K > 0$.

d) Resuelva y analice, con los resultados previamente encontrados, el *modelo de crecimiento de Solow*

$$\dot{k} = sk^{\alpha} - mk \,,$$

que describe la evolución del *stock* de capital per cápita de una economía cuya tasa de inversión es $s \in (0,1)$, se destina una fracción $\alpha \in (0,1)$ para rentar capital y la población crece a una tasa $m \in (0,1)$.

Solución:

a) Dado que $y = z^{1-n}$, se tiene que $\dot{y} = (1-n)z^{-n}\dot{z}$. Al multiplicar la ecuación de Bernoulli por $(1-n)z^{-n}$ se encuentra que

$$(1-n)z^{-n}\dot{z} - (1-n)a(t)z^{1-n} = (1-n)b(t) \qquad \to \qquad \dot{y} - (1-n)a(t)y = (1-n)b(t) \,,$$

que es la ecuación diferencial lineal que buscábamos para y.

b) Cuando $a(t) = a$ y $b(t) = b$, se tiene que

$$\dot{y} - (1-n)ay = (1-n)b \qquad \to \qquad y(t) = Ce^{(1-n)at} - \frac{b}{a} \,,$$

donde C es una constante arbitraria de integración. Para $y(0) = y_0$, $C = y_0 + b/a$. Por último, dado que $z = y^{1/(1-n)}$, se concluye que

$$z(t) = \left[\left(y_0 + \frac{b}{a}\right) e^{(1-n)at} - \frac{b}{a}\right]^{1/(1-n)} = \left[\left((z_0)^{1-n} + \frac{b}{a}\right) e^{(1-n)at} - \frac{b}{a}\right]^{1/(1-n)} \,,$$

donde la última igualdad expresa la solución en términos de z_0, la condición inicial de la variable original.

c) El modelo de crecimiento logístico puede escribirse como una ecuación de Bernoulli $\dot{z} - az = bz^n$

$$\frac{\dot{p}}{p} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right) \qquad \to \qquad \dot{p} - rp = -\frac{r}{K}p^2\,,$$

donde se identifica que $a = r$, $b = -r/K$ y $n = 2$. Luego,

$$p(t) = \left[\left((p_0)^{1-n} + \frac{b}{a}\right)e^{(1-n)at} - \frac{b}{a}\right]^{1/(1-n)} = \left[\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{K}\right)e^{-rt} + \frac{1}{K}\right]^{-1} = \frac{Kp_0}{p_0 + (K - p_0)e^{-rt}}\,.$$

Dado que $r > 0$, $e^{-rt} \to 0$ y $p(t) \to K$. Si $K > p_0$, el denominador va decreciendo de K en $t = 0$ a p_0 cuando $t \to \infty$. Así, $p(t)$ es monotónicamente creciente del valor p_0 a K. Es simple verificar que si $p_0 > K$, entonces $p(t)$ será monotónicamente decreciente.

d) El modelo de crecimiento de Solow puede escribirse también como una ecuación de Bernoulli $\dot{z} - az = bz^n$

$$\dot{k} = sk^\alpha - mk \qquad \to \qquad \dot{k} + mk = sk^\alpha\,,$$

donde se identifica que $a = -m$, $b = s$ y $n = \alpha$. Luego,

$$k(t) = \left[\left((k_0)^{1-n} + \frac{b}{a}\right)e^{(1-n)at} - \frac{b}{a}\right]^{1/(1-n)} = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{m}\right)e^{-(1-\alpha)mt} + \frac{s}{m}\right]^{1/(1-\alpha)}\,.$$

Dado que $(1-\alpha)m > 0$, $e^{-(1-\alpha)mt} \to 0$ y $k(t) \to (s/m)^{1/(1-\alpha)} \equiv \bar{k}$. Si $k_0 > (s/m)^{1/(1-\alpha)}$ o alternativamente $k_0^{1-\alpha} > s/m$, se parte de un desequilibrio inicial positivo y, por tanto, $k(t)$ es monotónicamente creciente, del valor k_0 a $\bar{k}$. Si $k_0^{1-\alpha} < s/m$, entonces $k(t)$ será monotónicamente decreciente.

■

6. Estudie cualitativamente las trayectorias implícitas en las siguientes ecuaciones diferenciales, a través de un diagrama de fase y de la linealización de las ecuaciones diferenciales:

a) El *modelo de crecimiento logístico*

$$\frac{\dot{p}}{p} = r\left(1 - \frac{p}{K}\right)\,,$$

donde $r > 0$ y $K > 0$.

b) El *modelo de crecimiento de Solow*

$$\dot{k} = s\phi(k) - mk\,,$$

donde $\{s, \alpha, m\} \in (0,1)$ y $\phi(\cdot)$ es una función cóncava tal que $\phi(0) = 0$, $\lim_{k\to 0}\phi'(k) \to \infty$, $\phi'(k) > 0$, $\lim_{k\to\infty}\phi'(k) = 0$ y $\phi''(k) < 0$.

c) N denota el número de empleados en una economía y que S denota el tamaño de la población en edad de trabajar. Así, $e = N/S$ es la tasa de empleo. Si N y S evolucionan según las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\dot{N}}{N} = \rho \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{S}}{S} = \alpha + \beta\left(\frac{N}{S - N}\right)\,,$$

donde $\rho > \alpha > \beta > 0$, describa la dinámica de e.

Solución:

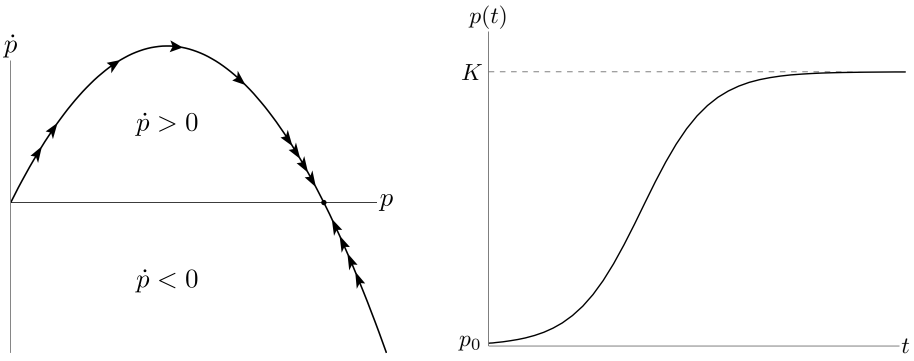
a) Se tiene que

$$\dot{p} = f(p) = rp - \left(\frac{r}{K}\right)p^2 \qquad \text{donde} \qquad f'(p) = r - 2\left(\frac{r}{K}\right)p\,.$$

La curva de fase $f(p)$ es cuadrática y se muestra en la Figura 1(a). Las raíces de esta función cuadrática son $p_1 = 0$ y $p_2 = K$, y son valores candidatos para el estado estacionario de $p(t)$. El máximo valor de esta función se obtiene al resolver $f'(p_3) = 0$, dando como resultado $p_3 = K/2$.

Respecto al punto $p_1 = 0$, dado que $f'(0) = r > 0$, se concluye que se trata de un equilibrio inestable. En cambio, $p_2 = K$ es un equilibrio estable dado que $f'(K) = -r < 0$. Luego, la trayectoria de $p(t)$, mostrada en la Figura 1(b), que se inicia en $p_0 < K$, convergerá a $\bar{p} = K$, primero creciendo a tasas altas que irán decreciendo hasta alcanzar el estado estacionario $\dot{p} = 0$. Esto explica la forma de S de $p(t)$. Es interesante verificar que cuando $p_0 > K$, entonces la trayectoria $p(t)$ será monóticamente decreciente, también con forma de S "al revés".

Figura 1. *Modelo de crecimiento logístico*



(a) Diagrama de fase, $\dot{p} = f(p)$ (b) Trayectoria de p

b) Se tiene que
$$\dot{k} = f(k) = s\phi(k) - mk \qquad \text{donde} \qquad f'(k) = s\phi'(k) - m\,.$$
La curva de fase $f(k)$ cruza el eje $\dot{k} = 0$ dos veces. Primero, en $k_1 = 0$ y luego en $k_2 > 0$ tal que $s\phi(k_2) = mk_2$. El máximo valor de esta función se obtiene al resolver $f'(k_3) = 0$, tal que $s\phi'(k_3) = m$. Partiendo de $k_1 = 0$, se tiene que $f'(k_1) = s\phi'(0) \to \infty > 0$, por lo que $f(\cdot)$ es inicialmente creciente; esta función deja de crecer, por definición, en el punto $k_3 > 0$ donde $f'(k_3) = 0$; luego, dado que $\phi''(\cdot) < 0$ se tiene que $\phi'(k_3) > \phi'(k)$ si $k > k_3$, de modo que la curva de fase es decreciente $f'(k) < f'(k_3) = 0$ para valores de $k > k_3$; esta curva cruza nuevamente a cero en k_2, donde también se cumple que $k_2 > k_3$ y $f'(k_2) < 0$.

Así, si bien es cierto que la curva de fase $f(k)$ no es cuadrática, tiene no obstante forma de U invertida. Note que $f(0) > 0$ hace que $k_1 = 0$ sea un equilibrio inestable, mientras que $f'(k_2) < 0$ hace que $\bar{k} = k_2$ sea un equilibrio estable. Cualitativamente, entonces, el análisis es idéntico al de la Figura 1, incluyendo la forma de S de la trayectoria $k(t)$.

c) Dado que $e = N/S$,
$$\dot{e} = \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{N}{S}\right) = \frac{\dot{N}S - \dot{S}N}{S^2} = \frac{N}{S}\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{S}}{S}\right) = e\left(\frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{S}}{S}\right).$$
Se alcanza la misma expresión, por ejemplo, al derivar $\ln(e)$ respecto al tiempo. Al reemplazar,
$$\frac{\dot{e}}{e} = \frac{\dot{N}}{N} - \frac{\dot{S}}{S} = \rho - \alpha - \beta\left(\frac{N}{S-N}\right) = (\rho - \alpha) - \beta\left(\frac{e}{1-e}\right).$$
Luego,
$$\dot{e} = (\rho - \alpha)e - \beta\left(\frac{e^2}{1-e}\right) \equiv f(e)\,.$$
En estado estacionario $\dot{e} = 0$, por lo que $\bar{e} = 0$, que se descarta y
$$\frac{\bar{e}}{1-\bar{e}} = \frac{\rho-\alpha}{\beta} \quad \to \quad \bar{e} = \frac{\rho-\alpha}{\rho-\alpha+\beta}\,.$$
La pendiente de la curva de fase es
$$\begin{aligned} f'(e) = (\rho-\alpha) - 2\beta\left(\frac{e}{1-e}\right) - \beta\left(\frac{e}{1-e}\right)^2 &= (\rho-\alpha) - \beta\left(\frac{e}{1-e}\right)\left(2 + \frac{e}{1-e}\right) \\ &= (\rho-\alpha) + \beta\left(\frac{e^2-2e}{(1-e)^2}\right) = (\rho-\alpha+\beta) - \beta\left(\frac{1}{1-e}\right)^2. \end{aligned}$$
Así, evaluada en $e = 0$ la curva de fase tiene pendiente positiva, $f'(0) = \rho - \alpha > 0$, mientras que evaluada en $\bar{e}$ la pendiente es negativa:

$$f'(\bar{e}) = (\rho - \alpha + \beta) - \beta \left(\frac{1}{1-\bar{e}} \right)^2 = (\rho - \alpha + \beta) - \beta \left(\frac{\rho - \alpha + \beta}{\beta} \right)^2$$
$$= (\rho - \alpha + \beta) \left(1 - \frac{\rho - \alpha + \beta}{\beta} \right) = -(\rho - \alpha + \beta) \left(\frac{\rho - \alpha}{\beta} \right) < 0 \, .$$

Se concluye que $\bar{e}$ es un equilibrio estable. La curva de fase tiene forma de U invertida, similar a la Figura 1. ■

7. Considere la ecuación diferencial

$$\dot{y} = (a_1 - y)(y - a_2)(y - a_3) \, ,$$

donde $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

a) Encuentre los estados estacionarios de y, e indique si se tratan de puntos estables o inestables.

b) Con el mayor detalle posible, esboce el diagrama de fase y describa el comportamiento de la trayectoria $y(t)$ considerando diversos puntos iniciales $y(0)$.

Solución:

a) La ecuación diferencial es $\dot{y} = f(y)$, donde

$$f(y) = (a_1 - y)(a_2 - y)(a_3 - y) \, .$$

Claramente, los estados estacionarios, que satisfacen $f(\bar{y}) = 0$, son $\bar{y}_1 = a_1$, $\bar{y}_2 = a_2 > \bar{y}_1$ e $\bar{y}_3 = a_3 > \bar{y}_2$.

Para evaluar su estabilidad es necesario calcular la pendiente de $f(y)$ alrededor de estos puntos. Utilizando la regla del producto (dos veces),

$$f'(y) = -(a_2 - y)(a_3 - y) + (a_1 - y) \frac{d\left[(a_2 - y)(a_3 - y)\right]}{y} = -(a_2 - y)(a_3 - y) + (a_1 - y)\left(-(a_3 - y) - (a_2 - y)\right) \, .$$

Luego (recuerde que $a_1 < a_2 < a_3$):

$$\begin{aligned} f'(a_1) &= -(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) < 0 \, , \\ f'(a_2) &= -(a_1 - a_2)(a_3 - a_2) > 0 \, , \\ f'(a_3) &= -(a_1 - a_3)(a_2 - a_3) < 0 \, . \end{aligned}$$

Se concluye que $\bar{y}_1 = a_1$ e $\bar{y}_3 = a_3$ son puntos estables, mientras que $\bar{y}_2 = a_2$ es inestable.

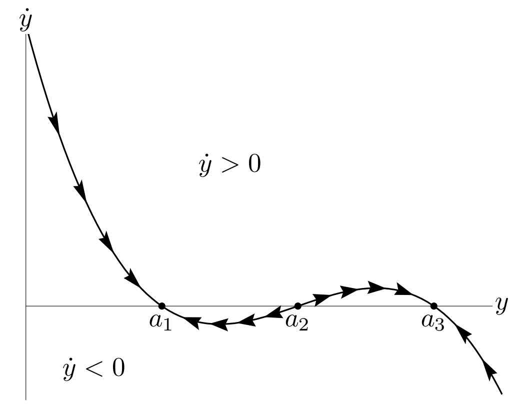
b) La función $f(y)$ es cúbica, cruza el eje vertical en $f(0) = a_1 a_2 a_3 > 0$ y el eje horizontal en los estados estacionarios a_1 (con pendiente negativa), a_2 (con pendiente positiva) y a_3 (con pendiente negativa). Ver Figura 2.

Se aprecia que:

- Si $y(0) < a_1$, $y(t)$ será creciente y convergerá al estado estacionario $\bar{y}_1 = a_1$.
- Si $a_1 < y(0) < a_2$, $y(t)$ será decreciente y convergerá al estado estacionario $\bar{y}_1 = a_1$.
- Si $a_2 < y(0) < a_3$, $y(t)$ será creciente y convergerá al estado estacionario $\bar{y}_3 = a_3$.
- Si $a_3 < y(0)$, $y(t)$ será decreciente y convergerá al estado estacionario $\bar{y}_3 = a_3$.

■

Figura 2. *Diagrama de fase de $\dot{y} = (a_1 - y)(a_2 - y)(a_3 - y)$*



Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y sistemas lineales

8. Estudie cómo el valor de la constante a afecta las trayectorias que resuelven las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\ddot{y} = a$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = 1$.

b) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 2t^2 + 12t - 23$, donde $y(0) = 2$ e $\dot{y}(0) = a$.

c) $\ddot{y} - 5\dot{y} + 6y = 6t^2 + 2t + 4$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = a + 2$.

d) $\ddot{y} - (2a + 1)\dot{y} + a(a + 1)y = e^t$, donde $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = a$.

e) $\ddot{y} - \dot{y} - a(a + 1)y = a(a + 1)t + 1$, donde $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = -2(a + 1)$.

f) $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = e^{at}$, donde $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

g) $\ddot{y} + 16y = \cos(at)$, donde $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 4$.

Solución:

a) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2$ por lo que se tienen dos raíces reales e iguales a cero. Así, la solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1e^{0t} + C_2te^{0t} = C_1 + C_2t\,.$$

Respecto a la solución particular, note que el término es constante. Si conjeturamos $y_p(t) = A$, entonces tendríamos que $y_p(t)$ es linealmente dependiente de la solución complementaria $C_1e^{0t} = C_1$. Asimismo, si conjeturamos $y_p(t) = At$, entonces tendríamos que $y_p(t)$ es linealmente dependiente de la solución complementaria $C_2te^{0t} = C_2t$. Así, conjeturamos que $y_p(t) = At^2$. Con ello, $\dot{y}_p(t) = 2At$ y $\ddot{y}_p(t) = 2A$. Al reemplazar esta conjetura en $\ddot{y}_p = a$ se determina que $A = a/2$. Con ello, la solución final es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 + C_2t + \frac{a}{2}t^2\,.$$

Para determinar las constantes, considere $y(0) = C_1 + C_2 \cdot (0) + b \cdot (0)^2/2 = C_1 = 1$ e $\dot{y}(0) = C_2 + b \cdot (0) = C_2 = 1$. Finalmente,

$$y(t) = 1 + t + \frac{a}{2}t^2\,.$$

Esta solución es válida para todo valor de a. Cuando $a = 0$, la ecuación diferencial es homogénea y la solución final es igual a la solución complementaria, que es una función lineal en t, como se verifica. Todas estas conclusiones se obtienen mediante la integración directa de la ecuación diferencial: $\int_t \int_s \ddot{y}dsdt = \int_t \int_s adsdt$.

b) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 - 3r + 2 = (r - 1)(r - 2)$ por lo que se tienen dos raíces reales y distintas, $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. La solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}\,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es una función cuadrática en t. Se conjetura, pues, que

$$y_p = A_2t^2 + A_1t + A_0 \qquad \text{de modo que} \qquad \dot{y}_p = 2A_2t + A_1 \qquad \text{y} \qquad \ddot{y}_p = 2A_2\,.$$

Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$2A_2 - 3(2A_2t + A_1) + 2(A_2t^2 + A_1t + A_0) = 2t^2 + 12t - 23\,,$$

dando así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La igualdad de coeficientes que acompañan a t^2 es $2A_2 = 2$ y conlleva a que $A_2 = 1$. La igualdad de coeficientes que acompañan a t es $2A_1 - 6A_2 = 12$ y conlleva a que $A_1 = 9$. Finalmente, la igualdad de interceptos es $2A_2 - 3A_1 + 2A_0 = -23$ y conlleva a que $A_0 = 1$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + t^2 + 9t + 1\,.$$

de donde se deduce que $\dot{y}(t) = C_1e^t + 2C_2e^{2t} + 2t + 9$. Luego, $y(0) = C_1 + C_2 + 1 = 2$ e $\dot{y}(0) = C_1 + 2C_2 + 9 = a$, se resuelven para $C_1 = 11 - a$ y $C_2 = a - 10$. Concluimos que

$$y(t) = (11 - a)e^t + (a - 10)e^{2t} + t^2 + 9t + 1\,.$$

Esta respuesta es válida para todo valor de a.

c) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$ por lo que se tienen dos raíces reales y distintas, $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$. La solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} \,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es una función cuadrática en t. Se conjetura, pues, que $y_p = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$, $\dot{y}_p = 2A_2 t + A_1$ e $\ddot{y}_p = 2A_2$. Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$2A_2 - 5(2A_2 t + A_1) + 6(A_2 t^2 + A_1 t + A_0) = 6t^2 + 2t + 4 \,,$$

dando así un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. La igualdad de coeficientes que acompañan a t^2 es $6A_2 = 6$ y conlleva a que $A_2 = 1$. La igualdad de coeficientes que acompañan a t es $6A_1 - 10A_2 = 2$ y conlleva a que $A_1 = 2$. Finalmente, la igualdad de interceptos es $2A_2 - 5A_1 + 6A_0 = 4$ y conlleva a que $A_0 = 2$. La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + t^2 + 2t + 2 \,,$$

de donde se deduce que $\dot{y}(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t} + 2t + 2$. Luego, $y(0) = C_1 + C_2 + 2 = a + 2$ e $\dot{y}(0) = 2C_1 + 3C_2 + 2 = a + 2$, que se resuelve para $C_1 = 2a$ y $C_2 = -a$. Concluimos que

$$y(t) = a\left(2e^{2t} - e^{3t}\right) + t^2 + 2t + 2 \,.$$

Esta solución es válida para todo valor de a.

d) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 - (2a+1)r + a(a+1) = (r-a)(r-a-1)$ por lo que se tienen dos raíces reales y distintas, $r_1 = a$ y $r_2 = a+1$. La solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{(a+1)t} \,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es una función exponencial e^t. Este término será linealmente independiente de las soluciones complementarias si $a \neq 0$ y $a \neq 1$. Bajo estas condiciones, se conjetura que

$$y_p = Ae^t \qquad \text{de modo que} \qquad \dot{y}_p = Ae^t \qquad \text{y} \qquad \ddot{y}_p = Ae^t \,.$$

Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$Ae^t\left[1 - (2a+1) + a(a+1)\right] = e^t \qquad \to \qquad A = \frac{1}{a(a-1)} \,,$$

lo que efectivamente constituye una solución válida para $a \neq 0$ y $a \neq 1$. La solución general es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{(a+1)t} + \frac{e^t}{a(a-1)}$$

$$\text{tal que} \qquad \dot{y}(t) = C_1 a e^{at} + C_1 (a+1) e^{(a+1)t} + \frac{e^t}{a(a-1)} \,.$$

Luego, $y(0) = C_1 + C_2 + 1/[\,a(a-1)\,] = 1$ e $\dot{y}(0) = aC_1 + (a+1)C_2 + 1/[\,a(a-1)\,] = a$, que se resuelve para $C_1 = (a-2)/(a-1)$ y $C_2 = 1/a$. Concluimos que

$$y(t) = \left(\frac{a-2}{a-1}\right) e^{at} + \frac{e^{(a+1)t}}{a} + \frac{e^t}{a(a-1)} = \frac{a(a-2)e^{at} + (a-1)e^{(a+1)t} + e^t}{a(a-1)} \,.$$

Cuando $a = 0$ las soluciones complementarias son $\{1, e^t\}$, mientras que cuando $a = 1$, éstas son $\{e^t, e^{2t}\}$. En ambos casos emerge una dependencia lineal con el término de la ecuación diferencial. Por ello, la conjetura válida para la solución particular sería

$$y_p = Ate^t \qquad \text{de modo que} \qquad \dot{y}_p = Ae^t + Ate^t \qquad \text{y} \qquad \ddot{y}_p = 2Ae^t + Ate^t \,.$$

Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$A\underbrace{\left[1 - (2a+1) + a(a+1)\right]}_{=0} te^t + A\left[2 - (2a+1)\right]e^t = e^t \qquad \to \qquad A = \frac{1}{1-2a} \,,$$

La solución general es, en esta ocasión,

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{(a+1)t} + \frac{te^t}{1-2a}$$

$$\text{tal que} \qquad \dot{y}(t) = C_1 a e^{at} + C_1(a+1)e^{(a+1)t} + \left(\frac{1+t}{1-2a}\right) e^t \,.$$

Luego, $y(0) = C_1 + C_2 = 1$ e $\dot{y}(0) = aC_1 + (a+1)C_2 + 1/(1-2a) = a$, que se resuelve para $C_1 = 2(a-1)/(2a-1)$ y $C_2 = 1/(2a-1)$. Concluimos que, para $a = 0$ o $a = 1$,

$$y(t) = \frac{(a-1)e^{at} + e^{(a+1)t} - (1+t)e^t}{2a-1} \,.$$

e) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 - r - a(a+1) = (r+a)(r-a-1)$ por lo que se tienen dos raíces reales y distintas, $r_1 = -a$ y $r_2 = a+1$, siempre y cuando $a \neq -\frac{1}{2}$. La solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{(a+1)t} \,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es una función lineal de t. Este término (en especial, la constante) será linealmente independiente de las soluciones complementarias si $a \neq 0$ y $a \neq -1$. En estos casos, se conjetura, que

$$y_p = A_1 t + A_0 \qquad \text{de modo que} \qquad \dot{y}_p = A_1 t \qquad \text{y} \qquad \ddot{y}_p = 0 \,.$$

Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$-A_1 a(a+1)t - (A_1 + a(a+1)A_0) = a(a+1)t + 1 \qquad \to \qquad A_1 = -1 \quad \text{y} \quad A_0 = 0 \,,$$

con lo que $y_p(t) = -t$. La solución general de la EDO es

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = C_1 e^{-at} + C_2 e^{(a+1)t} - t \qquad \text{tal que} \qquad \dot{y}(t) = -C_1 a e^{-at} + C_1(a+1)e^{(a+1)t} - 1 \,.$$

Luego, $y(0) = C_1 + C_2 = 0$ e $\dot{y}(0) = -aC_1 + (a+1)C_2 - 1 = -2(a+1)$, que se resuelve para $C_1 = 1$ y $C_2 = -1$. Concluimos que

$$y(t) = e^{-at} - e^{(a+1)t} - t \,.$$

Es importante notar que cuando $a = 0$ o $a = 1$ las soluciones complementarias son $\{1, e^t\}$. El resultado que $A_0 = 0$ indica que, a pesar de la sospecha inicial, las soluciones complementarias y particular serán linealmente independientes *siempre*.

Cuando $a = -\frac{1}{2}$, ambas raíces serán iguales, lo que altera la forma de la solución complementaria. La solución particular se mantiene. Dado que $a + 1 = -a$, la solución general de la EDO sería

$$y(t) = y_c(t) + y_p(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-at} - t \qquad \text{tal que} \qquad \dot{y}(t) = \left[C_1 + (1-a)C_2\right] e^{-at} - 1 \,.$$

Luego, $y(0) = C_1 = 0$ e $\dot{y}(0) = C_1 + (1-a)C_2 - 1 = -2(a+1) = -1$, que se resuelve para $C_1 = C_2 = 0$. Concluimos que $y(t) = -t$.

f) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 - r - 6 = (r+2)(r-3)$ por lo que se tienen dos raíces reales y distintas, $r_1 = -2$ y $r_2 = 3$. La solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t} \,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es una función exponencial. Se conjetura, pues, que $y_p = Ae^{at}$, $\dot{y}_p = Aae^{at}$ y, finalmente, $\ddot{y}_p = Aa^2 e^t$. Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$A\left[a^2 - a - 6\right] e^{at} = e^{at} \qquad \to \qquad A = \frac{1}{(a+2)(a-3)} \,.$$

La solución final, considerando que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, es

$$y(t) = \frac{(3-2a)e^{-2t} + (2-a)e^{3t} + 5e^{at}}{5(a+2)(a-3)} \,.$$

Claramente, esta solución es válida toda vez que $a \neq -2$ y $a \neq 3$. Cuando $a = -2$ o $a = 3$, la conjetura válida para la solución particular es $y_p = Ate^{at}$, $\dot{y}_p = A(1+at)e^{at}$ y, finalmente, $\ddot{y}_p = Aa(2+at)e^{at}$.

Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$A\left[a(2+at)-(1+at)-6t\right]e^{at} = e^{at} \quad \rightarrow \quad A\left[(a^2-a-6)t+2a-1\right]e^{at} = e^{at} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2a-1}\,.$$

La solución final, considerando que $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, es

$$y(t) = \frac{e^{3t}-e^{-2t}-5te^{at}}{5(1-2a)}\,.$$

g) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es $P(r) = r^2 + 16 =$ por lo que se tienen dos raíces complejas conjugadas, $r_{1,2} = \pm 4i$. Dado que la parte real de estas raíces es igual a cero, la solución complementaria toma la forma

$$y_c(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t)\,.$$

Respecto a la solución particular, se tiene que el término es un coseno. Si $a \neq 4$, una conjetura válida para la solución particular es $y_p = A_1\cos(at) + A_2\sin(at)$, $\dot{y}_p = a\left(A_2\cos(at) - A_1\sin(at)\right)$ y, finalmente, $\ddot{y}_p = -a^2\left(A_1\cos(at) + A_2\sin(at)\right)$. Al sustituir esta conjetura en la ecuación diferencial,

$$-a^2\left(A_1\cos(at)+A_2\sin(at)\right) + 16\left(A_1\cos(at)+A_2\sin(at)\right) = \cos(at) \qquad \rightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{16-a^2} \quad \text{y} \quad A_2 = 0\,.$$

Así,

$$y(t) = C_1\cos(4t) + C_2\sin(4t) + \frac{\cos(at)}{16-a^2} \quad \text{tal que} \quad \dot{y}(t) = 4\left[C_2\cos(4t) - C_1\sin(4t)\right] - \frac{a\sin(at)}{16-a^2}\,.$$

Luego, $y(0) = C_1 + (16-a^2)^{-1} = 0$ e $\dot{y}(0) = 4C_2 = 4$ llevan a $C_1 = -(16-a^2)^{-1}$ y $C_2 = 1$, dando como solución final

$$y(t) = \sin(4t) + \frac{\cos(at)-\cos(4t)}{16-a^2}\,.$$

Por su parte, cuando $a = 4$ la conjetura anterior no es válida por ser linealmente independiente con la solución complementaria $\cos(4t)$. En este caso se propone $y_p = t\left(A_1\cos(4t) + A_2\sin(4t)\right)$, $\dot{y}_p = (A_1 + 4A_2t)\cos(at) + (A_2 - 4A_1t)\sin(at)$ y, finalmente, $\ddot{y}_p = 8(A_2 - 2A_1t)\cos(at) - 8(A_1 + 2A_2t)\sin(at)$. Al sustituir esta nueva conjetura en la ecuación diferencial,

$$8\left[(A_2-2A_1t)\cos(4t) - (A_1+2A_2t)\sin(4t)\right] + 16\left[A_1t\cos(4t) + A_2t\sin(4t)\right] = \cos(4t)$$
$$\rightarrow \quad A_1 = 0 \quad \text{y} \quad A_2 = -\frac{1}{8}\,.$$

Con ello,

$$y(t) = C_1\cos(4t) + \left(C_2 - \frac{t}{8}\right)\sin(4t) \quad \text{tal que} \quad \dot{y}(t) = -\left(4C_1 + \frac{1}{8}\right)\sin(4t) - 4\left(C_2 - \frac{t}{8}\right)\cos(4t)\,.$$

Luego, $y(0) = C_1 = 0$ e $\dot{y}(0) = -4C_2 = 4$ llevan a $C_1 = 0$ y $C_2 = -1$, dando como solución final

$$y(t) = -\left(1 + \frac{t}{8}\right)\sin(4t)\,.$$

■

9. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales, donde $y^{(n)} \equiv d^ny/dt^n$:

a) $y^{(3)} + 7y^{(2)} + 10y^{(1)} = 12e^{-3t}$.

b) $y^{(4)} - y^{(2)} - 2y^{(1)} + 2y = 2$.

c) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 7y^{(2)} + 6y^{(1)} + 2y = 2$.

d) $y^{(5)} + 4y^{(4)} - 5y^{(3)} - y^{(2)} - 4y^{(1)} + 5y = 0$.

Solución:

a) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es igual a

$$P(r) = r^3 + 7r^2 + 10r = r(r+2)(r+5)\,.$$

Sus tres raíces con reales y distintas: $r_1 = 0$, $r_2 = -2$ y $r_3 = -5$.

Dado que ninguna raíz es igual a -3, se conjetura que $y_p(t) = Ae^{-3t}$ por lo que, al reemplazar en la ecuación diferencial,

$$y^{(3)} + 7y^{(2)} + 10y^{(1)} = 2e^{-3t} \quad \to \quad Ae^{-3t}P(-3) = 12e^{-3t} \quad \to \quad A = 2\,.$$

La solución final es, luego,

$$y(t) = C_1 + C_2e^{-2t} + C_3e^{-5t} + 2e^{-3t}\,,$$

donde C_i $(i = 1, \ldots, 3)$ son constantes arbitrarias.

b) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es igual a

$$P(r) = r^4 - r^2 - 2r + 2 = (r-1)^2(r^2 + 2r + 2)\,.$$

De las cuatro raíces, dos son reales e iguales, $r_1 = r_2 = 1$, y dos son complejas conjugadas, $r_{3,4} = -1 \pm i$.

Dado que ninguna raíz es igual a cero y el término es constante, se conjetura $y_p(t) = A$ como solución particular. Al reemplazar en la ecuación diferencial, se consigue que $y_p(t) = 1$. La solución final es, luego,

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^t + e^{-t}\left[C_3\cos(t) + C_4\sin(t)\right] + 1\,,$$

donde C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ son constantes arbitrarias.

c) El polinomio característico de esta ecuación diferencial es igual a

$$P(r) = r^4 + 4r^3 + 7r^2 + 6r + 2 = (r+1)^2(r^2 + 2r + 2)\,.$$

De las cuatro raíces, dos son reales e iguales, $r_1 = r_2 = -1$, y dos son complejas conjugadas, $r_{3,4} = -1 \pm i$.

Dado que ninguna raíz es igual a cero y el término es constante, se conjetura $y_p(t) = A$ como solución particular. Al reemplazar en la ecuación diferencial, se consigue que $y_p(t) = 1$. La solución final es, luego,

$$y(t) = (C_1 + C_2t)e^{-t} + e^{-t}\left[C_3\cos(t) + C_4\sin(t)\right] + 1\,,$$

donde C_i $(i = 1, \ldots, 4)$ son constantes arbitrarias.

d) Ésta es una ecuación homogénea cuyo polinomio característico es igual a

$$P(r) = r^5 + 4r^4 - 5r^3 - r^2 - 4r + 5 = (r+5)(r-1)^2(r^2 + r + 1)\,.$$

De las cinco raíces, la primera es $r_1 = -5$, la segunda y tercera son iguales $r_2 = r_3 = 1$, y la cuarta y quinta son complejas conjugadas $r_{4,5} = (1 \pm \sqrt{3}i)/2$. Así,

$$y(t) = C_1e^{-5t} + (C_2 + C_3t)e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_5\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\,,$$

donde C_i $(i = 1, \ldots, 5)$ son constantes arbitrarias.

■

10. Resuelva los siguientes sistemas diferenciales:

a) $\dot{y} = 2(y + x)$ y $\dot{x} = -9y - 4x + e^{-t}$, donde $y(0) = \frac{2}{9}$ y $x(0) = \frac{1}{6}$.

b) $\dot{y} = -4x + 3y + e^{-t}$ y $\dot{x} = -5(x - y)$, donde $y(0) = \frac{7}{5}$ y $x(0) = \frac{5}{4}$.

c) $\dot{y} = y + 2x$ y $\dot{x} = -x$, donde $y(0) = 1$ y $x(0) = 1$.

<u>**Solución**</u>:

a) De la primera ecuación,

$$x=\frac{1}{2}\dot{y}-y \qquad \text{y} \qquad \dot{x}=\frac{1}{2}\ddot{y}-\dot{y}\,.$$

Al sustitur estas expresiones es la segunda ecuación,

$$\frac{1}{2}\ddot{y}-\dot{y}=-9y-4\left(\frac{1}{2}\dot{y}-y\right)+e^{-t} \quad\to\quad \ddot{y}+2\dot{y}+10y=2e^{-t}\,.$$

El polinomio característico de esta ecuación de segundo orden es $P(r)=r^2+2r+10$ y sus raíces son $r_{1,2}-1\pm 3i$. Así, la solución complementaria de y toma la forma

$$y_c(t)=e^{-t}\left[C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)\right]\,.$$

Para obtener la solución particular, se conjetura $y_p=Ae^{-t}$ de modo que $\dot{y}_p=-Ae^{-t}$ e $\ddot{y}_p=Ae^{-t}$. Al evaluar la ecuación diferencial en esta conjetura,

$$Ae^{-t}\left(1-2+10\right)=2e^{-t} \quad\to\quad A=\frac{2}{9}\,.$$

Obtenemos, así, la solución general

$$y(t)=y_c(t)+y_p(t)=e^{-t}\left(C_1\cos(3t)+C_2\sin(3t)+\frac{2}{9}\right)\,.$$

De $y(0)=\frac{2}{9}$ se obtiene que $C_1=0$, lo que implica que

$$y(t)=e^{-t}\left(C_2\sin(3t)+\frac{2}{9}\right) \qquad \text{tal que} \qquad \dot{y}(t)=e^{-t}\left(3C_2\cos(3t)-C_2\sin(3t)-\frac{2}{9}\right)\,.$$

Utilizando $x(0)=\frac{1}{6}$ y la primera ecuación del sistema

$$\dot{y}(0)=2y(0)+2x(0)=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}\,.$$

Luego, evaluando $\dot{y}(t)$,

$$\frac{7}{9}=3C_2-\frac{2}{9} \quad\to\quad C_2=\frac{1}{3}\,.$$

Se concluye que

$$y(t)=e^{-t}\left(\frac{\sin(3t)}{3}+\frac{2}{9}\right)\,.$$

Obtenemos $x(t)$ a partir de $y(t)$ e $\dot{y}(t)$,

$$x(t)=\frac{1}{2}\dot{y}(t)-y(t)=e^{-t}\left(\frac{9\cos(3t)-3\sin(3t)-2}{18}-\frac{6\sin(3t)+4}{18}\right)=e^{-t}\left(\frac{\cos(3t)-\sin(3t)}{2}-\frac{1}{3}\right)\,.$$

b) De la segunda ecuación,

$$y=\frac{1}{5}\dot{x}+x \qquad \text{y} \qquad \dot{y}=\frac{1}{5}\ddot{x}+\dot{x}\,.$$

Al sustitur estas expresiones es la primera ecuación,

$$\frac{1}{5}\ddot{x}+\dot{x}=-4x+3\left(\frac{1}{5}\dot{x}+x\right)+e^{-t} \quad\to\quad \ddot{x}+2\dot{x}+5x=5e^{-t}\,.$$

El polinomio característico de esta ecuación de segundo orden es $P(r)=r^2+2r+5$ y sus raíces son $r_{1,2}-1\pm 2i$. Así, la solución complementaria de x toma la forma

$$x_c(t)=e^{-t}\left[C_1\cos(2t)+C_2\sin(2t)\right]\,.$$

Para obtener la solución particular, se conjetura $x_p = Ae^{-t}$ de modo que $\dot{x}_p = -Ae^{-t}$ y $\ddot{x}_p = Ae^{-t}$. Al evaluar la ecuación diferencial en esta conjetura,

$$Ae^{-t}(1 - 2 + 5) = 5e^{-t} \quad \rightarrow \quad A = \frac{5}{4}\,.$$

Obtenemos, así, la solución general

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) = e^{-t}\left(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{5}{4}\right)\,.$$

De $x(0) = \frac{5}{4}$ se obtiene que $C_1 = 0$, lo que implica que

$$x(t) = e^{-t}\left(C_2 \sin(2t) + \frac{5}{4}\right) \qquad \text{tal que} \qquad \dot{x}(t) = e^{-t}\left(2C_2 \cos(2t) - C_2 \sin(2t) - \frac{5}{4}\right)\,.$$

Utilizando $y(0) = \frac{7}{5}$ y la segunda ecuación del sistema

$$\dot{x}(0) = -5x(0) + 5y(0) = -\frac{25}{4} + 7 = \frac{3}{4}\,.$$

Luego, evaluando $\dot{x}(t)$,

$$\frac{3}{4} = 2C_2 - \frac{5}{4} \quad \rightarrow \quad C_2 = 1\,.$$

Se concluye que

$$x(t) = e^{-t}\left(\sin(2t) + \frac{5}{4}\right)\,.$$

Obtenemos $y(t)$ a partir de $x(t)$ e $\dot{x}(t)$,

$$y(t) = \frac{1}{5}\dot{x}(t) + x(t) = e^{-t}\left(\frac{2\cos(2t) - \sin(2t)}{5} - \frac{1}{4} + \sin(2t) + \frac{5}{4}\right) = e^{-t}\left(\frac{2\cos(2t) + 4\sin(2t)}{5} + 1\right)\,.$$

c) La ecuación para $\dot{x}$ es muy simple y se puede resolver directamente. Se sabe que $x(t) = C_1 e^{-t}$ para una constante arbitraria C_1 que se iguala a $C_1 = 1$ para satisfacer $x(0) = 1$. Luego, al reemplazar esta trayectoria en la primera ecuación

$$\dot{y} - y = 2e^{-t}\,.$$

El factor de integración es e^{-t} lo que permite obtener

$$e^{-t}y = \int 2e^{-2t}dt = -e^{-2t} + C_2 \qquad \rightarrow \qquad y = -e^{-t} + C_2 e^{t}$$

para una constante arbitraria C_2. Luego, utilizando la condición inicial $y(0) = 1$, se consigue $C_2 = 2$, dando como resultado final $x(t) = e^{-t}$ e $y(t) = 2e^{t} - e^{-t}$.

■

11. Considere los siguientes sistemas homogéneos. Clasifique el punto de equilibrio $(0,0)$. En caso de tratarse de un punto de ensilladura, encuentre la pendiente de la senda de ensilladura, $x(t) = \beta y(t)$.

a) $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 2x - 3y.$
b) $\dot{x} = 2x - y, \quad \dot{y} = x - y.$
c) $\dot{x} = x - 3y, \quad \dot{y} = 4x - 5y.$
d) $\dot{x} = 3x - 2y, \quad \dot{y} = 4x - y.$
e) $\dot{x} = 3x - 4y, \quad \dot{y} = x - y.$
f) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$
g) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x.$

<u>**Solución**</u>:

Los sistemas pueden ser escritos matricialmente como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} \,.$$

Las raíces de las trayectorias $x(t)$ e $y(t)$ son los valores propios de la matriz $\boldsymbol{A}$. Dado que $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$ y $\lambda_1\lambda_2 = \det(\boldsymbol{A})$, puede concluirse que si $\det(\boldsymbol{A}) > 0$ ambos valores propios tendrán el mismo signo. Éstos serán negativos y, por consiguiente, las trayectorias serán estables si $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) < 0$. Para determinar si las trayectorias son monótonas (nodo) u oscilantes (foco), es importante obtener el signo del discriminante $\mathrm{di}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})^2 - 4\det(\boldsymbol{A})$. Si $\mathrm{di}(\boldsymbol{A}) \geq 0$, los valores propios serán reales y las trayectorias monótonas, mientras que si $\mathrm{di}(\boldsymbol{A}) < 0$, los valores propios serán complejos conjugados y las trayectorias oscilantes.

El caso en que $\det(\boldsymbol{A}) < 0$ corresponde a una senda de ensilladura, $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$. Acá, es preciso resolver completamente el problema para determinar las condiciones iniciales que ubicarán al sistema en esta senda y, por tanto, que harán que $x(t)$ e $y(t)$ sean trayectorias convergentes. Se tiene que

$$x(t) = H_{11}C_1e^{\lambda_1 t} + H_{12}C_2e^{\lambda_2 t} \qquad \text{e} \qquad y(t) = H_{21}C_1e^{\lambda_1 t} + H_{22}C_2e^{\lambda_2 t} \,,$$

donde H_{11} y H_{21} son los elementos del vector propio asociado al valor propio negativo λ_1. La senda de ensilladura corresponde al caso $C_2 = 0$. Acá, $x(t) = H_{11}C_1e^{r_1 t}$ e $y(t) = H_{21}C_1e^{r_1 t}$ por lo que $x(t) = (H_{11}/H_{21})y(t) \equiv \beta y(t)$. Así, si las condiciones iniciales son tales que $x(0) = \beta y(0)$, se convergerá al equilibrio.

Note que

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \qquad \to \qquad \beta = \frac{H_{11}}{H_{21}} = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{11}} = \frac{\lambda_1 - a_{22}}{a_{21}} \,.$$

a) Se tiene que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \det(\boldsymbol{A}) = -5 < 0 \,.$$

El equilibrio $(0, 0)$ es un punto de ensilladura. Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{\mathrm{di}(\boldsymbol{A})}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4\det(\boldsymbol{A})}}{2} = \pm\sqrt{5} \,.$$

Así, la pendiente de la senda de ensilladura es

$$\beta = \frac{-2}{-\sqrt{5} - 3} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \simeq 0.38 \,.$$

b) Se tiene que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \det(\boldsymbol{A}) = -1 < 0 \,.$$

El equilibrio $(0, 0)$ es un punto de ensilladura. Los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) \pm \sqrt{\mathrm{di}(\boldsymbol{A})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \,.$$

La pendiente de la senda de ensilladura es

$$\beta = \frac{-1}{(1 - \sqrt{5})/2 - 2} = \frac{2}{\sqrt{5} + 3} \simeq 0.38 \,.$$

c) Se tiene que

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad \to \qquad \det(\boldsymbol{A}) = 7 > 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = -4 < 0 \,.$$

El equilibrio $(0, 0)$ es estable. El discriminante es $\mathrm{di}(\boldsymbol{A}) = (-4)^2 - 4(7) = -12 < 0$ por lo que se tratan de raíces complejas conjugadas. El equilibrio es un foco estable.

d) Se tiene que
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det(A) = 5 > 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(A) = 2 > 0\,.$$
El equilibrio $(0,0)$ es inestable. El discriminante es $\text{di}(A) = (2)^2 - 4(5) = -16 < 0$ por lo que se tratan de raíces complejas conjugadas. El equilibrio es un foco inestable.

e) Se tiene que
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det(A) = 1 > 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(A) = 2 > 0\,.$$
El equilibrio $(0,0)$ es inestable. El discriminante es $\text{di}(A) = (2)^2 - 4(1) = 0$ por lo que se tratan de raíces reales. El equilibrio es un nodo inestable.

f) Se tiene que
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det(A) = 1 > 0 \quad \text{y} \quad \text{tr}(A) = 0\,.$$
El discriminante es $\text{di}(A) = (1)^2 - 4(1) = -3 < 0$ por lo que se tratan de raíces complejas conjugadas. El resultado $\text{tr}(A) = 0$ indica que la parte real de estas raíces es cero, por lo que el equilibrio es un vórtice.

g) Se tiene que
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \det(A) = -1 < 0\,.$$
El equilibrio $(0,0)$ es un punto de ensilladura. Dado que $\text{tr}(A) = 0$ se concluye que los valores propios de A son $\lambda = \pm 1$. Así, la pendiente de la senda de ensilladura es
$$\beta = \frac{1}{-1-0} = -1\,.$$
■

12. Considere el sistema diferencial
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1(x - \gamma y) + \beta\,, \\ \dot{y} &= \alpha_2(x - \gamma y)\,, \end{aligned}$$
donde $\alpha_2 > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$ y $\lambda = \alpha_1 - \alpha_2\gamma < 0$.

a) Encuentre la trayectoria de $y(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{y}(t)$.
b) Encuentre la trayectoria de $x(t)$, analice su estabilidad y encuentre el valor de largo plazo de $\dot{x}(t)$.
c) Encuentre la trayectoria de $z(t) = x(t) - \gamma y(t)$. Analice su estabilidad.
d) A partir del sistema original, deduzca una ecuación diferencial de primer order para $z = x - \gamma y$ y muestra que su solución es idéntica a la encontrada en la parte *c*).

Solución:

El sistema puede escribirse como
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_1 x - \alpha_1\gamma y + \beta\,, \\ \dot{y} &= \alpha_2 x - \alpha_2\gamma y\,. \end{aligned}$$

a) De la segunda ecuación,
$$\alpha_2 x = \dot{y} + \alpha_2\gamma y \qquad \rightarrow \qquad \alpha_2\dot{x} = \ddot{y} + \alpha_2\gamma\dot{y}\,.$$
Al multiplicar la primera ecuación por α_2 y reemplazar,
$$\begin{aligned} \alpha_2\dot{x} = \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_1\alpha_2\gamma y + \alpha_2\beta \qquad &\rightarrow \qquad \ddot{y} + \alpha_2\gamma\dot{y} = \alpha_1(\dot{y} + \alpha_2\gamma y) - \alpha_1\alpha_2\gamma y + \alpha_2\beta \\ &\rightarrow \qquad \ddot{y} - (\alpha_1 - \alpha_2\gamma)\dot{y} = \alpha_2\beta \qquad \rightarrow \qquad \ddot{y} - \lambda\dot{y} = \alpha_2\beta\,. \end{aligned}$$
El polinomio característico de esta ecuación es $\mathcal{P}(r) = r^2 - \lambda r$ por lo que las raíces son $r_1 = 0$ y $r_2 = \lambda < 0$. Luego, por la solución complementaria es
$$y_c(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t}\,.$$

Respecto a la solución particular, note que $y_p(t) = K$ es linealmente dependiente con la solución complementaria por lo que se propone $y_p(t) = Kt$, $\dot{y}_p(t) = K$, $\ddot{y}_p(t) = 0$. Al reemplazar en la ecuación diferencial,

$$0 - \lambda K = \alpha_2\beta \qquad \rightarrow \qquad K = -\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\,.$$

Con ello, la solución general es

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{\lambda t} + \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\right) t\,.$$

Esta trayectoria es divergente. La solución complementaria converge a cero, pero la particular crece linealmente con t (la pendiente es positiva). Finalmente,

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \lim_{t\to\infty} \left[C_2\lambda e^{\lambda t} + \left(-\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\right)\right] = -\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\,.$$

b) Para encontrar la trayectoria de $x(t)$, utilizamos $\alpha_2 x(t) = \dot{y}(t) + \alpha_2\gamma y(t)$. Así

$$\begin{aligned}\alpha_2 x(t) &= C_2\lambda e^{\lambda t} - \frac{\alpha_2\beta}{\lambda} + C_1\alpha_2\gamma + C_2\alpha_2\gamma e^{\lambda t} - \alpha_2\gamma\left(\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\right) t \\ &= C_1\alpha_2\gamma - \frac{\alpha_2\beta}{\lambda} + C_2(\lambda + \alpha_2\gamma)e^{\lambda t} - \alpha_2\gamma\left(\frac{\alpha_2\beta}{\lambda}\right) t\,.\end{aligned}$$

Utilizado las definición de λ se llega a

$$x(t) = C_1\gamma - \frac{\beta}{\lambda} + C_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) e^{\lambda t} + \left(-\frac{\alpha_2\gamma\beta}{\lambda}\right) t\,.$$

Esta trayectoria es también divergente. La solución complementaria converge a cero, pero la particular crece linealmente con t (la pendiente también es positiva). Finalmente,

$$\lim_{t\to\infty} \dot{y}(t) = \lim_{t\to\infty} \left[C_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\lambda e^{\lambda t} + \left(-\frac{\alpha_2\gamma\beta}{\lambda}\right)\right] = -\frac{\alpha_2\gamma\beta}{\lambda}\,.$$

c) Se tiene que

$$z(t) = x(t) - \gamma y(t) = C_1\gamma - \frac{\beta}{\lambda} + C_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) e^{\lambda t} - \left(\frac{\alpha_2\gamma\beta}{\lambda}\right) t - C_1\gamma - C_2\gamma e^{\lambda t} + \left(\frac{\alpha_2\gamma\beta}{\lambda}\right) t = -\frac{\beta}{\lambda} + C_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \gamma\right)\lambda^t$$

por lo que

$$z(t) = -\frac{\beta}{\lambda} + C_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \gamma\right)\lambda^t\,,$$

que es una trayectoria estable que converge a $-\beta/\lambda$.

d) Note que $\dot{z} = \dot{x} - \gamma\dot{y}$. Así, al restar γ veces la segunda ecuación de la primera,

$$\dot{x} - \gamma\dot{y} = (\alpha_1 - \alpha_2\gamma)(x - \gamma y) + \beta \qquad \rightarrow \qquad \dot{z} = \lambda z + \beta\,.$$

La solución complementaria es $z_c(t) = C_3 e^{\lambda t}$, donde C_3 es una constante arbitaria, mientras que la solución particular $\dot{z}_p(t) = 0$ es $z_p(t) = -\beta/\lambda$. Se verifica que $z(t)$ es como en *c*). ■

Análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones diferenciales

13. A continuación se presentan algunos modelos de ecuaciones diferenciales simultáneas. Estudie la naturaleza de los equilibrios y trayectorias de estos sistemas, a través del uso de diagramas de fase y técnicas de linealización.

a) La función de producción agregada de una economía que utiliza capital K como el único factor de producción es $Y = K^\alpha$, donde $0 < \alpha < 1$. El *stock* de contaminación P en esta economía se incrementa con la acumulación de capital. Si $0 < s < 1$ es la tasa de inversión, $0 < \delta < 1$ es la tasa de depreciación, $\beta > 1$ y $\gamma > 0$, las leyes de movimiento de K y P son

$$\dot{K} = sK^\alpha - \delta K \qquad \text{y} \qquad \dot{P} = K^\beta - \gamma P\,.$$

b) El número de peces P en un lago y la capacidad extractiva de una compañía pesquera K evolucionan de la siguiente manera

$$\dot{P} = P - P^2 - x \qquad \text{y} \qquad \dot{K} = px - cK\,,$$

donde x es la cantidad de peces extraídos, p es el precio de venta y c es el costo variable de extracción. La primera ecuación es una ecuación de crecimiento logístico, después de incluir la extracción, mientras que la segunda indica que la capacidad extractiva se incrementa con los beneficios que obtiene la firma. Considere que $p = c = 1$ y $x = P\sqrt{K}$.

c) El *modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans* establece las siguientes relaciones dinámicas entre el *stock* de capital per cápita de una econoía, k, y el consumo per cápita, c:

$$\dot{k} = \phi(k) - c - mk \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{c}}{c} = \phi'(k) - (m+\rho)\,.$$

La primera ecuación es una regla de acumulación de capital e indica que el capital per cápita se incrementa siempre que la inversión en nuevo capital, que es igual al ahorro $y - c$ donde $y = \phi(k)$ es el nivel de ingreso (producción), supere a la cantidad necesearia para reponer el capital depreciado, mk. La función $\phi(.)$ es cóncava, $\phi'(.) > 0$ y $\phi''(.) < 0$. La segunda ecuación (*llamada ecuación de Euler*) es el resultado de un problema de optimización dinámico, donde $\rho \in (0,1)$ es la tasa de descuento de los hogares.

d) N denota el número de empleados en una economía, mientras que S denota el tamaño de la población en edad de trabajar. Las tasas de crecimiento porcentual de N y S se definen según las ecuaciones diferenciales

$$\frac{\dot{N}}{N} = \rho\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\dot{S}}{S} = \alpha + \beta\left(\frac{N}{S-N}\right),$$

donde α es la tasa natural de crecimiento poblacional y el segundo término es una medida del efecto del empleo sobre el crecimiento poblacional. Se cumple que $1 > \rho > \alpha > \beta > 0$.

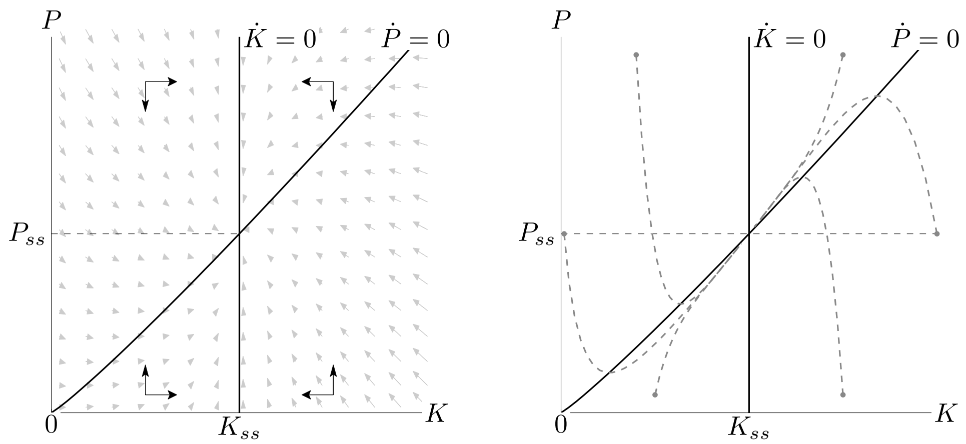
Solución:

a) Considere el plano (K, P). Las curvas de fase son (nótese que se han ignorado los casos donde $K = 0$ y $P = 0$, ya que se tratan de situaciones triviales)

$$\dot{K} = 0 \quad \rightarrow \quad K = \left(\frac{s}{\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad \text{y} \qquad \dot{P} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \left(\frac{1}{\gamma}\right)K^{\beta}\,,$$

y son mostradas en la Figura 3. La condición $\dot{K} = 0$ se cumple para un valor particular de K, sin importar el valor que P tome. Por ello, la curva $\dot{K} = 0$ es una línea vertical en el plano (K, P), sobre el valor de estado estacionario de K, K_{ss}. Por su parte, la curva $\dot{P} = 0$ corresponde a una curva creciente y convexa (recuerde que $\beta > 1$) que parte del origen.

Figura 3. *Acumulación de capital y contaminación*



(a) Curvas de fase (b) Trayectorias

Para dibujar las flechas que indican la dirección del movimiento en el diagrama de fase, considere

$$\left.\frac{\partial \dot{K}}{\partial K}\right|_{K=K_{ss}} = \delta(\alpha-1) < 0 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial \dot{P}}{\partial P}\right|_{K=K_{ss}} = -\gamma < 0\,.$$

Primero, veamos los movimientos horizontales, que corresponden a cambios en K. Dado que $\partial\dot{K}/\partial K < 0$, se tiene que $\dot{K} < 0$ en la región hacia la derecha de la curva de fase $\dot{K} = 0$, y $\dot{K} > 0$ en la región hacia la izquierda. Luego, las flechas apuntan hacia el oeste en la región hacia la derecha de la línea vertical en la 3(a) y hacia el este en la región hacia la izquierda.

Respecto a los movimientos verticales, que corresponden a cambios en P, dado $\partial\dot{P}/\partial P < 0$, se tiene que $\dot{P} < 0$ en la región por encima de la curva de fase $\dot{P} = 0$, y $\dot{P} > 0$ en la región por debajo. Así, las flechas apuntan hacia abajo en la región por encima de $\dot{P} = 0$ en la Figura 3(a) y hacia arriba en el resto del plano.

Al inspeccionar el gráfico final, no queda duda que el equilibrio es estable (todas las flechas apuntan hacia éste) y todo indica que se trata de un nodo (sin fluctuaciones). Para verificar este conclusión, el sistema linealizado en torno a (K_{ss}, P_{ss}) es

$$\begin{bmatrix} \dot{K} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta(\alpha-1) & 0 \\ \beta K_{ss}^{\beta-1} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K_{ss} \\ P - P_{ss} \end{bmatrix}$$

y, dado que la matrix Jacobiana es triangular, sus raíces vienen dadas por $r_1 = \delta(\alpha-1) < 0$ y $r_2 = -\gamma < 0$. Ambas son reales y negativas, confirmándose así que el equilibrio es un *nodo estable*. Algunas trayectorias resultantes de este análisis se presentan en la Figura 3(b). Distintas trayectorias corresponden a distintas condiciones iniciales. Note que las no-linealidades del sistema pueden producir dinámicas interesantes que conllevan a trayectorias que no son necesariamente monotónicas (especialmente, en P).

b) Cuando $p = c = 1$ y $x = P\sqrt{K}$, el sistema de ecuaciones diferenciales se reduce a

$$\dot{K} = K\left(\frac{P}{\sqrt{K}} - 1\right) \qquad \text{y} \qquad \dot{P} = P(1 - P - \sqrt{K})\,.$$

Las curvas de fase en el plano (K, P), para $K > 0$ y $P > 0$, son

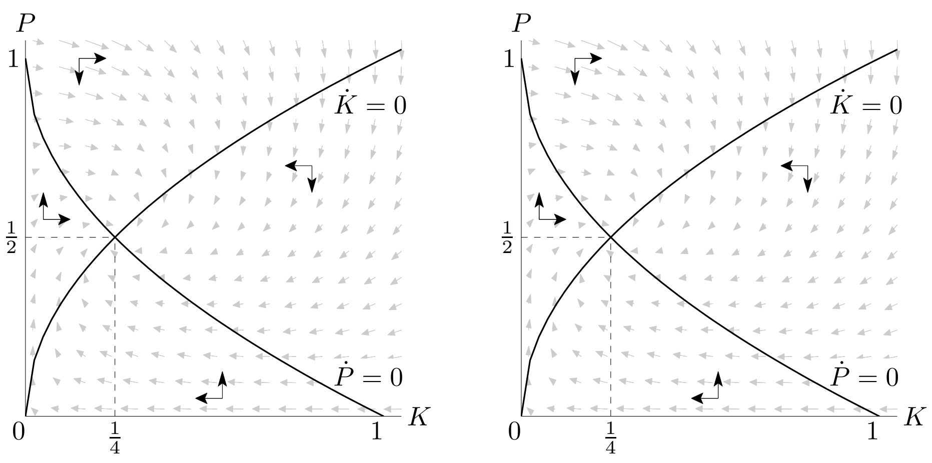
$$\dot{K} = 0 \quad \rightarrow \quad P = \sqrt{K} \qquad \text{y} \qquad \dot{P} = 0 \quad \rightarrow \quad P = 1 - \sqrt{K}\,,$$

y son mostradas en la Figura 4. La curva $\dot{P} = 0$ tiene pendiente negativa y cruza los puntos $(0,1)$ y $(0,1)$, mientras que la curva $\dot{K} = 0$ tiene pendiente positiva y cruza el origen. La intersección de ambas curvas se da en un único punto, el estado estacionario $(K_{ss}, P_{ss}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.

Para analizar los movimientos en el diagrama de fase, se tiene que

$$\frac{\partial \dot{K}}{\partial P} = \frac{K}{\sqrt{K}} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \dot{P}}{\partial K} = -\frac{1}{2}\frac{P}{\sqrt{K}} < 0\,.$$

Figura 4. *Modelo de pesca*



(a) Curvas de fase (b) Trayectorias

Para movimientos horizontales en el plano (K, P), es decir la dirección de cambio de K, dado que $\partial\dot{K}/\partial P > 0$, $\dot{K} > 0$ en la región por encima de la curva $\dot{K} = 0$, mientras que $\dot{K} < 0$ en la región complementaria. Luego, las flechas apuntan hacia el este en la región por encima de la curva de pendiente positiva de la Figura 4(a), y hacia el oeste en la región por debajo.

En cuanto a los movimientos verticales, que describen los cambios en P, dado que $\partial\dot{P}/\partial K < 0$, se concluye que $\dot{P} < 0$ en la región hacia la derecha de $\dot{P} = 0$, y $\dot{P} > 0$ en la región hacia la izquierda. Luego, las flechas apuntan hacia abajo en la región hacia la derecha de la curva $\dot{P} = 0$ en la Figura 4(a), y hacia arriba de otro modo.

Se concluye que el equilibrio es estable, ya que todas las flechas apunta hacia éste.

El sistema linealizado en torno al estado estacionario es

$$\begin{bmatrix} \dot{K} \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}P_{ss}(\sqrt{K_{ss}})^{-1} - 1 & \sqrt{K_{ss}} \\ -\frac{1}{2}P_{ss}(\sqrt{K_{ss}})^{-1} & 1 - 2P_{ss} - \sqrt{K_{ss}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - K_{ss} \\ P - P_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K - \frac{1}{4} \\ P - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Las raíces de este sistema son $r_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i)$. Esto es, se trata de un par de raíces complejas conjugadas cuya parte real es negativa. El equilibrio es, en consecuencia, una *espiral estable* (o *foco estable*). Algunas trayectorias, que dependen del punto de partida del sistema, se muestran en la Figura 4(b).

$c)$ Las curvas de fase en el plano (k, c) son

$$\dot{k} = 0 \quad \rightarrow \quad c = \phi(k) - mk \qquad \text{y} \qquad \dot{c} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi'(k) = m + \rho\,,$$

y se muestran en la Figura 5. La curva $\dot{k} = 0$ tiene forma de U invertida, como en la pregunta 6.b, mientras que la curva de fase $\dot{c} = 0$ corresponde a una línea vertical sobre el valor de estado estacionario de k. Los supuestos sobre la función $\phi(\cdot)$ garantizan que $\phi'(k) = m + \rho$ sea satisfecha para un único valor de k, k_{ss}. El valor de estado estacionario de c es simplemente $c_{ss} = \phi(k_{ss}) - mk_{ss}$.

Respecto a la dinámica del modelo en el plano (k, c), considere que

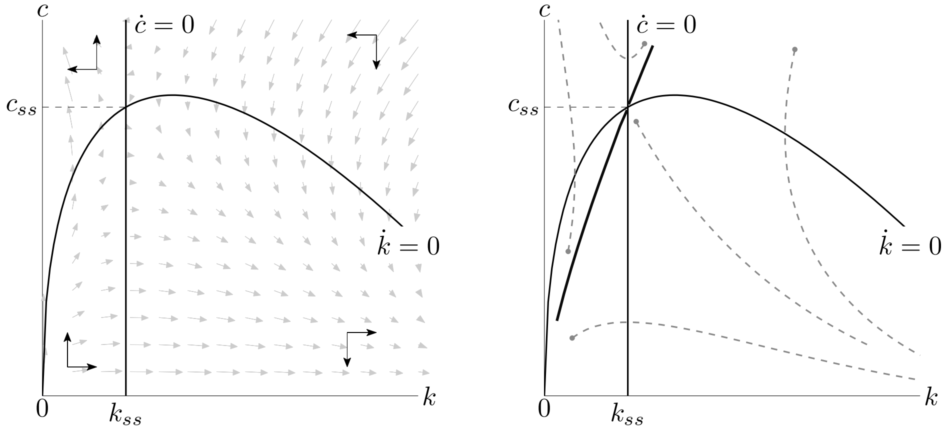
$$\frac{\partial\dot{k}}{\partial c} = -1 < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial\dot{c}}{\partial k} = \phi''(k)c < 0\,.$$

Para movimientos horizontales, que corresponden a cambios en k, dado que $\partial\dot{k}/\partial c < 0$, se tiene que $\dot{k} < 0$ por encima de la curva $\dot{k} = 0$, mientras que $\dot{k} > 0$ por debajo. Así, las flechas apuntan hacia el oeste en la región por encima de la curva $\dot{k} = 0$ en la Figura 5(a), y hacia el este en la otra región.

Respecto a los movimientos verticales, que son los asociados con c, dado que $\partial\dot{c}/\partial k < 0$, se consigue que $\dot{c} < 0$ hacia la derecha de la curva $\dot{c} = 0$, y $\dot{c} > 0$ hacia la izquierda. Por ello, las fechas apuntan hacia abajo en la región hacia la derecha de la línea vertical ($\dot{c} = 0$) en la Figura 5(a), y hacia arriba en la región hacia la izquierda.

Dado que las flechas apuntan al equilibrio únicamente en dos de las cuatro regiones en torno a éste, se concluye que este equilibrio es un punto de ensilladura.

Figura 5. *Modelo de crecimiento de Ramsey-Cass-Koopmans*



(a) Curvas de fase (b) Trayectorias

El sistema linealizado alrededor de (k_{ss}, c_{ss}) es

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi'(k_{ss}) - m & -1 \\ \phi''(k_{ss})c_{ss} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k_{ss} \\ c - c_{ss} \end{bmatrix}.$$

El determinante de la matriz Jacobiana es $\det(\boldsymbol{J}) = \phi''(k_{ss})c_{ss} < 0$. Ello implica dos raíces reales de signos opuestos, confirmando así que el equilibrio es un *punto de ensilladura*. En la Figura 15(b) se muestran trayectorias inestables en el diagrama de fase (las líneas grises punteadas) y la senda de ensilladura (la línea negra continua).

d) El sistema diferencial puede escribirse como

$$\dot{N} = f(N,S) = \rho N\left(1 - \frac{N}{K}\right) \qquad \text{y} \qquad \dot{S} = g(N,S) = \alpha S + \beta\left(\frac{NS}{S-N}\right).$$

De la función $f(N,S)$ se tiene que $\dot{N} = 0$ implica $N = 0$, una solución que se descarta, y

$$1 - \frac{N}{K} = 0 \qquad \rightarrow \qquad N = K\,.$$

Dado que esto ocurre para todo valor de N y S, se concluye que el estado estacionario es $\bar{N} = K$. Por su parte, de la función $g(N,S)$ se tiene que $\dot{S} = 0$ implica $S = 0$, una solución que también se descarta, y

$$\alpha + \beta\left(\frac{N}{S-N}\right) = 0 \qquad \rightarrow \qquad S = \left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\right)N\,.$$

Luego, en estado estacionario $\bar{S} = (\alpha - \beta)K/\alpha$.

En el plano (N,S), Figura 6, la primera curva de fase $\dot{N} = 0$ corresponde a una línea vertical, mientras que la segunda curva de fase $\dot{S} = 0$ es una función lineal de pendiente positiva que pasa por el origen. Las curvas de fase se muestran en la figura y dividen al plano en las cuatro regiones numeradas.

Para analizar la dinámica alrededor del estado estacionario se hace uso de derivadas parciales. Para los movimientos horizontales se tiene que

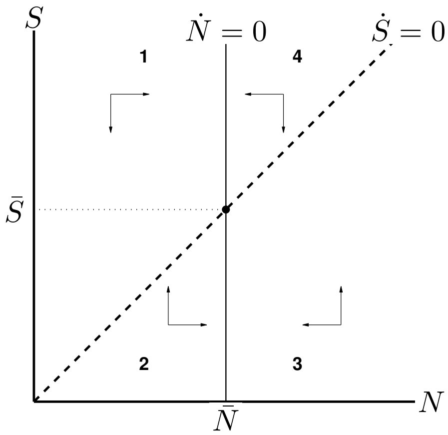
$$\frac{\partial\dot{N}}{\partial N} = f_N(N,S) = \rho\left(1 - 2\frac{N}{K}\right) \qquad \rightarrow \qquad f_N(\bar{N},\bar{S}) = \rho\left(1 - 2\frac{\bar{N}}{K}\right) = -\rho < 0\,.$$

Con esta derivada se concluye que en las regiones hacia la derecha de la curva $\dot{N} = 0$ (la dirección hacia donde N crece, regiones 3 y 4), $\dot{N} < 0$ por lo que se trazan flechas de derecha a izquierda. En las regiones 1 y 2 ocurre por el contrario que $\dot{N} > 0$, por lo que se trazan flechas con dirección opuesta.

Para los movimientos verticales se considera la derivada

$$\frac{\partial\dot{S}}{\partial N} = g_N(N,S) = \beta\left(\frac{S}{S-N}\right)^2 \qquad \rightarrow \qquad g_N(\bar{N},\bar{S}) = \beta\left(\frac{\bar{S}}{\bar{S}-\bar{N}}\right) = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\beta} > 0\,.$$

Figura 6. *Modelo de población y empleo*



Esta derivada sugiere que en las regiones hacia la derecha de la curva $\dot{S} = 0$ (las regiones 2 y 3), $\dot{S} > 0$ por lo que se trazan flechas hacia arriba. En las regiones restantes (1 y 4), ocurre que $\dot{S} < 0$ y se trazan flechas hacia abajo. Alternativamente, para los movimientos verticales puede considerarse

$$\frac{\partial \dot{S}}{\partial S} = g_S(N,S) = \alpha - \beta\left(\frac{N}{S-N}\right)^2 \qquad \to \qquad g_S(\bar{N},\bar{S}) = -\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta} < 0\,,$$

que sugiere que en las regiones hacia arriba de la curva $\dot{S} = 0$ (la dirección hacia donde S crece, regiones 1 y 4), $\dot{S} < 0$ por lo que se trazan flechas hacia abajo. En las regiones restantes (2 y 3), ocurre que $\dot{S} > 0$ y se trazan flechas hacia arriba. Al analizar la dinámica detrás del diagrama de fase, es fácil concluir que el equilibrio es un nodo estable.

El sistema linealizado en torno al estado estacionario $(\bar{N},\bar{S})$ es

$$\begin{bmatrix} \dot{N} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_N(\bar{N},\bar{S}) & f_S(\bar{N},\bar{S}) \\ g_N(\bar{N},\bar{S}) & g_S(\bar{N},\bar{S}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N-\bar{N} \\ S-\bar{S} \end{bmatrix}\,,$$

cuya matriz Jacobiana es

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ \dfrac{(\alpha-\beta)^2}{\beta} & -\dfrac{\alpha(\alpha-\beta)}{\beta} \end{bmatrix}.$$

Dado que $\boldsymbol{J}$ es triangular, sus valores propios son los elementos sobre su diagonal. Así $\lambda_1(\boldsymbol{J}) = -\rho < 0$ y $\lambda_2(\boldsymbol{J}) = -(\alpha/\beta)(\alpha-\beta) < 0$. Ambos son reales y negativos, lo que confirma que el estado estacionario $(\bar{N},\bar{S})$ es un nodo estable. ■

14. Sea x la población de peces en un lago e y el número de barcos de una compañía pesquera. La cantidad de peces varía según

$$\dot{x} = F(x) - H(x,y)\,,$$

y la cantidad de barcos según

$$\dot{y} = \alpha(\,H(x,y) - cy\,)\,.$$

La función $F(x)$ mide el crecimiento de la población de peces en ausencia de extracción, que es medida por $H(x,y)$:

$$F(x) = rx\left(1-\frac{x}{M}\right) \qquad \text{y} \qquad H(x,y) = xy\,,$$

donde $r \in (0,1)$, $0 < c < M$ y $\alpha > 0$.

a) Asumiendo que $x > 0$ y que $y > 0$, encuentre el estado estacionario del sistema.

b) Esboce el diagrama de fase de este sistema y caracterice al estado estacionario.

c) Calcule el Jacobiano de este sistema y determine si el estado estacionario es estable o inestable.

d) ¿Para qué valores de α el estado estacionario es un nodo? ¿Y un foco? ¿Y un punto de ensilladura?

Solución:

El sistema diferencial puede escribirse como

$$\dot{x} = rx\left(1-\frac{x}{M}\right) - xy \equiv f(x,y) \qquad \text{e} \qquad \dot{y} = \alpha(xy - cy) \equiv g(x,y)\,.$$

Las curvas de fase son

$$f(x,y) = 0 \quad \to \quad F(x) = H(x,y) \quad \to \quad y = r\left(1-\frac{x}{M}\right)\,,$$

y

$$g(x,y) = 0 \quad \to \quad H(x,y) = cy \quad \to \quad x = c\,.$$

a) El estado estacionario se encuentra en la intersección de las curvas de fase. Así,

$$\bar{x} = c \qquad \text{e} \qquad \bar{y} = r\left(1-\frac{c}{M}\right)\,.$$

Note que $\bar{x} < M$ y que $\bar{y} < r$.

b) El diagrama de fase se muestra en la Figura 7. En el plano (x, y), la curva de fase $g(x, y) = 0$ (o $\dot{y} = 0$) es una línea vertical sobre el punto $x = c$. Por su parte, la curva de fase $f(x, y) = 0$ (o $\dot{x} = 0$) es una línea recta de pendiente negativa que cruza el eje vertical en $y = r$ y el eje horizontal, en $x = M$.

Tomando un punto por debajo de $f(x, y) = 0$ se tiene que $f(x, 0) = F(x) - H(x, 0) = F(x) > 0$, lo que indica que x crece en la región debajo de esta curva ($\dot{x} > 0$, flechas hacia el este), mientras que x decrece en la región encima de esta curva ($\dot{x} < 0$, flechas hacia el oeste).

Asimismo, tomando un punto a la izquierda de $g(x, y) = 0$ se tiene que $g(0, y) = \alpha(H(0, y) - cy) = -\alpha cy < 0$, lo que indica que y crece en la región a la derecha de esta curva ($\dot{y} > 0$, flechas hacia el norte), mientras que y decrece en la región a la izquierda de esta curva ($\dot{y} < 0$, flechas hacia el sur). Al observar las fuerzas de movimiento combinadas, el estado estacionario tiene la apariencia de un foco estable.

En la Figura 7 se muestran algunos ejemplos de las trayectorias que seguirían x e y.

Se llega a la misma conclusión con el uso de derivadas parciales. En particular,

$$f_y(x, y) = -x < 0\,,$$

indica que $\dot{x} < 0$ por encima de $f(x, y) = 0$, mientras que

$$g_x(x, y) = \alpha y > 0\,,$$

indica que $\dot{y} > 0$ a la derecha de $g(x, y) = 0$.

c) Las derivadas parciales restantes son

$$f_x(x, y) = r - \frac{2r}{M}x - y \quad \rightarrow \quad f_x(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{r}{M}\bar{x}\,,$$

$$g_y(x, y) = \alpha(x - c) \quad \rightarrow \quad g_y(\bar{x}, \bar{y}) = 0\,.$$

Luego, la traza del Jacobiano es

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}) = f_x(\bar{x}, \bar{y}) + g_y(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{r}{M}c < 0\,,$$

y su determinante es

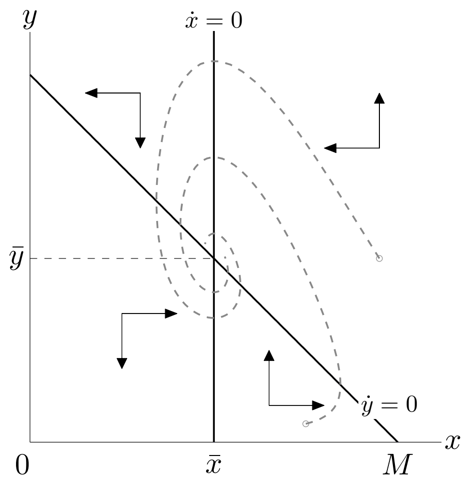
$$\det(\boldsymbol{J}) = f_x(\bar{x}, \bar{y})g_y(\bar{x}, \bar{y}) - f_y(\bar{x}, \bar{y})g_x(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha c\bar{y} > 0\,.$$

Se concluye, luego, que la parte real de ambas raíces tienen el mismo signo ($\det(\boldsymbol{J}) > 0$) negativo ($\operatorname{tr}(\boldsymbol{J}) < 0$). El estado estacionario es un equilibrio estable.

d) El discriminante del Jacobiano es

$$\operatorname{di}(\boldsymbol{J}) = \operatorname{tr}(\boldsymbol{J})^2 - 4\det(\boldsymbol{J}) = \left(\frac{r}{M}\right)^2 c^2 - 4\alpha c\bar{y}\,.$$

Figura 7. *Modelo de pesca*



El valor de α que vuelve cero el discriminante es

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{M}\right)^2 \frac{c}{\bar{y}} = \frac{1}{4}\left(\frac{r}{M}\right)\frac{c}{M-c},$$

tal que si $\alpha \leq \bar{\alpha}$ el discriminante sería no negativo, las raíces de $\boldsymbol{J}$ reales y el estado estacionario, un nodo estable. En cambio, si $\alpha > \bar{\alpha}$ el discriminante sería negativo, las raíces de $\boldsymbol{J}$ complejas conjugadas y el estado estacionario, un foco estable.

El estado estacionario nunca puede ser un punto de ensilladura. ■

15. *a*) Considere una versión dinámica del conocido modelo IS-LM, que incorpora un mecanismo de ajuste parcial para el nivel de producción (y) y la tasa de interés (r):

$$\dot{y} = \alpha(I(r,y) - S(r,y)) \qquad \text{and} \qquad \dot{r} = \lambda(L(r,y) - M),$$

donde $I(\cdot)$ es la función de inversión que satisface $I_r < 0$ e $I_y \geq 0$, $S(\cdot)$ es la función de ahorro que satisface $S_r \geq 0$ y $S_y > 0$, $\alpha > 0$ es la tasa de ajuste del producto, $L(\cdot)$ es la demanda de dinero que satisface $L_r < 0$ y $L_y > 0$, $\lambda > 0$ es la tasa de ajuste de la tasa de interés, y M es la oferta monetaria exógena.

Grafique el diagrama de fase correspondiente y analice la dinámica de este sistema. Realice, finalmente, un ejercicio de *dinámica comparativa* donde, partiendo de una situación de equilibrio, se incrementa M.

b) En una segunda versión de este modelo, se asume que el mercado de dinero se "limpia" instantáneamente, pero el producto sigue ajustándose gradualmente. Se asume, además, que tanto ahorro como inversión responden a una tasa de interés de mayor plazo R, en lugar de la tasa que equilibra el mercado de dinero r. Así,

$$\dot{y} = \alpha(I(R,y) - S(R,y)), \qquad L(r,y) - M = 0 \qquad \text{y} \qquad R - \dot{R}/R = r,$$

donde, como en la parte *a*), $I_R < 0$, $I_y \geq 0$, $S_R \geq 0$, $S_y > 0$, $\alpha > 0$, $L_r < 0$ y $L_y > 0$. La tercera ecuación es una *curva de rendimiento* que vincular a r con R.

Repita el análisis de la parte *a*) para este nuevo modelo.

Solución:

a) En este modelo, cuando la inversión excede al ahorro, el producto se incrementa gradualmente, mientras que cuando la demanda por dinero excede a la oferta, la tasa de interés se incrementa hasta reestablecer el equilibrio.

Las curvas de fase corresponden a las conocidas curvas IS y LM:

$$\text{(IS)} \quad \dot{y} = 0 \quad \to \quad I(r,y) = S(r,y) \qquad \text{y} \qquad \text{(LM)} \quad \dot{r} = 0 \quad \to \quad L(r,y) = M,$$

donde sus pendientes en el plano (y,r) son

$$\left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{\text{IS}} = -\frac{I_y - S_y}{I_r - S_r} < 0 \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{\partial r}{\partial y}\right|_{\text{LM}} = -\frac{L_y}{L_r} > 0.$$

De los signos de estas derivadas parciales, se infiere que la curva IS tiene pendiente negativa toda vez que $I_y < S_y$. Asumimos que éste es el caso (de hecho, usualmente se considera que $I_y = 0$). La curva LM, por su parte, tiene inequívocamente pendiente positiva.

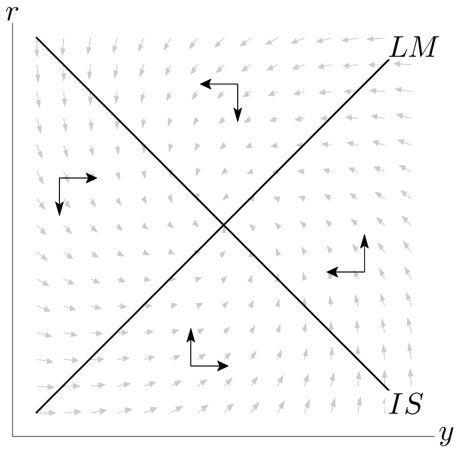
El sistema linealizado en torno al estado estacionario (y_{ss}, r_{ss}) es

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(I_y - S_y) & \alpha(I_r - S_r) \\ \lambda L_y & \lambda L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - y_{ss} \\ r - r_{ss} \end{bmatrix}.$$

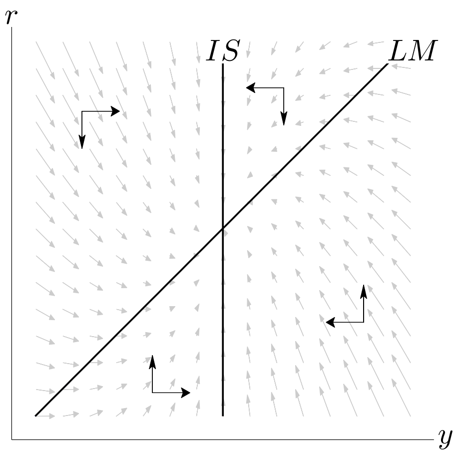
Note que $\det(\boldsymbol{J}) = \alpha\lambda[(I_y - S_y)L_r - (I_r - S_r)L_y]$ y $\text{tr}(\boldsymbol{J}) = \alpha(I_y - S_y) + \lambda L_r$. Bajo el supuesto que la curva IS tiene pendiente negativa, $\det(\boldsymbol{J}) > 0$ y $\text{tr}(\boldsymbol{J}) < 0$. Luego, este supuesto resulta ser una condición suficiente para la estabilidad del sistema, véase la Figura 8(a).

Queda, sin embargo, concluir si el equilibrio es un nodo o una espiral (foco). Ello dependerá del signo de $\text{di}(\boldsymbol{J}) = \text{tr}(\boldsymbol{J})^2 - 4\det(\boldsymbol{J})$. Muchas de las ideas del debate macroeconómico clásico entre Keynesianos y Monetaristas se ven reflejados en las diversas dinámicas implicadas en este modelo:

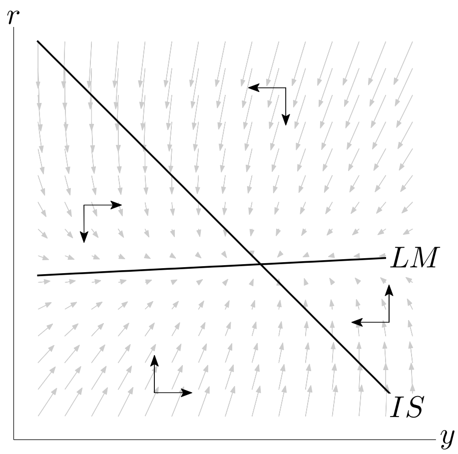
Figura 8. *Modelo IS-LM dinámico*



(a) ¿Nodo estable o foco estable?



(b) Insesibilidad del gasto, $I_r - S_r \to 0$



(c) Trampa de liquidez, $L_r \to -\infty$

- Bajo la *tradición Keynesiana*, el gasto es menos sensible a la tasa de interés que la demanda por dinero. En el extremo, se puede pensar en $I_r - S_r = 0$, que implica una curva IS completamente inelástica, como se ilustra en la Figura 8(b). En el otro extremo, podría asumirse que la demanda por dinero es perfectamente elástica, $L_r \to -\infty$ como se muestra en la Figura 8(c). Ambos casos conllevan a que $\mathrm{di}(\boldsymbol{J}) > 0$ y que el equilibrio sea un *nodo estable*.
- Por su parte, los *Monetaristas* sostendrán que la demanda por dinero es estable y que el gasto es sensible a r. En el caso más simple se tendría que $L_r = 0$ y, por tanto, que $\mathrm{di}(\boldsymbol{J}) < 0$, dando como resultado un *foco estable*. Bajo esta óptica, las fluctuaciones macroeconómicas son inevitables.

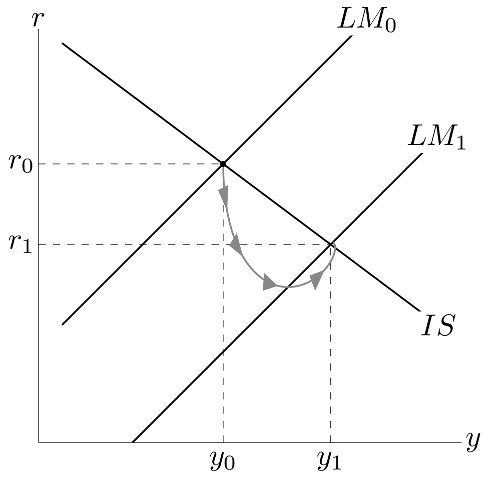
Dinámica comparativa: Suponga que se parte de una situación de equilibrio y ocurre un incremento exógeno en la oferta monetaria M, ver Figura 9(b). Este incremento desplaza la curva LM (que es la curva de fase $\dot{r} = 0$) hacia la derecha. Luego del cambio, la economía se encuentra sobre la curva $\dot{y} = 0$ pero por encima de la nueva curva $\dot{r} = 0$. Acá, la tasa de interés es mayor a la de equilibrio, y la producción es menor. Luego, la tasa de interés tenderá a reducirse y el producto a aumentar como parte del ajuste hacia el nuevo equilibrio. Este ajuste podría no ser monotónico, dada la posibilidad de que el equilibrio sea un foco, como se ilustra en la Figura 9.

b) De la tercera ecuación se tiene que en estado estacionario $R = r$, lo que implica que las curvas $\dot{y} = 0$ y $\dot{R} = 0$ (las curvas IS y LM) y el equilibrio son los mismos que en el modelo de la parte *a*). La dinámica en torno al equilibrio, no obstante, es diferente.

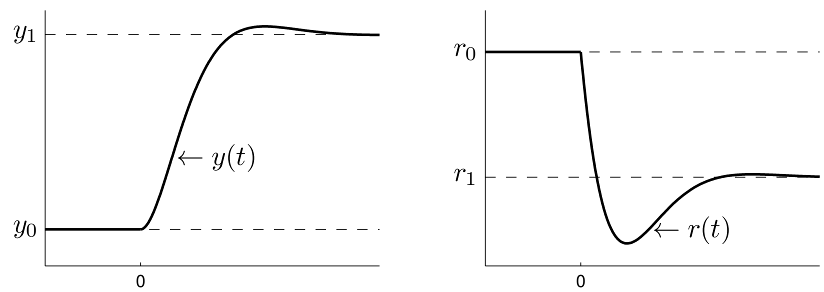
Para linealizar el sistema, note que de la tercera ecuación se obtiene que

$$\dot{R} = R(R - r) \simeq (2R_{ss} - r_{ss})(R - R_{ss}) - R_{ss}(r - r_{ss}),$$

Figura 9. *Expansión monetaria en el modelo IS-LM dinámico*



(a) Cambio en la curva de fase LM



(b) Trayectorias $y(t)$ y $r(t)$ después de la expansión monetaria

mientras que de la demanda por dinero se consigue $L_y(y - y_{ss}) + L_r(r - r_{ss}) = 0$. Así, utilizando la condición de equilibrio $R_{ss} = r_{ss}$, el sistema linealizado es

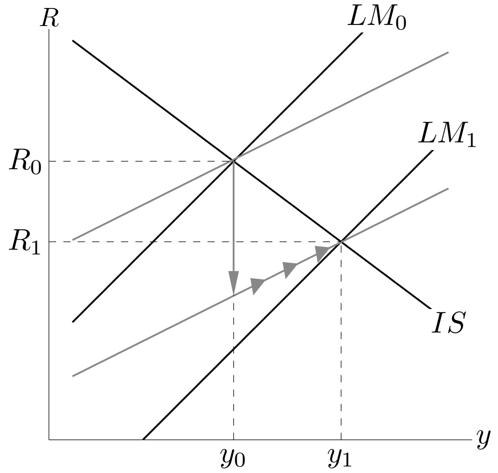
$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(I_y - S_y) & \alpha(I_r - S_r) \\ r_{ss}L_y/L_r & r_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y - y_{ss} \\ R - R_{ss} \end{bmatrix}.$$

En este caso, $\det(\boldsymbol{J}) = \alpha\, r_{ss}[(I_y - S_y) - (I_r - S_r)L_y/L_r]$ que es un número negativo si la curva IS tiene pendiente negativa. Así, al contrario de lo ocurrido en la parte a), el equilibrio corresponde a un *punto de ensilladura.*

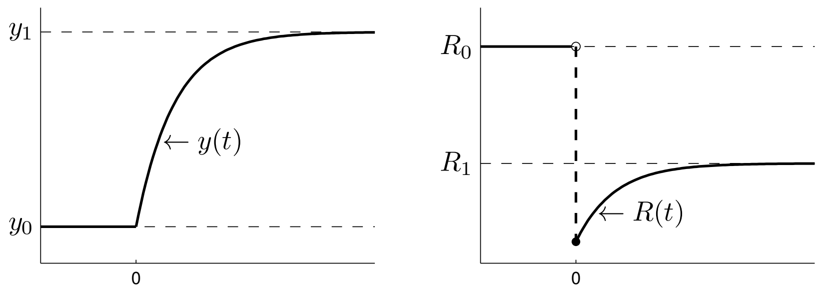
Dinámica comparativa: En esta versión del modelo, las tasas de interés no se ajustan gradualmente, sino que "saltan" ante cambios exógenos. Así, una expansión de una curva LM hará que R caiga inmediatamente del equilibrio inicial a la senda de ensilladura correspondiente a la nueva curva LM y al nivel de equilibrio inicial del producto (que sí se ajusta gradualmente). Una vez sobre la senda de ensilladura, tanto y como R se incrementan monotónicamente hacia el nuevo equilibrio.

■

Figura 10. *Expansión monetaria en el modelo IS-LM con ajuste instantáneo en el mercado de dinero*



(a) Cambio en la curva de fase LM



(b) Trayectorias $y(t)$ y $r(t)$ después de la expansión monetaria