LICENCIATURAS EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Unidade Curricular: **ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Ano Letivo: **2015/2016**

EXAME DA ÉPOCA NORMAL - TESTE B » Data: 27/06/2016 — Código da prova: **2706201601**

Nota: A resolução completa dos exercícios inclui a justificação do raciocínio utilizado. — **Duração:** 2h30+30m

Nome do aluno: — **Número:**

1. Considere as funções reais de duas variáveis reais definidas por:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2\,;$$

$$g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)}\,; \quad h(x,y) := \left|\begin{array}{l} \text{se} \quad x^2+y^2 \le 9 \\ \text{então } z = \frac{\sqrt{27}}{3}\, g(x,y) \end{array}\right. ; \quad j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{36+f(x,y)} & \text{, se } 9 < x^2+y^2 \le 36 \\ h(x,y) \end{cases}$$

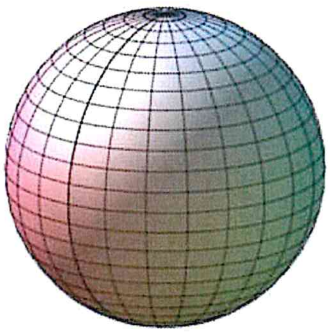


Figura 1

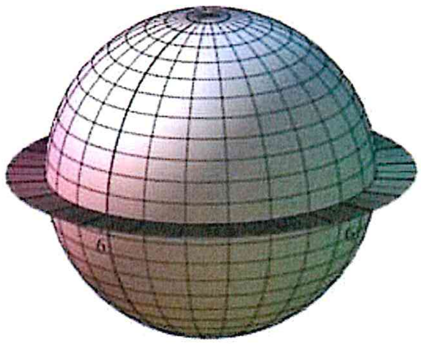


Figura 2

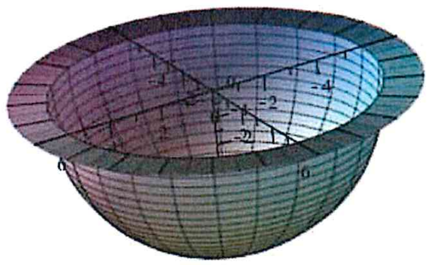


Figura 3

[1.0] **(a)** Determine o domínio da função j e represente-o geometricamente. O domínio é fechado? Justifique.

[1.0] **(b)** Defina a função j em forma de algoritmo e mostre que $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$ é uma curva de nível comum a todas as funções.

[2.0] **(c)** Identifique as superfícies associadas às funções e trace um esboço das mesmas.

[3.0] **(d)** Resolva apenas <u>três</u> das alíneas seguintes.

Qual o valor lógico das seguintes afirmações? Justifique a sua resposta.

i) Das figuras 1, 2 e 3, apenas a figura 2 representa o gráfico de uma função real de duas variáveis.

ii) O vetor $\begin{bmatrix} 4 & y & -\sqrt{20} \end{bmatrix}$ define a equação da reta tangente à curva de intersecção da superfície $z = j(x,y)$ com o plano $x = 4$ no ponto de coordenadas $P(4,0,2\sqrt{5})$.

iii) A função j é contínua nos pontos do *cordão de soldadura* definido por $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\right\}$.

iv) As funções f, g e h têm um mínimo absoluto em $(0,0)$ e a função j não tem extremos.

v) A função seguinte, definida em Maple, é simétrica da função j

```
M:=(x, y)->piecewise(x^2+y^2 <= 9, sqrt(27(x^2+y^2))/3, 9 < x^2+y^2 <= 36,
                      sqrt(36-x^2-y^2), undefined)
```

[3.0] **(e)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>duas</u>

i) Supondo que a temperatura em qualquer ponto do plano xOy é dada por $T = g(x,y)$, a taxa de variação máxima da temperatura no ponto $P(2,2)$ ocorrem na direção e sentido do vetor $\vec{w} = \langle -1,-1 \rangle$?

Justifique a sua resposta e determine a taxa de variação da temperatura em P segundo o vetor $\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$.

ii) Supondo que o potencial em qualquer ponto do plano xOy é dado por $V = g(x,y)$, utilizando diferenciais, obtenha uma aproximação da diferença do potencial entre os pontos $(1.75,1.75)$ e $(2,2)$.

iii) Mostre que se $z = -f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4 + f(x, y-1)$ se $x^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P\left(0,1,4\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 5 representa um sólido, de densidade igual a 5, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 3$ e altura $h = 2$;
- Cilindro de raio $r = 3$ e altura $h = \sqrt{27} - 2$;
- Segmento de esfera de raio $r = 6$.

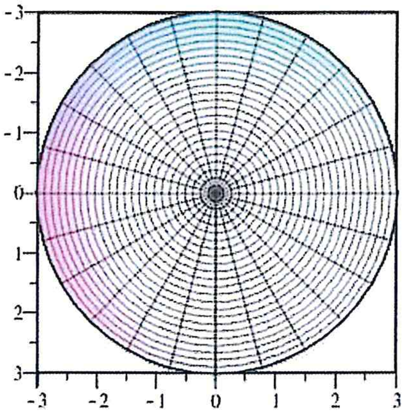


Figura 4

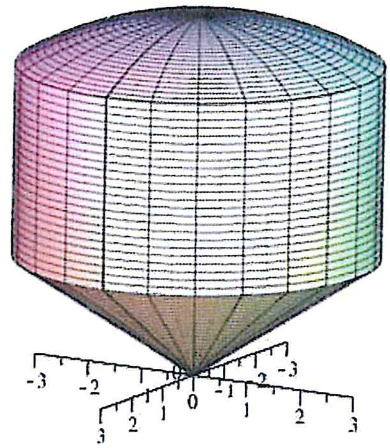


Figura 5

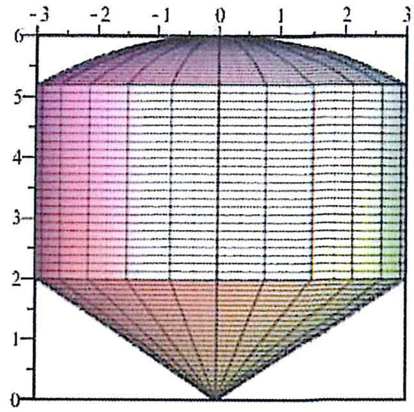


Figura 6

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq z \leq \sqrt{27}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \arctan\tfrac{3}{\sqrt{27}} \wedge \tfrac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6\right\}$$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_1? Justifique.

```
> addcoords(z_cylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(2/3*r, r=0..3, theta=0..2*Pi, coords=z_cylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas __três__

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o bico do lápis é igual a $A(S) = \pi r m = 3\sqrt{13}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

__Sugestão__: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\; dydx \text{ , com } f_x \text{ e } f_y \text{ funções contínuas em } D.$$

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$? Justifique a sua resposta.

iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := ______________________;
   y := ______________________;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo: ____

Número: ____

Curso

- ☐ Licenciatura em Eng. Informática
- ☐ Licenciatura em Eng. Informática - Pós-laboral
- ☐ Licenciatura em Informática - Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

- ☐ Sim
- ☐ Não

Frequência às aulas de AM2

- ☐ Regime diurno
- ☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

- ☐ Não
- ☐ Sim
  - ☐ At01_Matlab - Integração Numérica (Presencial)
  - ☐ At02_Matlab - MNEDO_PVI
  - ☐ At03_Matlab - Máquina para derivação e integração
  - ☐ At01_TP - Cálculo Diferencial e Integral em IR^n
  - ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

- ☐ Sim
- ☐ Não

LICENCIATURAS EM ENGENHARIA INFORMÁTICA

Unidade Curricular: **ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Ano Letivo: **2015/2016**

EXAME DA ÉPOCA NORMAL – TESTE B E TESTE A+B » Data: 27/06/2016 Código da prova: **2706201602**

Teste A+B » 5. c) | **Teste B » 2. d)**

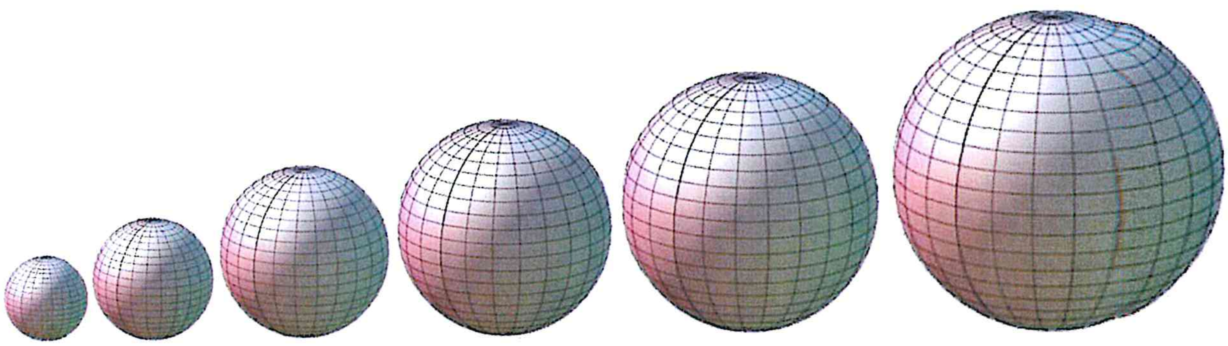
Das alíneas seguintes resolva apenas **uma (Teste A+B)** ou **três (Teste B)**

i); ii); iii); iv)

v) Vamos acreditar e a bola contínua a rolar... Viva Portugal!

Foi ao minuto 117 e estamos nos quartos-de-final do Euro2016.

Defina em coordenadas esféricas um quarto de uma esfera de raio r e prove que o seu volume é $\frac{1}{3}\pi r^3$.



Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Instituto Politécnico de Coimbra

FOLHA DE CONTINUAÇÃO

Nome: Análise Matemática II (AM2)
Curso: Eng. Informática
Prova Escrita de: Teste B - Exame Ép. Normal
N.º Aluno:
Ano Letivo: 15/16
Data da Avaliação: 27/6/17
N.º Folhas:
Época:

Proposta / Tópicos de Resolução (Armémio Correia)

1. $f(x,y) = -x^2 - y^2$

$g(x,y) = \sqrt{-f(x,y)} \Leftrightarrow g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$h(x,y) := \begin{cases} \underline{\text{se}} \quad x^2+y^2 \leq 9 \\ \underline{\text{então}} \quad z = \frac{\sqrt{27}}{3} g(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow h(x,y) = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}, \text{ se } x^2+y^2 \leq 9$

$$j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{36+f(x,y)}, & \text{se } 9 < x^2+y^2 \leq 36 \\ h(x,y) \end{cases}$$

$$j(x,y) = \begin{cases} \sqrt{36-x^2-y^2}, & \text{se } 9 < x^2+y^2 \leq 36 \\ \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

a) $D_j = D_{j_1} \cup D_{j_2}$, onde

- $j_1(x,y) = \sqrt{36-x^2-y^2}$, se $9 < x^2+y^2 \leq 36$

$D_{j_1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 36-x^2-y^2 \geq 0 \ \wedge \ 9 < x^2+y^2 \leq 36\}$

$36-x^2-y^2 \geq 0 \ \wedge \ 9 < x^2+y^2 \leq 36$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 36 \ \wedge \ 9 < x^2+y^2 \leq 36$

$\Leftrightarrow 9 < x^2+y^2 \leq 36$

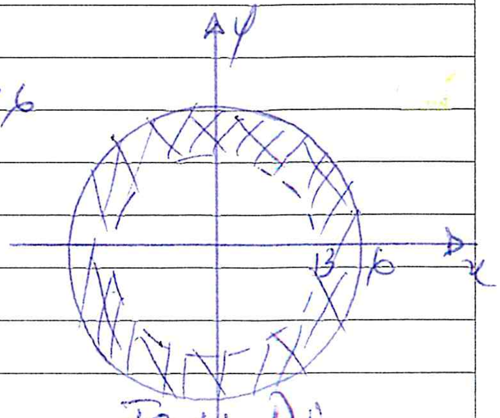


Fig 1: D_{j_1}

• $f_2(x,y) = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$, se $x^2+y^2 \le 9$

$D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \ge 0 \wedge x^2+y^2 \le 9\}$

$x^2+y^2 \ge 0 \wedge x^2+y^2 \le 9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 \le 9$

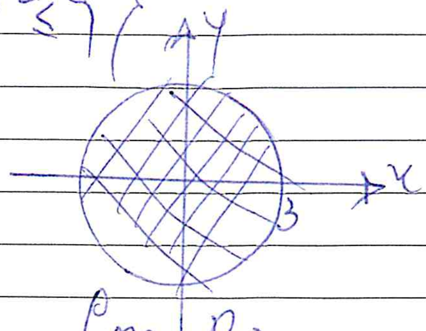


fig 2: D_{f_2}

• $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 < x^2+y^2 \le 36 \vee x^2+y^2 \le 9\}$

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 36\}$

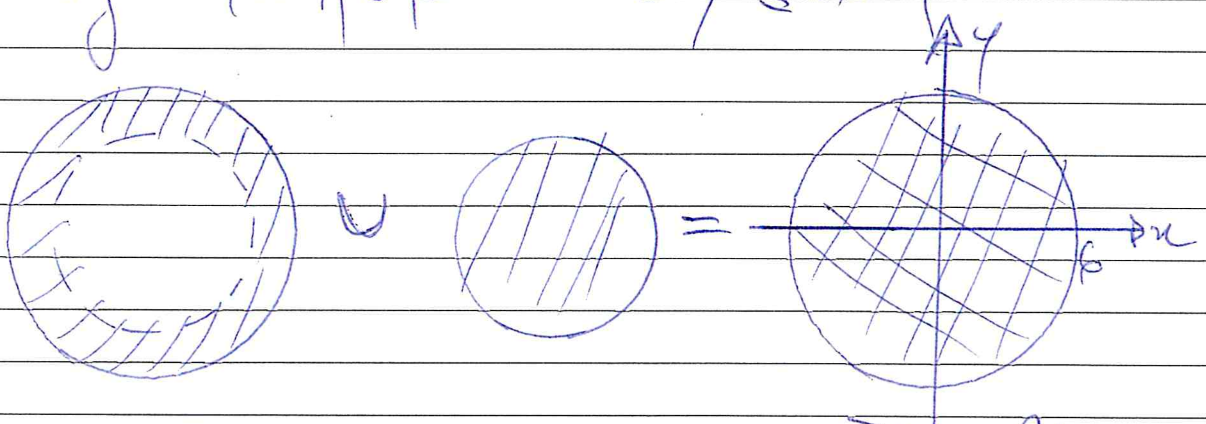


fig 3: D_f

• D_f é fechado, uma vez que:

$fr(D_f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 36\} \subseteq D_f$

b)

• $f(x,y) :=$
- se $9 < x^2+y^2 \le 36$
- então $z = \sqrt{36-x^2-y^2}$
- senão se $x^2+y^2 \le 9$
- então $z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

(*)

- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 9\}$ curva de nível comum a todas as funções circunferência de raio 3

$\mapsto$ $C \rightarrow z = f(x,y)$

$z = -x^2-y^2 \rightarrow z = -(x^2+y^2)$

$z \overset{(*)}{=} -9$ ✓

C ocorre no plano $z=-9$

$C_{-9} = \{(x,y) \in D_f : f(x,y) = -9\}$

$f(x,y) = -9 \Leftrightarrow -x^2-y^2 = -9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = 9 \Rightarrow C$

$\mapsto$ $C \rightarrow z = g(x,y)$

$z = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(*)} z = \sqrt{9} \Leftrightarrow z = 3$ ✓

C ocorre no plano $z=3$ para a função g

$\mapsto$ $C \rightarrow z = h(x,y)$

$z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(*)} z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{9}$

$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27} \times \cancel{3}}{\cancel{3}}$

C ocorre no plano $z = 3\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{27} \Leftrightarrow z = \sqrt{3 \times 9}$

$\Leftrightarrow z = 3\sqrt{3}$ ✓

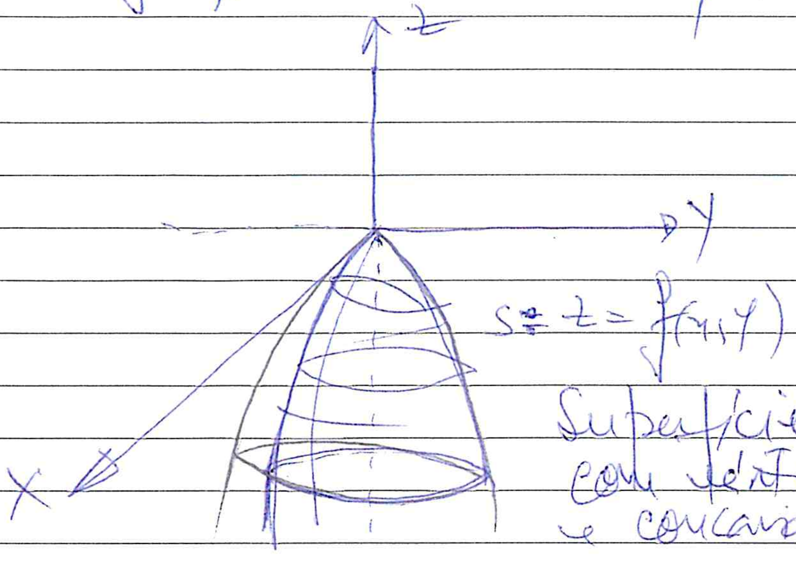
$\mapsto$ $C \rightarrow z = j'(x,y)$

$z = j_2(x,y) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{*} z = 3\sqrt{3}$

C ocorre no plano $z = 3\sqrt{3}$ Nota: $C \in D_{j_2}$

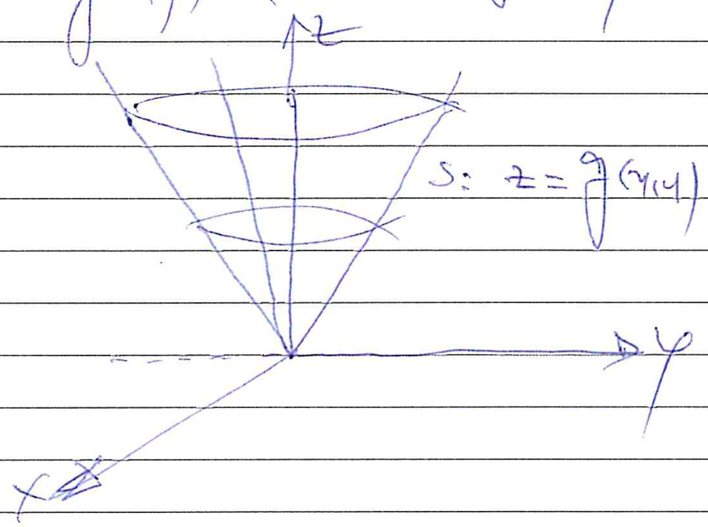
$\therefore$ C é uma curva de nível comum a todas as funções c)

• $z = f(x,y) \Leftrightarrow z = -(x^2+y^2)$



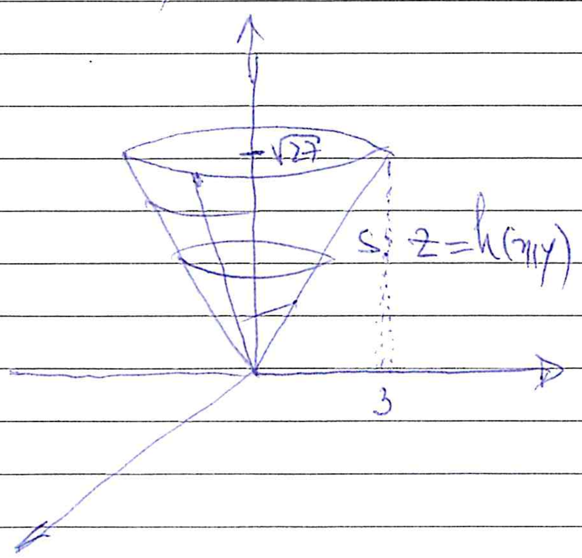
Superfície parabólica com vértice em $(0,0,0)$ e concavidade voltada para baixo

• $z = g(x,y) \Leftrightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$



Superfície cónica com vértice em $(0,0,0)$ e concavidade voltada para cima.

• $z = h(x,y) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ se $x^2+y^2 \leq 9$



Superfície cónica com vértice em $(0,0)$, concavidade voltada para cima de raio 3 e altura $\sqrt{27}$

Nome

Curso

Prova Escrita de:

N.º Aluno

Ano Letivo /

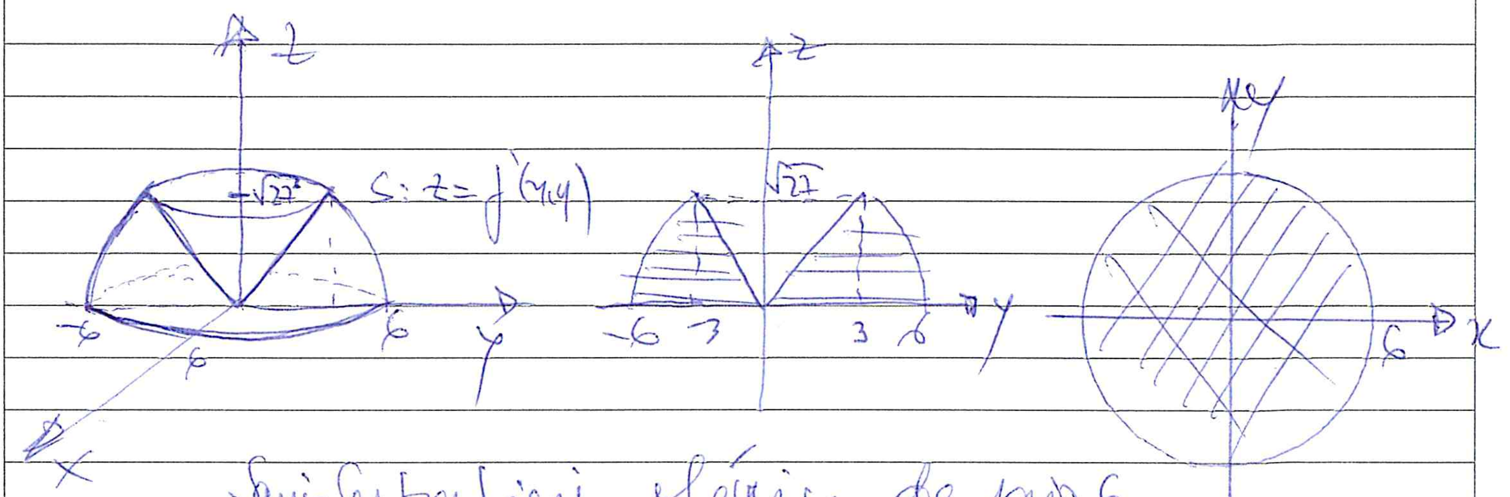
Data da Avaliação / /

N.º Folhas

Época:

c) • $z = f(x,y)$

$$z = \begin{cases} \sqrt{36-x^2-y^2}, & se\ 9 < x^2+y^2 \leq 36 \\ \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}, & se\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$



Semi-superfície esférica de raio 6 seccionada por uma superfície cónica de raio 3 e altura $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

d) i) A afirmação é falsa pois apenas a figura 3 representa o gráfico de uma função do tipo:

$$k(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{R^2-x^2-y^2} & se\ x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 & se\ R < x^2+y^2 \leq R+a \end{cases}$$

• A cada objeto do domínio (x,y) faz corresponder um ponto em z e isso não acontece nas figuras 1 e 2.

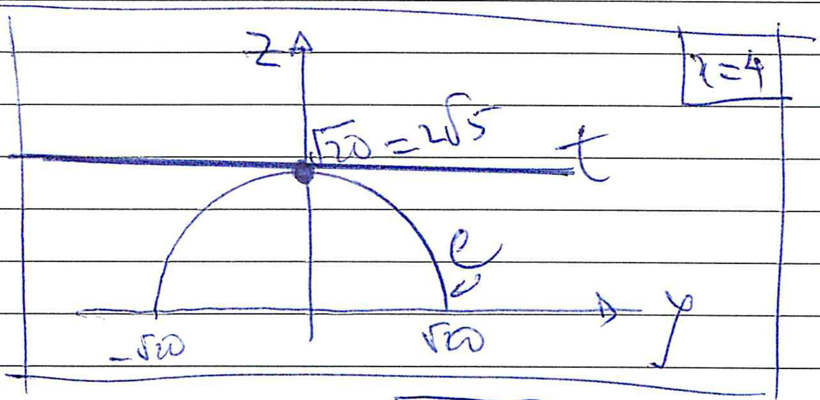
ii) $[4, y, -\sqrt{20}]$ equação vetorial da reta tangente à curva de interseção

$C = \begin{cases} z = f(x,y) \\ x = 4 \end{cases}$ no ponto $P(4, 0, 2\sqrt{5})$.

Atendendo a que o ponto $P \in D_{f_1}$ (ver pág 1)

$C = \begin{cases} z = f_1(x,y) \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} \\ x = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow C = \begin{cases} z = \sqrt{36 - 16 - y^2} \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow C = [4, y, \sqrt{20 - y^2}]$



$z = \sqrt{20 - y^2}$

$\Leftrightarrow z^2 = 20 - y^2$

$\Leftrightarrow z^2 + y^2 = 20$

$\Leftrightarrow z^2 + y^2 = (\sqrt{20})^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{20 - y^2} \Rightarrow z = \sqrt{20 - y^2}$

arco de circunferência

$r = \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5}$
$= 2\sqrt{5}$

Pela figura anterior a equação da reta tangente à curva C é uma reta horizontal

$t = [4, y, \sqrt{20}]$ $\quad z = \sqrt{20}$

Logo a afirmação é falsa.

Nota: analiticamente a eq. da reta tangente será do tipo:

$$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$$

onde

$$m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

- $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{36 - x^2 - y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(36 - x^2 - y^2\right)^{1/2}\right)$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left(36 - x^2 - y^2\right)^{-1/2}\left(-\cancel{2}y\right)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}}$$

- $m_t = \frac{\partial f_1}{\partial y}(4,0)$ $\qquad P(x_0, y_0, z_0) = (4, 0, 2\sqrt{5})$

$$m_t = \frac{-0}{\sqrt{36 - 4^2 - 0^2}} \Leftrightarrow m_t = 0$$

- pelo que

$$z - z_0 = m_t (y - y_0) \wedge x = x_0$$

$\Leftrightarrow z - 2\sqrt{5} = 0(y - 0) \wedge x = 4$

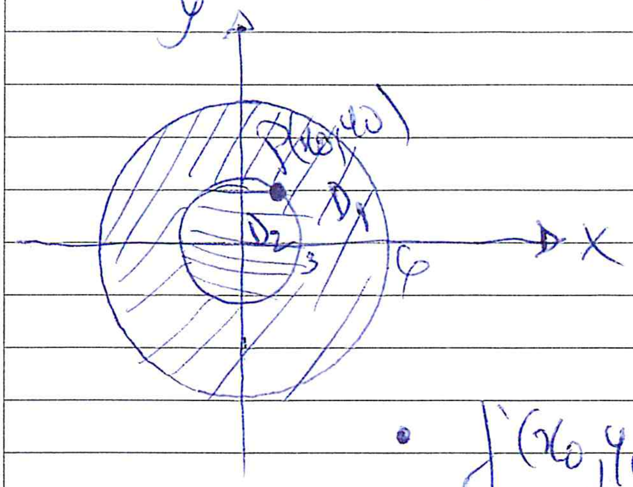
$\Leftrightarrow z - 2\sqrt{5} = 0 \wedge x = 4$

$\Leftrightarrow z = 2\sqrt{5} \wedge x = 4$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{20} \wedge x = 4 \longrightarrow t = [4, y, \sqrt{20}]$

iii) f é contínua em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$

A afirmação é verdadeira, uma vez que:



Considerando um ponto $P(x_0,y_0)$ pertencente ao "cordão de soldadura" $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=9\}$

$$x_0^2+y_0^2=9$$

• $$f_2(x_0,y_0) = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{9} = \frac{\sqrt{27}}{\cancel{3}}\cancel{3} = \sqrt{27}$$

a função está definida em P

• $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = ? \rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \sqrt{27}$$

existe

Aplicando limites direccionais

$$\rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_1}} \sqrt{36-x^2-y^2} = \sqrt{36-x_0^2-y_0^2}$$

$$= \sqrt{36-(x_0^2+y_0^2)}$$

$$= \sqrt{36-9}$$

$$= \sqrt{27}$$

$$\rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D_2}} \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x_0^2+y_0^2} = \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{9} = \frac{\sqrt{27}}{\cancel{3}}\cancel{3} = \sqrt{27}$$

Nome

N.º Aluno

Curso

Ano Letivo / Data da Avaliação / /

Prova Escrita de:

N.º Folhas

Época:

continuação:

1. d) iii)

→ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) = \sqrt{27}$ logo a função é contínua em $P(x_0,y_0)$.

Assim a função é contínua em todos os pontos de e que "funciona" como um "cordão de soldadura" entre os gráficos dos dois ramos da função f.

iv) A afirmação é falsa, uma vez que:

(pelos gráficos 1. b))

→ f tem um máximo absoluto em (0,0,0)

→ g e h têm um mínimo absoluto em (0,0,0)

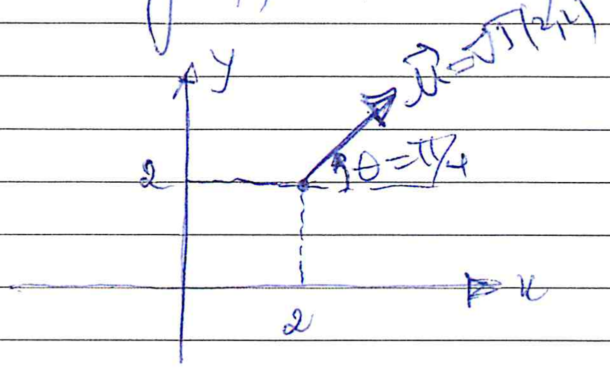
→ j tem uma linha de mínimos absolutos e uma linha de máximos absolutos.

v) M:=(x,y) → piecewise($x^2+y^2<=9$, $\sqrt{27+(x^2+y^2)}/3$,
$9<x^2+y^2\leq 36$, $\sqrt{36-x^2-y^2}$, undefined)

$$M(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{27}}{3}\sqrt{x^2+y^2}, & se\ x^2+y^2 \leq 9 \\ \sqrt{36-x^2-y^2}, & se\ 9 < x^2+y^2 \leq 36 \end{cases}$$

$M(x,y) = j(x,y)$ logo a afirmação é falsa e)

i) $T = g(x,y) \Rightarrow T(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



Segundo o teorema do gradiente a taxa de variação máxima ocorre na direção e sentido do vetor gradiente, pelo que:

$$\nabla T(x,y) = T_x(x,y)\,\vec{i} + T_y(x,y)\,\vec{j}$$

$$\Leftrightarrow \nabla T(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{j}$$

$$\nabla T(2,2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}\,\vec{j}$$

$$\nabla T(2,2) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\,\vec{i} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}\,\vec{j}$$

$$\nabla T(2,2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j} \qquad \neq \vec{w} = \langle -1,-1\rangle$$

- A taxa de crescimento máximo da temperatura ocorre no sentido de $\nabla T(2,2) = \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$
- taxa de variação em $P(2,2)$ segundo o vetor

$$\vec{u} = -\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{\langle -1,-1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = \cos\tfrac{\pi}{4}\,\vec{i} + \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\,\vec{j}$$

• $T_{\vec{u}}(2,2) = \vec{u} \cdot \nabla T(2,2)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

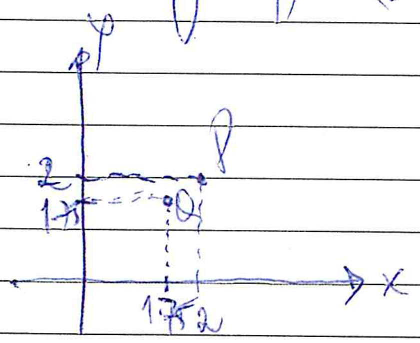
$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4}$

$= \frac{4}{4}$

$T_{\vec{u}}(2,2) = 1$ a temperatura cresce à taxa de 1 ...

e)

ii) $V = g(x,y) \Leftrightarrow V = \sqrt{x^2+y^2}$



$\Delta V \simeq dV$ onde

$dV = V_x(x,y)\,dx + V_y(x,y)\,dy$

$dV = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$

Para $(x,y) = (2,2)$ e

$dx = dy = -0.25$

vem:

$dV = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}(-0.25) + \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}}(0.25)$

$dV = 2\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}}(-0{,}25)\right)$

$dV = \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}(-0.25) \Leftrightarrow dV = -\frac{\sqrt{2}}{4} \rightarrow \Delta V \simeq -\frac{\sqrt{2}}{4}$

e) iii)

$$z = -f(x,y) \quad , \quad \underset{(2)}{x = \rho\cos\theta} \quad e \quad \underset{(3)}{y = \rho\sin\theta}$$

então:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0 \quad (4)$$

$$z = -f(x,y) \Leftrightarrow z = -(-x^2 - y^2)$$

$$\Leftrightarrow z = x^2 + y^2 \quad (1)$$

Derivadas parciais de z:

$\rightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ como $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = 2x$

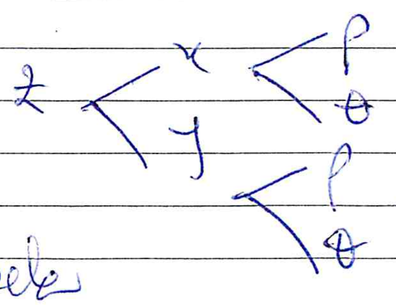
$$= \frac{\partial}{\partial x}(2x)$$

$$= 2 \quad (5)$$

$\rightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y) = 2 \quad (6)$

$\rightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y) = 0 \quad (7)$

$\rightarrow$ $\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial}{\partial \rho}(2\rho) = 2 \quad (8)$



pela regra da cadeia

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} \underset{(2)(3)}{=} 2x \times \cos\theta + 2y \times \sin\theta$$

$$= 2\rho\cos\theta \times \cos\theta + 2\rho\sin\theta\,\sin\theta$$

$$= 2\rho(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) = 2\rho$$

Nome ______ N.º Aluno ______

Curso ______ Ano Letivo ___/___ Data da Avaliação ___/___/___

Prova Escrita de: ______ N.º Folhas ______

Época: ______

Continuação: e) iii)

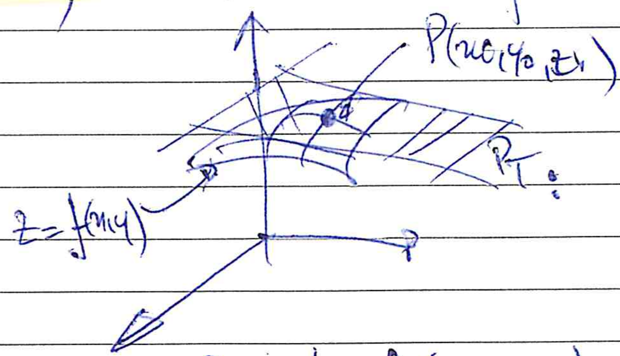
(5), (6), (7), (8) $\Rightarrow$ (4), vem:

$$0 + 2 + 2 - 2 \times 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad (PV)$$

iv) Equação do plano tangente à superfície



$$P_T: \; z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (1)$$

$z = 4 + f(x, y-1)$ se $x^2 + (y-1)^2 \le 4$ Dado:

$P(0,1,4)$ (2)

- $z = 4 + f(x, y-1)$ se $x^2 + (y-1)^2 \le 4$ 1º Passo:

$\Leftrightarrow z = 4 + (-x^2 - (y-1)^2)$ se $x^2 + (y-1)^2 \le 4$

$\Leftrightarrow z = 4 - (x^2 + (y-1)^2)$ se $x^2 + (y-1)^2 \le 4$

2º Passo:

- $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(4 - (x^2 + (y-1)^2)\right) = -2x \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$ (3)

$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(4 - (x^2 + (y-1)^2)\right) = -2(y-1) \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 0$ (4)

3º Passo: (2), (3), (4) ⟶ (1)

Equação do plano tangente

$$z-4=\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)(y-1)$$

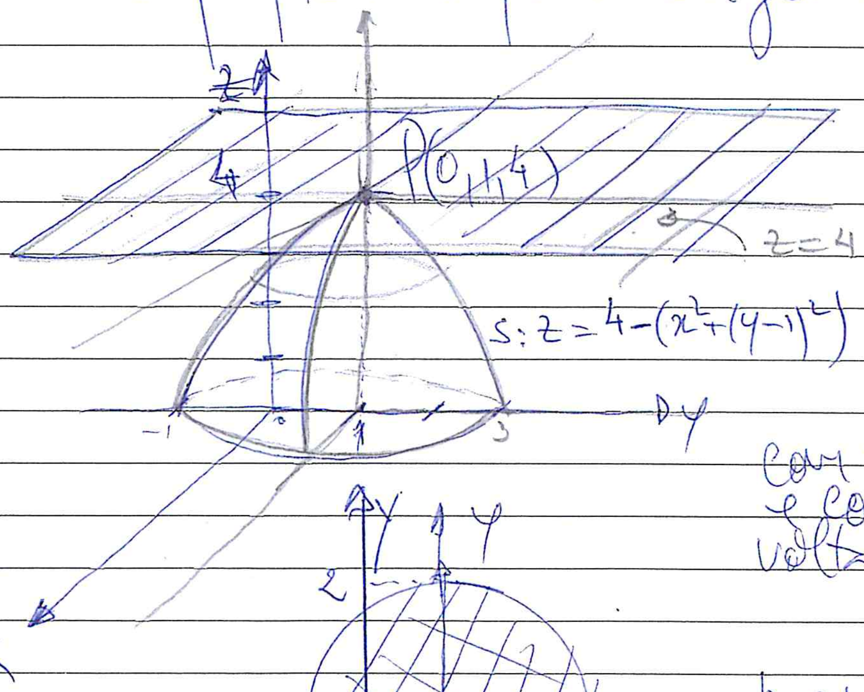
$$\Leftrightarrow z-4=0(x-0)+0(y-1)$$

$$\Leftrightarrow z-4=0$$

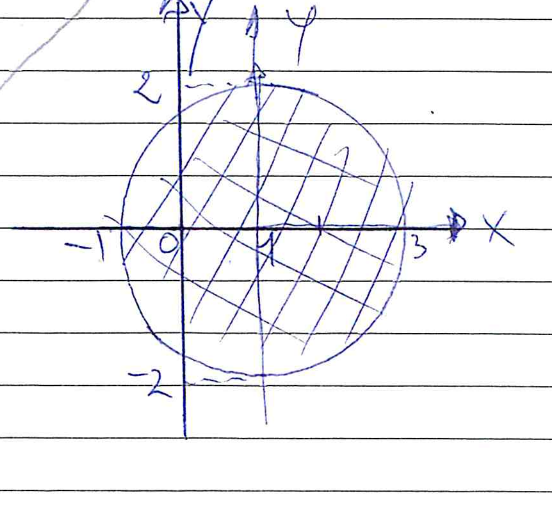
eq. vetorial

$$\Leftrightarrow z=4 \longrightarrow \vec{P}_T=[x,y,4]$$

4º Passo: Superfície e Plano tangente ($z=4$)



Superfície parabólica com vértice em (0,1,4) e concavidade voltada para baixo



Projeção da superfície cônica no plano xoy

$$x^2+(y-1)^2\leq 2^2$$

iii) Mostre que se $z = -f(x,y)$, $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\operatorname{sen}\theta$, então $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} = 0$.

iv) Determine a equação do plano tangente à superfície definida por $z = 4 + f(x, y-1)$ se $x^2 + (y-1)^2 \leq 4$, no ponto $P\left(0,1,4\right)$. Represente a superfície e o plano tangente.

2. A figura 5 representa um sólido, de densidade igual a 5, composto por três partes:

- Cone de raio $r = 3$ e altura $h = 2$;
- Cilindro de raio $r = 3$ e altura $h = \sqrt{27} - 2$;
- Segmento de esfera de raio $r = 6$.

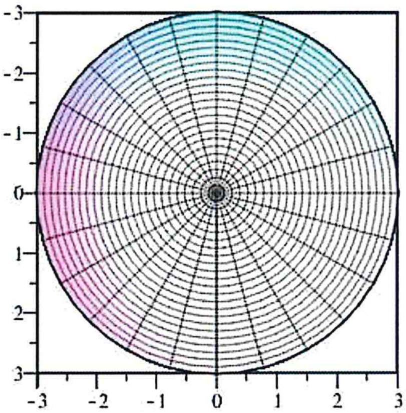


Figura 4

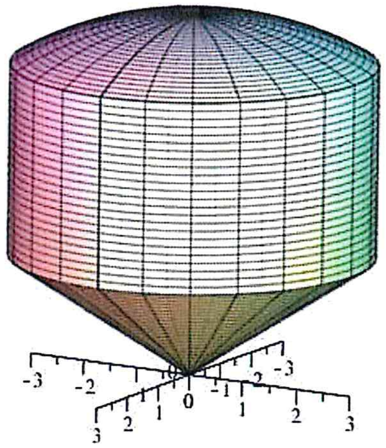


Figura 5

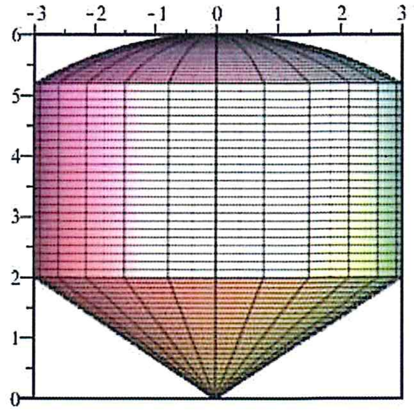


Figura 6

[3.0] **(a)** Associando os conjuntos seguintes a três sistemas de coordenadas 3D, mostre que o sólido é definido por $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, onde:

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \tfrac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\right\}$$

$$S_2 = \left\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq z \leq \sqrt{27}\right\}$$

$$S_3 = \left\{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \arctan\tfrac{3}{\sqrt{27}} \wedge \tfrac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6\right\}$$

[1.0] **(b)** As instruções seguintes permitem-lhe esboçar em MAPLE a superfície que limita o sólido definido na alínea anterior por S_1? Justifique.

```
> addcoords(z_cylindrical, [z,r,theta], [r*cos(theta), r*sin(theta), z])
> plot3d(2/3*r, r=0..3, theta=0..2*Pi, coords=z_cylindrical)
```

[3.0] **(c)** Calcule o volume e a massa do sólido.

[3.0] **(d)** Das alíneas seguintes resolva apenas <u>**três**</u>

i) Prove, usando coordenadas esféricas, que o volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

ii) Mostre, que a área da superfície cónica que limita o bico do lápis é igual a $A(S) = \pi r m = 3\sqrt{13}\pi$, em que r é o raio e m a medida da hipotenusa do triângulo que se obtém por projeção da superfície no plano yOz.

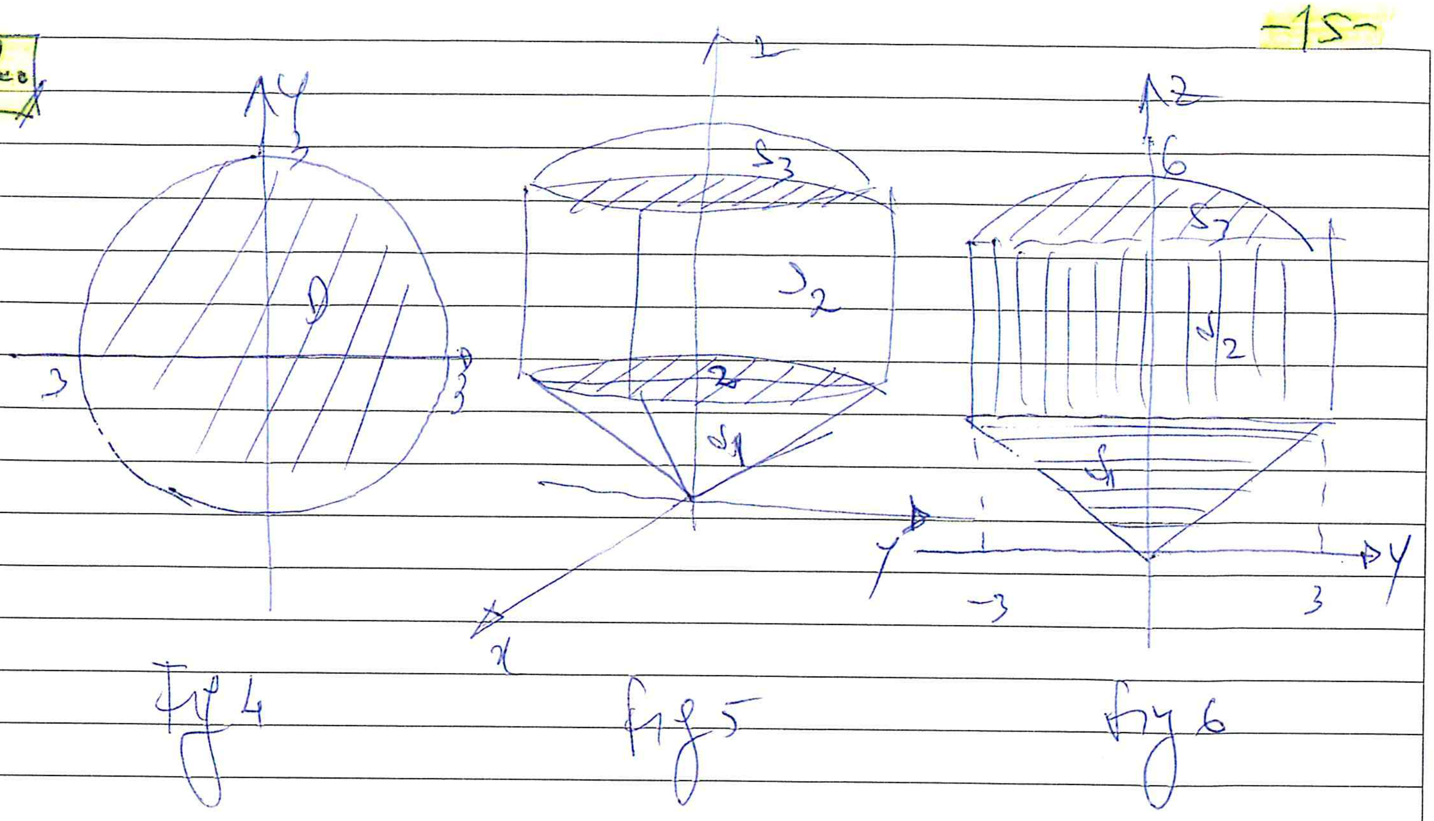
<u>Sugestão</u>: A área de uma superfície de equação $z = f(x,y)$ é dada por

$A(S) = \iint_D \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dydx$, com f_x e f_y funções contínuas em D.

iii) Em coordenadas cartesianas o sólido com forma igual à de um lápis é definido por

$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{36 - x^2 - y^2}\right\}$? Justifique a sua resposta.

2.



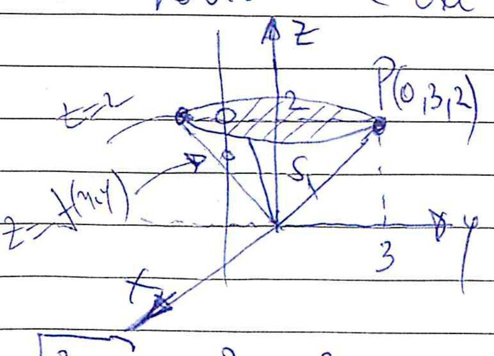
(a) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

▷ $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9 \wedge \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$

- S_1 está definido em coordenadas cilíndricas.
- A projecção de S_1 (bico do lápis) no plano xoy (fig 4) coincide com um círculo de raio 3

$$x^2+y^2 \leq 9$$

- S_1 é limitado superiormente por um disco de raio 3 no plano $z=2$.
- S_1 é limitado inferiormente pela superfície cónica de raio 3 e altura 2



$z = f(x,y) \Leftrightarrow z = k\sqrt{x^2+y^2}$

como $P(0,3,2) \in$ superfície cónica vem:

$2 = k\sqrt{0^2+3^2} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

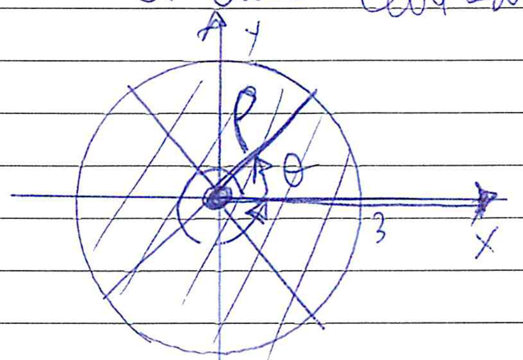
$\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2$

logo $z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$

III▷ $S_2 = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 2 \leq z \leq \sqrt{27}\}$

- S_2 está definido em coordenadas cilíndricas
- S_2 é um cilindro (parte central) de raio 3 e altura $\sqrt{27} - 2$

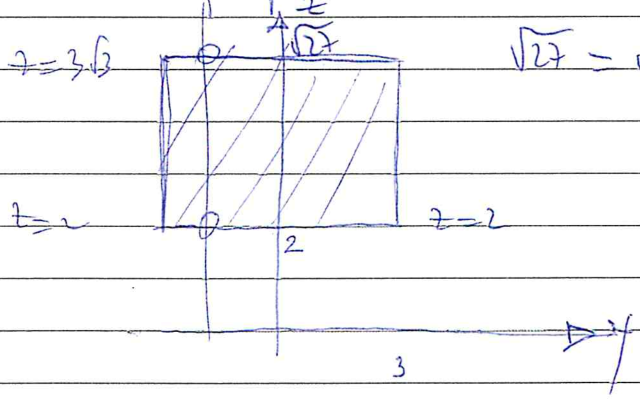
- A projeção de S_2 no plano xOy é um círculo centrado na origem e raio 3



$0 \leq \rho \leq 3 \wedge$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

- A projeção de S_2 no plano yOz é um rectângulo



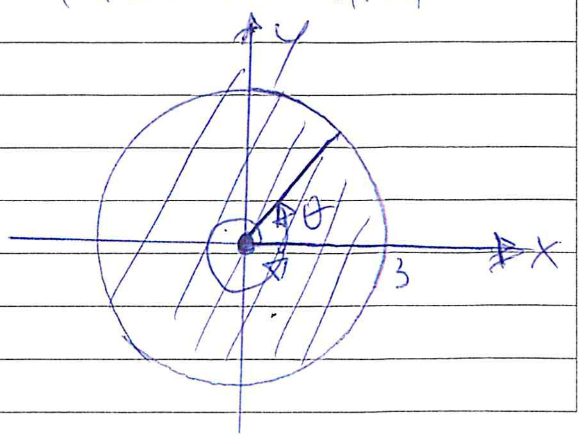
$\sqrt{27} = \sqrt{3 \times 9} = \sqrt{3}\sqrt{9}$
$= \sqrt{3}\, 3$
$= 3\sqrt{3}$

$2 \leq z \leq \sqrt{27}$

II▷ $S_3 = \{(R, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \arctan \frac{3}{\sqrt{27}} \wedge \frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6\}$

- S_3 está definido em coordenadas esféricas
- S_3 é um segmento de esfera de raio 6 limitada entre $\sqrt{27} \leq z \leq 6$

- A projeção de S_3 no plano xOy é um círculo de raio 3



$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Nome

N.º Aluno

Curso

Ano Letivo ___/___ Data da Avaliação ___/___/___

Prova Escrita de:

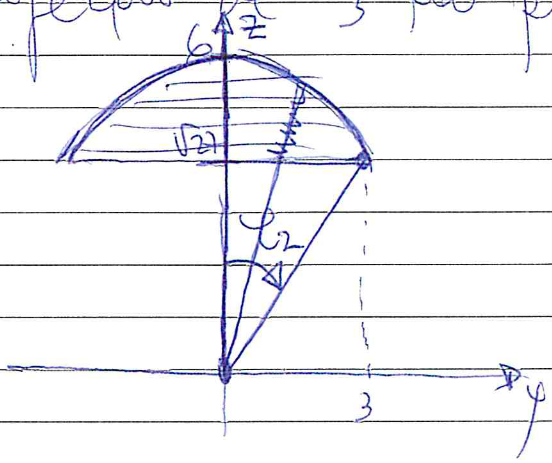
N.º Folhas

Época:

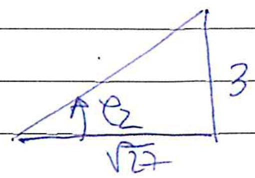
Continuação:

2. a)

- Projeção de S_3 no plano yOz segundo de um círculo



$0 \leq \varphi \leq \varphi_2$



$\tan \varphi_2 = \frac{3}{\sqrt{27}}$

$\Leftrightarrow \varphi_2 = \arctan \frac{3}{\sqrt{27}}$

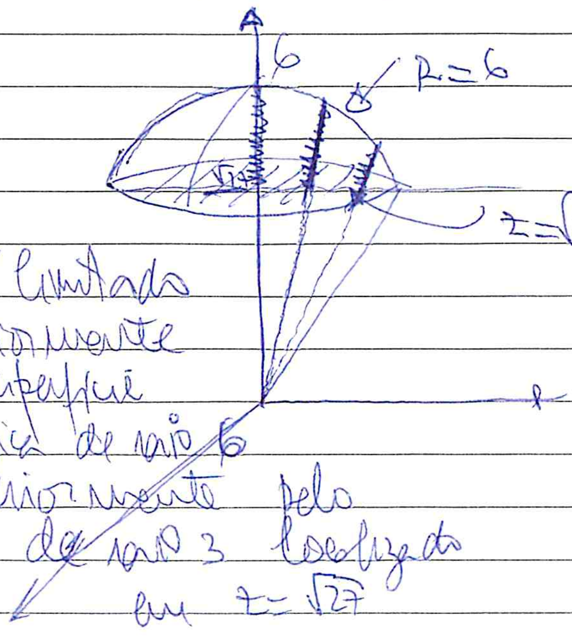
$\Leftrightarrow \varphi_2 = \arctan \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \varphi_2 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

$0 \leq \varphi \leq \arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

$0 \leq \varphi \leq \pi/6$

- Em termos de R (distância ...)



Coordenadas esféricas

$z = \sqrt{27} \longrightarrow R\cos\varphi = \sqrt{27}$

$\Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi}$

S_3 é limitado superiormente pela superfície esférica de raio 6 e inferiormente pelo disco de raio 3 localizado em $z = \sqrt{27}$

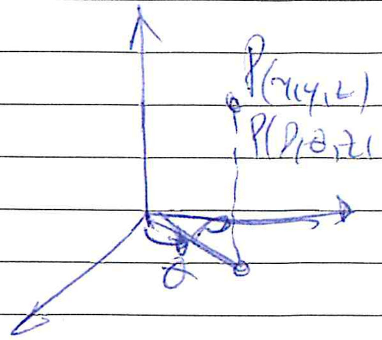
logo $\frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi} \leq R \leq 6$

(b)

A superfície que limita inferiormente S_1 (cone) é uma superfície cónica de equação

$z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$ em coordenadas cartesianas

- Em coordenadas cilíndricas



$$T = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J = \rho$$

Tem-se

$$z = \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[T]{} z = \frac{2}{3}\sqrt{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2}$$

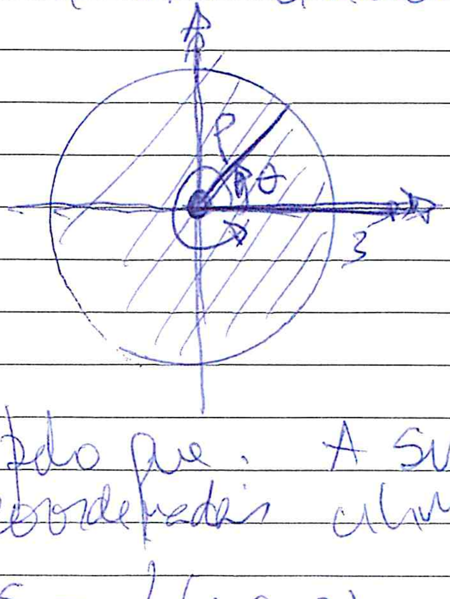
$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3}\sqrt{\rho^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3}\sqrt{\rho^2}$$

MAPLE

$$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3}\rho \Rightarrow z = \frac{2}{3}r$$

- A projecção de S_1 no plano xOy é um círculo de raio 3



$0 \le \rho \le 3 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi$

- Pelo que: A superfície cónica definida em coordenadas cilíndricas é dada por

$$S_{cónica} = \{(\rho,\theta,z): 0 \le \rho \le 3 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge z = \rho\}$$

- Atendendo a que no MAPLE por defeito a dependência de variáveis é:

$$r = f(\theta, z) \longrightarrow R(theta, z)$$

é necessário redefinir a dependência de variáveis

$$z = f(r, \theta)$$

utilizando a função e comando

addcoords(z_cylindrical, [z, r, theta], [, ,])

- O gráfico da superfície cónica é obtido através:

plot3d(2/3*r , r=0..3 , theta=0..2*Pi , coords=z_cylindrical)

∴ Conclusão: As instruções dadas permitem-nos definir e esboçar a superfície cónica de S_1 em MAPLE.

c) $V(S) = V(S_1) + V(S_2) + V(S_3)$

com:

$\Rightarrow V(S_1) = \frac{1}{3}\pi 3^2 * 2 \Leftrightarrow V(S_1) = 6\pi$

$\Rightarrow V(S_2) = \pi * 3^2 * (\sqrt{27} - 2) \Leftrightarrow V(S_2) = 9\pi(3\sqrt{3} - 2)$

$\Rightarrow V(S_3) = \iiint_{S_3} 1 \, dz\, dy\, dx$

M.V. coord. esféricas

$$\overset{\triangle}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan\frac{3}{\sqrt{27}}} \int_{\frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi}}^{6} 1 \, |-R^2 \sin\varphi| \, dR\, d\varphi\, d\theta$$

(II) $$V(S_3) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_{\frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi}}^{6} R^2 \sin\varphi \, dR \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \sin\varphi \int_{\frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi}}^{6} R^2 \, dR \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \sin\varphi \left[\frac{R^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{27}}{\cos\varphi}}^{6} d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \sin\varphi \left(\frac{6^3}{3} - \frac{\sqrt{27}^3}{3\cos^3\varphi}\right) d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6} \left(\frac{6^3}{3}\sin\varphi - \frac{\sqrt{27}^3}{3}\cos^{-3}\varphi \sin\varphi\right) d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{6^3}{3}\cos\varphi + \frac{\sqrt{27}^3}{3}\frac{\cos^{-2}\varphi}{-2}\right]_0^{\pi/6} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{-\frac{6^3}{3}\cos\pi/6 + \frac{\sqrt{27}^3}{3}\frac{\cos^{-2}\pi/6}{-2} + \frac{6^3}{3} + \frac{\sqrt{27}^3}{6}}_{} \, d\theta$$

$$\underbrace{-\frac{6^3}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{27}^3}{\cancel{6}}\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{6^3}{3} + \cancel{\frac{\sqrt{27}^3}{6}}}$$

$$\frac{6^3}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{4}{3} + 1\right)\frac{\sqrt{27}^3}{6}$$

Nome ______________________ N.º Aluno ________

Curso ______________________ Ano Letivo ____/____ Data da Avaliação ___/___/___

Prova Escrita de: ______________________ N.º Folhas ________

Época: ________

continuação

2. c)

$$V(S_3) = \left(\frac{(2\times 3)^3}{3} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{3}\,\frac{27\sqrt{27}}{6} \right) \int_0^{2\pi} 1\, d\theta$$

$$= \left(\frac{2^3 \times 3^3}{3} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{27\times \cancel{3}\sqrt{3}}{6} \right) \underbrace{\left[\theta\right]_0^{2\pi}}_{2\pi}$$

$$= \left(\cancel{2^3}^{2} \times 3^2 \left(\frac{2-\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) - \frac{27\sqrt{3}}{6} \right) 2\pi$$

$$= \left(4\times 9 \left(2-\sqrt{3}\right) - \frac{27}{6}\sqrt{3} \right) 2\pi$$

$$= \frac{36(2-\sqrt{3})\times 6 - 27\sqrt{3}}{\cancel{6}\,3} (\cancel{2}\pi)$$

$$V(S_3) = \frac{36(2-\sqrt{3})\times 6 - 27\sqrt{3}}{3}\pi$$

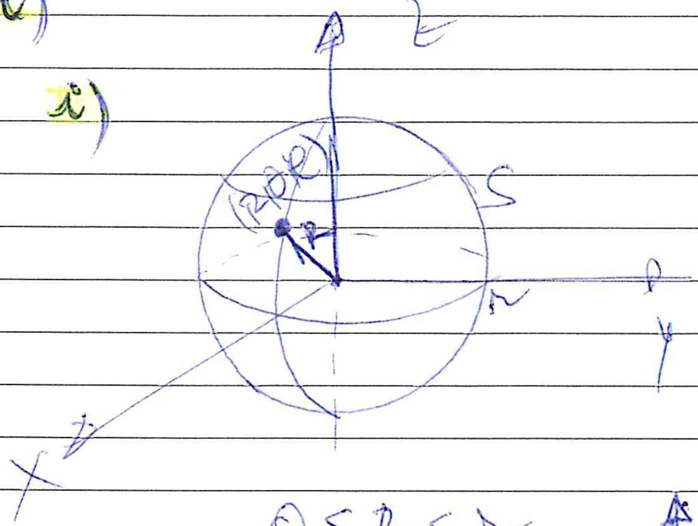
$$\therefore\ V(S) = 6\pi + 9\pi(3\sqrt{3}-2) + \frac{36(2-\sqrt{3})\times 6 - 27\sqrt{3}}{3}\pi$$

$$\Rightarrow\ V(S) = \left(6 + 9(3\sqrt{3}-2) + \frac{216(2-\sqrt{3}) - 27\sqrt{3}}{3}\right)\pi$$

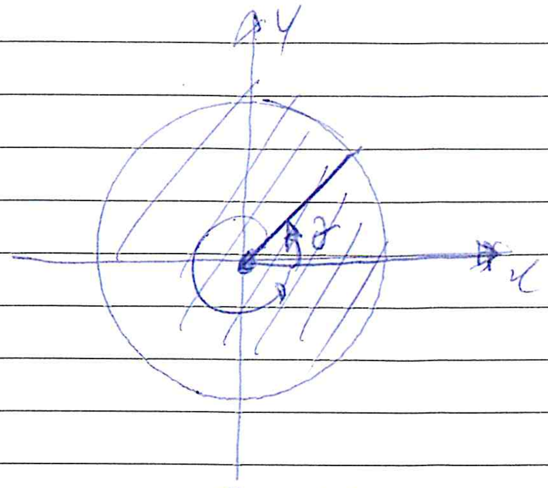
$$\Rightarrow\ M(S) = \iiint_S \underbrace{\rho(x,y,z)}_{=5}\, dz\,dy\,dx = 5 \iiint_S 1\, dz\,dy\,dx = 5 \times V(S)$$

(d)

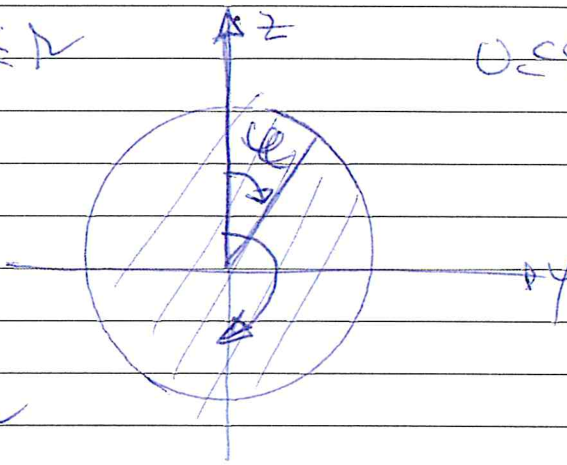
i)



$0 \leq R \leq r$



$0 \leq \theta \leq 2\pi$



$0 \leq \varphi \leq \pi$

1º Passo:

Esboço e definição da esfera de raio r em coordenadas esféricas: $S = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq r \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}$

2º Passo

$$V(S) = \iiint_S 1 \, dz\, dy\, dx$$

M.V. c. esféricas

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \left| -R^2 \operatorname{sen} \varphi \right| d\varphi\, d\theta\, dR$$

$$= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi\, d\theta\, dR$$

$$V(S) = \int_0^R R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\theta \, dR$$

$$= \int_0^R R^2 \int_0^{2\pi} \left[-\cos\varphi \right]_0^{\pi} d\theta \, dR$$

$$= \int_0^R R^2 \int_0^{2\pi} -\underbrace{\left(\underset{-1}{\cos \pi} - \underset{-1}{\cos 0} \right)}_{2} d\theta \, dR$$

$$= 2 \int_0^R R^2 \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \, dR$$

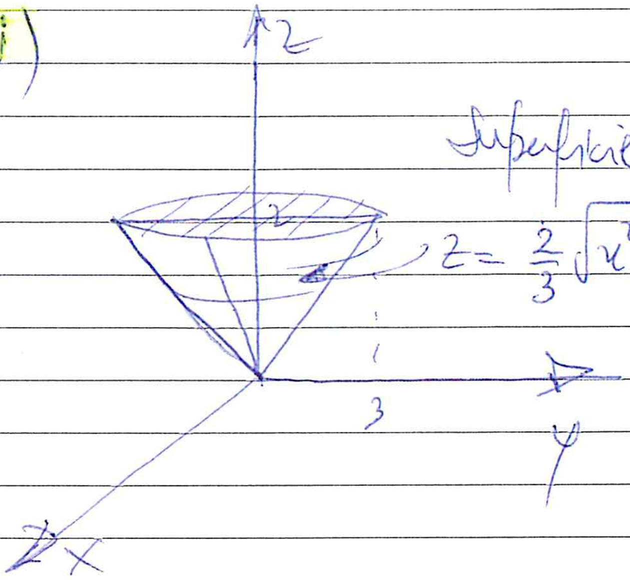
$$= 2 \int_0^R R^2 \underbrace{\left[\theta \right]_0^{2\pi}}_{2\pi} dR$$

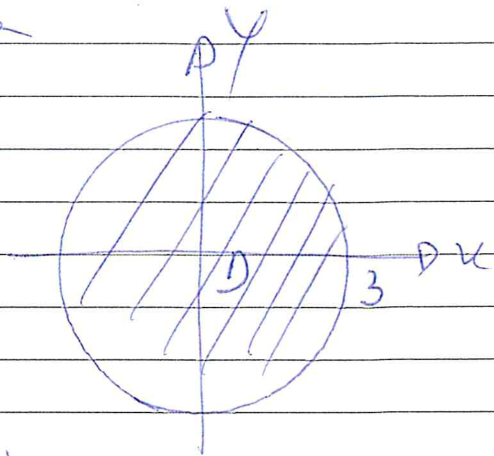
$$= 4\pi \int_0^R R^2 \, dR$$

$$= 4\pi \left[\frac{R^3}{3} \right]_0^R$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \qquad \text{c.q.m.}$$

d) iii)





Projeção da Superfície no plano xOy

C. auxiliares

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/2}\cancel{2}x$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow A(S) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1}\; dy\,dx$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{4}{9}\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{4}{9}\frac{y^2}{x^2+y^2} + 1}\; dy\,dx$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{4}{9}\frac{\cancel{x^2+y^2}}{\cancel{x^2+y^2}} + 1}\; dy\,dx$$

Nome

Curso

Prova Escrita de:

N.º Aluno

Ano Letivo / Data da Avaliação / /

N.º Folhas

Época:

continuação

2. d) ii)

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\frac{4}{9}+1}\, dy\,dx$$

$$\Leftrightarrow A(S) = \sqrt{\frac{13}{9}} \iint_D 1\, dy\,dx$$

$$\Leftrightarrow A(S) = \frac{\sqrt{13}}{3} A(D)$$

$$\Leftrightarrow A(S) = \frac{\sqrt{13}}{3} \pi 3^2$$

$$\Leftrightarrow A(S) = 3\sqrt{13}\,\pi$$

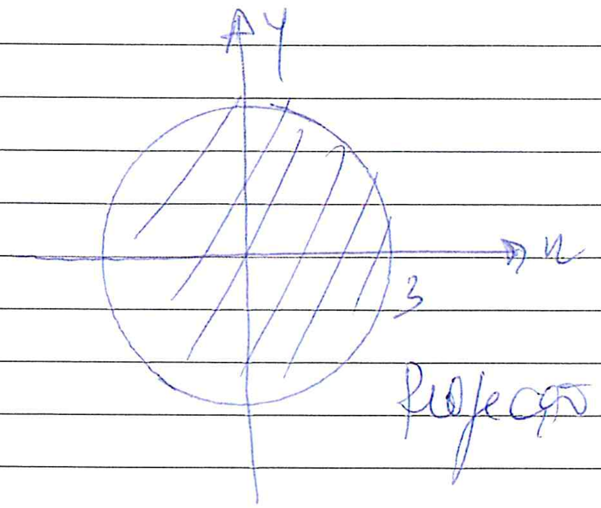
iii) Em coordenadas cartesianas

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 9 \wedge \frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{36-x^2-y^2}\}$$

Sim, uma vez que:

- a projeção de S no plano xOy é um círculo centrado na origem de raio 3

$$x^2+y^2 \leq 9$$



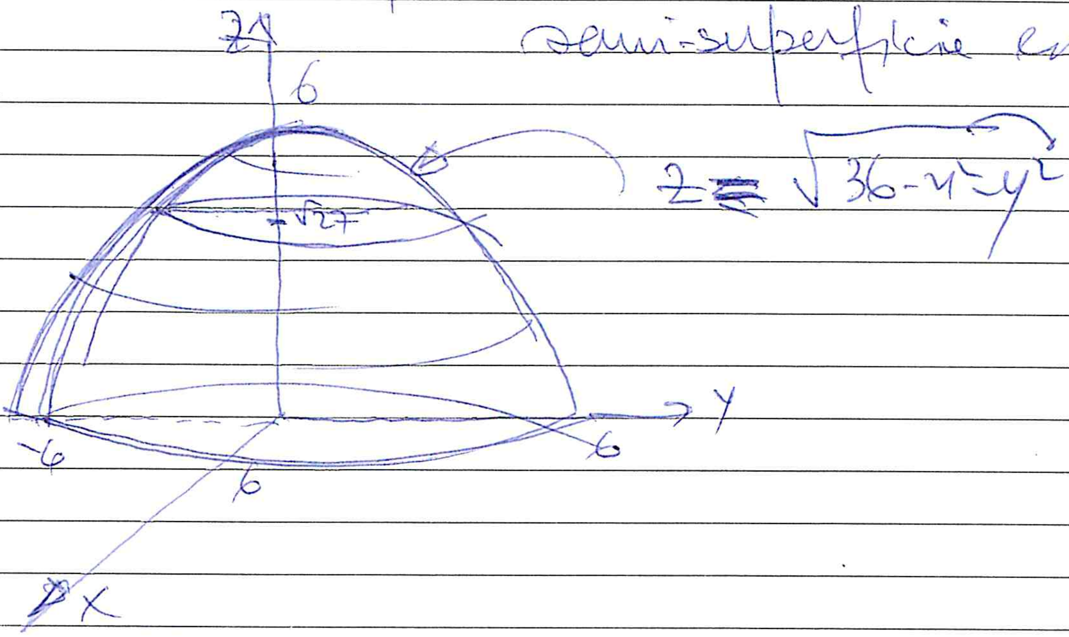
Projeção de S no plano xOy

$x^2+y^2 \leq 9$

- em z o sólido é limitado superiormente por uma superfície esférica de raio 6

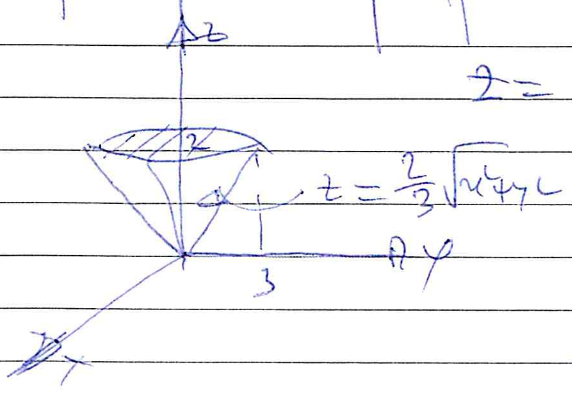
$$x^2+y^2+z^2=36 \Rightarrow z=\sqrt{36-x^2-y^2}$$

semi-superfície esférica



- em z o sólido é limitado inferiormente por uma superfície cónica de raio 3 e altura 2

$$z=\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2}$$



iv) Complete a rotina seguinte em MAPLE e apresente uma 2ª versão em MATLAB com critérios de validação dos parâmetros de entrada.

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := ____________________________;
   y := ____________________________;
   return [x, y];
end proc;
```

Nome Completo: ____

Número: ____

Curso

☐ Licenciatura em Eng. Informática

☐ Licenciatura em Eng. Informática - Pós-laboral

☐ Licenciatura em Informática - Curso Europeu

Trabalhador-Estudante

☐ Sim

☐ Não

Frequência às aulas de AM2

☐ Regime diurno

☐ Regime Pós-laboral

Atividades de aprendizagem e avaliação

☐ Não

☐ Sim

  ☐ At01_Matlab - Integração Numérica (Presencial)

  ☐ At02_Matlab - MNEDO_PVI

  ☐ At03_Matlab - Máquina para derivação e integração

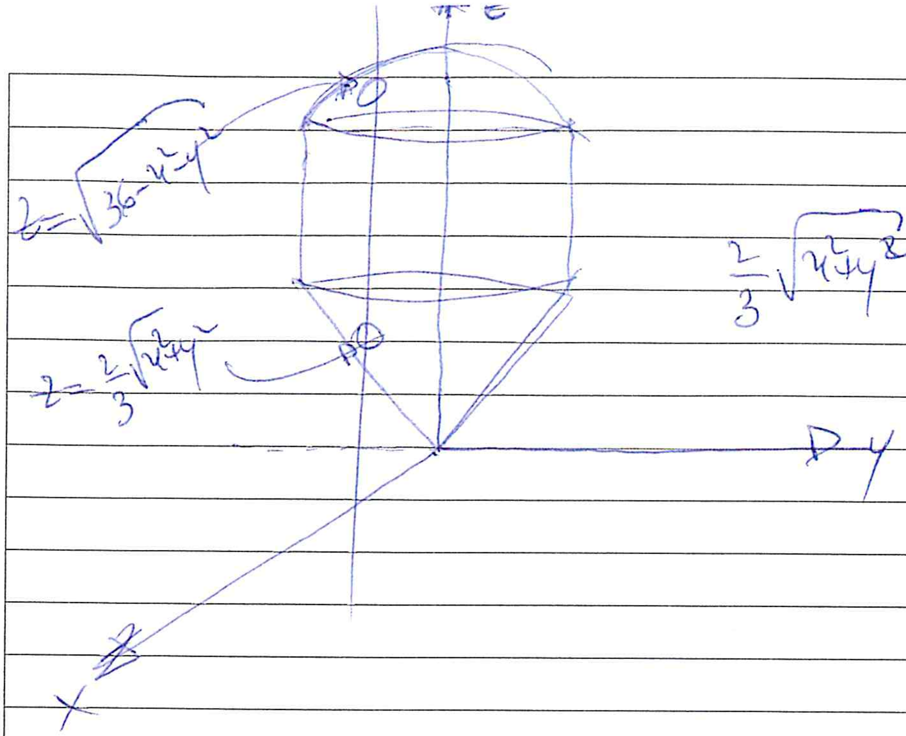
  ☐ At01_TP - Cálculo Diferencial e Integral em IR^n

  ☐ Participação nos fóruns (pelo menos 3 vezes)

Acompanhou registos sobre AM2 e outros na página » facebook/armeniocorreia

☐ Sim

☐ Não



$$\frac{2}{3}\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{36 - x^2 - y^2}$$

IV)

```
Polares2Cartesianas := proc(rho, theta)
   local x, y;
   x := rho * cos(theta);
   y := rho * sin(theta);
   return([x,y]);
end proc;

function [x,y] = Polares2Cartesianas(rho, theta)
   if (rho >= 0)
      x = rho * cos(theta);
      y = rho * sin(theta);
end
```

EXAME DA ÉPOCA NORMAL – TESTE B E TESTE A+B » Data: 27/06/2016 Código da prova: **2706201602**

Teste A+B » 5. c) | Teste B » 2. d)

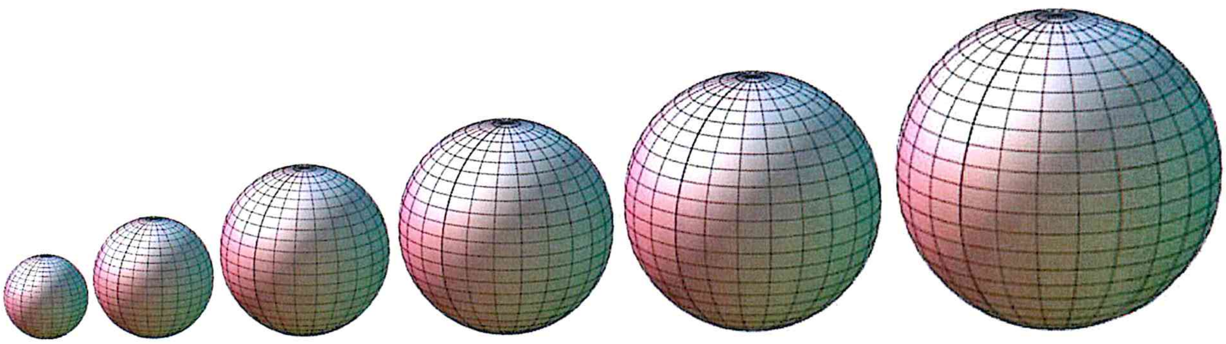
Das alíneas seguintes resolva apenas **uma (Teste A+B)** ou **três (Teste B)**

i); ii); iii); iv)

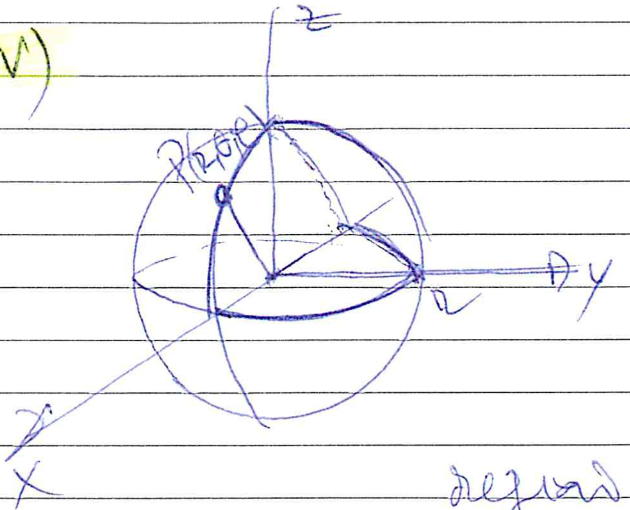
v) Vamos acreditar e a bola contínua a rolar... Viva Portugal!

Foi ao minuto 117 e estamos nos quartos-de-final do Euro2016.

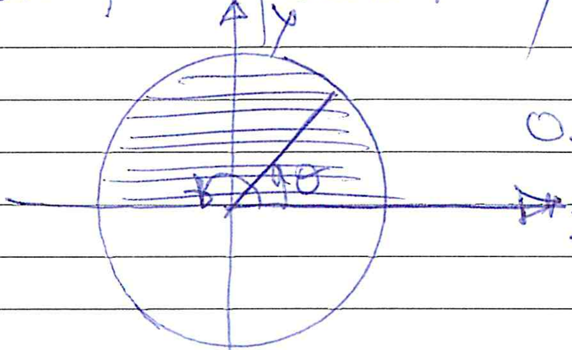
Defina em coordenadas esféricas um quarto de uma esfera de raio r e prove que o seu volume é $\frac{1}{3}\pi r^3$.



v)



$\frac{1}{4}$ de uma esfera de raio r é por exemplo a região do 1º + 2º octante, cuja projeção no plano xOy é dada por:



$0 \leq \theta \leq \pi$

$\Rightarrow S_{1/4} = \{(R,\theta,\varphi) : 0 \leq R \leq r \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$

$\Rightarrow V(S_{1/4}) = \iiint_{S_{1/4}} 1 \, dz\, dy\, dx$

$= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} 1 \left| -R^2 \operatorname{sen} \varphi \right| d\varphi\, d\theta\, dR$

$= \int_0^r R^2 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi\, d\theta\, dR$

$= \cdots$

$= \frac{1}{3} \pi r^3$ c.q.m.