Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (30651)
Primer Semestre 2016
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, E. Mantilla, D. Bohorquez y C. Aparicio

Práctica Calificada 2

1. Una matriz de 3 x 3 (4 ptos)

Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & d & a \end{bmatrix},$$

donde a, b, c y d son escalares reales.

a) **(2 ptos)** Si se sabe que $e^{\frac{\pi}{2}i}$, donde i es la unidad imaginaria, es un valor propio de $\boldsymbol{A}$ y que $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 1$, encuentre a y c.

b) **(2 ptos)** Si se sabe, además, que $\boldsymbol{A}$ es una matriz ortogonal, encuentre b y d.

2. Manipulación de matrices (5 ptos)

Para una matriz $\boldsymbol{X}$ de dimensión $n \times n$ y escalares reales $\{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, defina el polinomio matricial

$$f(\boldsymbol{X}) = c_0\boldsymbol{I}_n + c_1\boldsymbol{X} + c_2\boldsymbol{X}^2 + \cdots + c_m\boldsymbol{X}^m .$$

Esta función evaluada en un escalar x da como resultado el polinomio

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m .$$

a) **(3 ptos)** Muestre que si λ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$, entonces $f(\lambda)$ es un valor propio de $f(\boldsymbol{A})$.

b) **(2 ptos)** Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente de rango k, encuentre $\det(\, f(\boldsymbol{A})\,)$.

3. Raíz cuadrada de una matriz (6 ptos)

Considere la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

a) **(2 ptos)** Encuentre las matrices $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{P}$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}'$.

b) **(3 ptos)** Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *definida positiva* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

c) **(1 pto)** Encuentre una matriz $\boldsymbol{B}$ *no definida* tal que $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{A}$.

4. Misceláneos (5 ptos)

Demuestre los siguientes postulados:

a) **(1.5 ptos)** Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios distintos de una matriz $\boldsymbol{A}$, con vectores propios respectivos $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$, entonces $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ es un conjunto linealmente independiente.

b) **(1.5 ptos)** Considere la matriz $\boldsymbol{A}$ y defina $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}^{-1}$, donde $\boldsymbol{S}$ es una matriz no singular. Luego, los valores propios de $\boldsymbol{B}$ son iguales a los valores propios de $\boldsymbol{A}$.

Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones:

c) **(1 pto)** Si $\boldsymbol{A}$ es una matriz idempotente de rango completo, entonces $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$ únicamente para $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

d) **(1 pto)** Si $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$ para todo $\boldsymbol{x}$, entonces $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} < 0$ y $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} < 0$.