Departamento Académico de Economía
Matemáticas III (130651)
Segundo Semestre 2016
Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, C. Aparicio e Y. García

Examen Parcial

SECCIÓN I

1. Matrices canónicas (6 ptos)

Esta pregunta generaliza las nociones vectoriales de producto interno, norma y base canónica para un contexto matricial.

Sean $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1\leq i\leq n} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ los vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. Definimos las *matrices canónicas* de orden $n \times n$ como el producto matricial

$$\boldsymbol{E}_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j{}' \,,$$

mientras que el producto interno de dos matrices canónicas se define como

$$\langle \boldsymbol{E}_{ij}, \boldsymbol{E}_{rs}\rangle = (\boldsymbol{e}_i{}'\boldsymbol{e}_r)(\boldsymbol{e}_j{}'\boldsymbol{e}_s)\,.$$

a) **(1 pto)** Para el caso $n = 3$, calcule $\boldsymbol{E}_{21}$ y $\boldsymbol{E}_{33}$.

b) **(1 pto)** Pruebe que, para cualquier n, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{\boldsymbol{E}_{ij}\}_{1\leq i,j\leq n} = \{\boldsymbol{E}_{11}, \ldots, \boldsymbol{E}_{1n}, \ldots, \boldsymbol{E}_{i1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{ij}, \ldots, \boldsymbol{E}_{in}, \ldots, \boldsymbol{E}_{n1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{nn}\}$$

genera el espacio de matrices de orden $n \times n$.

c) **(1 pto)** Utilizando el producto interno matricial, muestre que $\mathcal{S}$ es un conjunto ortogonal.

d) **(1 pto)** Muestre que todos los elementos de $\mathcal{S}$ tienen norma unitaria.

e) **(1 pto)** Usando matrices canónicas, determine una base del subespacio $\mathcal{T}$ de matrices triangulares superiores de orden $n \times n$, justificando debidamente la condición de base.

f) **(1 pto)** Calcule la dimensión de $\mathcal{T}$.

2. Diagonalización (5 ptos)

Considere tres escalares a, b y c, y la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

¿Es la matriz $\boldsymbol{A}$ diagonalizable...

a) **(1 pto)** ... si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$?

b) **(1 pto)** ... si $a = b \neq c$?

c) **(1 pto)** ... si $a = b = c$?

d) **(1 pto)** ... si $a \neq b$ y $b = c$?

e) **(1 pto)** ... si $a = c$ y $b \neq c$?