Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130651)
Segundo Semestre 2016
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, C. Aparicio e Y. García

Práctica Calificada 3

1. Transformaciones (3 ptos)

El precio del bien i es p_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) y su función de demanda es $D_i(\boldsymbol{p})$, donde $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$. Los bienes son complementarios, lo que implica que para $i \neq j$,

$$\frac{\partial D_j(\boldsymbol{p})}{\partial p_i} \leq 0\,.$$

La matriz Jacobiana de la transformación $F(\boldsymbol{p}) = (D_1(\boldsymbol{p}), D_2(\boldsymbol{p}), \ldots, D_n(\boldsymbol{p}))'$ es la matriz $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$.

a) **(1 pto)** Calcule la traza de $\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})$ y determine su signo, considerando que se cumple la ley de demanda.

b) **(1 pto)** Sea $\boldsymbol{s}$ el vector suma de $\mathbb{R}^n$. Calcule $\boldsymbol{s}'\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\boldsymbol{s}$ y determine su signo.

c) **(1 pto)** Si $D_i(\boldsymbol{p})$ es una función homogénea de grado α, entonces para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$\det(\,\boldsymbol{J}_F(\lambda\boldsymbol{p})\,) = \lambda^\beta \det(\,\boldsymbol{J}_F(\boldsymbol{p})\,)\,.$$

Halle β.

2. Series de potencias (4 ptos)

a) **(2 ptos)** Exprese la integral

$$S = \int_0^\alpha e^{-t^2} dt$$

como una suma de infinitos términos.

b) **(2 ptos)** Encuentre la representación como series de potencias y el rango de convergencia de

$$f(x) = \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt\,.$$

3. Estática comparativa (8 ptos)

Una firma produce un bien de acuerdo con la función de producción

$$Y = F(N, K)\,, \tag{1}$$

donde Y es la cantidad producida, N es mano de obra y K es capital. Las derivadas parciales (de primer y segundo orden) de la función $F(\cdot,\cdot)$ satisfacen, para todo (N, K),

$$F_N > 0\,, \qquad F_K > 0\,, \qquad F_{NN} < 0\,, \qquad F_{KK} < 0 \qquad \text{y} \qquad F_{NN}F_{KK} - (F_{NK})^2 > 0\,.$$

Sea $P > 0$ el precio del bien, que se asume exógeno. En el corto plazo, K es exógeno y N se determina a partir de la ecuación

$$P \times F_N(N, K) - 1 = 0\,. \tag{2}$$

En el largo plazo, N se determina nuevamente a partir de (2) mientras que K pasa a ser endógeno y se determina a partir de

$$P \times F_K(N, K) - 1 = 0\,. \tag{3}$$

Para el modelo de corto plazo:

a) **(1 pto)** Plantee un sistema linealizado (en términos de diferenciales o de derivadas parciales) que relacione las variables endógenas con las variables exógenas.

b) **(1 pto)** ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $Y = f_{\text{CP}}(P, K)$ y $N = g(P, K)$?

c) **(1 pto)** La función $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ es la curva de oferta de corto plazo. Calcule la derivada parcial de $f_{\text{CP}}(\cdot,\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta) y con respecto a K.

Para el modelo de largo plazo:

d) **(1 pto)** Plantee un sistema linealizado que relacione las variables N y K con P.

e) **(1 pto)** ¿Cuál es la condición necesaria para la existencia de las funciones $N = G_1(P)$ y $K = G_2(P)$?

f) **(1 pto)** Calcule las derivadas de $G_1(\cdot)$ y $G_2(\cdot)$ con respecto a P.

g) **(1 pto)** La función $f_{\text{LP}}(P) = F(G_1(P), G_2(P))$ es la curva de oferta de largo plazo. Calcule la derivada de $f_{\text{LP}}(\cdot)$ con respecto a P (la pendiente de la curva de oferta).

h) **(1 pto)** Asuma por simplicidad que $F_{NK} = 0$. El *principio de Le Châtelier* sostiene que la pendiente de la curva de oferta de largo plazo es mayor que la pendiente de la curva de oferta de corto plazo ¿Se cumple el principio de Le Châtelier en este modelo?

4. Ecuaciones diferenciales (5 ptos)

Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:

a) **(2.5 ptos)** $(1 - t^2)\dot{y} + t(y - a) = 0$, donde $a > 0$, $0 \le t < 1$ e $y(0) = 2a$.

b) **(2.5 ptos)** $(t + a)\dot{y} = ty$, donde $a > 0$, $t \ge 0$ e $y(0) = 3a^{-a}$.