



Departamento Académico de Economía

Matemáticas III (30651)

Segundo Semestre 2016

Profesores D. Winkelried, O. Bueno, J. Zúñiga, D. Bohorquez, C. Aparicio e Y. García

## Examen Final

### SECCIÓN I

#### 1. Modelo de pesca (5.5 ptos)

Sea  $x$  la población de peces en un lago e  $y$  el número de barcos de una compañía pesquera. La cantidad de peces varía según

$$\dot{x} = F(x) - H(x, y),$$

y la cantidad de barcos según

$$\dot{y} = \alpha(H(x, y) - cy).$$

La función  $F(x)$  mide el crecimiento de la población de peces en ausencia de extracción, que es medida por  $H(x, y)$ :

$$F(x) = rx \left(1 - \frac{x}{M}\right) \quad \text{y} \quad H(x, y) = xy,$$

donde  $r \in (0, 1)$ ,  $0 < c < M$  y  $\alpha > 0$ .

- (1 pto)** Asumiendo que  $x > 0$  y que  $y > 0$ , encuentre el estado estacionario del sistema.
- (2 ptos)** Esboce el diagrama de fase de este sistema y caracterice al estado estacionario.
- (1 pto)** Calcule el Jacobiano de este sistema y determine si el estado estacionario es estable o inestable.
- (1.5 ptos)** ¿Para qué valores de  $\alpha$  el estado estacionario es un nodo? ¿Y un foco? ¿Y un punto de ensilladura?

#### 2. Sistema en diferencias (4 ptos)

Considere el sistema

$$x_t = c(x_{t-1} + y_{t-1}),$$

$$y_t = c(y_{t-1} + z_{t-1}),$$

$$z_t = c(z_{t-1} + x_{t-1}),$$

donde  $c$  es una constante.

- (2.5 ptos)** ¿Para qué valores de  $c$  el sistema anterior es estable?  
*Ayuda:* Recuerde que  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .
- (1.5 ptos)** Suponga que  $c = \frac{1}{2}$ . Describa con el mayor detalle posible la trayectoria de  $x(t)$ .