**Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de Equações Diferenciais com condições iniciais.**

**Atividade 02**

**Licenciatura em Engenharia Informática Análise Matemática II**

Alunos:

**Francisco Ruivo – 2021142022**

**Daniel Rodrigues - 2021142013**

**2021 / 2022**



**Índice**



Conteúdo

[1. Introdução 3](#_Toc107059222)

[1.1. Enunciado da atividade proposta e interpretação do mesmo 3](#_Toc107059223)

[1.2 Definição de PVI para sistemas de ED 4](#_Toc107059224)

[2. Métodos Numéricos para resolução de SED 5](#_Toc107059225)

[2.0.1 Cálculo do Passo 5](#_Toc107059226)

[2.1 Método de Euler Melhorado ou Modificado 6](#_Toc107059227)

[2.1.1 Fórmulas 6](#_Toc107059228)

[2.1.2 Algoritmo/Função 8](#_Toc107059229)

[2.2 Método de Runge-Kutta de Ordem 2 9](#_Toc107059230)

[2.2.1 Fórmulas 9](#_Toc107059231)

[2.2.2 Algoritmo/Função 13](#_Toc107059232)

[2.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 4 14](#_Toc107059233)

[2.3.1 Fórmulas 14](#_Toc107059234)

[2.3.2 Algoritmo/Função 20](#_Toc107059235)

[3. Exercícios de aplicação 21](#_Toc107059236)

[3.1 Pêndulo 21](#_Toc107059237)

[3.2 Modelo Vibratório Mecânico 22](#_Toc107059238)

[3.3 Mola Massa Sem Amortecimento 23](#_Toc107059239)

[3.4 Circuitos Elétricos 24](#_Toc107059240)

[3.5 Mola Massa Com Amortecimento 25](#_Toc107059241)

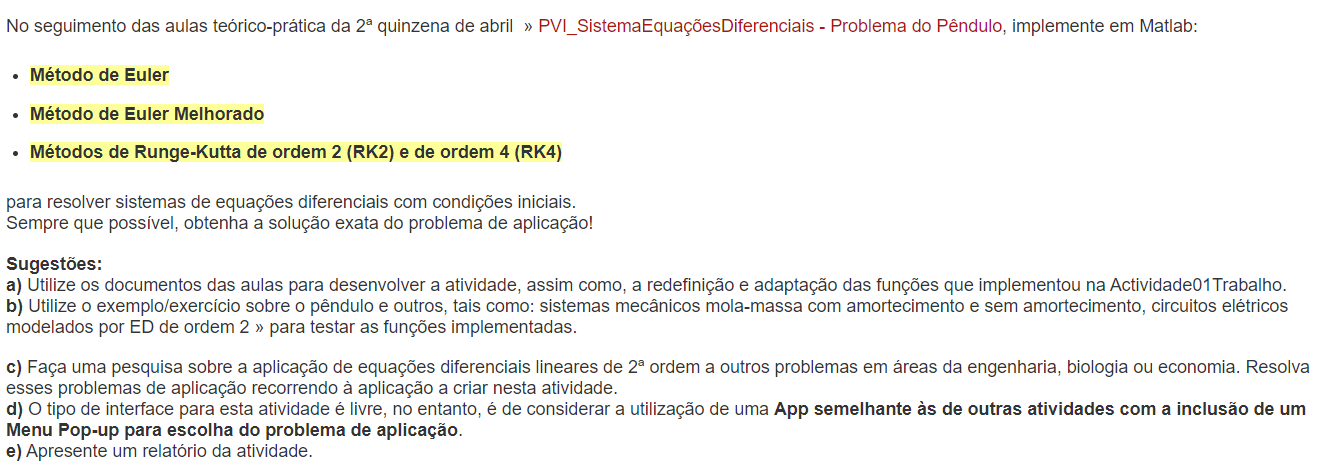
[4.Conclusão 26](#_Toc107059242)

[5. Bibliografia 27](#_Toc107059243)

[6. Autoavaliação e heteroavaliação 28](#_Toc107059244)

# 1. Introdução

1.1. Enunciado da atividade proposta e interpretação do mesmo



Sendo este trabalho quase como uma continuação do primeiro, o objetivo é adaptar as funções feitas anteriormente em MatLab para serem capazes de resolver sistemas de equações diferenciais. Para além disso, temos também que adaptar a GUI de modo a sermos capazes de escolher o problema de aplicação em questão. Por último temos também o dever de verificar se é possível obter solução exata para os problemas escolhidos.

1.2 Definição de PVI para sistemas de ED

Um sistema de equações diferenciais é um sistema constituído por duas ou

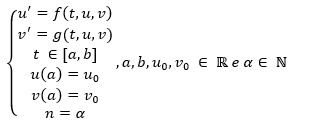
mais equações envolvendo derivadas (não necessariamente de primeira ordem)

de duas ou mais variáveis dependentes relativamente a uma só variável independente

Problema de valor inicial ou problema de Cauchy é uma equação diferencial que se faz acompanhar do valor da função num determinado ponto. Isto é chamado de valor inicial. Para o caso dos sistemas, um PVI é na verdade um sistema de ED que se faz acompanhar do valor das funções num determinado ponto, valor a esse que chamamos de valor inicial.

No nosso programa apenas consta a resolução de PVI com no máximo duas equações, obtidas maior parte das vezes através duma equação diferencial de segunda ordem.

Assim, podemos definir a equação geral de um PVI para sistemas de ED como



onde:

* intervalo de iteração;
* número de iterações (no caso de uso de métodos numéricos para aproximação da solução);
* valor inicial para a equação ;
* valor inicial para a equação ;

# 2. Métodos Numéricos para resolução de SED

2.0.1 Cálculo do Passo

O valor do passo, **h**, será usado por todos os Métodos Numéricos implementados. Assim, a fim de evitar repetição desnecessária, decidimos apresentar aqui a sua definição e fórmula de cálculo.

Este valor é o tamanho de cada subintervalos no intervalo original [a, b], e pode ser calculado da seguinte forma:

Onde:

* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* Limite esquerdo do intervalo;
* Limite direito do intervalo;
* Número de subintervalos;

2.1 Método de Euler Melhorado ou Modificado

O método de Euler melhorado é em tudo semelhante ao método de Euler

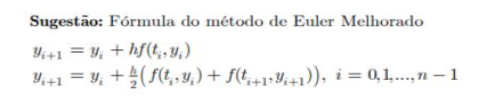
tradicional, a única diferença é que este método utiliza uma média das inclinações

em cada ponto para cada iteração, ou seja, tendo um x0 e um x1 este método

calcula a inclinação em x0 a inclinação em x1 e consegue assim um resultado mais

aproximado.

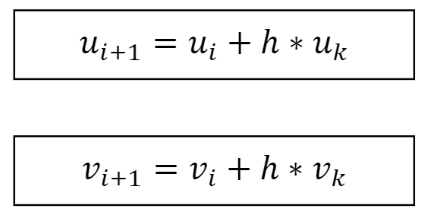
2.1.1 Fórmulas

****

onde:

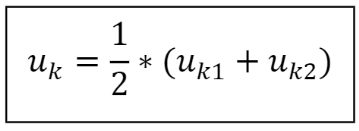
* Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa );
* Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;
* Valor da abscissa atual;
* Valor de cada subintervalo (passo);
* Valor de f no ponto .

**Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações**



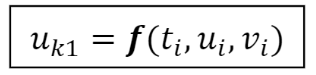
* Aproximação da iésima iteração do método de Euler Modificado;
* Aproximação da iésima iteração do método de Euler Modificado;
* Ordenada atual da função aproximada y(t);
* Ordenada atual da função aproximada y’(t);
* Cálculo do passo;
* Cálculo da média das inclinações;
* Cálculo da média das inclinações.

**Cálculo de /**



* Cálculo da média das inclinações;
* Inclinação do início do intervalo;
* Inclinação do fim do intervalo.

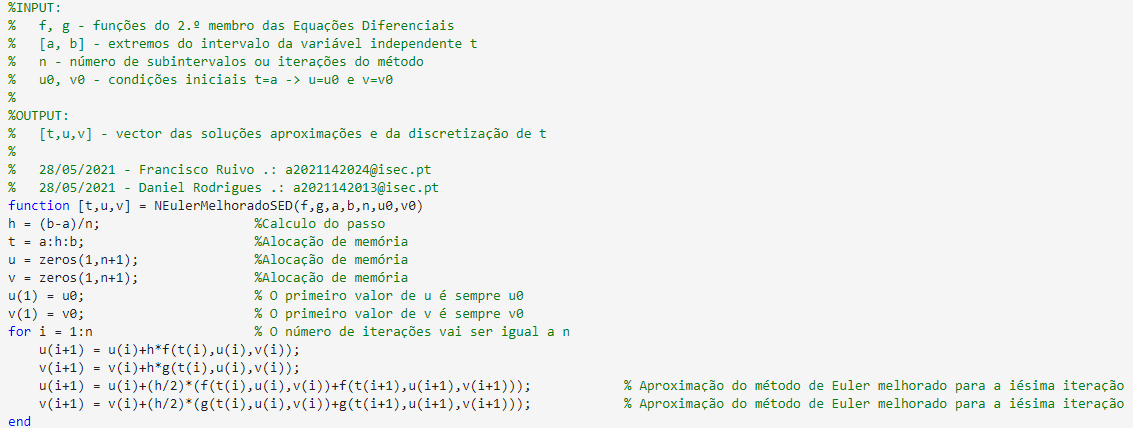
**Cálculo de /**



* Inclinação no início do intervalo;
* Valor de no ponto .

2.1.2 Algoritmo/Função

1. Definir e calcular o passo h;
2. Criar um vetor e um vetor para guardar as soluções e atribuir = e =;
3. Atribuir os primeiros valores a e
4. Cálculo da da inclinação no início e no fim do intervalo;
5. Aproximação do método de Euler para a iésima iteração.



2.2 Método de Runge-Kutta de Ordem 2

É um método de passo simples que requer apenas derivadas de primeira ordem e

pode fornecer aproximações precisas. Isto deve-se em muito à sua fórmula que

considera para cada iteração dois valores denominados normalmente por "k" onde

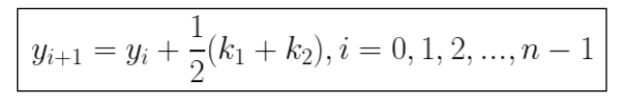
o primeiro é a inclinação no início do intervalo, o segundo é a inclinação no final do

intervalo, assim fazendo uma "média" das inclinações obtém-se a inclinação para

cada iteração, tornando este método eficiente.

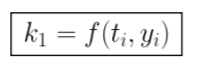
2.2.1 Fórmulas

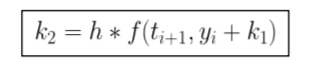
O Método de RK2 para resolver um PVI é dado pelas seguintes equações:



onde:

* Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abscissa );
* Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;

**Cálculo de k1 e k2: **



* Inclinação no início do intervalo
* Valor de cada subintervalo (passo);
* Valor da equação em e ;
* Inclinação no fim do intervalo;
* Valor da abscissa atual;
* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;

**Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações**

onde:

* *ui+1*🡪 Aproximação do método de RK2 para a ié sima iteração;
* *vi+1*🡪 Aproximação do método de RK2 para a iésima iteração;
* *ui*🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi*🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *uk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *vk* 🡪 Cálculo da média das inclinações.

**Cálculo de uk:**

* *uk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *uk2* 🡪 Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de vk:**

* *vk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *vk2* 🡪 Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de uk1:**

* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *h* 🡪 Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *f(ti,ui,vi)* 🡪 Valor de *f* no ponto (*ti* , *ui*, *vi*).

**Cálculo de vk1:**

* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *h* 🡪 Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti* 🡪 Abcissa atual do intervalo escolhido;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *g*(*ti* ,*ui*,*vi*) 🡪 Valor de *g* no ponto (*ti* , *ui*, *vi*).

**Cálculo de uk2:**

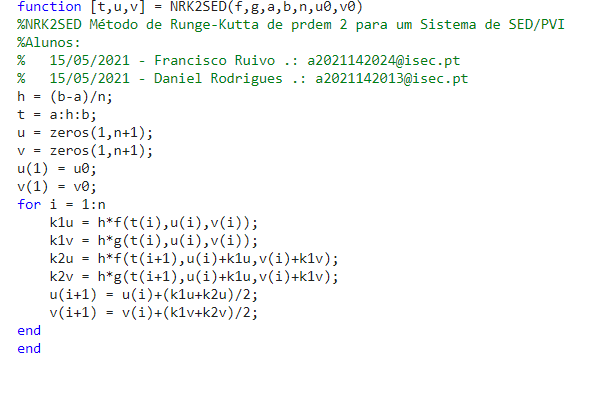
* *uk2* 🡪 Inclinação no fim do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti+1* 🡪 Próxima abcissa do intervalo escolhido;
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo.

**Cálculo de vk2:**

* *vk2* 🡪 Inclinação no fim do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti+1* 🡪 Próxima abcissa do intervalo escolhido;
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo.

2.2.2 Algoritmo/Função

1. Definir e calcular o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução;
3. Atribuir o primeiro valor de y que é igual ao ao valor inicial do PVI;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no final do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do valor aproximado para a iésima iteração.

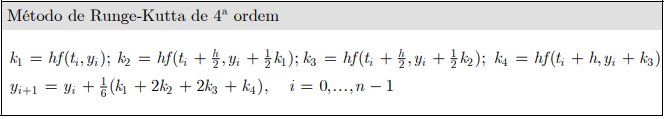


2.3 Método de Runge-Kutta de Ordem 4

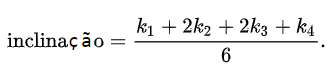
O método de Runge-Kutta de ordem 4, não necessita do cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função que é definida avaliando f em diferentes pontos.

2.3.1 Fórmulas

O Método de RK2 para resolver um PVI é dado pelas seguintes equações:



* representa a aproximação pelo método RK4 de y(xn+1), que é determinado pelo valor atual de y(n) somado com o produto do tamanho do intervalo (h) e uma inclinação estimada, inclinação essa que é calculada pela média ponderada de inclinações como é representada em baixo;
* Valor aproximado da solução do problema original na abscissa atual;



* Inclinação no início do intervalo;
* Inclinação no ponto médio do intervalo;
* Inclinação no ponto médio do intervalo;
* Inclinação no final do intervalo.

**Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações**:

onde:

* *ui+1*🡪 Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração;
* *vi+1*🡪 Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração;
* *ui*🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi*🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *uk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *vk* 🡪 Cálculo da média das inclinações.

**Cálculo de uk:**

* *uk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *uk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *uk3* 🡪 Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
* *uk4* 🡪 Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de vk:**

* *vk* 🡪 Cálculo da média das inclinações;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *vk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *vk3* 🡪 Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
* *vk4* 🡪 Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de uk1:**

* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *h* 🡪 Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *f(ti,ui,vi)* 🡪 Valor de *f* no ponto (*ti* , *ui*, *vi*).

**Cálculo de vk1:**

* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *h* 🡪 Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *g(ti,ui,vi)* 🡪 Valor de *g* no ponto (*ti* , *ui*, *vi*).

**Cálculo de uk2:**

* *uk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti* 🡪 Abcissa atual do intervalo escolhido;
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo.

**Cálculo de vk2:**

* *vk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti* 🡪
* *uk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk1* 🡪 Inclinação no início do intervalo.

**Cálculo de uk3:**

* *uk3* 🡪 Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti* 🡪 Abcissa atual do intervalo escolhido;
* *uk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo.

**Cálculo de vk3:**

* 🡪 Inclinação (novamente) no ponto médio do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti* 🡪 Abcissa atual do intervalo escolhido;
* *uk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y’(t)*;
* *vk2* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo.

**Cálculo de uk4:**

* *uk4* 🡪 Inclinação no final do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti+1* 🡪 Próxima abcissa do intervalo escolhido;
* *uk3* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y«(t)*;
* *vk3* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo.

**Cálculo de vk4:**

* *k4* 🡪 Inclinação no final do intervalo;
* *h 🡪* Tamanho de cada subintervalo (passo);
* *ti+1* 🡪 Próxima abcissa do intervalo escolhido;
* *uk3* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo;
* *ui* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y(t)*;
* *vi* 🡪 Ordenada atual da solução aproximada *y«(t)*;
* *vk3* 🡪 Inclinação no ponto médio do intervalo.

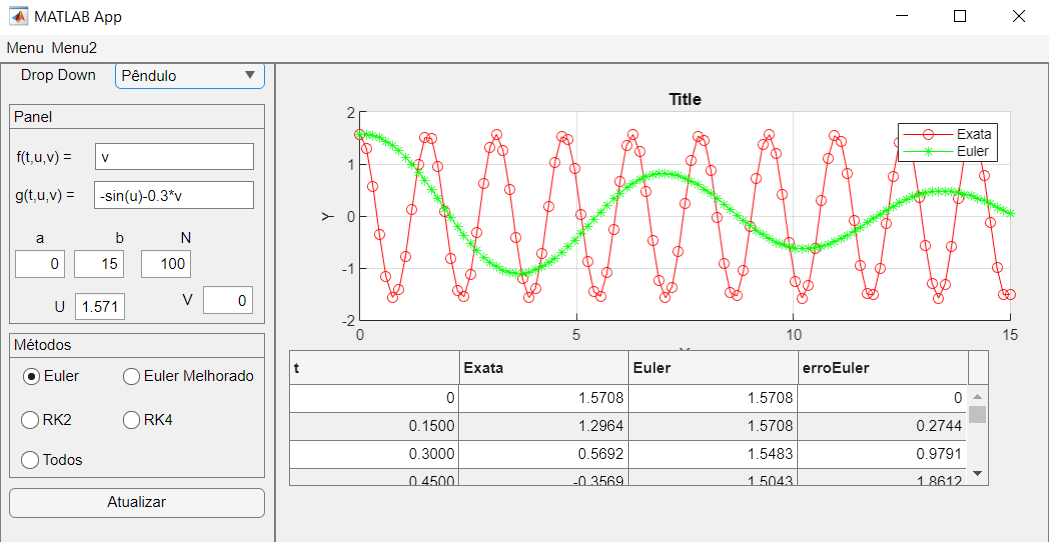
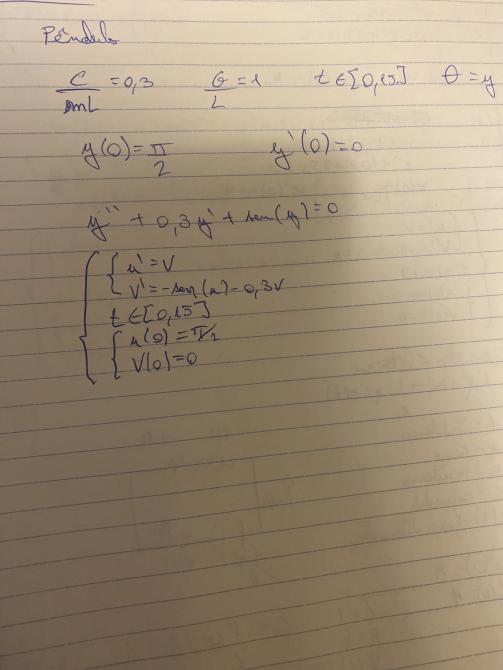
2.3.2 Algoritmo/Função

1. Definir e calcular o passo h;
2. Criar um vetor y para guardar a solução e atribuir y(1) = y0;
3. Atribuir o valor de y;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo;
6. Cálculo da inclinação no ponto médio do intervalo;
7. Cálculo da inclinação no final do intervalo;
8. Cálculo do método RK4.

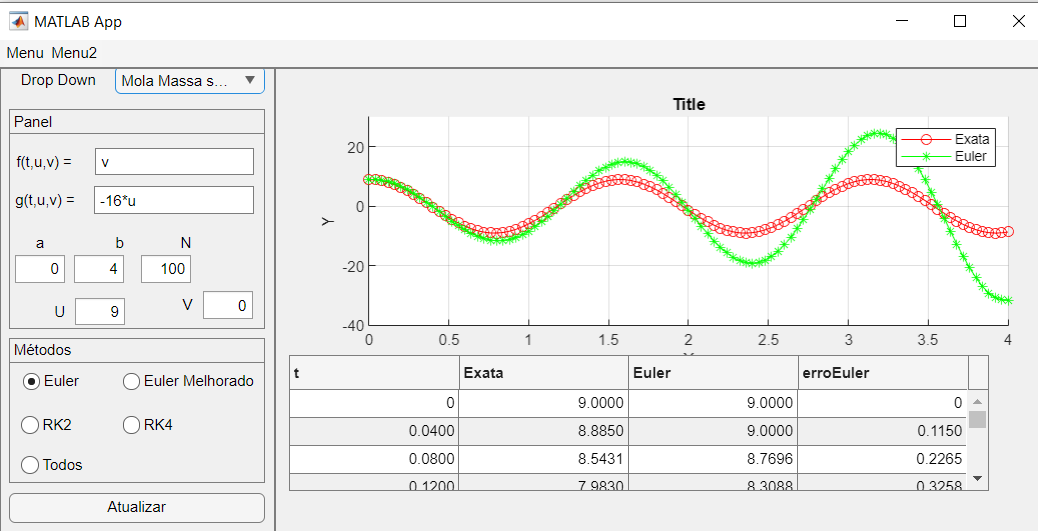


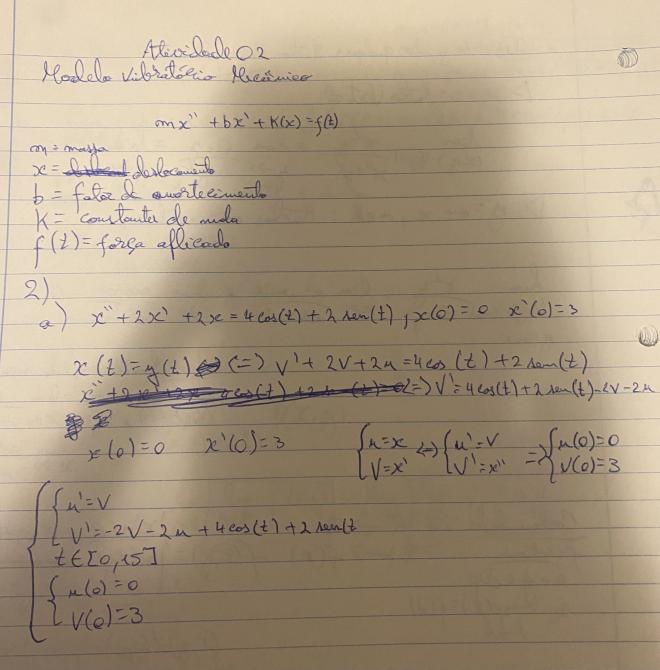
# 3. Exercícios de aplicação

3.1 Pêndulo

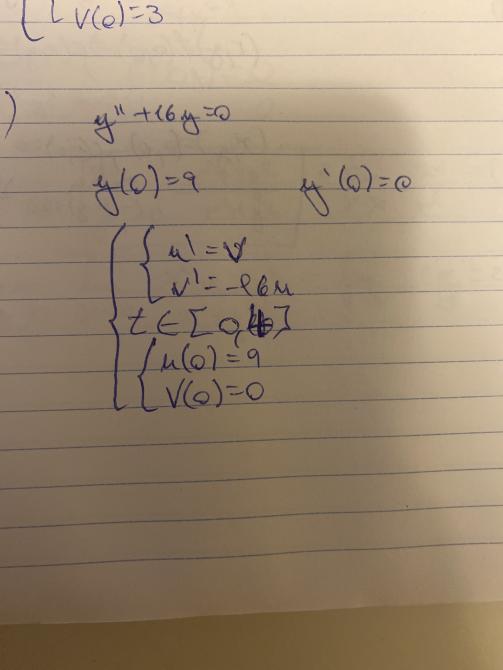


3.2 Modelo Vibratório Mecânico

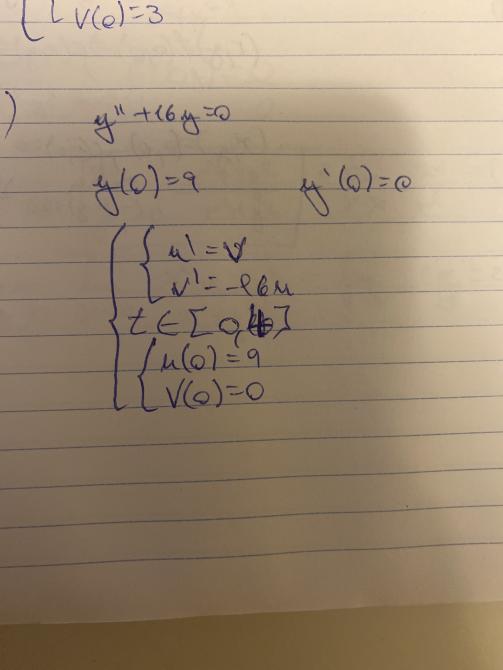




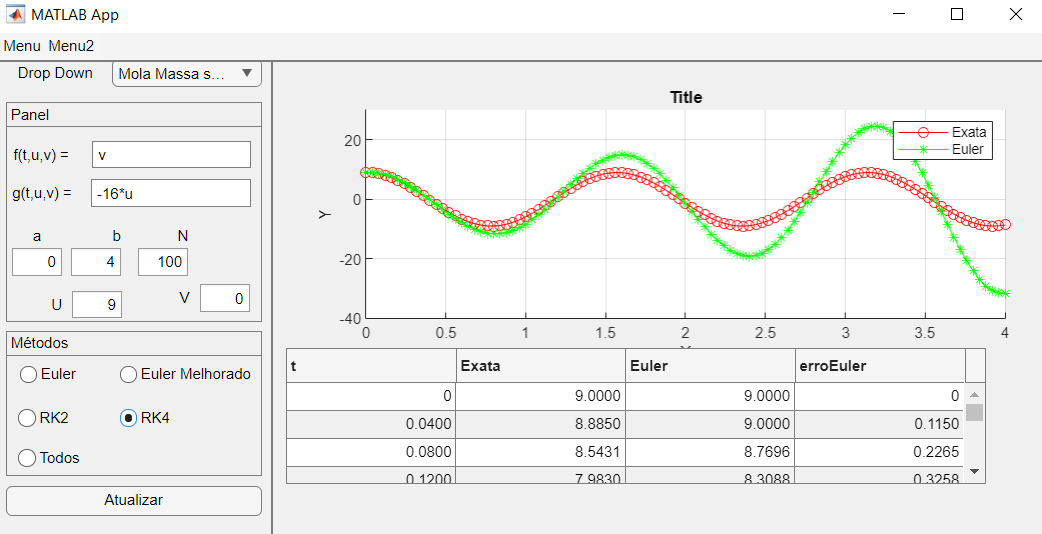
**3.3 Mola Massa Sem Amortecimento**



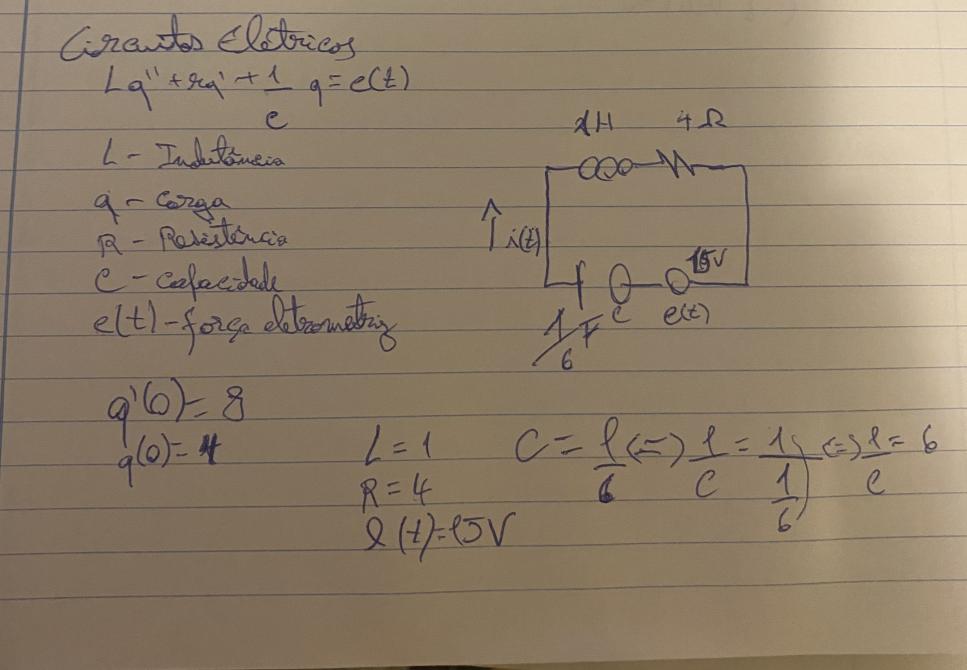
3.3 Mola Massa Sem Amortecimento

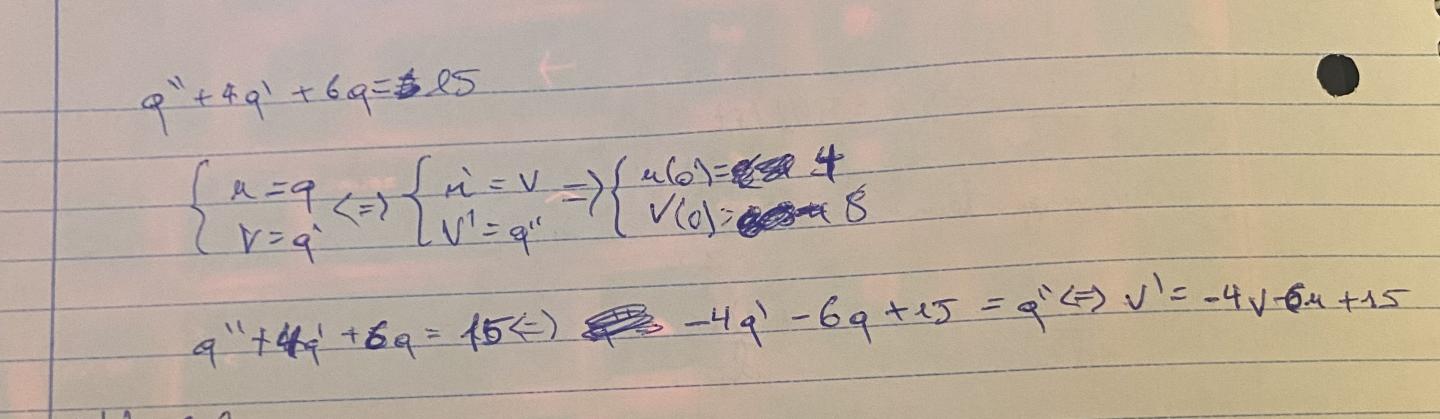


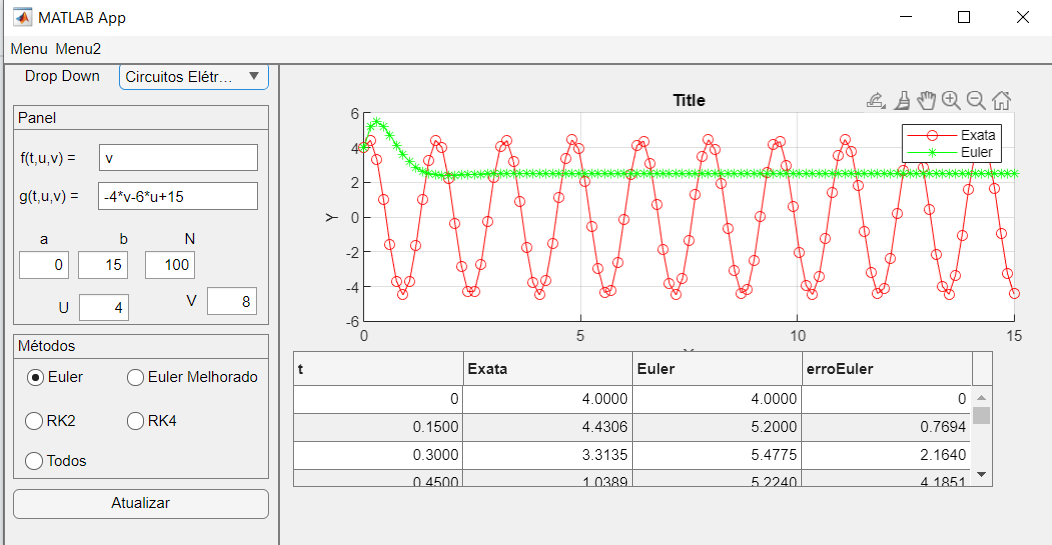
.



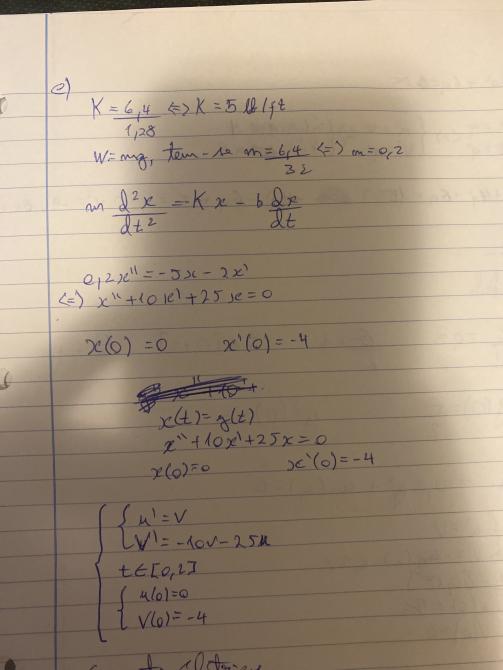
3.4 Circuitos Elétricos

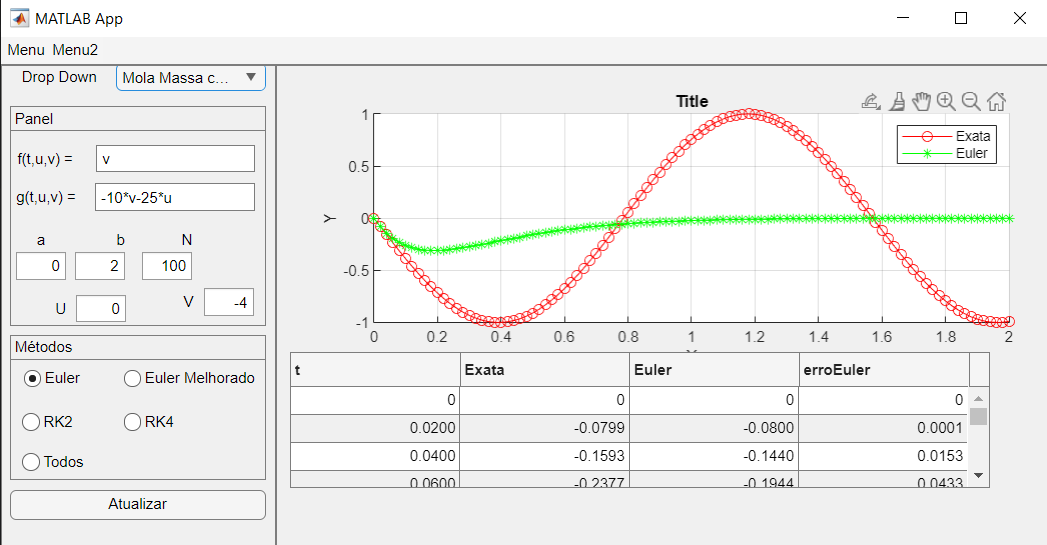






3.5 Mola Massa Com Amortecimento

****

****

# 4.Conclusão

Com a elaboração deste trabalho concluímos que foram desenvolvidos bastantes conhecimentos sobre métodos numéricos e a aplicação dos mesmos. Para além da componente matemática que este trabalho possui, também se desenvolveu bastante conhecimento em programação com MatLab. O facto de lidar com os pequenos desafios e limitações que esta linguagem de programação nos proporciona desenvolveu também o nosso trabalho de investigação para resolução dos mesmos.

Concluímos, por fim, que os Métodos Numéricos para a resolução de Problemas de Valor Inicial são muito úteis, especialmente quando usados num contexto real e prático, pois originam aproximações com erro mínimo (dependendo do método usado).

Como regra geral, verificamos o esperado: quanto maior for o número de subintervalos n, menor é o erro de todos os Métodos

# 5. Bibliografia

* <http://cee.uma.pt/edu/acn/docs/acn_formul5.pdf>
* <http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/anem/sebenta/cap6.pdf>
* [http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/matcomp/documentos/IntroducaoaMatlabParte33.pdf](http://www.mat.uc.pt/~alma/aulas/matcomp/documentos/IntroducaoaMatlabParte203.pdf)
* <http://www.mat.uc.pt/~amca/MPII0607/folha3.pdf>
* <https://en.wikipedia.org/wiki/Heun%27s_method>
* <https://pt.qwe.wiki/wiki/Heun%27s_method>
* <https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler>
* <https://www.codecogs.com/latex/eqneditor.php?lang=en-us>
* <https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula21.pdf>

# 6. Autoavaliação e heteroavaliação

