

Procesamiento de Imágenes

UNIDAD 2 – Filtrado frecuencial

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

Sea:

$$f(x, y) , \quad x = 0, \dots, M-1 , \quad y = 0, \dots, N-1$$

la imagen original de dimensiones $M \times N$. La transformada discreta de Fourier 2D de f se define como:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (1)$$

donde $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ son las variables frecuencia. La región rectangular definida por $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$, $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ se conoce como rectángulo de frecuencia, que claramente es de las mismas dimensiones que la imagen.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

La Transformada Discreta de Fourier Inversa, viene dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)} \quad (2)$$

$$x = 0, \dots, M-1, \quad y = 0, \dots, N-1$$

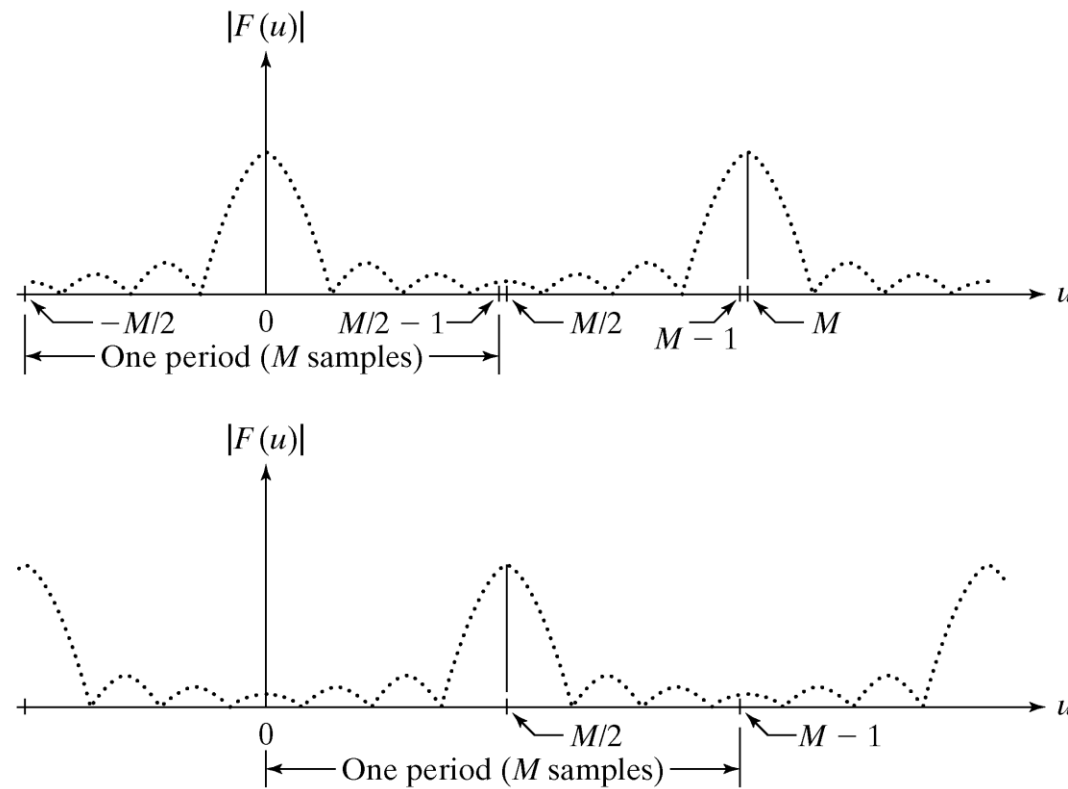
Es decir, dada la transformada $F(u, v)$ se puede recuperar la imagen mediante la transformada inversa. A $F(u, v)$ se los suele denominar **coeficientes de Fourier** en la expansión (2).

Aún si la señal $f(x, y)$ es real, su transformada es compleja. Para visualizar la transformada se suele graficar su módulo $|F(u, v)|$ (espectro de módulo) como una imagen, o equivalentemente su espectro de densidad de energía $|F(u, v)|^2$.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

- Notar de la expresión (1) que la DFT es periódica en las dos direcciones u y v con períodos M y N , respectivamente.
- Notar, de (2), que ésta también es una propiedad de la DFT Inversa.



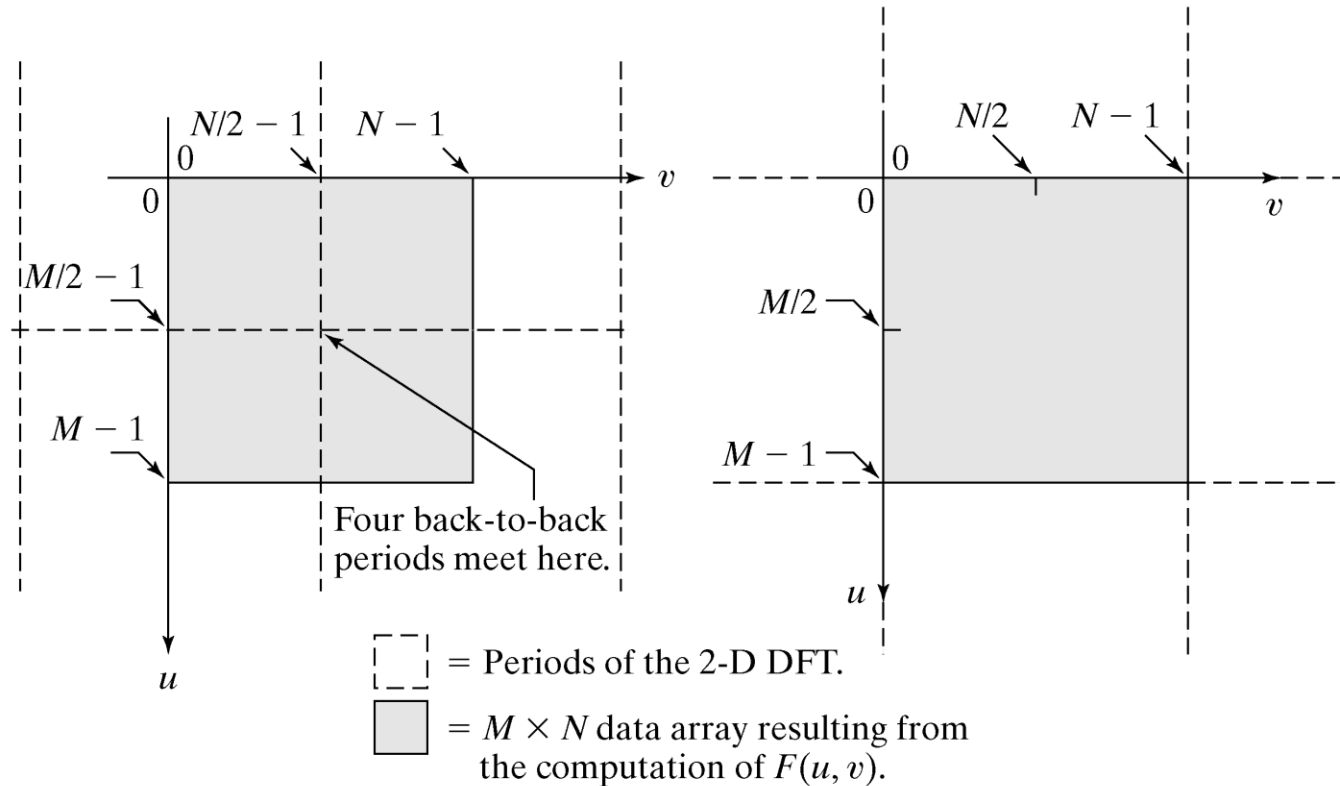
a
b

FIGURE 4.1

(a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, M - 1]$.
(b) Centered spectrum in the same interval, obtained by multiplying $f(x)$ by $(-1)^x$ prior to computing the Fourier transform.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



a b

FIGURE 4.2 (a) $M \times N$ Fourier spectrum (shaded), showing four back-to-back quarter periods contained in the spectrum data. (b) Spectrum obtained by multiplying $f(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ prior to computing the Fourier transform. Only one period is shown shaded because this is the data that would be obtained by an implementation of the equation for $F(u, v)$.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

El comando:

```
F = np.fft.fft2(f)
```

devuelve la 2D-DFT de la imagen f (de dimensiones $M \times N$), en un arreglo de dimensiones $M \times N$, con los datos ubicados como en Fig. 4.2(a).

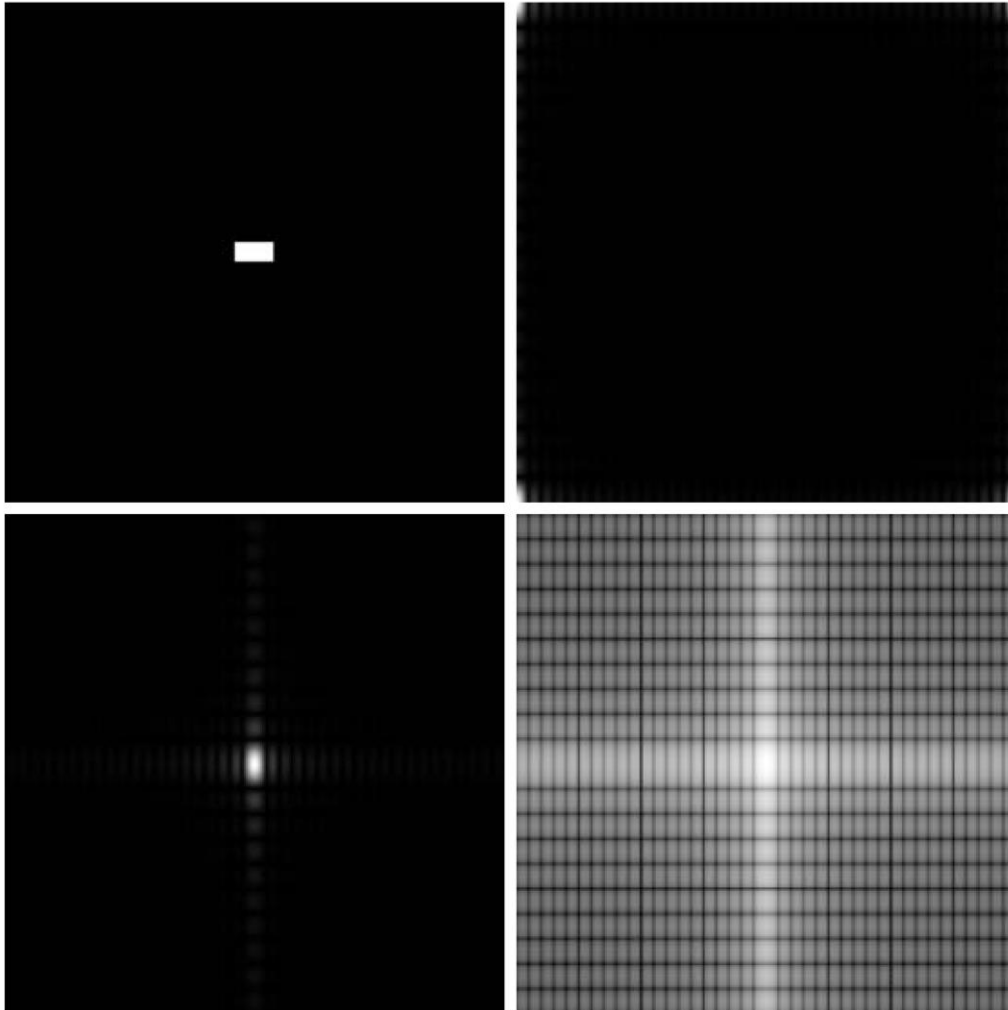
Cuando la DFT es usada para filtrado es necesario completar la imagen original con ceros (**zero padding**). En este caso, la sintaxis es:

```
F = np.fft.fft2(f, (P,Q))
```

que resulta en una matriz (compleja) de dimensiones $P \times Q$.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



a b
c d

FIGURE 4.3

(a) A simple image.
(b) Fourier spectrum.
(c) Centered spectrum.
(d) Spectrum visually enhanced by a log transformation.

```
F = np.fft.fft2(img)
S = np.abs(F)
Slog = np.log(1.0 + S)
plt.imshow(img, cmap='gray')
plt.imshow(S, cmap='gray')
plt.imshow(np.fft.fftshift(S), cmap='gray')
plt.imshow(np.fft.fftshift(Slog), cmap='gray')
```

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

La imagen original f puede recuperarse a partir de la DFT con el comando:

```
f = np.real(np.fft.ifft2(F))
```

En teoría, si la imagen original es real entonces $\text{np.fft.ifft2}(F)$ debería ser real. Debido a errores de cómputo, en la práctica $\text{np.fft.ifft2}(F)$ resulta compleja con parte imaginaria muy pequeña, por lo que debe tomarse la parte real.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

Vimos que en el dominio espacial el filtrado se obtiene convolucionando la imagen $f(x,y)$ con la máscara $h(x,y)$, es decir:

$$f_{filt}(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

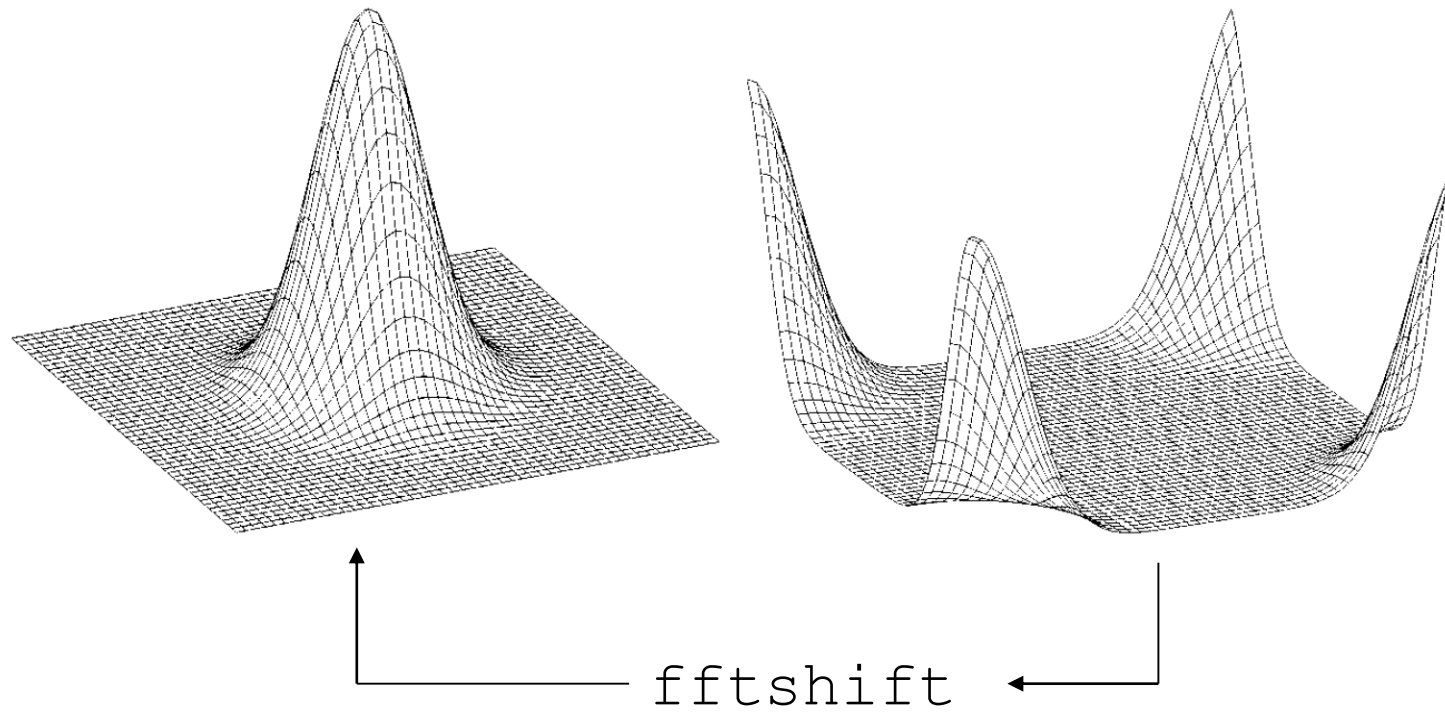
Por el Teorema de Convolución, en el dominio transformado resulta:

$$F_{filt}(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

donde $H(u,v)$ se denomina respuesta en frecuencia del filtro.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



a b

FIGURE 4.4

Transfer functions of (a) a centered lowpass filter, and (b) the format used for DFT filtering. Note that these are frequency domain filters.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

Filtrado sin padding

```
M,N = img.shape
F = np.fft.fft2(img)
sig = 10
H = lpfilter('gaussian',M,N,sig)
G = H*F
g = np.real(np.fft.ifft2(G))
```

Filtrado con padding

```
M,N = img.shape
P,Q = M*2, N*2
Fp = np.fft.fft2(img,(P,Q))
sig = 10
Hp = lpfilter('gaussian',P,Q,2*sig)
Gp = Hp*Fp
gp = np.real(np.fft.ifft2(Gp))
gpc = gp[:M,:N]
```

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial

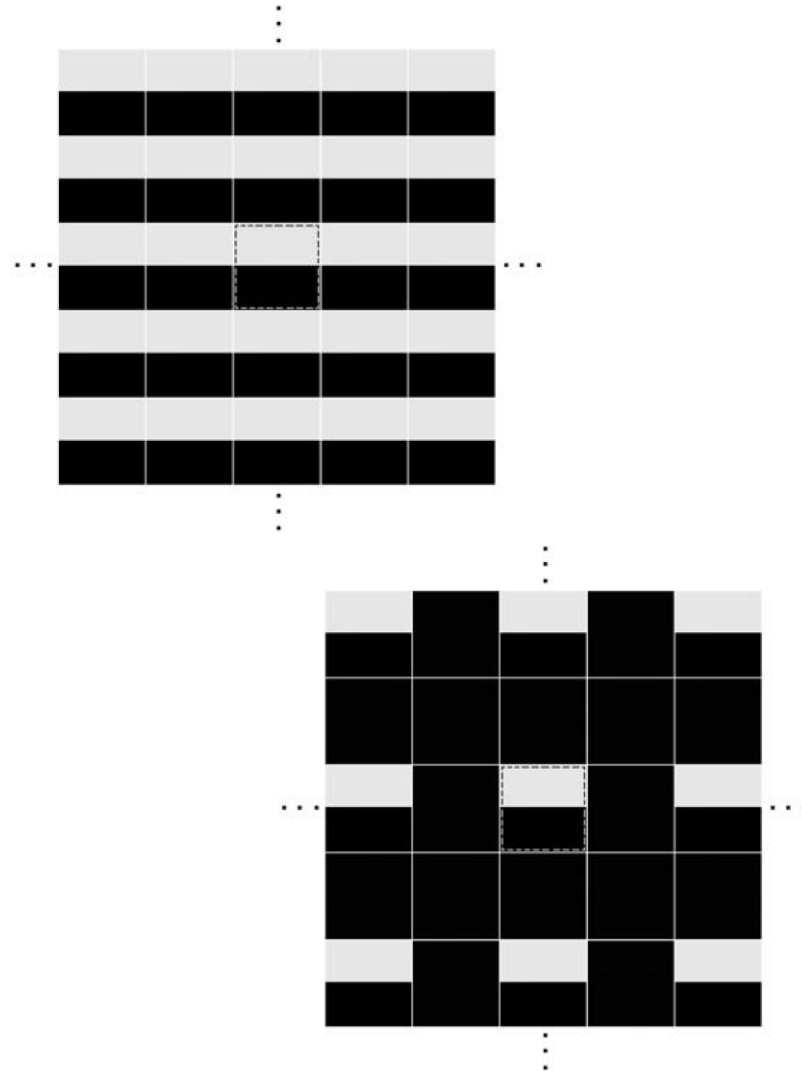


a b c

FIGURE 4.5 (a) A simple image of size 256×256 . (b) Image lowpass-filtered in the frequency domain without padding. (c) Image lowpass-filtered in the frequency domain with padding. Compare the light portion of the vertical edges in (b) and (c).

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



a

b

FIGURE 4.6

(a) Implied, infinite periodic sequence of the image in Fig. 4.5(a). The dashed region represents the data processed by `fft2`. (b) The same periodic sequence after padding with 0s. The thin white lines in both images are shown for convenience in viewing; they are not part of the data.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



FIGURE 4.7 Full padded image resulting from `ifft2` after filtering. This image is of size 512×512 pixels.

Transformaciones de Intensidad

Pasos básicos de filtrado en el dominio DFT

1. Calcular los parámetros de *padding*:

$$P, Q = M*2, N*2$$

2. Computar la Transformada de Fourier con *padding*:

$$F_p = \text{np.fft.fft2}(\text{img}, (P, Q))$$

3. Generar la función de filtro H , de dimensiones $P \times Q$

4. Multiplicar la transformada por el filtro:

$$G_p = H_p * F_p$$

5. Obtener la parte real de la IFFT de G :

$$g_p = \text{np.real}(\text{np.fft.ifft2}(G_p))$$

6. Recortar (*crop*) el rectángulo superior izquierdo:

$$g_{pc} = g_p[:M, :N]$$

Transformaciones de Intensidad

Pasos básicos de filtrado en el dominio DFT

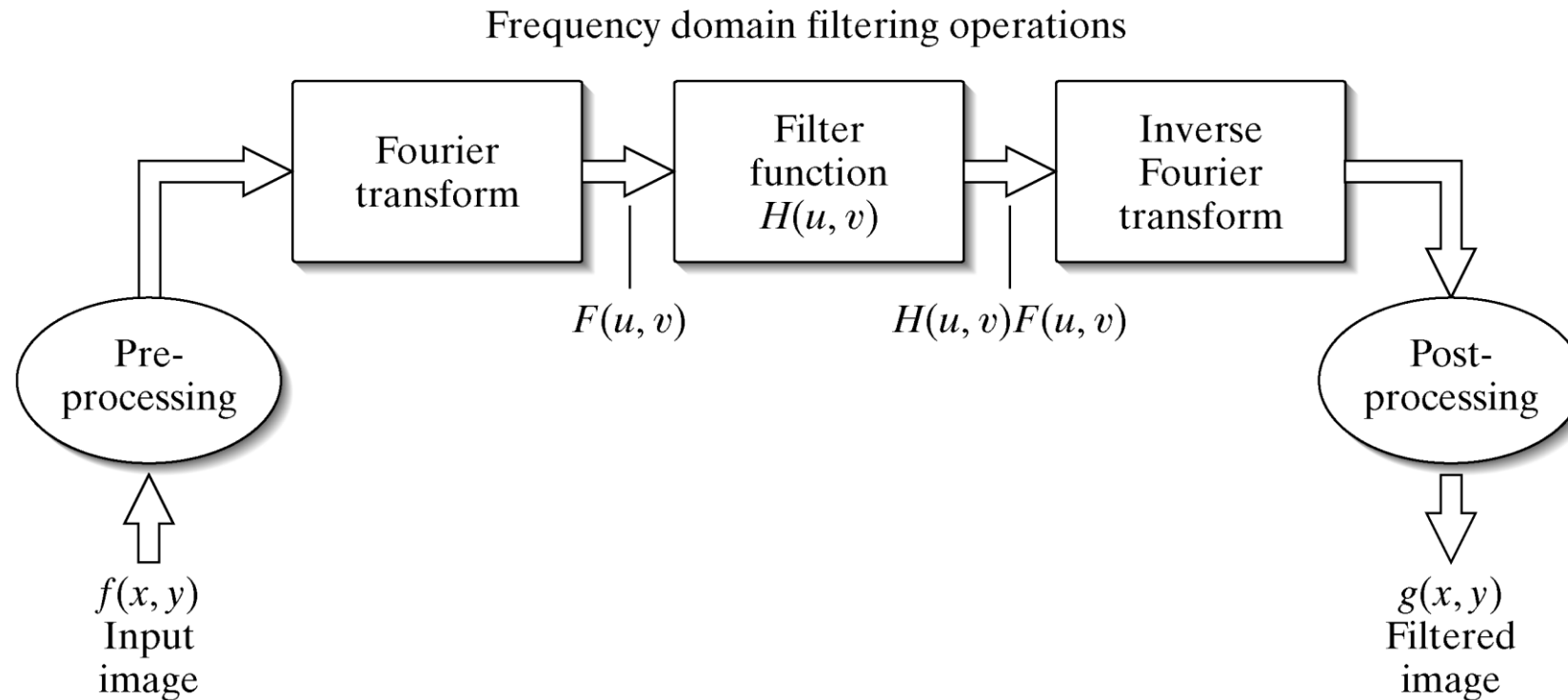
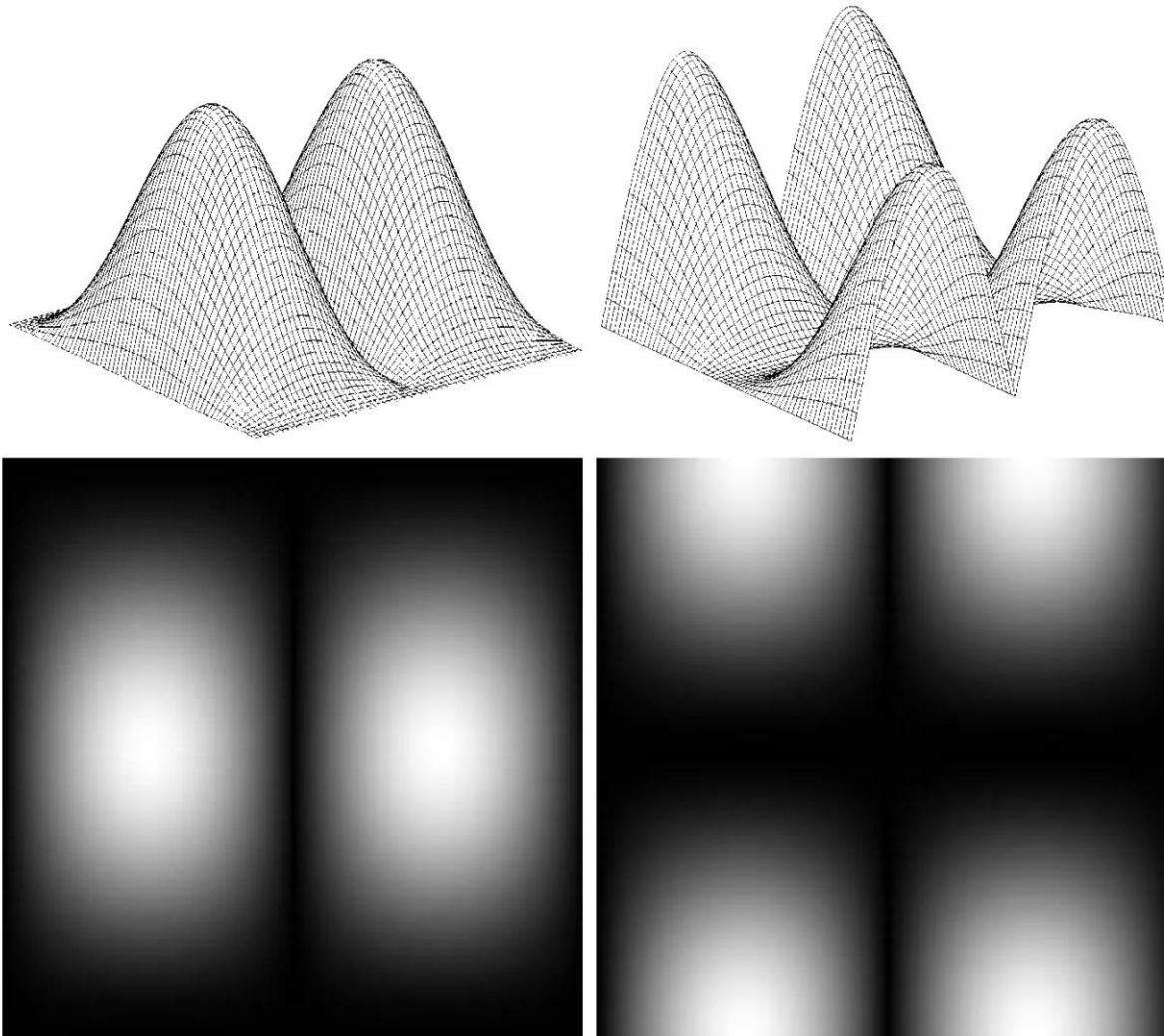


FIGURE 4.8
Basic steps for
filtering in the
frequency
domain.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial



a	b
c	d

FIGURE 4.10

(a) Absolute value of the frequency domain filter corresponding to a vertical Sobel mask. (b) The same filter after processing with function `fftshift`. Figures (c) and (d) are the filters in (a) and (b) shown as images.

Transformaciones de Intensidad

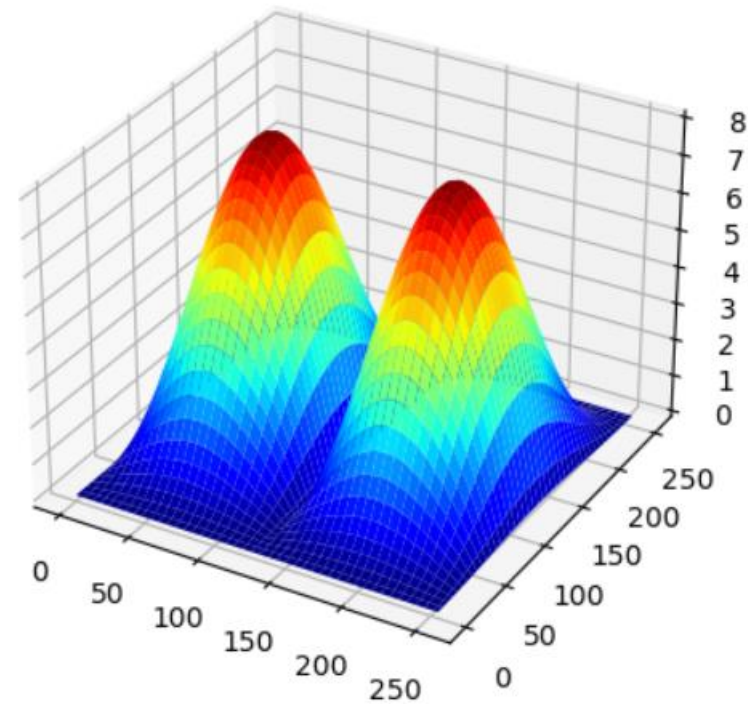
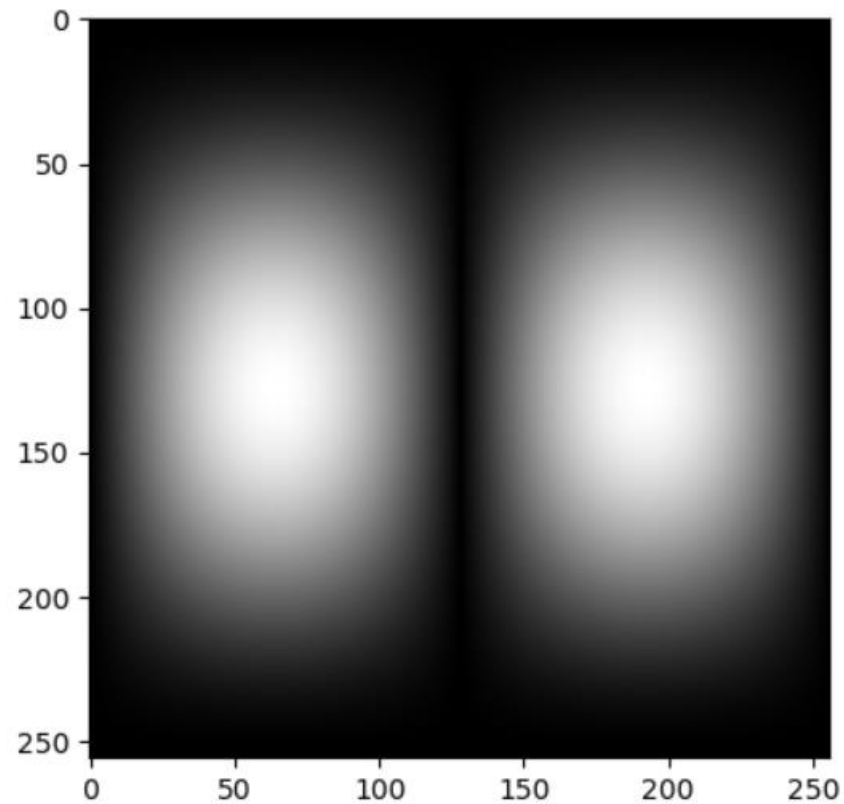
Filtrado Frecuencial

Gráfico 3D de la respuesta en frecuencia de los filtros

```
sobel_x = np.array([[ -1,  0,  1],
                    [ -2,  0,  2],
                    [ -1,  0,  1]])
H = np.abs(np.fft.fft2(sobel_x, (256,256)))
plt.imshow(np.fft.fftshift(H), cmap='gray')
X,Y = np.meshgrid( range(H.shape[0]), range(H.shape[1]))
fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, np.fft.fftshift(H),cmap='jet')
plt.show()
```

Transformaciones de Intensidad

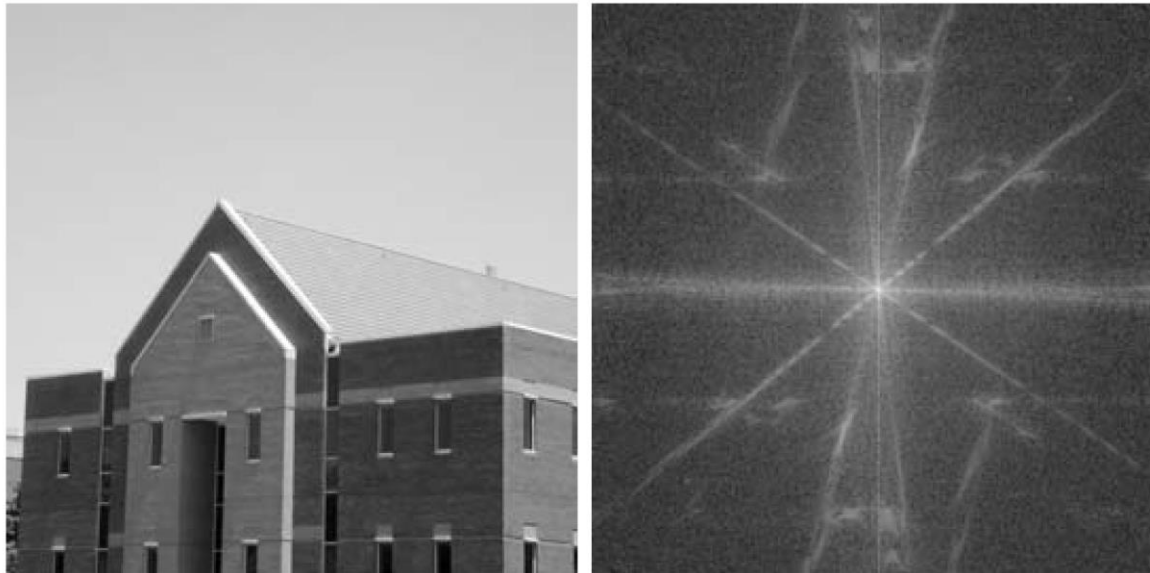
Filtrado Frecuencial



Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial – Ejemplo: Sobel + Umbralizado

```
F = np.fft.fft2(f)
S = np.abs(F)
Slog = np.log(1.0 + S)
plt.subplot(121)
h=plt.imshow(f,cmap='gray')
plt.subplot(122)
h=plt.imshow(np.fft.fftshift(Slog),cmap='gray')
plt.show()
```



a b

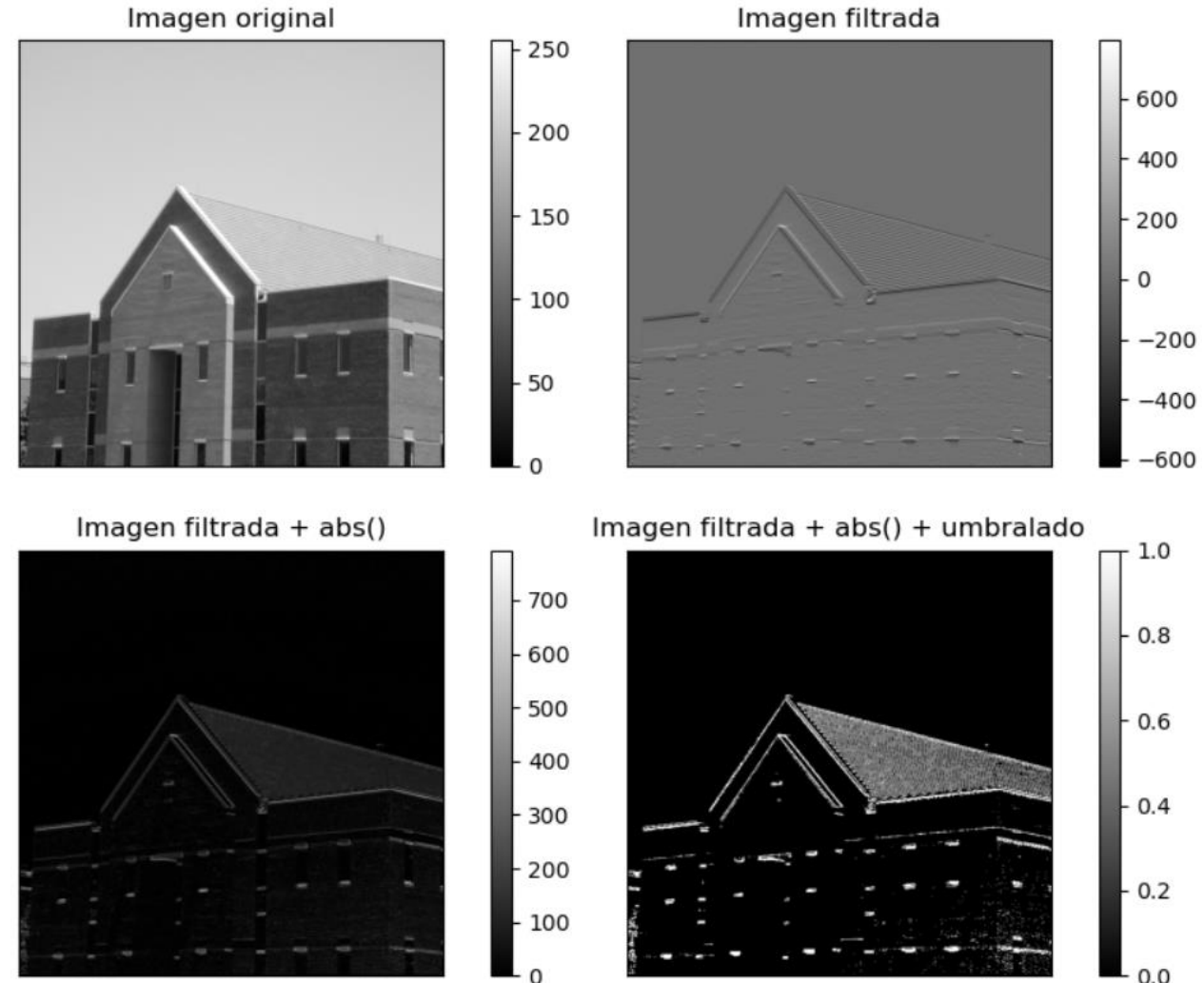
FIGURE 4.9
(a) A gray-scale image. (b) Its Fourier spectrum.

Transformaciones de Intensidad

Filtrado Frecuencial – Ejemplo: Sobel + Umbralizado

```
sobel_y = np.array([[1,2,1],  
                    [0, 0, 0],  
                    [-1, -2, -1]])  
  
H = np.fft.fft2(sobel_y,f.shape)  
Y = F*H  
y = np.real(np.fft.ifft2(Y))  
y_abs = np.abs(y)  
y_th = np.abs(y)>0.15*np.max(np.abs(y))
```

```
ax1=plt.subplot(221)  
h=plt.imshow(img,cmap='gray')  
plt.subplot(222,sharex=ax1,sharey=ax1)  
h=plt.imshow(y,cmap='gray')  
plt.subplot(223,sharex=ax1,sharey=ax1)  
h=plt.imshow(y_abs,cmap='gray')  
plt.subplot(224,sharex=ax1,sharey=ax1)  
h=plt.imshow(y_th,cmap='gray')  
plt.show()
```



Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT

Nos concentramos en filtros circularmente simétricos que se definen como distancias desde el punto en el dominio frecuencial (u,v) al origen de la transformada.

Filtros Pasa Bajo en el dominio frecuencial

Un **Filtro Pasa Bajo Ideal (ILPF)** está definido como:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

Donde $D(u,v)$ es la distancia del punto (u,v) al centro del filtro y D_0 es una constante (frecuencia de corte).

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT

Un **Filtro Pasa Bajo de Butterworth (BLPF)** de orden n con una frecuencia de corte a una distancia D_0 del origen tiene una respuesta en frecuencia de la forma:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

A diferencia de un ILPF, la respuesta en frecuencia de un BLPF no tiene una discontinuidad en D_0 . La frecuencia de corte usualmente se define como los puntos donde $H(u, v) = 0.5$, y $D(u, v) = D_0$.

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT

Un **Filtro Pasa Bajo Gaussiano (GLPF)** tiene una respuesta en frecuencia definida como:

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2\sigma^2}}$$

donde σ es el desvío estándar. Haciendo $\sigma=D_0$ se obtiene la expresión de la respuesta en frecuencia en función de la frecuencia de corte D_0 :

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$

Cuando $D(u, v)=D_0$ la ganancia cae a 0,607.

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT

Filtros Pasa Alto en el dominio frecuencial

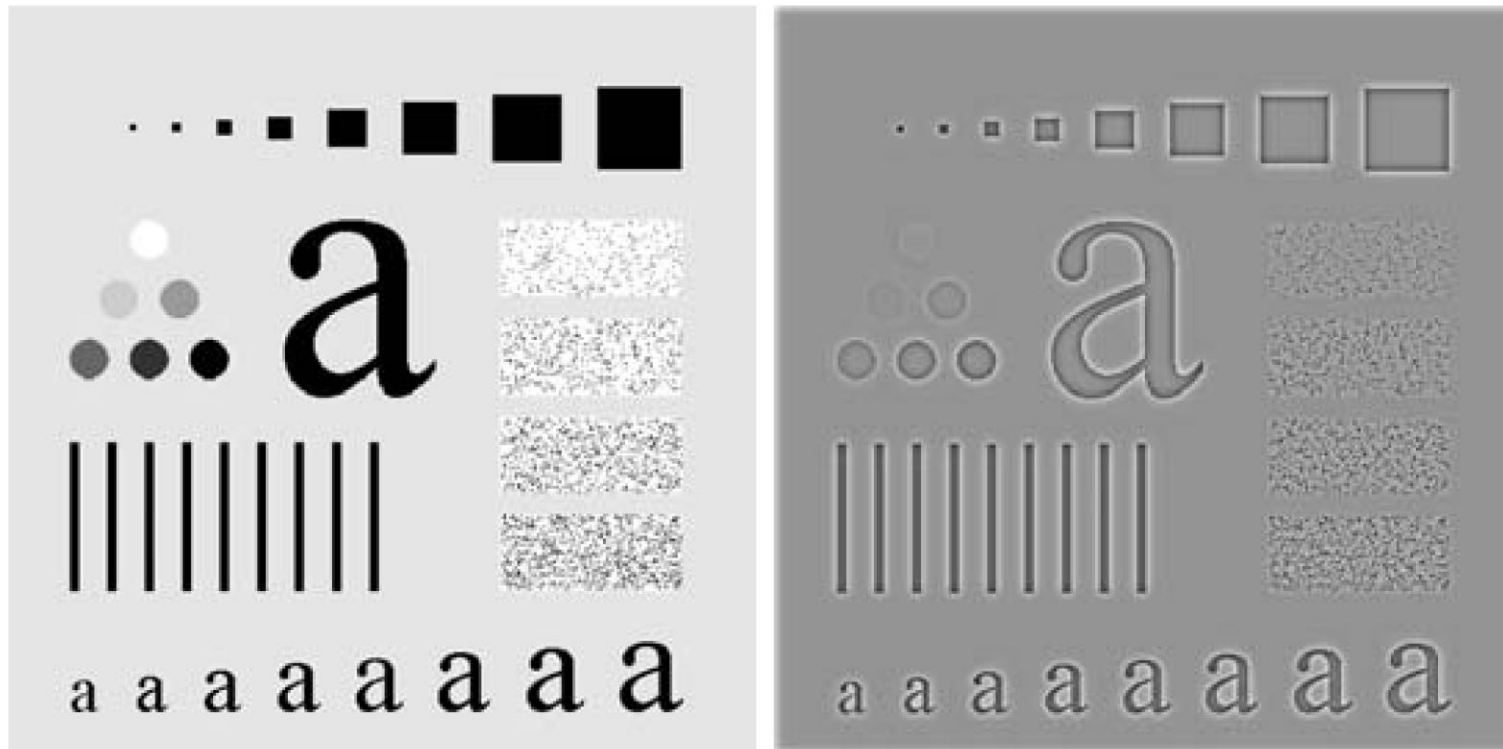
Dada la respuesta en frecuencia $H_{lp}(u, v)$ de un filtro pasa bajo, la función transferencia del filtro pasa alto complementario se obtiene:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

```
D0 = img.shape[0]*0.15
H = hpfilter('gaussian', img.shape[0]*2, img.shape[1]*2, D0)
g = dftfilt(img,H)
plt.imshow(g, cmap='gray')
```

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT



a b

FIGURE 4.18

(a) Original image.
(b) Result of
Gaussian highpass
filtering.

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT

Filtros de Énfasis de Alta Frecuencia

La respuesta en frecuencia es de la forma:

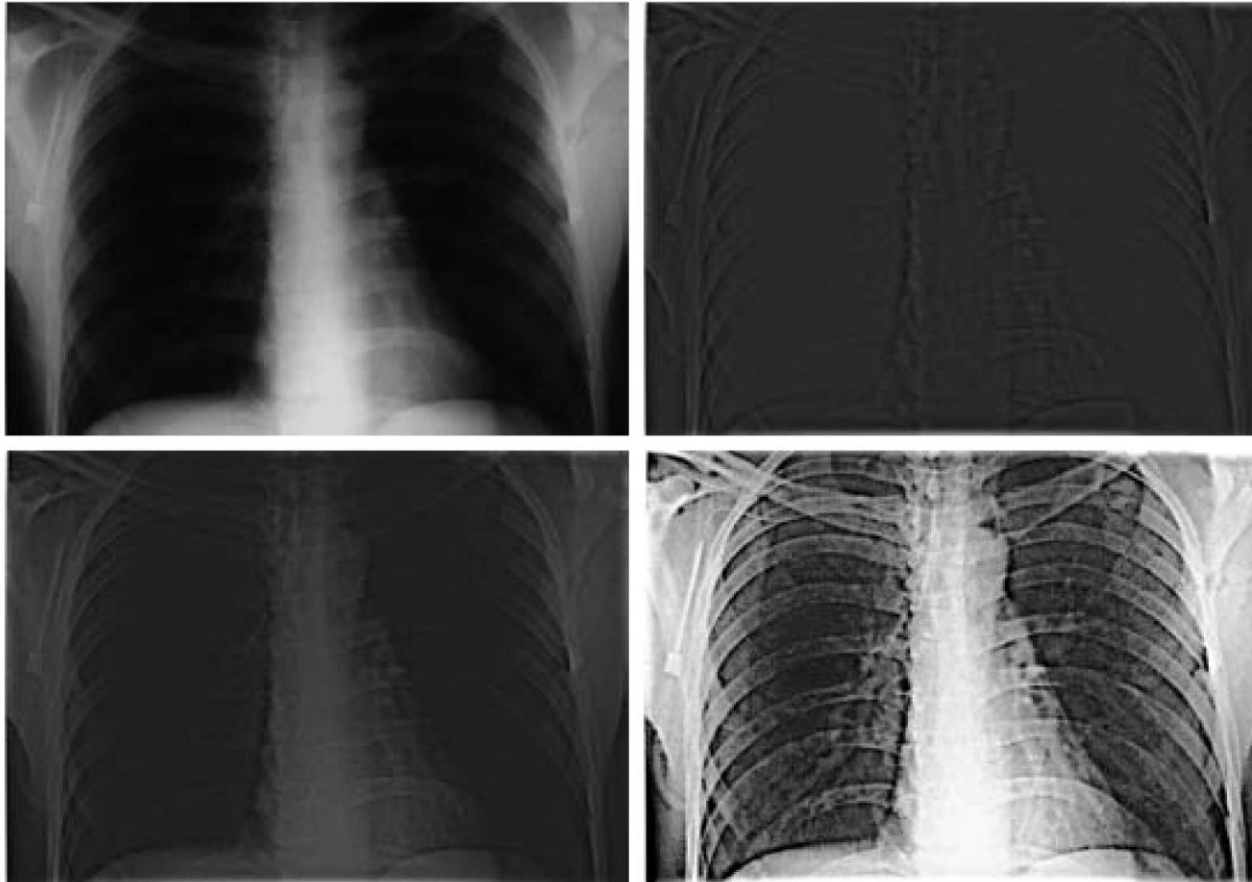
$$H_{hfe}(u, v) = a + bH_{hp}(u, v)$$

donde a es el offset y b es un factor de escala.

```
D0 = img.shape[0]*2*0.05
HBW = hpfilter('btw', img.shape[0]*2, img.shape[1]*2, D0, 1)
H = 0.5 + 2*HBW
g_hp = dftfilt(img, HBW)
g_enfasis = dftfilt(img, H)
g_enfasis_sc = cv2.normalize(g_enfasis, None, 0, 255, cv2.NORM_MINMAX, cv2.CV_8UC1)
g_eq = cv2.equalizeHist(g_enfasis_sc)
```

Transformaciones de Intensidad

Generación de filtros directamente en el dominio DFT



a b
c d

FIGURE 4.19 High-frequency emphasis filtering. (a) Original image. (b) Highpass filtering result. (c) High-frequency emphasis result. (d) Image (c) after histogram equalization. (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)