



Departamento Académico de Economía

Matemáticas III (130651)

Segundo Semestre 2016

Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, C. Aparicio e Y. García

Práctica Calificada 2

1. Matrices antisimétricas (6 ptos)

Una matriz M de dimensión $n \times n$ es *antisimétrica* si $M = -M'$. Suponga que A es antisimétrica:

- (1 pto) Muestre que para cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $x'Ax = 0$.
- (2 ptos) Muestre que si λ es un valor propio de A , entonces $-\lambda$ también lo es.
- (1 pto) Muestre que si n es impar, entonces A es singular.
- (2 ptos) Muestre que los valores propios no nulos de A son números imaginarios puros ($\pm qi$).

2. Raíz cuadrada de una matriz (4 ptos)

Se sabe que $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 9$ son dos valores propios de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 1 \\ -7 & 18 & -7 \\ 1 & -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

- (2 ptos) Encuentre las matrices P y D tales que $A = PDP'$.
- (2 ptos) Encuentre una matriz B cuadrada tal que $A = BB'$.

3. Diagonalización de formas cuadráticas (4 ptos)

Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (2 ptos) Si se sabe que $\lambda_1 = 2$ es un valor propio de A , encuentre las matrices P y D tales que $A = PDP'$.
- (2 ptos) Sea $Q(x) = x'Ax$ la forma cuadrática asociada. Expresa $Q(x)$ exclusivamente como una suma de cuadrados y determine el signo (tipo) de $Q(x)$.

4. Misceláneos (6 ptos)

Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- (2 ptos) Si A es una matriz no nula de dimensión $n \times n$ y x es un vector de \mathbb{R}^n , entonces $Q(x) = \|Ax\|^2$ es tal que $Q(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
- (2 ptos) Sea s el vector suma (un vector lleno de unos) en \mathbb{R}^n . Si

$$A = I_n - \frac{ss'}{n},$$

entonces $Q(x) = x'Ax$ nunca podrá ser un número negativo.

- (2 ptos) Si A es una matriz de dimensión $n \times n$ simétrica e idempotente de rango $r < n$, entonces la forma cuadrática $Q(x) = x'Ax$ puede ser expresada como la suma de r cuadrados.