Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2016
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, E. Mantilla, D. Bohorquez y C. Aparicio

Examen Final

SECCIÓN I

1. Ecuación en diferencias de segundo orden (4 ptos)

Considere la ecuación en diferencias

$$y_t - 2\rho\cos(\theta)\, y_{t-1} + \rho^2 y_{t-2} = b_t\,,$$

donde $0 < \rho < 1$ y $\theta \in (0, \pi)$.

a) **(2 ptos)** Si $b_t = b$ (constante), encuentre la trayectoria de $y(t)$ considerando que $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) = 0$.

b) **(2 ptos)** Si b_t es una función arbitraria de t, la solución particular tendrá la forma

$$y_p(t) = \sum_{h=0}^{\infty} w_h b_{t-h}\,.$$

Encuentre una expresión, lo más simple posible y en términos de ρ y θ, para el coeficiente w_h.

Ayuda: Recuerde que $\dfrac{1}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)} = \dfrac{1}{r_1 - r_2}\left(\dfrac{r_1}{1-r_1 z} - \dfrac{r_2}{1-r_2 z}\right)$.

2. Sistema en diferencias (4 ptos)

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x_t - x_{t-1} &= \alpha_1(x_{t-1} - \gamma y_{t-1}) + \beta\,, \\ y_t - y_{t-1} &= \alpha_2(x_{t-1} - \gamma y_{t-1})\,, \end{aligned}$$

donde $\beta > 0$. Defina $\lambda = 1 + \alpha_1 - \alpha_2\gamma$ y asuma que $|\,\lambda\,| < 1$.

a) **(2 ptos)** Defina la variable

$$z_t = x_t - \gamma y_t\,.$$

A partir del sistema presentado, deduzca una ecuación en diferencias para z_t, $z_t = f(z_{t-1})$, y resuélvala considerando que $z(0) = (1+\delta)\beta/(1-\lambda)$ donde $\delta > 0$. Analice la estabilidad de $z(t)$.

b) **(2 ptos)** Deduzca una ecuación en diferencias de primer orden y con término móvil para y_t, $y_t = f(y_{t-1}, t)$, y resuélvala considerando que $y(0) = y_0$. Analice la estabilidad de $y(t)$.

3. Ecuación diferencial de primer orden (3 ptos)

Considere la ecuación diferencial

$$\dot{y} = (a_1 - y)(y - a_2)(y - a_3)\,,$$

donde $0 < a_1 < a_2 < a_3$.

a) **(1 pto)** Encuentre los estados estacionarios de y, e indique si se tratan de puntos estables o inestables.

b) **(2 ptos)** Con el mayor detalle posible, esboce el diagrama de fase y describa el comportamiento de la trayectoria $y(t)$ considerando diversos puntos iniciales $y(0)$.