Di Tella University - 2024

Lecture Notes - MICRO I

Sesto Francisco
3 de octubre de 2024

Índice

Preferencias y elección

Vamos a analizar decisiones agentes desde dos enfoques. En ambos enfoques, partimos de un conjunto de alternativas X, las cuales son mutuamente excluyentes y representan el menú de opciones del que dispone el agente.

1. **Agentes poseen preferencias**. Decisiones se derivan de las preferencias $\succsim$ (o gustos). Ponemos restricciones a las preferencias y vemos restricciones en las decisiones.

2. **Las decisiones son el objeto primitivo**. (No se sabe como toman decisiones) Imponiendo restricciones "de consistencia" sobre esas decisiones que toman.

Enfoque de preferencias

Agentes tienen gustos sobre el conjunto X. Representados por una **relación de preferencia débil** $\succsim$. Siendo $\succsim$ una relación binaria, es decir, dado un par ordenado x, y puede suceder

- $x \succsim y$ (x es al menos tan buena como y)
- $x \not\succsim y$ (x no es al menos tan buena como y)

O sea, x se relaciona con y o x no se relaciona con y.

Esto nos permite comparar alternativas $x, y \in X$. A partir de $\succsim$ se derivan dos relaciones binarias adicionales, a saber:

- **Relación de preferencia estricta:** $x \succ y \iff x \succsim y \wedge y \not\succsim x$
- **Relación de indiferencia:** $x \sim y, x \succsim y \wedge y \succsim x$

Restricciones sobre las preferencias

No permitimos cualquier clase de preferencias, pedimos supuestos de "consistencia". En particular, pediremos que $\succsim$ sean racionales.

Definición 1 (Preferencia racional)**.** La relación de preferencia $\succsim$ es racional si cumple con

1. $\succsim$ **es completa** si $\forall x, y \in X, x \succsim y \vee y \succsim x$ (o ambas). [1]
2. $\succsim$ **es transitiva** si $\forall x, y, z \in X$ tal que $x \succsim y \wedge y \succsim z \Rightarrow x \succsim z$
3. $\succsim$ **es reflexiva** $\forall x \in X, x \succsim x$

[1] Prefiero x a y, al reves o me dan igual pero siempre tengo preferencias

Proposición 2 (Propiedades de la preferencia estricta)**.** *Si $\succsim$ es racional, entonces*

1. $\succ$ ***es irreflexiva*** $x \not\succ x$
2. $\succ$ ***es transitiva*** *si* $x \succ y \wedge y \succ z \Rightarrow x \succ z$
3. $\succ$ ***es transitiva fuerte*** *si* $(x \succ y \succsim z)$ *ó* $(x \succsim y \succ z) \Rightarrow x \succ z$

Proposición 3 (Propiedades de la indiferencia)**.** *Si $\succsim$ es racional, entonces*

1. ***es reflexiva:*** $x \sim x$
2. ***es simétrica:*** *si* $x \sim y \iff y \sim x$
3. ***es transitiva:*** *si* $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Función de utilidad

Definición 4 (Función de utilidad)**.** Una función $u : X \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad representando la relación de preferencia $\succsim$ si, $\forall x, y \in X$

El conjunto X es de alternativas mutuamente excluyentes

$$x \succsim y \iff u(x) \geq u(y)$$

Proposición 5. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, estrictamente creciente, entonces $v \equiv f(u(\cdot))$ tambien representa las preferencias $\succsim$, es tambien una función de utilidad.*

Dado que solo nos interesa el orden, no importa la escala por ello podemos aplicar una función estrictamente creciente. Notar que es una medida ordinal no cardinal.

Observación 6. No siempre existe una función $u(\cdot)$ que representa a $\succsim$.

Proposición 7 (Existencia y racionalidad de la función de utilidad)**.** *Si $\exists u : X \to \mathbb{R}$ función de utilidad que representa a las preferencias $\succsim$ entonces $\succsim$ son racionales.*[2]

[2] El recíproco no es necesariamente verdadero. Es válido si se imponen supuestos adicionales como 1) restricción sobre el conjunto X para que sea finito o infinito numerable, ó 2) estableciendo condiciones sobre las relaciones de preferencia como racionalidad y continuidad.

Enfoque de las decisiones

Comencemos definiendo una estructura de decisión $(\beta, C(\cdot))$ donde:

- β **es la familia de posibles conjuntos de elección** $B \in \beta$. (el conjunto de conjuntos presupuestarios). De este modo, $B \subset X \wedge \beta \subseteq P(X)$, donde $P(X)$ es el Conjunto de partes de X (es el conjunto formado por todos los subconjuntos de x).
- $C(\cdot)$ **es la regla de decisión del agente**, donde asumiremos como caso más general que es una correspondencia. Pediremos que $C(B) \subseteq B \quad \forall B \in \beta$ y, además, vamos a pedir "adicionalmente" que $C(B) \neq \emptyset \forall B$.

$\emptyset \notin \beta \implies \beta \neq P(x)$.(en teoría del consumidor claramente $\beta \neq P(x)$ 0 siempre está).
Puede ser una función $C(\cdot)$: $\beta \to P(X)$ o de otro modo una correspondencia, $C(\cdot) : \beta \to X$.
Si $\#C(\cdot) = 1$ (la cardinalidad de C, o sea cuantos elementos tiene, es 1) es una función. Si no $\#C(\cdot) > 1$ son todas las alternativas que el individuo "puede" elegir.

Axioma Débil de la Preferencia Revelada (WARP)

Estructura de decisión $(\beta, C(\cdot))$ cumple con WARP si

$$x, y \in B, x \in C(B) \implies \forall B', x, y \in B', y \in C(B') \text{ entonces } x \in C(B')$$

(Sean x, y pertenecientes a un conjunto de elección B y en ese conjunto elijo x no puede suceder que si tengo otro conjunto de elección B' en el que se encuentren x e y elija a y en vez de a x entonces también lo tengo que elegir a x.)

Lo que busca WARP es la coherencia en la elección dentro de un conjunto que se repite en varias ocasiones.

Relaciones de preferencias revelada

Podemos definir una **relación de preferencia débil revelada** como

$$x \succsim^* y \iff \exists B \in \beta : \ x, y \in B \wedge x \in C(B)$$

y decimos "x se revela al menos tan bueno como y"

Por otro lado podemos definir una **relación de preferencia estricta revelada** como

$$x \succ^* y \iff \exists B \in \beta : \ x, y \in B \wedge x \in C(B) \wedge y \notin C(B)$$

y decimos "x se revela estrictamente preferido a y"

Notar que $\succsim^*$ no es necesariamente completa ni transitiva. Es dificil que se relacionen. Solo se relacionan si

$$\exists B \in \beta, \ x, y \in B \wedge x \in C(B) \text{ ó } y \in C(B)$$

Comparación de enfoques

Preferencias y Reglas de decisiones (WARP) son dos maneras de analizar las elecciones ¿Cómo se relacionan? Seria bueno, que sean equivalentes o sea que Preferencias Racionales $\iff$ WARP

Vamos a ver que

- Racionalidad $\implies$ WARP
- WARP $\not\Longleftarrow$ Racionalidad

Reglas de decisión derivadas de preferencias racionales

Dado un $B \subset X$ con $B \neq \varnothing$

$$C^* (B, \succsim) = \{x \in B : x \succsim y \quad \forall y \in B\}$$

los elementos "preferidos" en B

- Asumimos que $C^* (B, \succsim) \neq \varnothing$, vale si sabemos que B es siempre finito o que B es cerrado y las preferencias continuas. Suponemos $\succsim$ y conjuntos B tales que $C^*(B, \succsim) \neq \varnothing . \forall B \in \beta$
- Dadas las preferencias $\succsim$ encontramos la estructura de decision generada por estas preferencias $(\beta, C^* (\cdot, \succsim))$

Relación entre elección y racionalidad

Comencemos definiendo una regla de elección racional (surge de $\succsim$ racionales):

$$C^* (B, \succsim) = \{x \in B : x \succsim y \quad \forall y \in B\}$$

Proposición 8. *Si $\succsim$ racionales entonces $(\beta, C^* (B, \succsim))$ cumple el WARP.* [3]

[3] Nótese que esto propiedad puede reexpresarse por su contrarecíproco. **Si la regla de decisión no cumple WARP podemos afirmar que no hay preferencias que la puedan racionalizar**.

Preferencias racionales derivadas de reglas de decisión

Dada (β, C) decimos que $\succsim$ (racional) racionaliza $C()$ si

$$C (B) = C^* \big(B, \succsim\big), \forall B \in \beta$$

Claramente en general puede haber mas de una $\succsim$ que genere $C(B)$

Observación 9. Notar que WARP $\not\Rightarrow$ agente sea racional. Pues puede cumplir WARP pero no ser completas y transitivas. [4]

[4] Sabemos que las preferencias no son racionalizables

- Si no cumplen con WARP
- Si cumplen con WARP pero no son completas o transitivas

Condiciones para derivar a través de las preferencias racionales reglas de decisión

¿Podemos agregar condiciones adicionales a WARP para que haya $\succsim$ que racionalizan? Sin WARP sabemos que no. Agrandando β, WARP impone más restricciones. Si β es "suficientemente grande" , WARP implica racionalidad. Se puede asegurar resultado de otras maneras (pedir mas que WARP).

Proposición 10. *Sea $(\beta, C(\cdot))$ una estructura de elección tal que*

1. *Cumple WARP.*
2. *β incluye a todos los subconjuntos de $X \neq \varnothing$ de hasta tres elementos.*

Entonces $\exists \succsim$ tal que racionaliza la regla de elección $C(\cdot)$ relativo a β, es decir, $C(B) = C^*(B, \succsim) \forall B \in \beta$ y esta relación es única.

Observación sobre racionalización de preferencias

Notar que $\beta = P(x)$ basarse en preferencias y en decisiones es lo mismo, es equivalente. Pero no es el caso en Economía, no hay equivalencia. Notar que se puede racionalizar:

a) $C(B) = C^* (B, \succsim)$

b) $C(B) \subseteq C^* (B, \succsim)$ (lo cual es pedir mucho menos que a) y además lo que se observa en $C(B)$ no contradice a $C^* (B, \succsim)$. Sería un criterio mas laxo. Si racionaliza a la a) también a la b))

Preferencias que racionalizan todo

Si $x \succsim y, \forall x, y$ entonces

$$C^*(B, \succsim) = B \, \forall B \in \beta$$

Todo es racionalizado por estas preferencias. En este caso, el WARP se cumple siempre habida cuenta que para todo conjunto se elige todo elemento.

Teoría del consumidor

Bienes

En una economía de mercado, el consumidor debe decidir qué cantidad consumir de los diferentes bienes y servicios disponibles (denominados bienes). Supongamos, por simplicidad, que

- **la cantidad de bienes es finita** (L) e identificada por un índice $(l = 1, ..., L)$.
- **los consumidores son tomadores de precios**.

En general, un vector de bienes (o canasta de bienes) representa la cantidad consumida de cada bien disponible. Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L_+$$

canasta que debe elegir. [5] Notar además que puede ser visto como un punto en $\mathbb{R}^L$ el espacio de bienes.

[5] La especificación del tipo de bienes que se incluyen en este vector es lo suficientemente general, pues puede incluir distintos bienes o "el mismo" bien variando tiempo, espacio, estado de la naturaleza, bienes agregados. Pueden aparecer bienes que no estan en el mercado.

Conjunto de posibilidades de consumo

El conjunto de posibilidades de consumo es un **subconjunto del espacio de bienes** (denotado $X \subset \mathbb{R}^L$), **que representa los paquetes de bienes que el individuo puede consumir dadas las limitaciones físicas de su entorno**. Notar que X puede tener restricciones

- legales (e.g. trabajo máximo 8 horas)
- físicas (e.g. indivisibilidades).

Supondremos en particular que el conjunto de posibilidades de consumo

$$X = \mathbb{R}^L_+ \ = \left\{ x \in \mathbb{R}^L : x_l \geq 0 \ \forall l = 1, \dots, L \right\}$$

es el conjunto de todas las canastas de bienes no negativas. Una característica especial del conjunto $\mathbb{R}^L_+$ es que es convexo, o sea, $x, x' \in \mathbb{R}^L_+$ entonces $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x' \in \mathbb{R}^L_+$ donde $\alpha \in [0,1]$.

Es mas facil conseguir resultados dada la convexidad. A veces agrupando conseguimos convexidad.

Conjunto presupuestario

A las limitaciones físicas se le suma que los consumidores puedan comprar las canastas. Los **bienes que elegirá el consumidor tendrán un precio.** Formalmente esos precios son representado por el vector de precios

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_L \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L_+$$

Por simplicidad primero se asumirá que $p \gg 0$, o sea que que $p_l > 0 \, \forall l$. Luego también se asumirá que los precios de estos bienes se encuentran más allá de la influencia de los consumidores.

Es importante destacar que no hay una razón lógica que obligue a que los precios sean positivos. Un precio negativo simplemente significa que se le paga al "comprador" por consumir el bien (lo cual es lógico para productos considerados "malos", como la contaminación).

La asequibilidad de un paquete de bienes depende de dos factores: los precios de mercado $p = (p_1, \dots p_l)$ y el ingreso (o riqueza) w. Notar que **la restricción viene por ingreso** w. Entonces $x \in \mathbb{R}^L_+$ es alcanzable si el costo de adquirirla no excede el ingreso w del consumidor:

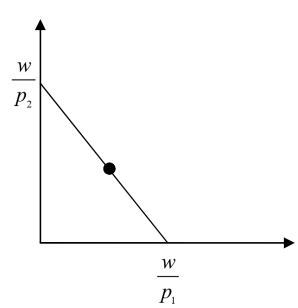
$$p \cdot x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_L x_L \leq w$$

Definición 11 (Conjunto presupuestario)**.** El conjunto presupuestario

$$B_{p,w} = \left\{ x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w \right\}$$

es el conjunto de todas las canastas que son asequibles para el consumidor que depende de p y de w.

El conjunto presupuestario $B_{p,w}$ es un conjunto convexo, es decir, si , $x, x' \in B_{p,w}$ entonces $x'' = \alpha x + (1-\alpha)x' \in B_{p,w}$ donde $\alpha \in [0,1]$. Notar que la convexidad de $B_{p,w}$ depende que X sea convexo. Si no es tomador de precios (precio depende de cantidad) puede no serlo.



Demandas

La correspondencia de demanda $x(p,w)$ asigna un conjunto de canastas de bienes para cada par precio-ingreso (p,w).

Hay dos modos ver la correspondencia de demanda:

- $x(p,w) : p \times w \to P(B_{p,w})$ en términos de función
- $x(p,w) : p \times w \to B_{p,w}$ en términos de correspondencia

Realizaremos dos supuestos sobre la correspondencia de demanda $x(p,w)$:

1. $x(p,w)$ **homogénea de grado** 0 (no existe ilusión monetaria). Formalmente: $x(p,w) \in H^0$ e implica que $x(\alpha p, \alpha w) = x(p,w)\, \forall \alpha > 0$.
2. $x(p,w)$ **cumple con la ley de Walras** tal que $p \cdot x(p,w) = w \quad \forall p, w$. (no significa que el individuo no ahorra, puede existir un bien que definamos como "no consumo")

En principio, esta correspondencia de demanda puede ser multivaluada; es decir, puede haber más de un vector de consumo posible asignado para un determinado par precio-riqueza (p,w). Cuando esto es así, cualquier $x \in x(p,w)$ podría ser elegido por el consumidor cuando se enfrenta al par precio-riqueza (p,w). Cuando $x(p,w)$ es unívoca ($\#x(p,w) = 1$), la denominamos función de demanda.

Observación 12 (Normalizaciones). Ya que $x(p,w) \in H^0$, (homogeneas de grado 0) existe un grado de libertad. Se puede normalizar un elemento. Tres normalizaciones más comunes son: $p_1 = 1$, $\sum_i p_i = 1$ y $w = 1$.

A partir de ahora asumiremos que $\#x(p,w) = 1$. En ese caso, podemos escribir la función $x(p,w)$ en términos de funciones de demanda de bienes específicos

$$x(p,w) = \begin{bmatrix} x_1(p,w) \\ x_2(p,w) \\ \vdots \\ x_L(p,w) \end{bmatrix}$$

Definición 13 (Estructura de elección)**.** Sea $\beta^w = \{B_{p,w} : p \gg 0, w > 0\}$ la familia de conjuntos presupuestarios. Entonces notar que $\left(\beta^W, x(\cdot)\right)$ es una estructura de elección. $\beta \neq P(X)$ no incluye los subconjuntos de hasta tres elementos. No podemos asegurar que en caso de que valga WARP los agentes sean racionales.

Estática comparada

A menudo nos interesa analizar cómo varía la elección del consumidor ante cambios en su riqueza y en los precios. El análisis de un cambio en el resultado como respuesta a un cambio en los parámetros económicos subyacentes se conoce como análisis de estática comparativa.

Efecto ingreso

Para precios fijos $\bar{p}$, la función de riqueza $x(\bar{p},w)$ es llamada función de Engel. Su imagen en $\mathbb{R}^L_+$, $E_p = \{x(\bar{p},w) : x > 0\}$ es conocida como el sendero de expansión del ingreso.

Para cualquier (p,w), la derivada $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}$ define el efecto ingreso en el bien l. A partir del signo de esta derivada podemos clasificar los bienes del siguiente modo

- **El bien l es normal** si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \geq 0$.
- **El bien l es inferior** si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \leq 0$.

Si todos los bienes son normales, decimos que $x(p, w)$ es normal. [6]

En notación matricial los efectos ingresos son representados por

$$D_w x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial w} \\ \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial w} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^L$$

[6] No todos los bienes pueden ser inferiores (por Walras). En general, más agregados son normales. La baja calidad implica bienes inferiores.

Efecto precio

Para cualquier (p, w), la derivada $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k}$ define el efecto del precio p_k en la demanda del bien l. A partir del signo de esta derivada podemos clasificar los bienes del siguiente modo

- **El bien l es ordinario** si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} < 0$.
- **El bien l es Giffen** si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} > 0$.

En notación matricial los efectos precios son representados por

$$D_p x(p,w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_1(p,w)}{\partial p_L} \\ \frac{\partial x_2(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_2(p,w)}{\partial p_L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_1} & \cdots & \frac{\partial x_L(p,w)}{\partial p_L} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

Proposición 14. *Si la función de demanda walrasiana $x(p, w)$ es homogénea de grado cero, entonces para todo p y w:*[7]

$$\sum_{k=1}^{L} \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} w = 0 \quad \forall l = 1, ..., L$$

[7] Notar que esto se deriva de la formula de Euler sobre funciones homogéneas

En notación matricial, se puede expresar como

$$D_p x(p,w)p + D_w x(p,w)w = 0$$

Entonces, la homogeneidad de grado cero implica que las derivadas del precio y la riqueza de la demanda de cualquier bien l, cuando se ponderan por estos precios y riqueza, suman cero. Intuitivamente, esta ponderación surge porque al aumentar todos los precios y la riqueza de manera proporcional, cada una de estas variables cambia en proporción a su nivel inicial.

Además podemos reescribir la primer ecuación en términos de elasticidades de la demanda con respecto a los precios y al ingreso. Los cuales son definidos respectivamente como

$$\varepsilon_{l,k}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} \frac{p_k}{x_l(p,w)} \quad y \quad \varepsilon_{l,w}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \frac{w}{x_l(p,w)}$$

Usando elasticidades entonces la primera expresión toma la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^{L} \varepsilon_{l,k}(p,w) + \varepsilon_{l,w}(p,w) = 0 \quad \forall l = 1, ..., L$$

Un cambio porcentual igual en todos los precios y la riqueza no produce ningún cambio en la demanda.

Estas elasticidades dan el cambio porcentual en la demanda del bien l por cada cambio porcentual (marginal) en el precio del bien k o la riqueza; notar que la expresión para $\varepsilon_{l,w}$ se puede leer como $(\Delta x/x)/(\Delta w/w)$. A diferencia de las derivadas de la demanda, las elasticidades son independientes de las unidades elegidas para medir los bienes y, por lo tanto, proporcionan una forma libre de unidades para capturar la sensibilidad de la demanda.

Proposición 15 (Agregación de Cournot). *Si la función de demanda walrasiana $x(p,w)$ satisface la ley de Walras, entonces para todos los p y w:*

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + x_k(p,w) = 0 \quad \forall\, k = 1, ..., L$$

o escrito en notación matricial[8]

[8] Notar que este resultado sale de diferenciar $p \cdot x(p,w) = w$ con respecto a p.

$$p \cdot D_p x(p,w) + x(p,w)^T = 0^T$$

Usando elasticidades la expresión resulta

$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p,w)\varepsilon_{l,k}(p,w) + b_k(p,w) = 0$$

donde $b_l(p,w) = p_l x_l(p,w)/w$ es la participación presupuestaria del gasto del consumidor en el bien l, dados los precios p y la riqueza w.

Proposición 16 (Agregación de Engel). *Si la función de demanda walrasiana $x(p,w)$ satisface la ley de Walras, entonces para todos los p y w:*

$$\sum_{l=1}^{L} p_l \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} = 1$$

o escrito en notación matricial[9]

[9] Notar que este resultado sale de diferenciar $p \cdot x(p,w) = w$ con respecto a w.

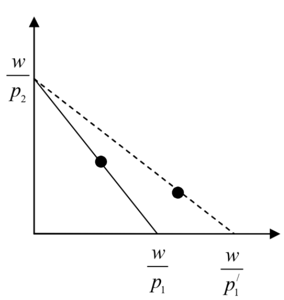
$$p \cdot D_w x(p,w) = 1$$

Usando elasticidades la expresión resulta

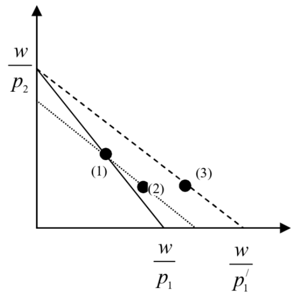
$$\sum_{l=1}^{L} b_l(p,w)\varepsilon_{l,w}(p,w) = 1$$

donde $b_l(p,w) = p_l x_l(p,w)/w$ es la participación presupuestaria del gasto del consumidor en el bien l, dados los precios p y la riqueza w.

Descomposición del efecto precio



Sean dos bienes x_1, x_2 y sus precios respectivos p_1, p_2. Si ocurre un cambio en el precio p_1 tal que $p_1' < p_1$.



El efecto puede descomponerse en un efecto sustitución e ingreso. (1) a (2) efecto sustitución. De (2) a (3) efecto ingreso.

WARP

Seguimos asumiendo que $x(p,w)$ es univaluada ($\#x(p,w) = 1$), homogénea de grado cero y satisface la ley de Walras.

Definición 17 (WARP)**.** La función de demanda walrasiana $x(p,w)$ satisface el axioma débil de la preferencia revelada (warp) si la siguiente propiedad se mantiene para cualquier par de situaciones de precios-riqueza (p,w) y (p',w'):

$$\text{Si } p \cdot x(p',w') \leq w \text{ y } x(p',w') \neq x(p,w), \text{ entonces } p' \cdot x(p,w) > w'$$

Si a los precios (p,w) puedo comprar $x(p',w')$ y no lo elijo entonces $x(p,w) \succsim x(p',w')$. A los precios (p',w') no tengo que poder comprar $x(p,w)$.

WARP gráficamente

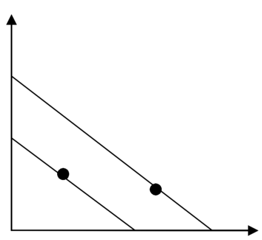


Gráfico 1 **(Cumple WARP):** Notar que en este caso hubo un cambio proporcional en ambos precios y que la canasta más cercana del origen está también disponible a los precios más bajos pero la canasta más alejadas no está disponible a los precios más altos.

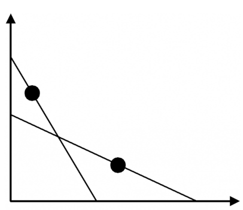


Gráfico 2 **(Cumple WARP):** Notar que en este caso hubo un cambio en ambos precios y ninguna canasta está disponible a los precios de la otra.

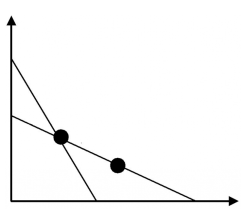


Gráfico 3 **(Cumple WARP):** Notar que en este caso hubo un cambio en ambos precios y cuando una canasta está disponible a los precios de la otra la otra no lo está a sus otros precios.

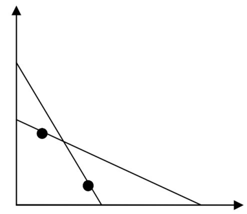


Gráfico 4 **(No cumple WARP):** Notar que en este caso hubo un cambio en ambos precios y que ambas canastas están disponibles a los los precios de la otra.

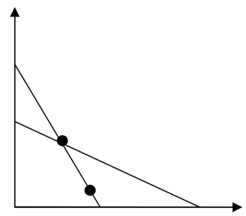


Gráfico 5 **(No cumple WARP):** Notar que en este caso hubo un cambio en ambos precios y que ambas canastas están disponibles a los los precios de la otra.

Implicancia del axioma débil

El axioma débil tiene implicaciones significativas para los efectos de los cambios de precios en la demanda. Sin embargo, necesitamos concentrarnos en un tipo especial de cambio de precios. Los cambios de precios afectan al consumidor de dos maneras.

1. **Efecto sustitución:** Alteran el costo relativo de diferentes productos.
2. **Efecto ingreso:** Cambian la riqueza real del consumidor: un aumento en el precio de un producto empobrece a los consumidores de ese producto

Para **estudiar las implicaciones del axioma débil, necesitamos aislar el primer efecto.** Una forma de lograr esto es **imaginar una situación en la que un cambio en los precios esté acompañado por un cambio en la riqueza del consumidor que hace que su conjunto de consumo inicial sea justo asequible a los nuevos precios.**

Definición 18 (Compensación de riqueza Slutsky)**.** Si el consumidor originalmente enfrenta precios p y riqueza w y elige el conjunto de consumo $x(p,w)$, entonces cuando los precios cambian a p', imaginamos que la riqueza del consumidor se ajusta a $w' = p'x(p,w)$. Así, el ajuste de riqueza es $\Delta w = \Delta p \cdot x(p,w)$, donde $\Delta p = (p' - p)$. [10]

[10] Notar que esta compensación solo muestra el efecto sustitución por el cambio en los precios relativos ya que no habría un aparente efecto ingreso pues puede seguir comprando la canasta original a los nuevos precios por la compensación.

Notar que Ley de la demanda compensada $\iff$ WARP.

Proposición 19 (Ley de la demanda compensada)**.** *Supongamos que la función de demanda walrasiana $x(p,w)$ es homogénea de grado cero y satisface la ley de Walras. Entonces, $x(p,w)$ satisface el axioma débil si y solo si se cumple la siguiente propiedad:*

Para cualquier cambio de precio compensado desde una situación inicial (p,w) hasta un nuevo par de precio-riqueza $(p',w') = (p', p' \cdot x(p,w))$, tenemos:

$$(p' - p) \cdot [x(p',w') - x(p,w)] \leq 0$$

con una desigualdad estricta siempre que $x(p,w) \neq x(p',w')$.

La ley de la demanda compensada también puede ser reescrita del siguiente modo:

$$\Delta p \cdot \Delta x \leq 0$$

Esto puede interpretarse como la ley de la demanda la cual establece que la demanda y el precio se mueven en direcciones opuestas.

Definición 20 (Matriz de Slutsky)**.** Cuando la demanda del consumidor $x(p,w)$ es una función diferenciable de los precios y la riqueza, la ley de la demanda compensada tiene una implicación diferencial de gran importancia. Si hacemos un cambio de precio compensado al darle al consumidor una compensación de $dw = x(p,w) \cdot dp$. La ley de la demanda compensada no dice que:

$$dp \cdot dx \leq 0$$

Ahora, utilizando la regla de la cadena, el cambio diferencial en la demanda inducido por este cambio de precio compensado puede escribirse como:

$$dx = D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)dw$$

Por lo tanto

$$dx = D_p x(p,w)dp + D_w x(p,w)[x(p,w) \cdot dp]$$

o de forma equivalente

$$dx = [D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^T]dp$$

Finalmente, sustituyendo esta última expresión en $dp \cdot dx \leq 0$, concluimos que para cualquier cambio de precio diferencial dp posible, tenemos:

$$dp \cdot [D_p x(p,w) + D_w x(p,w)x(p,w)^T]dp \leq 0$$

La expresión entre corchetes en esta condición es una matriz $L \times L$, que denotamos por $S(p,w)$. Formalmente,

$$S(p,w) = \begin{bmatrix} s_{11}(p,w) & \cdots & s_{1L}(p,w) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{L1}(p,w) & \cdots & s_{LL}(p,w) \end{bmatrix}$$

donde la entrada (l,k) ésima es

$$s_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$$

La matriz $S(p,w)$ es conocida como la matriz de sustitución o matriz de Slutsky y sus elmentos son conocidos como efectos de sustitución.

El término "sustitución" es adecuado porque el término $s_{lk}(p,w)$ mide el cambio diferencial en el consumo del bien l (es decir, la sustitución hacia o desde otros bienes) debido a un cambio diferencial en el precio del bien k cuando la riqueza se ajusta de modo que el consumidor aún pueda costear su conjunto de consumo original (es decir, debido únicamente a un cambio en los precios relativos).

Para ver esto, notar que el cambio en la demanda del bien l si la riqueza se mantiene sin cambios es $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} dp_k$. Para que el consumidor pueda "costear justo" su conjunto de consumo original, su riqueza debe variar en la cantidad $x_l(p,w)dp_k$. El efecto de este cambio en la riqueza en la demanda del bien l es entonces $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}[x_l(p,w)dp_k]$. La suma de estos dos efectos es, por lo tanto, exactamente $s_{lk}(p,w)dp_k$.

Proposición 21 (Matriz de Slutsky semidefinida negativa)**.** *Si una función de demanda walrasiana diferenciable $x(p,w)$ satisface la ley de Walras, la homogeneidad de grado cero y el axioma débil, entonces en cualquier punto (p,w), la matriz de Slutsky $S(p,w)$ satisface $vS(p,w)v \leq 0$ para cualquier $v \in \mathbb{R}^L$.*

Observación 22. Una matriz que satisface la propiedad en la proposición anterior se llama semidefinida negativa (es definida negativa si la desigualdad es estricta para todos los $v \neq 0$).

Observa que $S(p,w)$ ser negativa semidefinida implica que $s_{ll}(p,w) \leq 0$: es decir, el efecto de sustitución del bien l con respecto a su propio precio siempre es no positivo.

Una implicación interesante de $s_{ll}(p,w) < 0$ es que un bien puede ser un bien de Giffen en (p,w) solo si es inferior. En particular, dado que

$$s_{ll}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} + \left[\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w}\right] x_l(p,w) \leq 0$$

si $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_l} > 0$, entonces debemos tener $\frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} < 0$.

Observación 23. Para futuras referencias, observamos que la Proposición anterior no implica, en general, que la matriz $S(p,w)$ sea simétrica. Para $L = 2$, $S(p,w)$ necesariamente es simétrica. Sin embargo, cuando $L > 2$, $S(p,w)$ no necesariamente es simétrica bajo las suposiciones hechas hasta ahora (homogeneidad de grado cero, ley de Walras y el axioma débil).

Proposición 24. *Supongamos que la función de demanda walrasiana $x(p,w)$ es diferenciable, homogénea de grado cero y satisface la ley de Walras. Entonces, $p \cdot S(p,w) = 0$ y $S(p,w) \cdot p = 0$ para cualquier (p,w).*[11]

[11] Notar que implica que S(p,w) es singular, no posee inversa y además no es definida negativa.

Observación 25. Notar que $WARP \not\Rightarrow \exists$ preferencias racionales. Ahora sin embargo sucede que Preferencias racionales $\Rightarrow$ $S(p,w)$ es simétrica. WARP puede ser con matrices $S(p,w)$ que no son simétricas.

Teoría de la demanda

Relación de preferencia

Asumimos consumidores poseen preferencias sobre canastas de bienes en el conjunto X con $X \subset R^L_+$.

Definición 26 (Preferencia racional)**.** La relación de preferencia $\succsim$ en X es racional si posee las siguientes dos propiedades:

1. **Completitud.** Para todo $x, y \in X$, tenemos $x \succsim y$ o $y \succsim x$ (o ambas).

2. **Transitividad.** Para todo $x, y, z \in X$, si $x \succsim y$ y $y \succsim z$, entonces $x \succsim z$.

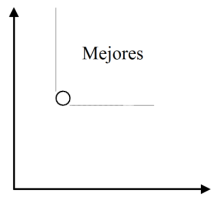
En la discusión que sigue, también utilizamos otros dos tipos de supuestos sobre las preferencias: supuestos de deseabilidad y supuestos de convexidad.

Supuestos de deseabilidad

Para estos supuestos asumiremos que el consumo de cantidades mayores de bienes siempre es factible en principio; es decir, si $x \in X$ y $y > x$, entonces $y \in X$. Pues a menudo es razonable asumir que se prefieren cantidades mayores de bienes a cantidades más pequeñas. Esta característica de las preferencias se captura en la suposición de monotonicidad.

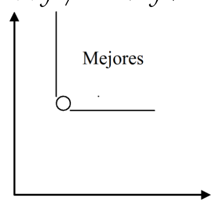
Definición 27 (Montonicidad)**.** Si $x \in X \wedge y \gg x \Rightarrow y \succ x$

De este modo, podríamos tener indiferencia ante un incremento en algunos de los bienes aunque no de todos. Puede haber indiferencia en alguno de los bienes.



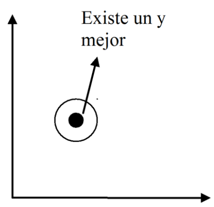
Definición 28 (Montonicidad fuerte)**.** Si $x \in X \wedge y \geq x \wedge y \neq x \Rightarrow y \succ x$

Si se incremente la cantidad de al menos uno de los bienes y el resto no es menor, entonces esa canasta será preferida. Esto implica que todos los bienes son "bienes".



Definición 29 (No saciedad local)**.** Si $x \in X \wedge \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists y \in X$ tal que $\|y - x\| \leq \varepsilon \wedge y \succ x$

Para cualquier canasta va a existir una canasta en un entorno "cercano" que va a ser mejor que la canasta original.

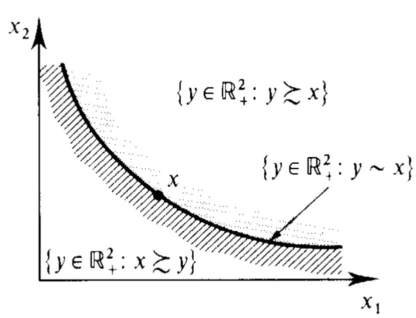


Observación 30 (Relación entre los supuestos)*.* Notar que Monotonicidad fuerte implica Monotonicidad lo cual implica No saciedad local.

$$Monotonicidad\, fuerte \Longrightarrow Monotonicidad \Longrightarrow No\, saciabilidad\, local$$

Definición 31 (Conjuntos de preferencia derivados)**.** Dada la relación de preferencia $\succsim$ y un conjunto de consumo x, podemos definir tres conjuntos relacionados de conjuntos de consumo.

- **El conjunto de indiferencia** que contiene el punto x es el conjunto de todos los conjuntos que son indiferentes a x; formalmente, es $\{y \in X : y \sim x\}$.
- **El conjunto de contorno superior** del conjunto x es el conjunto de todos los conjuntos que son al menos tan buenos como x: $\{y \in X : y \succsim x\}$.
- **El conjunto de contorno inferior** de x es el conjunto de todos los conjuntos a los que x es al menos tan bueno como ellos: $\{y \in X : x \succsim y\}$.



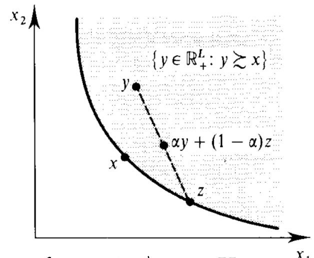
Observación 32 (Implicancias de no saciedad local). Una implicación de la no saciedad local (y, por lo tanto, de la monotonicidad) es que descarta conjuntos de indiferencia "densos".

La convexidad es una hipótesis fuerte pero central en economía. Se puede interpretar en términos de tasas marginales de sustitución decrecientes: es decir, con preferencias convexas, desde cualquier situación inicial de consumo x, y para cualquier par de bienes, se requieren cantidades cada vez mayores de un bien para compensar las pérdidas unitarias sucesivas del otro. Cuanto más tengo de un bien menos vale en términos relativos.

La convexidad también se puede ver como la expresión formal de una inclinación básica de los agentes económicos hacia la diversificación. De hecho, bajo la convexidad, si x es indiferente a y, entonces $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$, la mezcla mitad-mitad de x y y, no puede ser peor que x o y.

Supuestos de convexidad

Una segunda suposición significativa, la de la convexidad de $\succsim$, se refiere a los intercambios que el consumidor está dispuesto a hacer entre diferentes bienes.

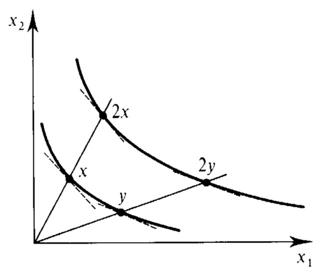


Definición 33 (Convexidad)**.** La relación de preferencia $\succsim$ en X es convexa si para cada $x \in X$, el conjunto de contorno superior $\{y \in X : y \succsim x\}$ es convexo; es decir, si $y \succsim x$ y $z \succsim x$, entonces $ay + (1-a)z \succsim x$ para cualquier $a \in [0,1]$.

Definición 34 (Convexidad estricta)**.** La relación de preferencia $\succsim$ en X es estrictamente convexa si para cada x, tenemos que $y \succsim x$, $z \succsim x$, y $y \neq z$ implica que $ay + (1-a)z \succ x$ para todo $a \in (0,1)$.

Preferencias particuales

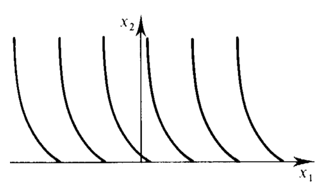
En aplicaciones (especialmente aquellas de naturaleza econométrica), es común centrarse en preferencias para las cuales es posible deducir la totalidad de la relación de preferencia del consumidor a partir de un solo conjunto de indiferencia. Dos ejemplos son las clases de preferencias homotéticas y cuasilineales.



Definición 35 (Preferencias homotéticas)**.** Una relación de preferencia $\succsim$ monotona en $X = \mathbb{R}^L$ es homotética si todos los conjuntos de indiferencia están relacionados por una expansión proporcional a lo largo de rayos; es decir, si $x \sim y$, entonces $\alpha x \sim \alpha y$ para cualquier $\alpha > 0$.

Tiene la misma TMS a través de los rayos que pasan por el origen.

Notar que en preferencias cuasilineales se asume que no hay límite inferior en el posible consumo del primer bien [el conjunto de consumo es $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1}$]. Esta suposición es conveniente en el caso de preferencias cuasilineales.



Definición 36 (Preferencias cuasilineales)**.** La relación de preferencia $\succsim$ en $X = (-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}$ es cuasilineal con respecto al bien 1 (llamado, en este caso, el bien numerario) si:

1. Todos los conjuntos de indiferencia son desplazamientos paralelos entre sí a lo largo del eje del bien 1. Es decir, si $x \sim y$, entonces $(x + \alpha e_1) \sim (y + \alpha e_1)$ para $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. El bien 1 es deseable; es decir, $x + \alpha e_1 > x$ para todo x y $\alpha > 0$.

Preferencias y utilidad

Para propósitos analíticos, es muy útil si podemos resumir las preferencias del consumidor mediante una función de utilidad, porque entonces se pueden utilizar técnicas de programación matemática para resolver el problema del consumidor.

Desafortunadamente, **con las suposiciones hechas hasta ahora, una relación de preferencia racional no necesariamente puede ser representada por una función de utilidad**.[12] Comenzamos con un ejemplo que ilustra este hecho y luego introducimos una suposición débil y económicamente natural (llamada continuidad) que garantiza la existencia de una representación de utilidad.

[12] La existencia de una función de utilidad $\Rightarrow$ racionales pero el recípoco no es necesariamente verdadero. Es decir $\succsim$ raciones $\not\Rightarrow$ existencia de una función de utilidad que las representa.

Preferencias lexicográficas

Las preferencias lexicográficas son un claro ejemplo de que pueden existir preferencias racionales, estrictamente monótonas y estrictamente convexas y, aun así, no existir una función de utilidad.

Sea $X = R^2_+$. Diremos que la relación de preferencias es lexicográfica en caso de que:

$$x \succsim y \Leftrightarrow x_1 > y_1 \vee [x_1 = y_1 \wedge x_2 >= y_2]$$

Se puede ver que son racionales, estrictamente monótonas y estrictamente convexas. Las curvas de indiferencia son puntos. No existe función de utilidad que las representa.

El nombre se deriva de la forma en que se organiza un diccionario; es decir, el bien 1 tiene la mayor prioridad en la determinación del orden de preferencia, al igual que la primera letra de una palabra en el orden de un diccionario. Cuando el nivel del primer bien en dos conjuntos de bienes es el mismo, la cantidad del segundo bien en los dos conjuntos determina las preferencias del consumidor.

Continuidad

La suposición que se necesita para garantizar la existencia de una función de utilidad es que la relación de preferencia sea continua. La continuidad de las preferencias implica que no hay saltos en las preferencias.

La continuidad indica que las preferencias del consumidor no pueden exhibir "saltos", con, por ejemplo, el consumidor prefiriendo cada elemento en la secuencia $\{x^n\}$ al elemento correspondiente en la secuencia $\{y^n\}$ pero invirtiendo repentinamente su preferencia en los puntos límite de estas secuencias x e y.

Definición 37 (Continuidad)**.** La relación de preferencia $\succsim$ en X es continua si se preserva bajo límites. Es decir, para cualquier secuencia de pares $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, con $x^n \succsim y^n$ para todo n, $x = \lim_{n\to\infty} x^n$, y $y = \lim_{n\to\infty} y^n$, tenemos $x \succsim y$.

Observación 38 (Alternativa de continuidad). Una forma equivalente de expresar esta noción de continuidad es decir que para todo x, el conjunto de contorno superior $\{y \in X : y \succeq x\}$ y el conjunto de contorno inferior $\{y \in X : x \succeq y\}$ son ambos cerrados; es decir, incluyen sus fronteras.

Proposición 39 (Existencia de función de utilidad)**.** *Supongamos que la relación de preferencia racional $\succsim$ en X es continua. Entonces existe una función de utilidad continua $u(x)$ que representa a $\succsim$.*

Observación 40 (Consideraciones de continuidad). A partir de ahora, asumimos que la relación de preferencia del consumidor es continua y, por lo tanto, representable por una función de utilidad continua. La Proposición anterior nos dice que si $\succsim$ es continua, existe alguna función de utilidad continua que la representa. **Pero no todas las funciones de utilidad que representan $\succsim$ son continuas**; cualquier transformación estrictamente creciente pero discontinua de una función de utilidad continua también representa $\succ$. Para fines analíticos, también **es conveniente suponer que $u(\cdot)$ es diferenciable.**[13]

[13] Sin embargo, es posible que las preferencias continuas no sean representables por una función de utilidad diferenciable. El ejemplo más simple es el caso de las preferencias de Leontief.

Implicancias de las restricciones sobre las preferencias

Las restricciones en las preferencias se traducen en restricciones en la forma de las funciones de utilidad.

Observación 41 (Propiedad de preferencias monotonas). La propiedad de **monotonicidad, implica que la función de utilidad es creciente**: $u(x) > u(y)$ si $x \gg y$.

Observación 42 (Propiedad de preferencias convexas). La propiedad de **convexidad, implica que $u(\cdot)$ es cuasiconcava** [y, de manera similar, la convexidad estricta de las preferencias implica la cuasiconcavidad estricta de $u(\cdot)$].[14]

Sin embargo, hay que tener en cuenta que la convexidad de $\succsim$ no implica la propiedad más fuerte de que $u(\cdot)$ sea cóncava. De hecho, aunque este es un punto algo sutil, puede que no haya ninguna función de utilidad cóncava que represente una relación de preferencia convexa particular $\succsim$.

[14] La función de utilidad $u(\cdot)$ es cuasiconcava si el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^L_+ : u(y) \geq u(x)\}$ es convexo para todo x. Si la desigualdad es estricta para todo $x \neq y$ y $\alpha \in (0, 1)$, entonces $u(\cdot)$ es estrictamente cuasiconcava.

Implicancias de las restricciones sobre las funciones de utilidad

Observación 43 (Preferencias homotéticas y funciones homogéneas). Una relación de preferencia continua $\succsim$ en $X = \mathbb{R}^L_+$ es **homotética si y solo si admite una función de utilidad** $u(x)$ que es **homogénea de grado uno** [i.e., tal que $u(\alpha x) = \alpha u(x)$ para todo $\alpha > 0$].

Observación 44 (Preferencias cuasilineales y forma lineal). Una relación de preferencia continua $\succsim$ en $(-\infty, \infty) \times \mathbb{R}^{L-1}_+ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{L-1}_+$ es cuasilineal con respecto al primer bien si y solo si admite una función de utilidad $u(x)$ de la forma $u(x) = x_1 + \phi(x_2, \ldots, x_L)$.

El problema de maximización de la utilidad

Assumimos que el consumidor tiene una relación de preferencia racional, continua y localmente no saturada, y tomamos $u(x)$ como una función de utilidad continua que las representa. También asumimos que el conjunto de consumo es $X = \mathbb{R}^L_+$.

El problema del consumidor de elegir su conjunto de consumo más preferido dado los precios $p \gg 0$ y el nivel de riqueza $w > 0$ puede expresarse ahora como el siguiente problema de maximización de utilidad (UMP):

$$\max_{x \geq 0} u(x) \quad s.a \ p \cdot x \leq w$$

En el UMP, el consumidor elige un conjunto de consumo en el conjunto de presupuesto walrasiano $B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^L_+ : p \cdot x \leq w\}$ para maximizar su nivel de utilidad.

Proposición 45 (Existencia de solución)**.** *Si $p \gg 0$ y $u(\cdot)$ es continua, entonces el problema de maximización de utilidad tiene al menos una solución.*

La Correspondencia/Función de Demanda Walrasiana

La regla que asigna el conjunto de vectores de consumo óptimos en el UMP a cada situación de precio y riqueza $(p, w) \gg 0$ se denota por $x(p, w)$ y se conoce como la correspondencia de demanda Walrasiana (o ordinaria o de mercado). Cuando $x(p, w)$ posee un único elemento para todos los (p, w), nos referimos a él como la función de demanda Walrasiana.

Proposición 46 (Propiedades de la correspondencia de demanda Walrasiana)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}_+^L$. Entonces, la correspondencia de demanda Walrasiana $x(p, w)$ posee las siguientes propiedades:*

1. ***Homogeneidad de grado cero en** (p, w): $x(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$ para cualquier p, w y $\alpha > 0$.*
2. ***Ley de Walras**: $p \cdot x = w$ para todo $x \in x(p, w)$.*
3. ***Convexidad/unicidad**: Si $\succsim$ es convexa, de modo que $u(\cdot)$ es cuasiconcava, entonces $x(p, w)$ es un conjunto convexo. Además, si $\succsim$ es estrictamente convexa, de modo que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasiconcava, entonces $x(p, w)$ consiste en un único elemento.*

Proposición 47 (Continuidad de la función de demanda)**.** *Si las preferencias son continuas, estrictamente convexas y localmente no saciadas en el conjunto de consumo $\mathbb{R}_+^L$, entonces $x(p, w)$ (que es entonces una función) siempre es continua en todos los $(p, w) \gg 0$.*

Función de utilidad indirecta

Para cada $(p, w) \gg 0$, el valor de utilidad del UMP se denota $v(p, w) \in \mathbb{R}$. Es igual a $u(x^*)$ para cualquier $x^* \in x(p, w)$. La función $v(p, w)$ se llama función de utilidad indirecta.

Proposición 48 (Propiedades de la función de utilidad indirecta)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saturada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}_+^L$. La función de utilidad indirecta $v(p, w)$ tiene las siguientes propiedades:*

1. ***Homogénea de grado cero.***
2. ***Estrictamente creciente en** w **y no creciente en** p_l, para cualquier l.*
3. ***Cuasiconvexa**, es decir, el conjunto $\{(p, w) : v(p, w) < \bar{v}\}$ es convexo para cualquier $\bar{v}$.*[15]
4. ***Continua en** p **y** w.*

[15] Note que esta propiedad dice que $v(p, w)$ es cuasiconvexa, no cuasiconcava. Observe también que no requiere para su validez que $u(\cdot)$ sea cuasiconcava.

El problema de minimización del gasto

En esta sección, estudiamos el siguiente problema de minimización del gasto (EMP) para $p \gg 0$ y $u > u(0)$.

$$\min_{x \geq 0} p \cdot x \quad s.a \; u(x) \geq u$$

A lo largo de esta sección, asumimos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saturada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $\mathbb{R}^L_+$.

Mientras que el UMP calcula el nivel máximo de utilidad que se puede obtener dada una riqueza w, el **EMP calcula el nivel mínimo de riqueza requerido para alcanzar un nivel de utilidad** u. El EMP es el problema "dual" del UMP. Captura el mismo objetivo de uso eficiente del poder adquisitivo del consumidor mientras invierte los roles de la función objetivo y la restricción.

Proposición 49. *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saturada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$ y que el vector de precios es $p \gg 0$. Tenemos que:*

1. *Si x^* es óptimo en el UMP cuando la riqueza es $w > 0$, entonces x^* es óptimo en el EMP cuando el nivel de utilidad requerido es $u(x^*)$. Además, el nivel de gasto minimizado en este EMP es exactamente w.*

2. *Si x^* es óptimo en el EMP cuando el nivel de utilidad requerido es $u > u(0)$, entonces x^* es óptimo en el UMP cuando la riqueza es $p : x^*$. Además, el nivel de utilidad maximizado en este UMP es exactamente u.*

Función de gasto mínimo

Dado un precio $p \gg 0$ y un nivel de utilidad requerido $u > u(0)$, el valor del EMP se denota $e(p, u)$. La función $e(p, u)$ se llama función de gasto mínimo. Su valor para cualquier (p, u) es simplemente $p \cdot x^*$, donde x^* es cualquier solución del EMP.

Proposición 50 (Propiedades de la funciónde gasto mínimo)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa $\succsim$ no saciadas localmente definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces la función de gasto mínimo $e(p, u)$ cumple las siguiente propiedades:*

1. ***Homogeneidad de grado uno en precios:*** $e(\alpha p, u) = \alpha e(p, u)$

2. ***Estrictamente creciente en*** u ***:*** *si $u' > u$ entonces $e(p, u') > e(p, u)$.*

3. ***No decreciente en*** p_l***:*** *si $p'_l > p_l$ y $p'_k = p_k$ $\forall k \neq l$ entonces $e(p', u) \geq e(p, u)$*

4. ***Concavidad en precios:*** $e(p'', u) \geq \alpha e(p, u) + (1 - \alpha)e(p', u)$ *donde* $p'' = \alpha p + (1 - \alpha)\, p'$ *con* $\alpha \in [0, 1]$

5. ***Continua en*** p ***y*** u

La función de demanda hicksiana (o compensada)

La función de demanda hicksiana (o compensada) es la colección de vectores óptimos de mercancías en el EMP, y se denota como $h(p, u)$ si es una correspondencia, o función si es de un solo valor.

Proposición 51 (Propiedades de la demanda hicksiana)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saturada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, para cualquier $p \gg 0$, la correspondencia de demanda hicksiana $h(p, u)$ posee las siguientes propiedades:*

1. ***Homogeneidad de grado cero en*** *p: $h(\alpha p, u) = h(p, u)$ para cualquier p, u y $\alpha > 0$.*
2. ***Sin exceso de utilidad****: Para cualquier $x \in h(p, u)$, $u(x) = u$.*
3. ***Convexidad/unicidad****: Si $\succsim$ es convexa, entonces $h(p, u)$ es un conjunto convexo; y si $\succsim$ es estrictamente convexa, de modo que $u(\cdot)$ es estrictamente cuasiconcava, entonces hay un único elemento en $h(p, u)$.*

Proposición 52 (Demanda hicksiana y ley de demanda compensada)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada $\succsim$ y que $h(p, u)$ consiste en un solo elemento para todo $p \gg 0$. Entonces, la función de demanda Hicksiana $h(p, u)$ satisface la ley compensada de la demanda: Para todos p' y p'',*

$$(p'' - p')[h(p'', u) - h(p', u)] \leq 0$$

Dualidad

Continuamos nuestra exploración de los resultados que se derivan del UMP y el EMP. Estudiaremos cuatro relaciones:

1. Entre la función de gasto mínimo y la de utilidad indirecta
2. Entre la función de demanda Hicksiana y la función de gasto mínimo
3. Entre las funciones de demanda Hicksiana y Walrasiana
4. Entre la función de demanda Walrasiana y la función de utilidad indirecta

Como antes, asumimos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa las preferencias localmente no saciadass $\succsim$ (definidas en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$), y restringimos nuestra atención a casos donde $p \gg 0$. Asumimos en todo momento que $\succsim$ es estrictamente convexa, de modo que las demandas Walrasiana y Hicksiana, $x(p, w)$ y $h(p, u)$, son de un solo valor (funciones y no correspondencias).

Relación entre función de gasto mínimo y función de utilidad indirecta

Dada la relación entre UMP y el EMP podemos obtener la siguiente relación entre $v(p, w)$ y $e(p, u)$

La clave está en ver que si ponemos en la función de utilidad indirecta como ingreso el gasto mínimo para obtener el nivel de utilidad u nos va a devolver ese mismo nivel de utilidad. Lo mimso en el otro caso la clave está en ver que si ponemos en la función de gasto mínimo la función de utilidad indirecta para el ingreso m nos va a devolver ese ingreso.

$$e\left(p, v\left(p, w\right)\right) = w \qquad \wedge \qquad v\left(p, \mathrm{e}\left(p, u\right)\right) = u$$

O sea que dados los precios una es la inversa de la otra. Respecto a las soluciones de cada uno de los problemas podemos derivar la siguiente relación:

$$h\left(p, u\right) = x\left(p, e\left(p, u\right)\right) \qquad \wedge \qquad x\left(p, w\right) = h\left(p, v\left(p, w\right)\right)$$

La primera relación de las soluciones nos permite entender conceptualmente el por qué la demanda hicksiana es también conocida como demanda compensada.

La demanda hicksiana se puede interpretar como la demanda que surgiría en caso de que el individuo fuera compensado con un nivel de riqueza tal que este mantenga su nivel de utilidad constante.

Relación entre la demanda Hicksiana y la función de gasto mínimo

A partir del conocimiento de la función de demanda Hicksiana, la función de gasto se puede calcular fácilmente como $e(p,u) = p \cdot h(p,u)$.

Proposición 53 (Lema de Shephard)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Para todos los p y u, la demanda Hicksiana $h(p,u)$ es el vector derivado de la función de gasto con respecto a los precios:*

$$h(p,u) = \nabla_p e(p,u)$$

Es decir, $h_l(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_l}$ para todo $l = 1, ..., L$.

De Lema de Shephard visto en la proposición anterior podemos derivar nuevas propiedades para la demanda Hicksiana.

Proposición 54 (Propiedades de la demanda Hicksiana)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Supongamos también que $h(p,u)$ es continuamente diferenciable en (p,u), y denotemos su matriz derivada $L \times L$ por $D_p(p,u)$. Entonces:*

1. ***Derivada en precios de la hicksiana igual a la segunda derivada en precios del gasto mínimo :*** $D_p h\,(p,u) = D_p^2 e\,(p,u)$
2. $D_p h(p,u)$ ***es una matriz semidefinida negativa****: lo cual implica* $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_l} \leq 0 \; \forall l$
3. $D_p h(p,u)$ ***es una matriz simétrica****:*[16] $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial h_k(p,u)}{\partial p_l}$
4. $D_p h(p,u) p = 0$ [17]

[16] Esta propiedad resulta importante habida cuenta que nos muestra que el enfoque de preferencias racionales y WARP no son iguales.

[17] De esta propiedad se deriva que **todos los bienes poseen al menos un sustituto:** $\exists k$ tal que $\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} \geq 0$

Relación entre la demanda Hicksiana y la Walrasiana

Aunque la función de demanda Hicksiana no es directamente observable (tiene el nivel de utilidad del consumidor como argumento), ahora mostramos que $D_p h(p,u)$ puede calcularse sin embargo a partir de la función de demanda de Walras $x(p,w)$ observable (sus argumentos son todos observables en principio).

La ecuación de slutsky implica que cuando la demanda es generada a partir de la maximización de la preferencia, $S(p,w)$ debe poseer las siguientes tres propiedades: debe ser negativa semidefinida, simétrica y satisfacer $S(p,w)p = 0$.

Proposición 55 (Ecuación de Slustsky)**.** *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia localmente no saciada y estrictamente convexa $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Entonces, para todo (p,w), y $u = v(p,w)$, tenemos*

$$\frac{\partial h_l(p,u)}{\partial p_k} = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} \cdot x_k(p,w) \quad \textit{para todo} \quad l,k$$

o equivalentemente, en notación matricial,[18]

$$D_p h(p,u) = D_p x(p,w) + D_w x(p,w) \cdot x(p,w)^T$$

[18] Notar que la matriz $D_p h(p,u)$ es igual a la matriz de Slutsky la cual es:

$$S\,(p,w) = [S_{lk}\,(p,w)] \in \mathbb{R}^{L \times L}$$

con $S_{lk}(p,w) = \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial p_k} + \frac{\partial x_l(p,w)}{\partial w} x_k(p,w)$

Notar que podemos caracterizar las compensaciones del siguiente modo

Proposición 56 (Compensaciones)**.** *Supongamos que tenemos una función de utilidad $u(\cdot)$ y estamos en la posición inicial (p, w) con $\bar{x} = x(p, w)$ y $\bar{u} = u(x)$. Cuando cambiamos los precios a p', queremos cambiar la riqueza para compensar el efecto de riqueza que surge de este cambio de precio. En principio, la compensación se puede hacer de dos maneras.*

- ***Compensación a la Slutsky:*** *Al cambiar la riqueza en una cantidad*

$$\Delta W_{Slutsky} = p' x(\bar{p}, \bar{w}) - \bar{w}$$

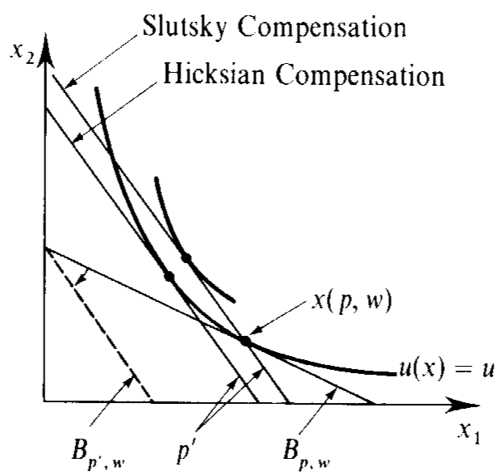
  dejamos al consumidor justo capaz de pagar su canasta inicial $\bar{x}$.

- ***Compensación a la Hicks:*** *Al cambiar la riqueza en una cantidad*

$$\Delta W_{Hicks} = e(p', \bar{u}) - \bar{w}$$

  para mantener su nivel de utilidad sin cambios.

Tenemos $\Delta W_{Hicks} \leq \Delta W_{Slutsky}$ y la desigualdad, en general, será estricta para cualquier cambio discreto. Pero dado que $\nabla_p e(\bar{p}, \bar{u}) = h(\bar{p}, \bar{u}) = x(\bar{p}, \bar{u})$, estas dos compensaciones son idénticas para un cambio de precio diferencial que comienza en $\bar{p}$.



Relación entre demanda Walrasiana y función de utilidad indirecta

Hemos visto que el vector que minimiza la función de valor del EMP, $h(p, u)$, es la derivada respecto a p de la función de valor del EMP $e(p, u)$. La afirmación exactamente análoga para el UMP no es válida. La demanda walrasiana, un concepto ordinal, no puede ser igual a la derivada del precio de la función de utilidad indirecta, que no es invariante a transformaciones crecientes de utilidad. Pero con una pequeña corrección en la que normalizamos las derivadas de $v(p, w)$ respecto a p por la utilidad marginal de la riqueza, se cumple.

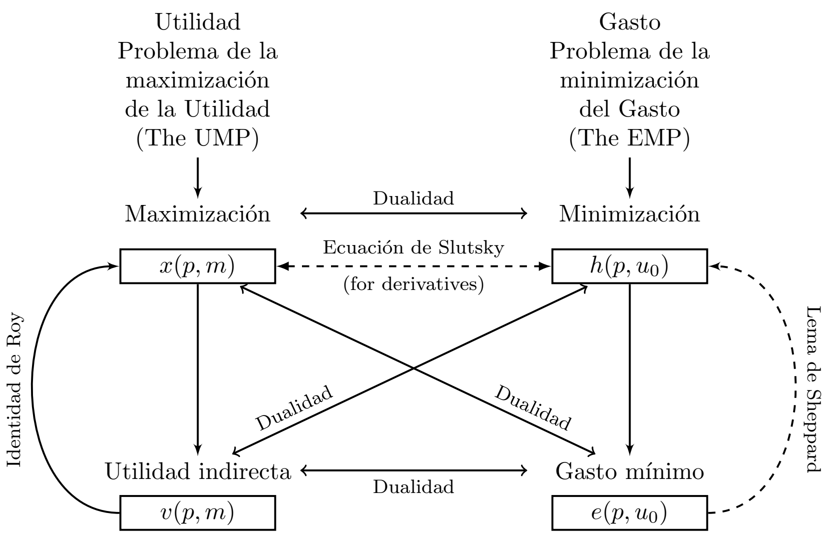
Proposición 57 (Identidad de Roy). *Supongamos que $u(\cdot)$ es una función de utilidad continua que representa una relación de preferencia estrictamente convexa y localmente no saciada $\succsim$ definida en el conjunto de consumo $X = \mathbb{R}^L_+$. Supongamos también que la función de utilidad indirecta es diferenciable en $(\bar{p}, \bar{w}) \gg 0$. Entonces,*

$$x(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{1}{\nabla_w v(\bar{p}, \bar{w})} \cdot \nabla_p v(\bar{p}, \bar{w})$$

Esto es para cada $l = 1, ..., L$:

$$x_l(\bar{p}, \bar{w}) = -\frac{\partial v(\bar{p}, \bar{w})/\partial p_l}{\partial v(\bar{p}, \bar{w})/\partial w}$$

Resumen de las relaciones



Integrabilidad

Esta es sección explora el problema de integrabilidad, investigando si las funciones de demanda observadas pueden ser racionalizadas por preferencias subyacentes. Veamos los puntos clave y las implicaciones:[19]

[19] Hemos visto que si $x(p, w)$ es continuamente diferenciable que viene de preferencias racionales entonces es homogéneo de grado cero, cumple la Ley de Walras y tiene una matriz de sustitución simétrica y semidefinida negativa. **La pregunta que se hace integrabilidad es: ¿Si $x(p, w)$ satisface estas condiciones, puede ser generada por preferencias racionales?** La respuesta es afirmativa. Este es el problema de la integrabilidad.

Implicancia teórica

Las propiedades de homogeneidad de grado cero, ley de Walras y una matriz de sustitución simétrica y semidefinida negativa no solo son consecuencias necesarias de la teoría de la demanda basada en preferencias, sino también sus únicas consecuencias. Esto significa que **si la demanda del consumidor cumple con estas propiedades, existe alguna relación de preferencia racional que podría haber generado esta demanda**.

El resultado estrecha la relación entre la teoría de la demanda basada en preferencias y la teoría de la demanda basada en elección construida sobre el axioma débil. Muestra que la demanda que satisface el axioma débil, junto con la homogeneidad de grado cero y la ley de Walras, puede ser racionalizada por preferencias solo si tiene una matriz de sustitución simétrica.

Implicaciones Prácticas

Comprender las preferencias de los consumidores es crucial para sacar conclusiones sobre los efectos del bienestar. El resultado indica cómo y cuándo podemos recuperar esta información de la observación del comportamiento de la demanda.

En el análisis empírico de la demanda, proporciona un método para estimar funciones de demanda de formas relativamente simples. En lugar de especificar funciones de utilidad y derivar funciones de demanda correspondientes, los analistas pueden comenzar especificando una función de demanda manejable y luego verificar si cumple con las condiciones necesarias y suficientes para ser racionalizada por preferencias.

Medidas de bienestar del consumidor

Cambios en el bienestar

En esta sección, consideramos a un consumidor con una relación de preferencia racional, continua y localmente no saciada $\succsim$. [20]

Supongamos que los precios cambian del vector de precios p' al vector p'' **¿Cómo podemos medir el efecto del cambio sobre el bienestar de un consumidor?**

[20] Asumimos, cuando sea conveniente, que las funciones de gasto e utilidad indirecta del consumidor son diferenciables.

Medido a través de la utilidad indirecta

Si conocemos las preferencias del consumidor, entonces la medida [21] es

$$v(p'', w) - v(p', w)$$

que será positiva (negativa) si el consumidor es beneficiado (perjudicado) por el cambio.

[21] Esta medida tiene dos problemas. 1) Usualmente no conocemos las preferencias individuales: no podemos realmente medir. 2) No es comparable entre consumidores.

Medido a través de la función de gasto

Tomemos la función de gasto del agente, $e(p, u)$. Si fijamos un vector de precios $\bar{p}$, $e(\bar{p}, v(p, w))$ mide la riqueza necesaria para que, a esos precios, el consumidor alcance la utilidad $v(p, w)$. Como $e(p, u)$, con nuestros supuestos, es estrictamente creciente en u, fijado p **la función de gasto actúa como un índice de utilidad, pero medida en dinero**. Entonces, volviendo al cambio de precios de p' a p'', una medida del cambio de bienestar, expresada en dinero, es

$$e(\bar{p},\, v(p'', w)) - e(\bar{p},\, v(p', w))$$

la diferencia entre la riqueza necesaria para alcanzar la utilidad que se logra con a precios p'' y la riqueza necesaria para alcanzar la utilidad que se logra a precios p', dados los precios $\bar{p}$.

Variación compensatoria y equivalente

¿Qué valor de $\bar{p}$ tomar? Usualmente, se plantean dos alternativas.

- $\bar{p} = p'$, los precios originales. La medida del cambio de bienestar se denomina **variación equivalente**[22] (VE). Se busca **igualar la utilidad de hoy a la de mañana**.
- $\bar{p} = p''$, los precios originales. La medida del cambio de bienestar se denomina **variación equivalente**[23] (VE). Se busca **igualar la utilidad de mañana a la de hoy**

[22] ¿Cuánta plata extra necesito hoy para estar igual que mañana en utilidad?

[23] ¿Cuánta plata deja de necesitar mañana para estar igual que hoy en utilidad?

Variación equivalente

La variación equivalente se define como

$$\begin{aligned} VE(p', p'', w) &= e(p', u'') - e(p', u') = e(p', u'') - w \\ &= e(p', u'') - e(p'', u'') \end{aligned}$$

Siendo $u' = v(p', w)$ y $u'' = v(p'', w)$ por lo que $e(p', u') = e(p'', u'') = w$ pues el ingreso no cambia

La VE mide cuánto dinero extra necesita el consumidor de manera que la variación en el ingreso (en el gasto mínimo) sea equivalente al cambio de precios.

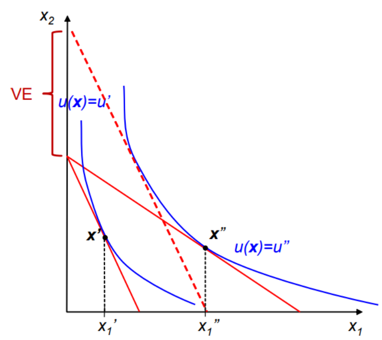
Es decir, sería lo mismo (en términos de la utilidad que alcanza un individuo) que se le de al individuo \$VE (puede ser positivo o negativo) de manera que no se cambien los precios, que sigan siendo p', pero que el individuo alcance el nivel utilidad que es equivalente a que si los precios hubieran cambiado. O sea $v(p', w + VE) = v(p'', w)$

En el gráfico, con $L = 2$, tomamos una caída en p_1 manteniendo $p_2 = 1$.

Notar que desplaza la RP original hasta alcanalzar la nueva curva de indiferencia y la diferencia de la RP original con la original trasladada es la VE.

En general

$$v(p', w + VE) = v(p'', w)$$



Variación equivalente como integral

Para simplificar, supongamos que solamente cambia el precio del bien 1 (pero todo se generaliza):

$$p_1' \neq p_1'' \quad y \quad p_l' = p_l'' \quad para \quad l > 1$$

Recordemos, además, el Lema de Shephard:

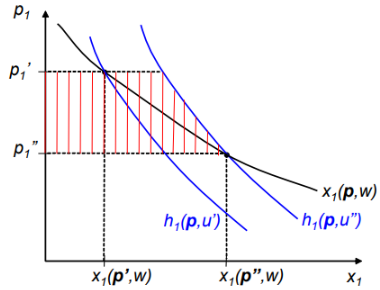
$$\frac{\partial e(p, u)}{\partial p_1} = h_1(p, u)$$

Entonces,

$$VE(p', p'', w) = e(p', u'') - e(p'', u'') = \int_{p_1''}^{p_1'} h_1((p_1, p_{-1}'), u'') dp_1$$

donde p_{-1}' son los precios originales de todos los bienes menos el del bien 1

Gráficamente, la VE corresponde al área marcada. Notemos que el caso en el gráfico corresponde a una caída en p_1, y a un bien normal.



Variación compensatoria

La variación compensatoria se define como

$$\begin{aligned} VC(p', p'', w) &= e(p'', u'') - e(p'', u') = w - e(p'', u') \\ &= e(p', u') - e(p'', u') \end{aligned}$$

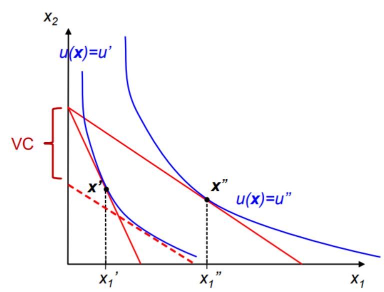
Siendo $u' = v(p', w)$ y $u'' = v(p'', w)$ por lo que $e(p', u') = e(p'', u'') = w$ pues el ingreso no cambia

La VC mide cuánto dinero deja de necesitar el consumidor de manera tal que el consumidor mantenga su nivel de utilidad inicial.

Es un cambio en el precio compensado porque se ajusta el ingreso con tal mantener la utilidad inicial. ¿Cuánta plata deja de necesitar mañana para estar igual que hoy en utilidad? O sea. O sea $v(p', w) = v(p'', w - VC)$

En el gráfico, con $L = 2$, tomamos una caída en p_1 manteniendo $p_2 = 1$.

Notar que desplaza la RP nueva hasta alcanalzar la curva de indiferencia original y la diferencia de la RP nueva con la nueva trasladada es la VC.



En general

$$v(p', w) = v(p'', w - VC)$$

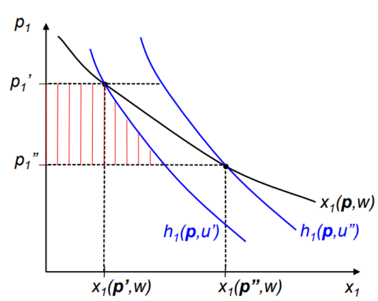
Variación compensatoria como integral

Usando el Lema de Shephard como en el caso anterior, podemos escribir la variación compensatoria como:

$$VC(p', p'', w) = e(p', u') - e(p'', u') = \int_{p_1''}^{p_1'} h_1((p_1, p'_{-1}), u') dp_1$$

donde p'_{-1} son los precios originales de todos los bienes menos el del bien 1

Gráficamente, la VC corresponde al área marcada. Notemos que el caso en el gráfico corresponde a una caída en p_1, y a un bien normal.



Comparación de variaciones

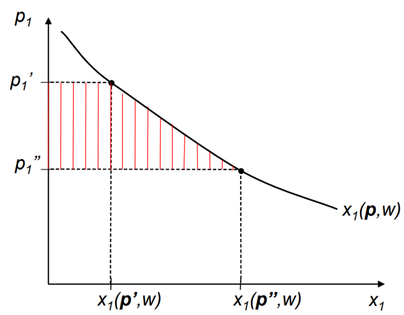
Notar que la VE y la VC no suelen valer lo mismo y va a depender del tipo de bienes. Entonces

- Si el **bien es normal** $VE > VC$
- Si el **bien es inferior** $VE < VC$

Naturalmente, **ambas medidas se igualan si los efectos ingreso se anulan**. En tal caso, ambas medidas coinciden con una tercera medida de cambios en el bienestar, muy habitual en la práctica: el cambio en el excedente del consumidor.

$$\Delta EC(p', p'', w) = \int_{p_1''}^{p_1'} x_1((p_1, p_{-1}'), w) dp_1$$

Gráficamente



Observación 58. Observar que las tres medidas coinciden en el caso de preferencias cuasilineales $u(x) = x_L + \phi(x_1, x_2, ..., x_{L-1})$ para las que si $l < L$ entonces $h_l(p, u') = x_l(p, w) = h_l(p, u'')$

Aplicación de comparación de variaciones

El cambio en el excedente del consumidor puede utilizarse como aproximación a VC o VE cuando el cambio en los precios es pequeño o el efecto ingreso es pequeño.

En cuanto a VC y VE, ambas miden el cambio en el bienestar en términos monetarios. Cuál es preferible puede depender de la circunstancia. Por ejemplo, partiendo de precios p' , para comparar los efectos de dos cambios de precios alternativos, a p'' o a p''' VE es preferible.

- $VE(p', p'', w)$ y $VE(p', p''', w)$ **miden el cambio en el bienestar en términos de riqueza a precios** p'. Por lo tanto, **son comparables** de modo directo.
- $VC(p', p'', w)$ y $VC(p', p''', w)$ **miden el cambio en el bienestar en términos de riqueza a precios** p'' **y** p''' respectivamente. Por lo tanto, **no son comparables** de modo directo.

SARP

¿Podemos encontrar una condición de consistencia necesaria y suficiente sobre el comportamiento de la demanda del consumidor que sea similar al WARP pero que sí implique que el comportamiento de la demanda pueda ser racionalizado por preferencias? La respuesta es "sí", y fue proporcionada por Houthakker (1950) en forma del axioma fuerte de preferencia revelada (SARP)[24], una especie de cierre recursivo del axioma débil.

[24] Strong Axiom of revealed preferences

Lo podemos pensar del siguiente modo: Si $n = 1$ entonces vemos que la canasta 2 va a ser asequible a los precios 1 pues $p^1 \cdot x(p^2, w^2) \leq w^1$ pero si no seleccionó entonces **es preferida la 1 a la 2**, o sea, $x(p^1, w^1) \succsim x(p^2, w^2)$.
Luego si $n = 2$ la canasta 3 va a ser asequible a los precios 2 pues $p^2 \cdot x(p^3, w^3) \leq w^2$ pero si no seleccionó entonces **es preferida la 2 a la 3**, o sea, $x(p^2, w^2) \succsim x(p^3, w^3)$.
Siguiendo el razonamiento

$$x(p^1, w^1) \succsim ... \succsim x(p^{N-1}, w^{N-1}) \succsim x(p^N, w^N)$$

veremos entonces que **la** $N-1$ **es preferida a la** N y lo que nos pide SARP es que respetemos la transitividad y que no pueda suceder que la N sea preferida a la 1. **Dicho de otro modo SARP agrega transitividad**.

Definición 59 (SARP)**.** La función de demanda del mercado $x(p, w)$ satisface el axioma fuerte de preferencia revelada (SARP) si, para cualquier lista

$$(p^1, w^1), \ldots, (p^N, w^N)$$

con $x(p^{n+1}, w^{n+1}) \neq x(p^n, w^n)$ para todo $n \leq N-1$ cuando $p^n \cdot x(p^{n+1}, w^{n+1}) \leq w^n$ para cualquier $n \leq N-1$ entonces $p^N \cdot x(p^1, w^1) > w^N$.

En otras palabras, si $x(p^1, w^1)$ se revelar directa o indirectamente preferido a $x(p^N, w^N)$, entonces $x(p^N, w^N)$ no puede revelarse (directamente) preferido a $x(p^1, w^1)$ [entonces $x(p^1, w^1)$ no puede ser asequible a (p^N, w^N)].

Observación 60. Nótese que SARP equivale a WARP en el caso de que $N = 2$. WARP puede valer a pesar que no hay $\succsim$ racionales ya que debe ser entendido como una relajación del supuesto de transitividad.

Proposición 61 (SARP implica preferencias racionales)**.** *Si la función de demanda de Walras $x(p, w)$ satisface el axioma fuerte de preferencia revelada (SARP), entonces existe una relación de preferencia racional $\succsim$ que racionaliza $x(p, w)$, es decir, tal que para todo (p, w), $x(p, w) \succ y$ para cada $y \neq x(p, w)$ con $y \in B_{p,w}$.*

Demanda agregada

En ciertas circunstancias, podríamos únicamente tener a nuestra disposición datos de consumo del tipo agregados. Cuando podemos tratar la demanda agregada bajo la misma teoría de las demandas individuales. Cuando decimos que las demandas agregadas puedan ser tratadas como demandas individuales. Vamos a ver tres cosas

- Dado I consumidores cuya demanda es $x_i(p, w_i)$, en el agregado se cumple:

$$\sum_i x_i(p, w_i) = x(p, w_1, w_2, ..., w_I)$$

  ¿Cuándo la demanda agregada puede ser expresada como función de los precios y la riqueza agregada? $\sum_i x_i(p, w_i) = x(p, \sum_i w_i)$

- **¿Cuándo la demanda agregada cumple WARP?**

- **¿Cuándo la demanda agregada puede ser tratada como la de un consumidor representativo?**

Demanda agregada en función de riqueza agregada

Vamos a denotar la demanda agregada[25] como:

$$\sum_i x_i\left(p, w_i\right) \equiv x\left(p, w_1, w_2, \ldots, w_I\right)$$

[25] Demanda agregada depende de los precios y la riqueza de cada uno de los consumidores.

Objetivo es ver cuando podemos expresar la demanda agregada en función de los precios y la riqueza agregada. Entonces demanda agregada **debe ser independiente de la distribución del ingreso**. En otros términos, pedimos que:

$$x\left(p, w_1, w_2, \ldots, w_I\right) = x\left(p, w_1', w_2', \ldots, w_I'\right) \text{ siempre que } \sum_i w_i = \sum_i w_i'$$

Cambios en la riqueza

Dada una distribución de riqueza inicial $(w_1, w_2, \ldots, w_I)$ y un cambio diferencial de la riqueza

$$(dw_1, dw_2, \ldots, dw_I)$$

que cumpla $\sum_i dw_i = 0$. [26] Si demanda agregada puede ser escrita como función de la riqueza agregada, debemos tener que:

[26] Lo que uno deja de demanda el otro demanda. O dicho de otro modo que uno deja de consumir el otro lo empieza a consumir

$$\sum_i \frac{\partial x_{li}\left(p,\ w_i\right)}{\partial w_i} dw_i = 0.\ \forall l \forall p \forall w_i$$

Esto debe ser verdadero para cualquier distribución de la riqueza. Esta igualdad se cumple **si y solo si**:

$$\frac{\partial x_{li}\left(p, w_i\right)}{\partial w_i} = \frac{\partial x_{lj}\left(p, w_j\right)}{\partial w_j} \forall i, j, l, w_i, w_j$$

O sea, para un vector de precios dado como para todo bien, **el efecto riqueza debe ser el mismo para cada individuo independientemente del nivel de riqueza**.

Condición necesaria y suficiente

Proposición 62 (Condición suficiente y necesaria)**.** ***Una condición necesaria y suficiente para que el efecto riqueza en sea el mismo****, sea cual sea el consumidor que consideremos y sea cual sea su nivel de riqueza, a cualquier vector de precios p* ***es que las preferencias admitan funciones de utilidad indirecta de la forma de Gorman***[27] *con los coeficientes sobre w, los mismos para cada consumidor i. Es decir:*

[27] El ingreso entra de manera lineal y la manera lineal que entra para todos los individuos es igual

$$v(p, w_i) = a_i(p) + b(p)w_i$$

Siendo $a_i(p)$ una función que puede ser diferente entre los individuos pero $b(p)$ es otra función que indica la pendiente en base a los precios y es la misma para todos los individuos.

Casos particulares de Gorman

$\succsim$ raciones $\not\Rightarrow$ funciones de utilidad indirecta del tipo de Gorman. $\exists$ casos particulares donde sí se cumple que la demanda agregada depende de la riqueza agregada

- $\succsim$ **cuasilineales**
  - Se deriva que $v\left(p,\, w\right) = \, a_i\left(p\right) + \frac{w}{p_l}$ donde l es el bien cuasilineal, único que depende del ingreso. Notar que $b(p) = \frac{1}{p_l}$, por lo que no depende de i.
  - Todos los consumidores deben poseer el mismo bien cuasilineal pues, de otro modo, $b(p)$ sería distinta. Nótese $\succsim$ no tienen que ser necesariamente iguales.
- $\succsim$ **homotéticas**
  - Se deriva que $v\left(p,w\right) = v_i\left(p\right)w$. Debe ocurrir que las preferencias sean homotéticas e iguales

Demanda agregada y WARP

Objetivo del análisis

Vimos condiciones para que la demanda agregada pueda ser escrita en función de los precios e ingreso agregado para cualquier distribución de la riqueza. Tal vez es pedir mucho. **Si restringimos posibles distribuciones de ingreso podemos obtener el mismo resultado.** Si riquezas individuales son una regla de distribución tal que depende del vector de precios y el nivel de riqueza agregado. Es decir

$$w_i = w_i\left(p,w\right)$$

suponemos que suman hasta obtener el total $\sum_i w_i\left(p,w\right) = w\,\forall\left(p,w\right)$, son no negativas $w_i \geq 0 \quad \forall i,p,w$ y $w_i = w_i\left(p,w\right)$ son homogéneas de grado uno .

Entonces podemos expresar la demanda agregada como función del vector de precios e ingreso agregado ya que

$$x\left(p,w_1,w_2,\ldots,w_I\right) \equiv \sum_i x_i\left(p,w_i\right)$$

pues

- $\Rightarrow x\left(p,\, w_1,\, w_2,\, \ldots,\, w_I\right) = \sum_i x_i\left(p,\, w_i\left(p,\, w\right)\right)$
- $\Rightarrow x\left(p,w_1,w_2,\ldots,w_I\right) = x\left(p,w\right) = \sum_i x_i\left(p,w_i\left(p,w\right)\right)$

WARP agregado

Definición 63 (WARP para demanda agregada)**.** La función de demanda agregada $x(p,w)$ satisface el axioma débil (WARP) si $p \cdot x(p',w') \leq w$ y $x(p,w) \neq x(p',w')$ implican $p' \cdot x(p,w) > w'$ para cualquier (p,w) y (p',w').

Proposición 64 (WARP en individuos no implica WARP agregado)**.** ***Si las demandas individuales cumplen WARP no necesariamente vale el WARP en el agregado.***

Notar que esto ocurre pues WARP vale si y solo si se da la ley de la demandas para precios compensados (esto vale para cualquier demanda). Así, sabemos que para el individuo i-ésimo todo cambio de una situación inicial (p_i,w_i) a otra $(p_i',w_i') = (p', p' \cdot p' x_i(p_i,w_i))$, cumple que:

$$\left(p' - p\right) \cdot \left[x_i\left(p',w_i'\right) - x_i\left(p,w_i\right)\right] \leq 0$$

con desigualdad estricta si $x_i\,(p, w) \neq x_i\,(p', w')$. Entonces sumando las demandas individuales se cumple que

$$(p' - p) \cdot \left[\sum_i x_i\,(p', w_i') - \sum_i x_i\,(p, w_i)\right] \leq 0$$

si es menor para algún i la suma es < 0.

La dificultad surge porque un cambio en el precio-riqueza que es compensado en el agregado, de manera que $w' = p' \cdot x(p, w)$, no necesita ser compensado para cada individuo; bien podríamos tener $w' \neq p' \cdot x_i(p, a, w)$ para algunos o todos los i. Cambio compensado en el agregado no implica que sea compensado para cada individuo. Si para alguno no es compensada puede ser > 0, la suma puede dar > 0.

Proposición 65 (Propiedades que se transmiten)**.** *Propiedades de las demandas individuales que se transmiten a la demanda agregada.*

- ***Continuidad**: demandas individuales continuas, la agregada también lo es (continuidad se preserva bajo la suma)*
- ***Homogeneidad de grado cero**: dado $x_i\,(\alpha p, \alpha w_i) = x_i\,(p, w_i)$ entonces $x\,(\alpha p, \alpha w) = x(p, w)$*
- ***Ley de Walras**: Asumimos que $p \cdot x_i\,(p, w_i) = w_i$. Pero entonces $p \cdot x\,(p, w) = p \cdot \sum_i x_i\,(p, w_i\,(p, w)) = \sum_i w_i$ dado que $\sum_i w_i = w$, entonces vale la propiedad también en el agregado.*

Condiciones para WARP agregado

Para que valga WARP en el agregado **veremos que debe suceder que las demandas individuales cumplen con la ley no compensada de la demanda y la regla de distribución es tal que** $w_i = \alpha_i w$. Entonces a nivel agregado también se cumple y, como corolario, la demanda agregada cumple el WARP.

Definición 66 (Ley de demanda no compensada)**.** La función de demanda individual $x_i(p, w_i)$ satisface la propiedad de la ley de la demanda no compensada (ULD) si

$$(p' - p) \cdot [x_i(p', w_i) - x_i(p, w_i)] \leq 0$$

para cualquier p, p' y w_i, con desigualdad estricta si $x_i(p', w_i) \neq x_i(p, w_i)$. La definición análoga se aplica a la función de demanda agregada $x(p, w)$.

¿Qué tan restrictivo son estas condiciones?

- No sale de $\succsim$ racionales
- Efecto ingreso juega en la misma dirección que el efecto sustitución.
- Vale aunque no haya efecto sustitución (Leontieff)

Proposición 67 (WARP vale si vale ley de demanda no compensada individual)**.** *Si la función de demanda walrasiana de cada consumidor $x_i(p, w_i)$ satisface la propiedad de la ley de la demanda no compensada (ULD), entonces también la satisface la demanda agregada $x(p, w) = \sum_i x_i(p, w_i)$. Como consecuencia, la demanda agregada $x(p, w)$ satisface el axioma débil (WARP).*

Proposición 68 (Preferencias homotéticas cumple ley de la demanda no compensada)**.** *Si $\succsim$ es homotética, entonces $x_i(p, w_i)$ satisface la propiedad de la ley de la demanda no compensada (ULD).*

Existencia de un consumidor representativos

Objetivo del análisis

La pregunta de agregación es: ¿cuándo podemos tratar la función de demanda agregada $x(p, \sum_i w_i)$ como si fuera generada por un consumidor representativo ficticio cuyas preferencias puedan ser utilizadas como una medida del bienestar social agregado?

Empecemos con que existe una regla de distribución.

$$w_i = w_i\,(p, w)$$

suponemos que $\sum_i w_i\,(p, w) = w\ \forall\,(p, w)$ y que $w_i(p, w)$ continua y homogénea de grado 1. Esto garantiza que $x(p, w)$ cumple Walras y es homogénea de grado 1. $x(p, w)$ depende de $w_i(p, w)$ salvo que sean Gorman.

Consumidor representativo positivo

Definición 69 (Existencia de consumidor representativo positivo)**.** Existe un consumidor representativo positivo si hay una relación de preferencia racional $\succsim$ en $\mathbb{R}^L$ tal que la función de demanda agregada $x(p, w)$ es precisamente la función de demanda walrasiana generada por esta relación de preferencia. Es decir, $x(p, w) \succsim x$ siempre que $x \neq x(p, w)$ y $p \cdot x < w$.[28]

[28] **Para que esto pase $x(p, w)$ tiene que cumplir no solo WARP sino que también SARP**. Es más que lo que pedíamos antes.

Análisis de bienestar social

Ahora buscamos ver **¿qué pasa si también queremos asignarle un significado de Bienestar?**

Definición 70 (Función de bienestar social (Bergson-Samuelson))**.** Una función de bienestar social (Bergson-Samuelson) es una función $W : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ que asigna un valor de utilidad a cada posible vector $(u_1, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I$ de niveles de utilidad para los I consumidores en la economía.[29]

[29] La idea detrás de una función de bienestar social $W(u_1, \ldots, u_I)$ es que expresa con precisión los juicios de la sociedad sobre cómo se deben comparar las utilidades individuales para producir un ordenamiento de los posibles resultados sociales (Pasa a ser cardinal). También asumimos que las funciones de bienestar social son crecientes (por Pareto), cóncavas (aversión a la desigualdad) y, cuando sea conveniente, diferenciables.

Ahora supongamos que existe un proceso, quizás una autoridad central benevolente, que, para cualquier conjunto dado de precios p y nivel de riqueza agregada w, redistribuye la riqueza con el fin de maximizar el bienestar social. Es decir, para cualquier (p, w), la distribución de la riqueza $(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w))$ resuelve

$$V(p, w) = \underset{w_1, w_2, \ldots, w_I}{\text{Max}}\ W(v_1(p, w_1), \ldots, v_I(p, w_1)) \quad s.a. \quad \sum_{i=1}^{I} w_i \leq w$$

si para todo (p, w) la regla $w_i = w_i\,(p, w)$ maximiza el bienestar. Donde $v_i(p, w)$ es la función de utilidad indirecta del consumidor i.

Definición 71 (Función de utilidad indirecta de un consumidor representativo positivo)**.** Supongamos que para cada nivel de precios p y riqueza agregada w, la distribución de riqueza $(w_1(p, w), \ldots, w_I(p, w))$ resuelve el problema de maximización de la función de bienestar social. Entonces, la función de valor $V(p, w)$ del problema de maximización de la función de bienestar social es una función de utilidad indirecta de un consumidor representativo positivo para la función de demanda agregada $x(p,w) = \sum_i x_i(p, w_i(p,w))$.

Proposición 72 (Propiedades de función de utilidad indirecta de un consumidor representativo positivo)**.** *Las propiedades que cumple esta función de utilidad indirecta son:*

- ***Creciente en*** w***:*** *Si tenemos* $w' > w$ *entonces* $V(p,w') \geq V(p,w)$*.*
- ***No creciente en*** p***:*** *Si tenemos* $p' \geq p$ *con la misma distribución del ingreso* $v_i(p',w) \leq v_i(p,w)$ *entonces* $V(p',w) \leq V(p,w)$*.*
- ***Homogénea de grado 0:*** *Sea* $t \in \mathbb{R}$ *entonces* $V(tp,tw) = V(p,w)$*.*
- ***Cuasiconvexa en precios***

Consumidor representativo normativo

Definición 73 (Consumidor representativo normativo)**.** El consumidor representativo positivo $\succsim$ para la demanda agregada **es un consumidor representativo normativo** en relación con la función de bienestar social $W(\cdot)$ **si para cada** (p,w)**, la distribución de la riqueza** $(w_1(p,w),\ldots,w_I(p,w))$ **resuelve el problema de maximización de la función de bienestar social** y, por lo tanto, la función de valor del problema es una función de utilidad indirecta para $\succsim$.

Si existe un consumidor representativo normativo, las preferencias son una buena base para hacer un análisis de bienestar. Las demanda agregada se puede usar para evaluar variaciones del bienestar. Cuidado que la distribución óptima esta detrás.

Diferencia entre consumidor representativo positivo y normativo

No es cierto que siempre que la demanda agregada pueda ser generada por un consumidor representativo positivo, las preferencias de este consumidor representativo tengan contenido normativo. Incluso puede ser el caso de que exista un consumidor representativo positivo pero que no haya una función de bienestar social que conduzca a un consumidor representativo normativo.

Teoría de la firma

Conjuntos de producción

En nuestro esquema, una firma es una entidad que combina inputs para generar uno o varios outputs con el objetivo de, en un marco institucional, maximizar beneficios. El contexto en el que opera la firma le impone dos restricciones 1) Restricciones institucionales y 2) Restricciones tecnológicas.

Definimos un plan de producción como un vector

$$y = (y_1, y_2, ..., y_L) \in \mathbb{R}^L$$

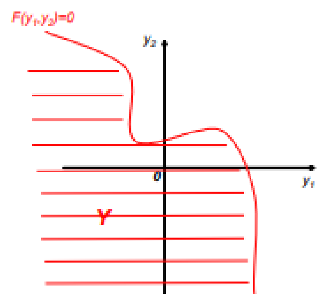
que indica el uso de insumos y la generación de productos en la firma. Por convención, para cualquier bien l,

- $y_l \geq 0 \quad \rightarrow l$ es un producto (output) para la firma
- $y_l \leq 0 \quad \rightarrow l$ es un insumo (input) para la firma

Las restricciones tecnológicas que la firma enfrenta determinan qué planes de producción son factibles y cuáles no. Esto se refleja en un **conjunto de producción** (o conjunto de posibilidades de producción)

$$Y \subset \mathbb{R}^L.$$

Los planes $\mathbf{y} \in Y$ (y sólo esos planes) son factibles para la firma.



Una forma usual de describir el estado de la tecnología es introducir una **función de transformación**, F, que permite definir el conjunto de producción de un modo alternativo

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^L | F(y) \leq 0\}$$

Entonces $F(y) = 0$ si y sólo si y es un elemento en la frontera de Y , la "frontera de posibilidades de producción" o "frontera de transformación".

Si la función $F(\cdot)$ es diferenciable, y tomamos dos bienes l, k, y un plan de producción $\bar{y}$ tal que $F(\bar{y}) = 0$, podemos definir la **tasa marginal de transformación**

$$-\frac{dy_l}{dy_k}\bigg|_{F(y)=0} = \frac{\partial F(\bar{y})/\partial y_k}{\partial F(\bar{y})/\partial y_l} = TMT_{k,l}$$

indica el número de unidades adicionales del bien l que pueden obtenerse reduciendo la cantidad del bien k marginalmente.

Tecnologías con distintos inputs y outputs

Este es un esquema muy general. A veces nos va a convenir concentrarnos en un caso más específico, en el que tenemos un solo producto, y $(L-1)$ insumos.

- $q \in \mathbb{R}_+$ es la cantidad del producto generada,
- $z \in \mathbb{R}_+^{L-1}$ es el vector de insumos empleados (ahora en magnitudes positivas).

Definimos entonces la **función de producción**

$$f : \mathbb{R}_+^{L-1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

con la que indica la máxima cantidad de producto

$$q = f(\mathbf{z})$$

alcanzable con el vector de insumos z.

En este caso, puede adoptarse una **definición alternativa del conjunto de producción**:

$$Y = \{(q, -z) \mid q - f(z) \leq 0\}$$

por lo que ahora un plan de producción está dado por un vector

$$\mathbf{y} = (q, -z)$$

La función de transformación, en este caso, es $F(\,q, -z\,) = q - f(z) = 0$.

Observación 74. En general, vamos a suponer que la función de producción es continua, y diferenciable, para simplificar.

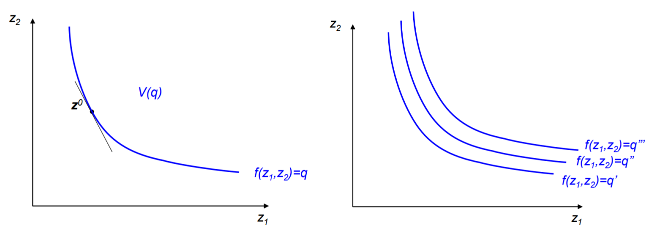
Notar que podemos caracterizar el **conjunto de requerimiento de insumos** es el conjunto de vectores de insumos z que permiten alcanzar como mínimo un nivel de producción q:

$$V(q) = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} | f(z) \geq q\}$$

Además caracterizamos a una **isocuanta** es el conjunto de vectores de insumos z que generan exactamente la cantidad q.

$$Q(q) = \{z \in \mathbb{R}_+^{L-1} | f(z) = q\}$$

Las isocuantas, entonces, son las curvas de nivel de la función de producción. Notar que con dos insumos las curvas isocuantas son gráficamente



Surge la noción de **tasa marginal de sustitución técnica**, el valor absoluto de la pendiente de la isocuanta.

$$TMST_{kl}(z^0) = \frac{\partial f(z^0)/\partial z_k}{\partial f(z^0)/\partial z_l},$$

que indica, en el margen, las unidades adicionales del insumo l necesarias para mantener q ante una caída del uso del insumo k.

Definición 75 (Elasticidad de sustitución)**.** Se suele medir la sustituibilidad entre insumos en la función de producción[30] recurriendo a la elasticidad de sustitución entre dos insumos l y k, manteniendo constantes los niveles de los demás insumos y el nivel de producción. Se trata del cambio porcentual en la razón z_l/z_k, en relación con el cambio porcentual en la $TMST$ entre esos dos insumos.

$$\sigma_{kl} = \frac{d\ln(z_l/z_k)}{d\ln(\frac{\partial f/\partial z_k}{\partial f/\partial z_l})} = \frac{d(z_l/z_k)}{z_l/z_k}\frac{\frac{\partial f/\partial z_k}{\partial f/\partial z_l}}{d(\frac{\partial f/\partial z_k}{\partial f/\partial z_l})}$$

[30] Además si la función de producción es cuasicóncava, entonces σ toma valores no negativos entre 0 y $+\infty$. Cuanto mayor es el valor de σ, más fácil es sustituir un insumo por otro en la producción.

Propiedades de conjuntos de producción

Para el caso general de $Y \subseteq \mathbb{R}^L$ ahora introducimos y discutimos una lista bastante exhaustiva de propiedades comúnmente asumidas de los conjuntos de producción. La adecuación de cada una de estas suposiciones depende de las circunstancias particulares (de hecho, algunas de ellas son mutuamente excluyentes).

1. Y **no está vacío.** Esta suposición simplemente dice que la empresa tiene algo que puede planear hacer. De lo contrario, no hay necesidad de estudiar el comportamiento de la empresa en cuestión.

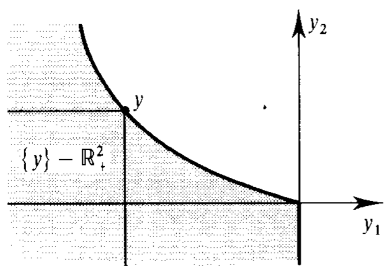
2. Y **es cerrado.** El conjunto Y incluye su frontera. Por lo tanto, el límite de una secuencia de vectores de entrada y salida tecnológicamente factibles también es factible; en símbolos, $y^n \to y$ e $y^n \in Y$ implican $y \in Y$. Esta condición debe considerarse principalmente como técnica.

3. **No free lunch.** Para producir se deben utilizar insumos. Siempre que $y \in Y$ y $y > 0$, entonces $y = 0$; no es posible producir algo de la nada. O sea $Y \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{0\}$

4. **Posibilidad de inactividad.** Esta propiedad dice que $0 \in Y$: Es posible una paralización completa. O sea no hay costos fijos o hundidos.

5. **Free disposal.**[31] Si $y \in Y$ y $y' < y$ (de modo que y' produce a lo sumo la misma cantidad de productos utilizando al menos la misma cantidad de insumos), entonces $y' \in Y$. La interpretación es que la cantidad adicional de insumos (o productos) puede ser desechada o eliminada sin costo alguno.

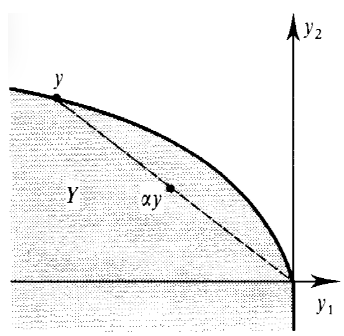
[31] También se puede pensar como una especie de montonicidad. El free disposal se cumple si la absorción de cualquier cantidad adicional de insumos sin reducción en la producción siempre es posible.



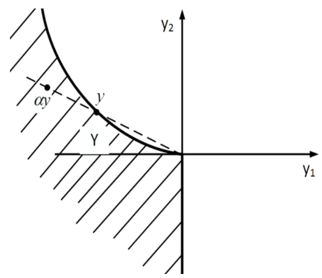
6. **Irreversibilidad.** Supongamos que $y \in Y$ y $y \neq 0$. Entonces, la irreversibilidad dice que $-y \notin Y$. En otras palabras, es imposible revertir una producción tecnológicamente posible para transformar una cantidad de producto en la misma cantidad de insumo que se utilizó para generarlo.

7. **Rendimientos no crecientes a escala.**[32] La tecnología de producción Y exhibe rendimientos no crecientes a escala si para cualquier $y \in Y$, tenemos $\alpha y \in Y$ para todos los escalares $\alpha \in [0, 1]$. En otras palabras, cualquier vector de entrada-salida factible puede ser reducido. Nótese que los rendimientos no crecientes a escala implican que la inacción es posible.

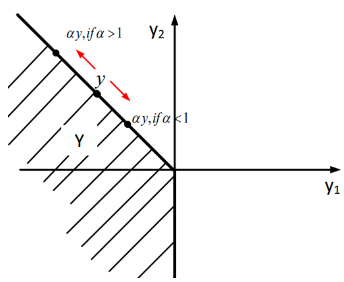
[32] Se puede pensar como decrecientes débil. Notar que los rendimientos no crecientes los podemos pensar que luego de que escalemos a la producción por un α entonces la recta que se forma por escalar esa producción en algún momento quedará por encima de la curva de producción.



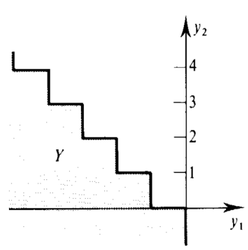
8. **Rendimientos no decrecientes a escala.**[33] El proceso de producción exhibe rendimientos no decrecientes a escala si para cualquier $y \in Y$, tenemos $\alpha y \in Y$ para cualquier escala $\alpha \geq 1$. En otras palabras, cualquier vector de entrada-salida factible puede ser ampliado.



9. **Rendimientos constantes a escala.** Esta propiedad es la conjunción de las dos propiedades anteriores. El conjunto de producción Y exhibe rendimientos constantes a escala si $y \in Y$ implica $\alpha y \in Y$ para cualquier escalar $\alpha \geq 0$. Geométricamente, Y es un cono.



10. **Aditividad (o libre entrada).** Supongamos que $y \in Y$ y $y' \in Y$. La propiedad de aditividad requiere que $y + y' \in Y$. De manera más concisa, $Y + Y \subseteq Y$. La aditividad también está relacionada con la idea de entrada. Si $y \in Y$ está siendo producido por una empresa y otra empresa entra y produce $y' \in Y$, entonces el resultado neto es el vector $y + y'$.



11. **Convexidad.** [34] Postula que el conjunto de producción Y es convexo. Es decir, si $y, y' \in Y$ y $\alpha \in [0, 1]$, entonces $\alpha y + (1 - \alpha) y' \in Y$.

[33] Se puede pensar como crecientes débil.Notar que los rendimientos no decrecientes los podemos pensar que luego de que escalemos a la producción por un α entonces la recta que se forma por escalar esa producción en algún momento quedará por debajo de la curva de producción.

[34] Es una de las suposiciones fundamentales de la microeconomía. La convexidad puede interpretarse como 1) rendimientos no crecientes y 2) combinaciones de insumos "desequilibradas" no son más productivas que las equilibradas.

12. Y **es un cono convexo.** Esta es la conjunción de las propiedades de convexidad y rendimientos constantes a escala. Formalmente, Y es un cono convexo si para cualquier vector de producción $y, y' \in Y$ y constantes $\alpha \geq 0$ y $\beta \geq 0$, tenemos $\alpha y + \beta y' \in Y$.

Proposición 76. *El conjunto de producción Y es aditivo y satisface la condición de rendimientos no crecientes si y solo si es un cono convexo.*

Maximización de beneficios

Objetivos y supuestos

Asumimos a lo largo de este capítulo que el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio. Además, siempre asumimos que el conjunto de producción de la empresa Y satisface las propiedades de no vacío, cerrado y free disposal. Por otro lado asumimos mercados completos y firma tomadora de precios.

Problema de maximización de beneficio

Dado un vector de precios $p \gg 0$ y un vector de producción $y \in \mathbb{R}^L$, el beneficio generado al implementar y es $p \cdot y = \sum_{l=1}^{L} p_l y_l$.[35]

Dadas las restricciones tecnológicas representadas por su conjunto de producción Y, el problema de maximización de beneficios de la empresa (PMP) es entonces

$$\underset{y}{\text{Max}}\, p \cdot y \;\; s.a. \;\; y \in Y$$

Usando una función de transformación $F(\cdot)$ para describir Y, podemos expresar de manera equivalente el PMP[36] como

$$\underset{y}{\text{Max}}\, p \cdot y \;\; s.a. \;\; F(y) \leq 0$$

Proposición 77 (Función de beneficios)**.** *Dado un conjunto de producción Y, la función de beneficios de la empresa $\pi(p)$ asocia a cada p la cantidad*

$$\pi(p) = \text{máx}\{p \cdot y : y \in Y\}$$

el valor de la solución al PMP.

Definición 78 (Correspondencia de la oferta)**.** Definimos la correspondencia de oferta de la empresa en p, denotada $y(p)$, como el conjunto de vectores que maximizan el beneficio $y(p) = \{y \in Y : p \cdot y = \pi(p)\}\}$.

Observación 79 (Condiciones de primer orden). Si la función de transformación $F(\cdot)$ es diferenciable, entonces las condiciones de primer orden[37] pueden usarse para caracterizar la solución del PMP. Si $y^* \in y(p)$, entonces, para algún $\lambda \geq 0$, y^* debe satisfacer las condiciones de primer orden

$$p_l = \lambda \frac{\partial F(y^*)}{\partial y_l} \quad \text{para } l = 1, \ldots, L$$

[35] Según la convención de signos, esto es precisamente el ingreso total menos el costo total.

[36] PMP es (problema de maximización de beneficios)

[37] λ es el multiplicador correspondiente a la restricción (las condiciones son suficientes si Y es convexo).

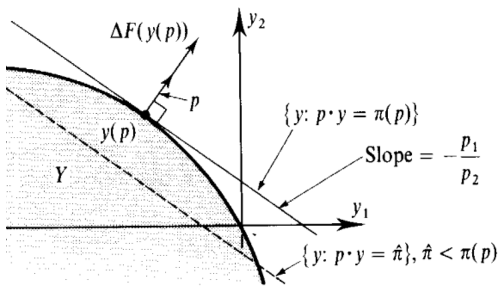
o, equivalentemente, en notación matricial,

$$p = \lambda \nabla F(y^*).$$

Entonces, para cualquier par de bienes l, k,

$$TMT_{l,k} = \frac{\partial F(\mathbf{y}^*)/\partial y_l}{\partial F(\mathbf{y}^*)/\partial y_k} = \frac{p_l}{p_k}$$

Gráficamente,



Caso particular para firma con único output

Cuando Y corresponde a una tecnología de un solo producto con una función de producción diferenciable $f(z)$, podemos ver la decisión de la empresa simplemente como una elección sobre sus niveles de insumos z. En este caso especial, dejaremos que el escalar $p > 0$ denote el precio del producto de la empresa y el vector $w \gg 0$ denote los precios de sus insumos. El vector de insumos z^* maximiza el beneficio dado (p, w) si resuelve

$$\underset{q \geq 0, z \geq 0}{\text{Max}} \, pq - w \cdot z \;\; s.a. \;\; q \leq f(z)$$

Si suponemos que la función de producción es estrictamente creciente, entonces naturalmente en la solución tendremos $q = f(z)$. Además notar que si $q < f(z)$ la firma puede aumentar q sin pagar más por sus insumos, algo incompatible con la maximización de beneficios. Entonces, el problema de la firma puede plantearse más simplemente:

$$\underset{z \geq 0}{\text{Max}} \, pf(z) - w \cdot z$$

Si z^* es óptimo, entonces las siguientes condiciones de primer orden deben satisfacerse para $l = 1, \ldots, L-1$:

$$p\frac{\partial f(\mathbf{z}^*)}{\partial z_l} - w_I = 0.$$

O, en notación matricial,

$$p \, \nabla f(z^*) \leq w \text{ y } [p\nabla f(z^*) - w] \cdot z^* = 0$$

Así, el ingreso del producto marginal de cada insumo $p\frac{\partial f(\mathbf{z}^*)}{\partial z_l}$ debe ser igual al costo por unidad del insumo w_l.

También notar que para cualquier par de insumos j y k con $(z_j^*, z_k^*) > 0$, la condición de primer orden implica que

$$TMST_{lk} = \frac{\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l}}{\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_k}} = \frac{w_l}{w_k}$$

es decir, la tasa marginal de sustitución técnica entre los dos insumos es igual a su relación de precios, la tasa de sustitución económica entre ellos.

Propiedades para el caso general

Volviendo al caso general vemos que $\pi(\cdot)$ cumple determinadas propiedades

Proposición 80. *Supongamos que $\pi(\cdot)$ es la función de beneficio del conjunto de producción Y y que $y(\cdot)$ es la correspondencia de oferta asociada. Supongamos también que Y es cerrado y satisface la propiedad de free disposal. Entonces:*

1. *$\pi(\cdot)$ es homogénea de grado uno.*
2. *$\pi(\cdot)$ es convexa.*
3. *Si Y es convexo, entonces $Y = \{y \in \mathbb{R}^L : p \cdot y \leq \pi(p) \text{ para todo } p \gg 0\}$.*
4. *$y(\cdot)$ es homogénea de grado cero.*
5. *Si Y es convexo, entonces $y(p)$ es un conjunto convexo para todo p. Además, si Y es estrictamente convexo, entonces $y(p)$ es un solo valor (no una correspondencia) si no es vacío.*
6. *(Lema de Hotelling) Si $y(\bar{p})$ consiste en un solo punto, entonces $\pi(\cdot)$ es diferenciable en $\bar{p}$ y $\nabla\pi(\bar{p}) = y(\bar{p})$.*
7. *Si $y(\cdot)$ es una función diferenciable en $\bar{p}$, entonces $Dy(p) = D^2\pi(\bar{p})$ es una matriz asimétrica y semidefinida positiva con $Dy(\bar{p}) \cdot \bar{p} = 0$.*

Observación 81 (Ley de oferta). Dado que $\pi(\cdot)$ es convexa, surge que se cumple la "ley de la oferta",

$$\frac{\partial y_l}{\partial p_l} \geq 0,\ l = 1, ..., L.$$

Las cantidades y los precios varían en el mismo sentido.[38]

[38] No hay nada análogo a los bienes Giffen, no hay efecto ingreso.

Observación 82 (Condición suficiente y necesaria). Si el conjunto de producción Y es convexo, entonces las condiciones de primer orden en y no solo son necesarias, sino también suficientes para determinar una solución al PMP.

Nota: lo afirmado vale no solamente para una firma tomadora de todos los precios, como la que vimos antes. Vale para cualquier firma que maximice beneficios, en cualquier contexto (monopolio, oligopolio, etc.).

Minimización de costos

Objetivos y supuestos

El problema es interesante por varias razones.

- Primero, nos lleva a una serie de resultados y construcciones que son técnicamente muy útiles.
- Segundo, cuando una empresa no es un tomador de precios en su mercado de productos, ya no podemos utilizar la función de beneficios para el análisis. No obstante, mientras la empresa sea tomadora de precios en su mercado de insumos, los resultados que derivan del problema de minimización de costos continúan siendo válidos.
- Tercero, cuando el conjunto de producción presenta rendimientos no decrecientes a escala, la función de valor y los vectores optimizadores del problema de minimización de costos, que mantienen fijos los niveles de producción, tienen un mejor comportamiento que la función de beneficios y la correspondencia de oferta del PMP.

Problema de minimización de costos

Para ser concretos, centramos nuestro análisis en el caso de un solo producto. Como es habitual, dejamos que z sea un vector no negativo de insumos, $f(z)$ la función de producción, q las cantidades de producción, y $w \geq 0$ el vector de precios de los insumos.

El problema de minimización de costos (CMP, por sus siglas en inglés) puede entonces plantearse de la siguiente manera (asumimos free disposal de la producción):

$$\underset{z \geq 0}{\text{Min}} \ \mathrm{w} \cdot z \quad s.a. \quad f(z) \geq q.$$

Proposición 83 (Función de costos)**.** *El valor optimizado del CMP está dado por la función de costos*

$$c(w, q)$$

.

Definición 84 (Correspondencia de demanda condicional de factores)**.** El conjunto optimizador correspondiente de elecciones de insumos (o factores), denotado por $z(w, q)$ se conoce como la correspondencia de demanda condicional de factores (o función, si siempre es unívoca). [39]

Observación 85 (Condiciones de primer orden). Si z^* es óptimo en el CMP y si la función de producción $f(\cdot)$ es diferenciable, entonces para algún $\lambda \geq 0$, las siguientes condiciones de primer orden[40] deben cumplirse para cada insumo $l = 1, \ldots, L$:

$$w_l \geq \lambda \frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l},$$

con igualdad si $z_l^* > 0$.[41] O, en notación matricial,

$$w \geq \lambda \nabla f(z^*) \text{ y } [w - \lambda \nabla f(z^*)] \cdot z^* = 0.$$

[39] El término "condicional" surge porque estas demandas de factores están condicionadas al requisito de que se produzca el nivel de producción q.

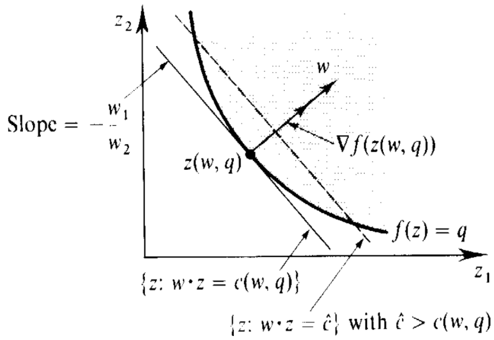
[40] Las CPO son suficientes si Y es convexo (es decir, si $f(\cdot)$ es cóncava).

[41] Como de costumbre, el multiplicador de Lagrange λ puede interpretarse como el valor marginal de relajar la restricción $f(z^*) \geq q$. Así, λ es igual a $\frac{\partial c(w,q)}{\partial q}$, el costo marginal de producción.

Combinando las condiciones tenemos que para cualquier par de insumos l y k con $(z_i, z_k) \gg 0$, tenemos

$$TMST_{lk} = \frac{\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_l}}{\frac{\partial f(z^*)}{\partial z_k}} = \frac{w_l}{w_k}$$

Otra vez, la TMST iguala a la razón de precios de los insumos.[42] Gráficamente,



[42] Esta correspondencia es de esperar porque, como hemos señalado, la maximización de beneficios implica que las elecciones de insumos minimizan los costos para el nivel de producción q elegido.

Propiedades para el caso de único output

Vemos que $c(\cdot)$ cumple determinadas propiedades

Proposición 86. *Supongamos que $c(w,q)$ es la función de costos de una tecnología de un solo producto Y con función de producción $f(\cdot)$ y que $z(w,q)$ es la correspondencia de demanda de factores condicional asociada. Supongamos también que Y es cerrado y satisface la propiedad de free disposal. Entonces:*

1. *$c(\cdot)$ es homogénea de grado uno en w y no decreciente en q.*
2. *$c(\cdot)$ es una función cóncava en w.*
3. *Si los conjuntos $\{z > 0 : f(z) = q\}$ son convexos para cada q, entonces $Y = \{(-z, q) : w \cdot z \geq c(w,q)$ para todo $w \geq 0\}$.*
4. *$z(\cdot)$ es homogénea de grado cero en w.*
5. *Si el conjunto $\{z > 0 : f(z) \geq q\}$ es convexo, entonces $z(w,q)$ es un conjunto convexo. Además, si $\{z > 0 : f(z) = q\}$ es un conjunto estrictamente convexo, entonces $z(w,q)$ es unívoco.*
6. *(Lema de Shepard) Si $z(\bar{w}, q)$ consiste en un solo punto, entonces $c(\cdot)$ es diferenciable con respecto a w en $\bar{w}$ y $\nabla_w c(\bar{w}, q) = z(\bar{w}, q)$.*
7. *Si $z(\cdot)$ es diferenciable en $\bar{w}$, entonces $D_w z(\bar{w}, q) = D_w^2 c(\bar{w}, q)$ es una matriz asimétrica y semidefinida negativa con $D_w z(\bar{w}, q) \cdot \bar{w} = 0$.*
8. *Si $f(\cdot)$ es homogénea de grado uno (es decir, presenta rendimientos constantes a escala), entonces $c(\cdot)$ y $z(\cdot)$ son homogéneas de grado uno en q.*
9. *Si $f(\cdot)$ es cóncava, entonces $c(\cdot)$ es una función convexa en q (en particular, los costos marginales son no decrecientes en q).*

Reexpresión del problema de maximización de beneficios de la firma

Usando la función de costos, podemos reformular el problema de la empresa de determinar su nivel de producción que maximiza beneficios como:

$$\underset{q\geq 0}{\text{Max}}\; pq - c(w,q)$$

La condición necesaria de primer orden para que q^* maximice los beneficios es entonces:

$$\frac{\partial c(w,q^*)}{\partial q} \geq p,$$

con igualdad si $q^* > 0$. En otras palabras, en un óptimo interior (es decir, si $q^* > 0$), el precio es igual al costo marginal.

Observación 87 (Condición suficiente). Si $c(w,q)$ es convexa en q (rendimientos no crecientes a escala), entonces la condición de primer orden también es suficiente para que q^* sea el nivel de producción óptimo de la empresa.

Agregación

Motivación

En esta sección, estudiamos la teoría de la oferta agregada (neta). La ausencia de una restricción presupuestaria implica que la oferta individual no está sujeta a efectos de riqueza. A medida que cambian los precios, solo hay efectos de sustitución a lo largo de la frontera de producción. En contraste con la teoría de la demanda agregada, este hecho da lugar a una teoría de agregación que es simple y poderosa.

Al no haber efectos ingreso, la agregación es sencilla.

Oferta agregada

Supongamos que hay J firmas en la economía, cada una especificada por un conjunto de producción $Y_1, \ldots, Y_J$. Suponemos que cada Y_i es no vacío, cerrado y satisface la propiedad de free disposal.

Denotemos la función de beneficios y las correspondencias de oferta de Y_i por $\pi_i(p)$ y $y_i(p)$, respectivamente. **La correspondencia de oferta agregada es la suma de las correspondencias de oferta individuales**:

$$\begin{aligned} y(p) &= \sum_{j=1}^{J} y_j(p) \\ &= \left\{ y \in \mathbb{R}^L \; | y = \sum_{j=1}^{J} y_j \text{ para algún } y_j \in y_j(p),\, j = 1, ..., J \right\} \end{aligned}$$

Proposición 88 (Vale la "ley de la oferta" a nivel agregado.)**.** *Si $y_j(p)$ es una función diferenciable para todo j, sabemos que $Dy_j(p)$ es simétrica y semidefinida positiva para todo* *j. Entonces, $Dy(p)$ también es simétrica y semidefinida positiva. En particular, entonces,*

$$\frac{\partial y_l(p)}{\partial p_l} \geq 0 \quad l = 1, \ldots, L.$$

Firma representatitva

La simetría de $Dy(p)$ sugiere que subyace en $y(p)$ una "firma representativa". Como mostraremos ahora, esto es cierto de una manera particularmente fuerte.

Dado $Y_1, \ldots, Y_J$, podemos definir el conjunto de producción agregado como:

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_J \\ &= \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^L \ |\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{J} \mathbf{y}_j \text{ para algún } \mathbf{y}_j \in Y_j,\ j = 1, ..., J \right\} \end{aligned}$$

Este conjunto de producción agregado incorpora todas las posibles combinaciones de las producciones individuales de las unidades de producción en la economía.

Imaginemos que Y es la tecnología de una firma tomadora de precios. Sea $y^*(p)$ la correspondencia de oferta, y sea $\pi^*(p)$ la función de beneficios que surgen del problema de esa firma única.

Queremos entender la relación entre el comportamiento y el beneficio de esa firma única y los de las J firmas operando descentralizadamente.

Proposición 89 (Equivalencia de Beneficios bajo Decisiones Independientes y Coordinadas)**.** *El beneficio agregado obtenido por cada unidad de producción al maximizar sus beneficios por separado, tomando los precios como dados, es el mismo que se obtendría si coordinaran sus acciones (es decir, sus y_i) en una decisión conjunta de maximización de beneficios.*

Para todo $p \gg 0$

1. $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(p)$
2. $y^*(p) = \sum_{j=1}^{J} y_j^*(p)$

Para encontrar la solución del problema de maximización de beneficios agregados para precios dados p, es suficiente con sumar las soluciones de los problemas individuales correspondientes.

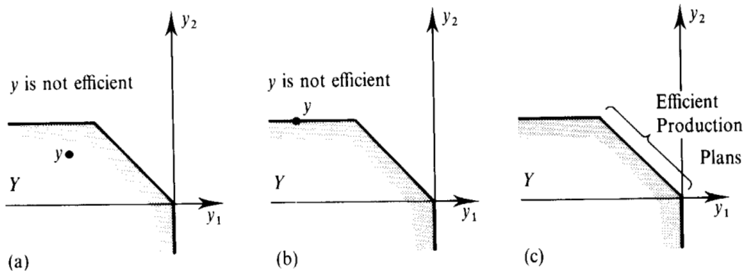
Observación 90 (Conclusión agregación)*.* El problema agregado se puede descentralizar sin inconvenientes.

- La maximización agregada y la suma de las maximizaciones individuales de beneficios coinciden.
- Pero entonces, con comportamiento tomador de precios, cuando las firmas minimizan sus costos individuales generan la producción total de una forma que minimiza el costo agregado.
- Visto de otro modo: la asignación entre firmas de la cantidad total producida en el agregado es eficiente.

Eficiencia

Definición 91 (Plan de producción eficiente)**.** Un plan de producción y que pertenece a Y es eficiente si no existe $y' \in Y$ tal que $y' \geq y$ e $y \neq y'$. En otras palabras, **un plan de producción es eficiente si no hay otro plan factible que produzca más con los mismos insumos o produzca lo mismo con menos insumos**

Observación 92. Si y es eficiente, está en la frontera de Y. Pero el contrarecíproco no es cierto.



Relación entre eficiencia y optimalidad (Optimalidad $\implies$ Eficiencia)

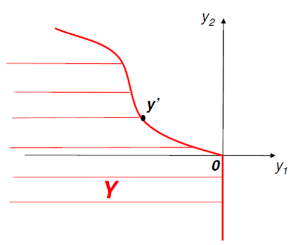
Proposición 93 (Comportamiento óptimo implica eficiencia). *Si y maximiza los beneficios de una firma con tecnología Y para algún $p \gg 0$, entonces y es eficiente.*[43]

[43] Notar lo siguiente sobre tal proposición

- Este resultado es válido aun si Y no es convexo.
- Si algún precio es nulo, un plan de producción ineficiente puede maximizar los beneficios (ver subfigura (b) anterior si $p_1 = 0$).
- Dados nuestros resultados previos, esto implica que J firmas tomadoras de un vector de precios $p \gg 0$ y actuando de forma descentralizada generan un plan de producción agregado eficiente.

Relación entre eficiencia y optimalidad (Eficiencia $\implies$ optimalidad)

¿Existe un "contrarecíproco" del resultado anterior? Claramente no en todos los casos



Sin embargo, la convexidad de Y nos provee una condición suficiente.

Proposición 94 (Eficiencia implica comportamiento óptimo si hay convexidad). *Si Y es convexo, si $y \in Y$ es eficiente entonces maximiza los beneficios con tecnología Y para algún $p \geq 0, p \neq 0$.*

Mercados y bienestar

Optimalidad paretiana y equilibrio competitivo

Descripción de la economía

La economía se describe de la siguiente forma:

- **Existen I consumidores**, cada uno de los cuales
  1. **Cuenta con preferencias $\succsim_i$ representadas por funciones de utilidad**
  $$u_i(x_i)$$
  con $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^L_+,\ i = 1, ..., I$;
  2. **Tiene una dotación inicial de bienes** $\omega_i = (\omega_{1i}, \omega_{2i}, ..., \omega_{Li})$, donde ω_{li} es la dotación inicial del bien l con la que cuenta el individuo i.
- **Existen J firmas con conjuntos de producción**
  $$Y_j \subset \mathbb{R}^L, \quad j = 1, ..., J.$$
  Sólo los planes de producción $y_j \in Y_j$ son factibles para la firma j.
- **Existen L bienes en la economía** Si cada $j \in J$ elige un plan y_j, la oferta total del bien l en la economía es la dotación inicial de cada consumidor más lo que produce cada firma
  $$\sum_{i=1}^{I} \omega_{li} + \sum_{j=1}^{J} y_{lj} = \omega_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj}$$

Una asignación refleja lo que los individuos consumen y lo que las firmas producen. Las decisiones de consumidores y firmas, sin embargo, son independientes. Están guiadas por los precios imperantes, reflejados en el vector p.

Definición 95 (Asignación factible)**.** Una asignación económica $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ es una especificación de un vector de consumo $x_i \in X_i$ para cada consumidor $i = 1, \ldots, I$ y un plan de producción $y_j \in Y_j$ para cada empresa $j = 1, \ldots, J$. La asignación $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ es factible si

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li} \leq w_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj} \quad para \ \ l = 1, ..., L$$

Así, una asignación económica es factible si la cantidad total de cada bien consumido no excede la cantidad total disponible tanto de la dotación inicial como de la producción.

Optimalidad paretiana

Definición 96 (Pareto óptimo)**.** Una asignación factible $(x_1, \ldots, x_I, y_1, \ldots, y_J)$ es óptima de Pareto (o eficiente en el sentido de Pareto) si no existe otra asignación factible $(x'_1, \ldots, x'_I, y'_1, \ldots, y'_J)$ tal que $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i)$ para todos $i = 1, \ldots, I$ y $u_i(x'_i) > u_i(x_i)$ para algún i.

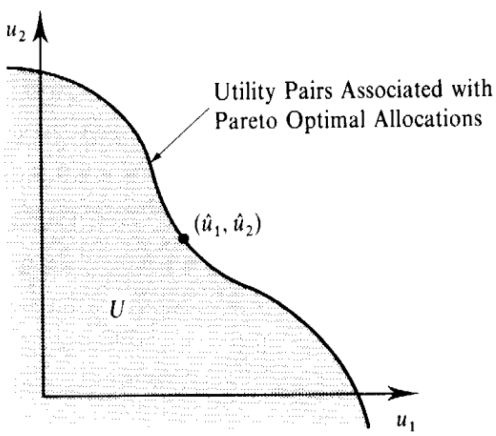
Observación 97*.* Una asignación que es óptima de Pareto utiliza los recursos iniciales y las posibilidades tecnológicas de la sociedad de manera eficiente en el sentido de que no existe una forma alternativa de organizar la producción y distribución de bienes que mejore la situación de algún consumidor sin empeorar la de otro consumidor.

Definición 98 (Conjunto de posibilidades de utilidad)**.** El conjunto de niveles de utilidad alcanzables en una economía de dos consumidores se conoce como conjunto de posibilidades de utilidad y se define como:

$$U = \{(u_1, ..., u_I) \in \mathbb{R}^I : \text{ existe una asignación factible}$$
$$(x_1, ..., x_I, y_1, \ldots, y_J) \text{ tal que } u_i \leq u_i(x_i) \text{ para todo } i\}.$$

Observación 99*.* Entonces, una asignación eficiente en el sentido de pareto se hallará en la frontera de U.

Ejemplo 100 (Conjunto de posibilidades de utilidad con $I = 2$)**.** Notar que si $I = 2$ el conjunto de posibilidades de utilidad con $I = 2$ es



Equilibrio competitivo

En una economía competitiva, **las dotaciones iniciales de la sociedad y las posibilidades tecnológicas (es decir, las empresas) son propiedad de los consumidores**. [44]

Suponemos que el consumidor i posee inicialmente ω_{li} unidades del bien l, donde $\sum_i \omega_{li} = \omega_l$. Denotamos el vector de dotaciones del consumidor i como $\omega_i = (\omega_{i,1}, \ldots, \omega_{i,L})$. Además, suponemos que el consumidor i posee una participación $\theta_{i,j} \in [0, 1]$ en la empresa j (donde $\sum_{j=1}^{J} \theta_{i,j} = 1$), lo que le otorga un derecho a una fracción $\theta_{i,j}$ de las ganancias de la empresa j.

En una economía competitiva, existe un mercado para cada uno de los L bienes, y todos los consumidores y productores actúan como tomadores de precios.[45] Denotamos el vector de precios de mercado para los bienes $1, \ldots, L$ por $p = (p_1, \ldots, p_L)$.

[44] Al ser una economía de propiedad privada los beneficios le corresponden a los consumidores

[45] La idea detrás de la suposición de tomador de precios es que si los consumidores y productores son pequeños en relación con el tamaño del mercado, considerarán que los precios del mercado no se ven afectados por sus propias acciones.

Definición 101 (Equilibrio competitivo)**.** La asignación $(x_1^*, \ldots, x_I^*, y_1^*, \ldots, y_J^*)$ y el vector de precios $p^* \in \mathbb{R}^L$ constituyen un equilibrio competitivo (o Walrasiano) si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. **Maximización del beneficio:** Para toda firma j, y_j^* resuelve

$$\underset{y_j \in Y_j}{\text{Max}} \; p^* \cdot y_j$$

2. **Maximización de la utilidad:** Para todo consumidor i, x_i^* resuelve

$$\underset{x_i \in \mathbb{R}_+^L}{\text{Max}} \quad u_i(x_i) \;\text{ s.a. }\; p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij}(p^* \cdot y_j^*)$$

3. **Vaciamiento de mercado:** Para cada bien $l = 1, ..., L$

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li}^* = \omega_l + \sum_{j=1}^{J} y_{lj}^*$$

Resultados derivados de la definición de equilibrio competitivo

Proposición 102 (Solamente importan los precios relativos). *Si $\mathbf{p}^*$ es un vector de precios de equilibrio, con una asignación $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_I^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \ldots, \mathbf{y}_J^*)$, entonces, para cualquier $\alpha > 0$, $\alpha\mathbf{p}^*$ también es un vector de precios de equilibrio, con la misma asignación.* [46]

[46] Esto se debe a que los conjuntos de presupuesto no se ven afectados por la multiplicación, y los beneficios de las firmas solamente se reescalan según α: las funciones de demanda y oferta son homogéneas de grado cero.

Proposición 103 (Normalizar con bien numerario). *Por la proposición anterior, siempre es posible normalizar los precios de forma que $p_l^* = 1$ para algún l. Dicho bien se denomina numerario.*

Lema 104 (Ley de Walras). *Para un vector de precios $\mathbf{p}$, si todas las restricciones de presupuesto de los consumidores se cumplen con igualdad, el valor total de las demandas excedentes a precios $\mathbf{p}$ es cero.*

Siendo el excedente de demanda del bien l para una asignación $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)$ como

$$\sum_{i=1}^{I} x_{li} - \sum_{i=1}^{I} \omega_{li} - \sum_{j=1}^{J} y_{lj},$$

con $l = 1, \ldots, L$

Recordemos que las restricciones de presupuesto se cumplen con igualdad si las preferencias de los consumidores son localmente no saciadas.

Corolario 105 (Vaciamiento según ley de walras). *Si $\mathbf{p} > > 0$ y si una asignación $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_I, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_J)$ es tal que*

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ki} - \sum_{i=1}^{I} \omega_{ki} - \sum_{j=1}^{J} y_{kj},$$

para todo bien $k \neq l$, entonces el mercado del bien l también se vacía: $\sum_{i=1}^{I} x_{li} - \sum_{i=1}^{I} \omega_{li} - \sum_{j=1}^{J} y_{lj}$

Análisis de equilibrio parcial

En este enfoque, estudiamos particularmente un mercado "aislado" del resto de la economía. Ignoramos efectos cruzados que puedan existir entre el mercado analizado y los demás. Esto es válido cuando ese mercado es "pequeño":

- los efectos ingreso son pequeños (porque la elasticidad ingreso de la demanda es baja, o porque en el bien estudiado se gasta una fracción muy baja del ingreso);

- los precios de los demás bienes no se verían afectados significativamente por nada que ocurra en el mercado bajo estudio (efectos cruzados muy bajos).

Nos concentramos en un caso en los que los efectos descriptos son nulos: una economía con utilidades cuasilineales.

Función de utilidad

Para este análisis de equilibrio parcial procedemos a estudiar un modelo en donde en la economía existen dos tipos mercados.

- **Mercado del bien que nos interesa.** Llamamos x_i al consumo del individuo i del bien correspondiente.
- **Mercado del resto de bienes.** Llamamos m_i al consumo de i de todos los demás bienes, a los que consideramos un bien compuesto.

Hay dos bienes: el bien l y el numerario[47]. Denotamos por x_i y m_i el consumo del bien 1 y del numerario por parte del consumidor i, respectivamente. Cada consumidor $i = 1, \ldots, I$ tiene una función de utilidad que toma la forma quasilineal

[47] Dado que solamente importan los precios relativos, utilizamos al bien compuesto como numerario (su precio es 1).

$$u_i(x_i, m_i) = m_i + \phi_i(x_i)$$

donde $\phi_i(x_i)$ es una función que representa la utilidad derivada del consumo del bien l y m_i representa el consumo del numerario. Con $\phi_i(x_i)$ acotada, $\phi_i'(x_i) > 0$, $\phi_i''(x_i) < 0$ para $x_i \geq 0$, y $\phi_i(0) = 0$ para todo i.[48]

[48] Recordemos que (i) en este caso los efectos ingreso son nulos, y (ii) el conjunto de consumo permite que m_i tome valores positivos o negativos.

Función de costos

El bien que nos interesa es producido por J firmas, $j = 1, \ldots, J$, empleando al numerario como insumo. La función de costos,

$$C_j(q_j) = c_j(1, q_j),$$

refleja la cantidad de numerario necesaria para que la firma j produzca q_j unidades del bien. Suponemos que $C(\cdot)$ es dos veces diferenciable, con $C_j' > 0$, $C_j'' \geq 0$.

Dejando que z_j denote el uso del bien m por parte de la firma j y su conjunto de producción es entonces,

$$Y_j = \{(-z_j, q_j) \mid q_j \geq 0 \text{ y } C_j(q_j) \leq z_j\}$$

Riqueza del consumidor

Los individuos solamente tienen dotaciones iniciales del numerario, $\omega_{mi} > 0$, $i = 1, \ldots, I$, y son los dueños de las firmas. Entonces, la riqueza del consumidor i es

$$w_i = \omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \pi_j,$$

donde π_j es el beneficio de la firma j.

Equilibrio competitivo

Especifiquemos nuestra definición general de equilibrio competitivo para una economía de este tipo. Un equilibrio competitivo está dado por (i) un precio p^* , y una asignación definida por (ii) una cantidad q_j^* para cada firma j ($j = 1, ..., J$), y (iii) una canasta cada individuo i, tales que

1. Para cada consumidor i, (m_i^*, x_i^*) resuelve

$$\max_{(m_i,x_i)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} m_i + \phi_i(x_i)$$

   sujeto a

$$m_i + p^* x_i \leq \omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \left(p^* q_j^* - C_j(q_j^*) \right)$$

2. Para cada firma j, q_j^* resuelve

$$\max_{q_j\in\mathbb{R}_+} p^* q_j - C_j(q_j)$$

3. Los mercados se vacían

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^* \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{I} m_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j^*)$$

Concretizando el problema de equilibrio

Seamos más concretos todavía. En el problema de maximización de utilidad del consumidor i, dado que su utilidad es creciente en ambos bienes, la restricción presupuestaria se cumple con igualdad en la solución. Entonces, su problema es

$$\max_{x_i\in\mathbb{R}_+} \omega_{mi} + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \left(p^* q_j^* - C_j(q_j^*) \right) - p^* x_i + \phi_i(x_i)$$

con CPO (suficiente por $\phi_i''(\cdot) < 0$)

$$\phi_i'(x_i^*) - p^* \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } x_i^* > 0)$$

En la maximización de beneficios de la firma j, la CPO (suficiente también) es

$$p^* - C_j'(q_j^*) \leq 0 \quad (= 0 \text{ si } q_j^* > 0)$$

Observación 106. Finalmente, por la Ley de Walras, podemos limitarnos a exigir que se vacíe uno solo de los mercados: el del bien que nos interesa. Podemos además concentrarnos en el bien de interés

- Si conocemos x_i^* y p^* , sabemos que el consumidor i asignará el resto de su riqueza al numerario.
- Si conocemos q_j^*, sabemos que la firma j utilizará unidades del numerario como insumo.

Entonces, un equilibrio competitivo estará dado por un precio p^* y una asignación $(x_1^*, \ldots, x_I^*; q_1^*, \ldots q_J^*)$ tales que

1. $\phi_i'(x_i^*) - p^* \leq 0 \quad (= 0 \; si \; x_i^* \; > 0) \; i = 1, ..., I$
2. $p^* - C_j'(q_j^*) \leq 0 \quad (= 0 \; si \; q_j^* > 0) \; j = 1, ..., J$
3. $\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{j=1}^{J} q_j^*$

Observación 107 (Nota importante 1). Las condiciones 1, 2 y 3 arriba no dependen en absoluto de la distribución de dotaciones del numerario, ni de las participaciones de los agentes en la propiedad de las firmas. [49]

[49] Esto se debe, por supuesto, a las utilidades cuasilineales (no hay efectos ingreso).

Observación 108 (Nota importante 2). En un equilibrio interior, el precio p^* es igual al costo marginal $C_j(q_j^*)$ de todas las firmas j con $q_j^* > 0$, y también es igual a la utilidad marginal $\phi'(x_i^*)$ de todos los consumidores i son $x_i^* > 0$.

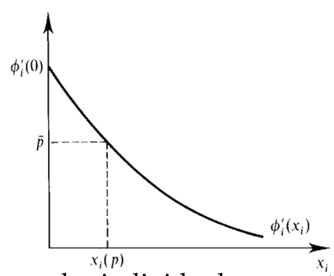
Verificaciones de las condiciones para el equilibrio

Podemos verificar formal y gráficamente las condiciones para que exista un equilibrio competitivo como intersección de oferta y demanda.

Demanda de mercado

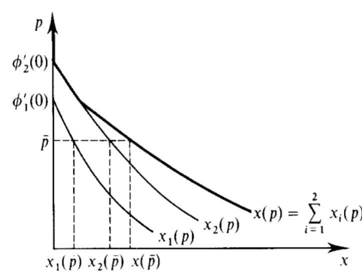
Dado un precio p, si un individuo i elige $x_i > 0$, entonces $\phi'(x_i^*) = p$. Con $\phi(\cdot)$ acotada y $\phi'' < 0$, la igualdad se cumple en un único x_i si $p \in [0, \phi'(0)]$. Notar que ϕ_i' puede invertirse, y surge la función de demanda de i,

$$x_i(p) = \left(\phi_i'\right)^{-1}(p)$$



Si $p > \phi'(0)$ entonces $x_i(p) = 0$. Esta demanda individual es continua. La demanda de mercado surge de sumar horizontalmente las demandas individuales

$$x(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p)$$

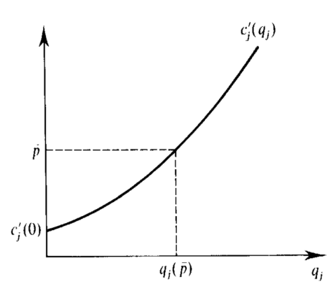


Oferta de mercado

La firma j maximiza beneficios a precios p o sea $C_j'(q_j) = p$. Si $C_j'' > 0$, el q_j que resuelve la igualdad es único. Notar que C_j' puede invertirse para obtener la oferta de la firma j,

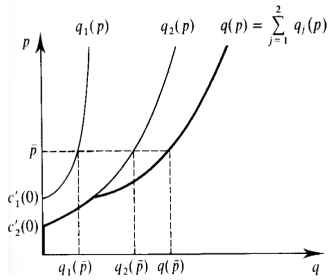
$$q_j(p) = \left(C_j'\right)^{-1}(p)$$

(si $p < C_j'(0)$ entonces $q_j = 0$), que es continua.



La oferta de mercado surge de sumar horizontalmente las ofertas individuales:

$$q(p) = \sum_{j=1}^{J} q_j(p)$$



Observación 109. Si $C_j'' = 0$ (rendimiento constantes) la firma j tiene una correspondencia de oferta. Dado $C_j'(q) = c$ para todo q, si $p > c$ la firma "ofrece infinito", si $p < c$ ofrece 0, y si $p = c$ todas las cantidades son óptimas.

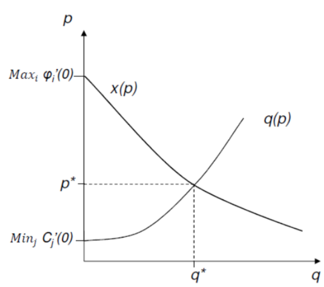
La función $q(p)$, además, puede interpretarse como el costo marginal de la industria: refleja cuánto cuesta producir una unidad adicional para las firmas consideradas colectivamente. Si definimos

$$C(q) = \{\min_{q_1,\ldots,q_j} \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j) \text{ suj a } \sum_{j=1}^{J} q_j = q\}$$

entonces $C'(q)$ es la inversa de $q(p)$. ($q(p)$ es la suma horizontal de los costos marginales)

Equilibrio de mercado

Surge entonces el equilibrio de mercado. En tanto se cumpla que $max_i \phi_i'(0) > min_j C_j'$ dada la continuidad de $x(p)$ y $q(p)$, tendremos un precio de equilibrio, que es único dado que $x(p)$ es estrictamente decreciente.



Teoremas del bienestar en equilibrio parcial

Pasemos ahora a la relación entre equilibrio competitivo y optimalidad paretiana. Primero, especifiquemos las propiedades de las asignaciones eficientes a la Pareto en nuestra economía cuasilineal.

Fijemos arbitrariamente un consumo del bien de interés x_i'; para cada consumidor, y un nivel de producción q_j'; para cada firma. Entonces, la **cantidad total del numerario remanente** es

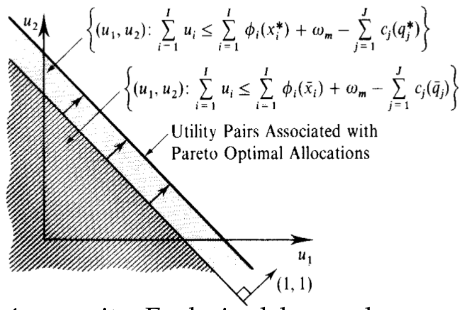
$$\sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j')$$

Dado que el numerario permite transferir utilidad libremente, el **conjunto de utilidades alcanzables** es

$$\{(u_1, u_2, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I \mid \sum_{i=1}^{I} u_i \leq \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i') + \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j')\}$$

Notar que en este caso está todo medido en unidades del bien m por eso es que podemos "comparar" utilidad con cantidades.

La frontera de este conjunto es lineal. Gráficamente con $I = 2$



Cualquier cambio en los x_i, $q_j (i = 1, ..., I, j = 1, ..., J)$ arbitrarios de los que partimos provoca un desplazamiento paralelo de esa frontera.

Cualquier asignación eficiente genera la máxima expansión la frontera que la economía permita. Es decir, debe resolver

$$\max_{(x_i)_{i=1}^{I}, (x_j)_{i=1}^{J}} \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j)$$

$$suj.a \qquad \sum_{i=1}^{I} x_i - \sum_{j=1}^{J} q_j \leq 0.$$

Observación 110. $\sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j)$ es el excedente total (o marshalliano): utilidad agregada generada por el consumo del bien que nos interesa, menos su costo total de producción. Es lo que maximizamos.

El lagrangiano correspondiente a este problema es

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) + \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j) + \mu \left[\sum_{j=1}^{J} q_j - \sum_{i=1}^{I} x_i\right]$$

Las CPO de este problema (con preferencias convexas y sin rendimientos crecientes, son suficientes) son:

$$\begin{aligned}
\phi_i'(x_i^*) - \mu &\leq 0 \quad (= 0 \text{ si } x_i^* > 0),\ i = 1, ..., l \\
-C_j'(q_j^*) + \mu &\leq 0 \quad (= 0 \ \sin q_j^* > 0),\ j = 1, ..., J \\
\sum_{i=1}^{I} x_i^* - \sum_{j=1}^{J} q_j^* &\leq 0 \quad (= 0 \text{ si } \mu > 0)
\end{aligned}$$

Verificamos que, con $\mu = p^*$, todas estas condiciones se satisfacen en un equilibrio competitivo. Entonces, tenemos una versión para nuestra economía del Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar:

Definición 111 (Primer Teorema Fundamental de la EconomÌa del Bienestar)**.** Si el precio p^* y la asignación $\left(x_1^*, \ldots x_I^*; q_1^*, \ldots, q_J^*\right)$ forman un equilibrio competitivo, entonces la asignación es eficiente en el sentido de Pareto.

Es más, como $p^* = \mu$ el multiplicador de Lagrange, entonces p^* es el valor marginal social del bien cuyo mercado estamos examinando.

¿Podemos hacer alguna afirmación en sentido opuesto a lo que enuncia el Primer Teorema? En este contexto especial, sí. Como vimos, la asignación elegida determina la utilidad sumada a generar: siempre puede reasignarse utilidad a través del numerario. Entonces, si un planificador social quisiera generar un resultado específico eficiente en el sentido paretiano solamente tiene que asignar el numerario adecuadamente.La asignación del bien de interés no se verá afectada, pero sí las utilidades finales, que coincidirán con las deseadas por el planificador. Tenemos entonces una versión del Segundo Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar:

Definición 112 (Segundo Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar:)**.** Tomemos una economía cuasilineal con dos bienes y dotaciones del numerario dadas por $(\omega_{m1}, \ldots, \omega_{mI})$. Para cualquier vector de utilidades $(u_1^*, \ldots, u_I^*)$ óptimo de Pareto, existen transferencias del numerario $(t_1, ..., t_I)$ que satisfacen $\sum_{i=1}^{I} t_i = 0$,, tales que en un equilibrio competitivo de la economía con dotaciones del numerario dadas por $(\omega_{m1} + t_1, \ldots, \omega_{mI} + t_I)$ las utilidades resultantes son $(u_1^*, \ldots, u_I^*)$.

Entonces, un planificador social que desee una asignación eficiente específica solo tiene que redistribuir numerario y dejar funcionar "libremente" a la economía.

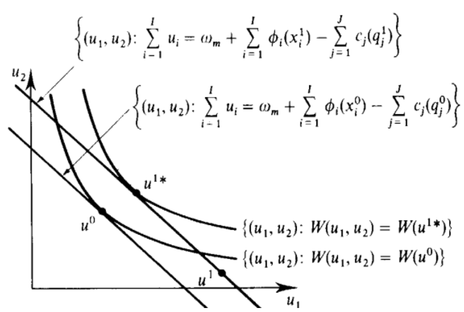
Evaluaciones de bienestar en equilibrio parcial

Función de bienestar social

En términos generales, supongamos que existe un planificador social (o un mecanismo de decisión colectiva) que valora los resultados según una **función de bienestar social** $W(u_1, u_2, ..., u_I)$ que **asigna un nivel de bienestar a cada vector de niveles de utilidad de los individuos**, $(u_1, u_2, \ldots, u_I)$.

Recordemos que, dada una asignación $\left(x_1', \ldots, x_I'; q_1', \ldots, q_J'\right)$, las **utilidades alcanzables** (redistribuyendo numerario) son

$$\{(u_1, u_2, \ldots, u_I) \in \mathbb{R}^I \mid \sum_{i=1}^{I} u_i \leq \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i') + \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j')\}$$



Razonablemente, pensemos que $W(\cdot)$ es no decreciente en para todo i. Entonces, **el planificador deseará expandir este conjunto, con frontera lineal, lo máximo posible**.

Expansiones en la frontera del conjunto se corresponden con aumentos de $\sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i') + \sum_{i=1}^{I} \omega_{mi} - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j')$, que tiene dos componentes

- **Stock agregado del numerario** $\sum_{i=1}^{I} \omega_{mi}$ (que está fijo)
- **Excedente total marshalliano** $S(x_1, ..., x_I; q_1, ..., q_J) = \sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) - \sum_{j=1}^{J} C_j(q_j)$.

Entonces, **cambios en el bienestar se corresponden con cambios en el excedente total** (corresponder luego hacer las transferencias de numerario).

Suposiciones Clave

En muchas circunstancias de interés, el excedente marshalliano tiene una formulación conveniente e históricamente importante en términos de las áreas que se encuentran verticalmente entre las funciones de demanda y oferta agregadas para el bien l. Para expandir este punto, comenzamos haciendo dos suposiciones clave.

Denotando por $x = \sum_i x_i$ el consumo agregado del bien l, **asumimos, primero, que para cualquier x_i, las cantidades individuales de consumo del bien l se distribuyen de manera óptima entre los consumidores.** Es decir, recordando nuestra discusión de la función de demanda inversa $P(\cdot)$ en la tenemos que $\phi_i'(x_i) = P(x)$ para todo i.[50]

De manera similar, denotando por $q = \sum_j q_j$ la producción agregada del bien l, **asumimos que la producción de cualquier cantidad total q se distribuye de manera óptima entre las firmas.** Es decir, recordando nuestra discusión de la curva de costo marginal de la industria $C'(\cdot)$, tenemos que $c_j'(q_j) = C'(q)$ para todo j. [51]

[50] Esta condición se satisface si, por ejemplo, los consumidores actúan como tomadores de precios y todos los consumidores enfrentan el mismo precio.

[51] Esto se satisface si, por ejemplo, las firmas actúan como tomadores de precios y todas las firmas enfrentan el mismo precio. Observa que no requerimos que el precio enfrentado por los consumidores y las firmas sea el mismo.

Cambio Diferencial en el Excedente de Marshall

Consideremos ahora un cambio diferencial $(dx_1, \ldots, dx_i, dq_1, \ldots, dq_j)$ en las cantidades del bien l consumido y producido satisfaciendo $\sum_i dx_i = \sum_j dq_j$, y denotemos $dx = \sum_i dx_i$. El cambio en el excedente de Marshall agregado es entonces

$$dS = \sum_{i=1}^{I} \phi_i'(x_i) dx_i - \sum_{j=1}^{J} c_j'(q_j) dq_j.$$

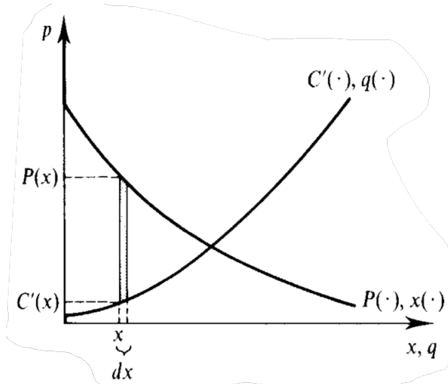
Dado que $\phi_i'(x_i) = P(x)$ para todo i, y $c_j'(q_j) = C'(q)$ para todo j, obtenemos

$$dS = P(x) \sum_{i=1}^{I} dx_i - C'(q) \sum_{j=1}^{J} dq_j.$$

Finalmente, dado que $x = q$ (por factibilidad de mercado) y $\sum_j dq_j = \sum_i dx_i = dx$, esto se convierte en

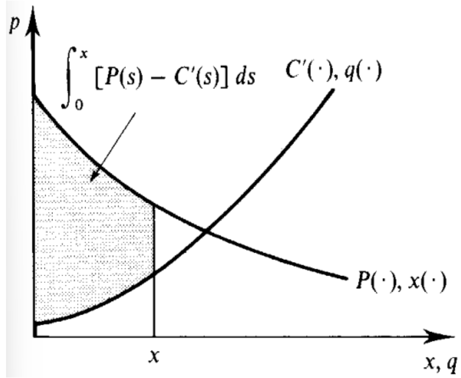
$$dS = [P(x) - C'(x)] dx.$$

Este cambio diferencial en el excedente de Marshall se representa en la Figura. La Expresión anterior nos dice que comenzando en el nivel de consumo agregado x el efecto marginal en el bienestar social de un incremento en la cantidad agregada consumida, dx, es igual al beneficio marginal de los consumidores de este consumo adicional, $P(x)dx$, menos el costo marginal de esta producción adicional, $C'(x)dx$ (ambos en términos del numerario).



Valor Total del Excedente de Marshall

También podemos integrar la última para expresar el valor total del excedente de Marshall agregado en el nivel de consumo agregado x, denotado $S(x)$, en términos de una integral de la diferencia entre la función de demanda inversa y la función de costo marginal de la industria,



$$S(x) = S_0 + \int_0^x [P(s) - C'(s)]ds,$$

donde S_0 es una constante de integración (que puede, por ejemplo reflejar costos fijos de producción).

Graficamente, se obtiene al excedente total como el área entre oferta y demanda de mercado hasta la cantidad x (más una constante). Nótese, que el valor del excedente marshalliano total se maximiza en el nivel de consumo agregado x^* tal que $P(x^*) = C'(x^*)$, que es exactamente el nivel de consumo agregado en equilibrio competitivo. Esto concuerda con, el primer teorema fundamental del bienestar, que establece que la asignación competitiva es óptima de Pareto.

Excedente de los Consumidores

El excedente bruto de los consumidores es

$$\sum_{i=1}^{I} \phi_i(x_i) = \int_0^x P(s)ds,$$

y su excedente neto, entonces, es

$$EC(x) = \int_0^x [P(s) - P(x)]ds.$$

Excedente de los Productores

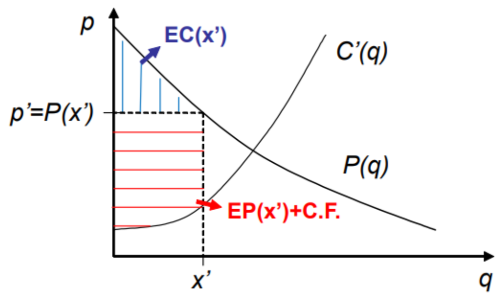
El excedente de los productores es, claro, la suma de sus beneficios

$$EP(x) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j = \int_0^x [P(x) - C'(s)]ds - [\text{costos fijos}]$$

Excedente Total

Claramente,

$$S(x) = EC(x) + EP(x).$$



Equilibrio competitivo con libre entrada

En esta sección, **consideramos un escenario con un número infinito de empresas potenciales, cada una con acceso a la tecnología de producción más eficiente**. Las empresas pueden entrar o salir del mercado en respuesta a oportunidades de beneficio, lo que se llama libre entrada.[52]

[52] Esto es útil para analizar resultados a largo plazo en un mercado.

Equilibrio Competitivo a Largo Plazo

Supongamos que cada empresa potencial puede producir el bien l con una función de costo $c(q)$, donde q es la producción individual. Suponemos que $c(0) = 0$, es decir, una empresa puede no producir y obtener cero beneficios. La función de demanda agregada es $x(\cdot)$ y la demanda inversa es $P(\cdot)$.

En equilibrio a largo plazo, queremos determinar los niveles de precio y producción, y el número de empresas activas. Suponemos que todas las empresas activas producen el mismo nivel, describiendo el equilibrio con (p, q, J): precio p, producción q y número de empresas J. La producción total es $Q = Jq$.

La libre entrada y salida implica que una empresa entrará si puede obtener beneficios positivos y saldrá si obtiene beneficios negativos. En equilibrio, las empresas activas deben obtener exactamente cero beneficios; de lo contrario, no habría empresas activas (si los beneficios son negativos) o entrarían infinitas empresas (si los beneficios son positivos).

Definición 113 (Equilibrio competitivo de largo plazo)**.** Dada una función de demanda agregada $x(p)$ y una función de costos $c(q)$ para cada empresa potencialmente activa con $c(0) = 0$, un triple (p^*, q^*, J^*) es un equilibrio competitivo a largo plazo si se cumplen las siguientes condiciones:

1. q^* resuelve $\text{Max}_{q>0}\{p^*q - c(q)\}$ (Maximización de beneficios)
2. $x(p^*) = J^*q^*$ (Demanda = oferta)
3. $p^*q^* - c(q^*) = 0$ (Condición de libre entrada).

En particular, si $q(\cdot)$ es la correspondencia de oferta de una empresa individual con una función de costos $c(\cdot)$ y $\pi(\cdot)$ es su función de beneficios, podemos definir una correspondencia de **oferta agregada a largo plazo** mediante

El precio de equilibrio a largo plazo puede considerarse como aquel que iguala la demanda con la oferta a largo plazo, donde la oferta a largo plazo tiene en cuenta las decisiones de entrada y salida de las empresas.

$$Q(p) = \begin{cases} \infty & si\ \pi(p) > 0 \\ \{Q \geq 0 | Q = Jq \text{ para } J \geq 0,\ q \in q(p)\} & si\ \pi(p) = 0 \end{cases}$$

Entonces, p^* **es un precio de equilibrio si (y sólo si):** $x(p^*) \in Q(p^*)$ lo que solamente puede ocurrir si $\pi(p^*) = 0$.

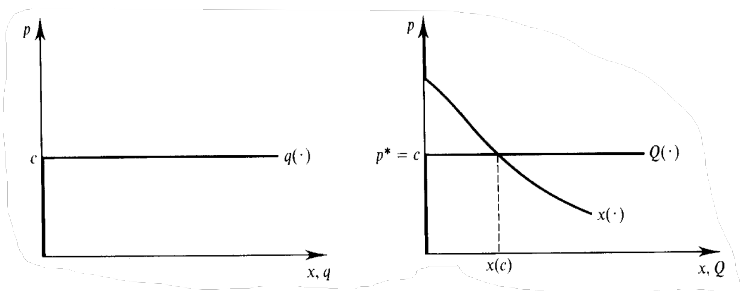
Vamos a ver ahora que J^* puede o no estar determinado...

Rendimientos constantes a escala

Consideremos el caso en el que la función de costos $c(q) = cq$ presenta rendimientos constantes a escala para algún $c > 0$, asumiendo $x(c) > 0$. La condición (i) de equilibrio implica $p^* \leq c$. Dado que $x(c) > 0$, la condición (ii) requiere que $q^* > 0$. La condición (iii) nos da $(p^* - c)q^* = 0$. Por lo tanto, $p^* = c$ y el consumo agregado es $x(c)$.

Sin embargo, J^* y q^* son indeterminados: cualquier J^* y q^* tal que $J^* q^* = x(c)$ cumple con las condiciones (i) y (ii). La correspondencia de oferta agregada a largo plazo es:

$$Q(p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p > c \\ [0, \infty) & \text{si } p = c \\ 0 & \text{si } p < c. \end{cases}$$

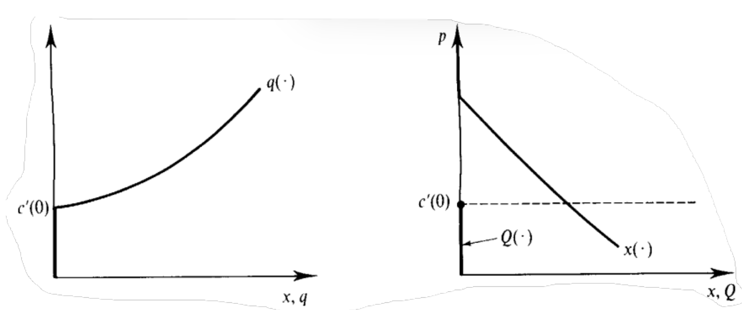


Rendimientos decrecientes a escala

Consideremos el caso en el que $c(\cdot)$ es creciente y estrictamente convexa, lo que implica rendimientos decrecientes a escala. Suponemos $x(c'(0)) > 0$. Con esta función de costos, no puede existir un equilibrio competitivo a largo plazo.

Si $p > c'(0)$, entonces $\pi(p) > 0$, lo que implica una oferta a largo plazo infinita. Por otro lado, si $p \leq c'(0)$, la oferta a largo plazo es cero mientras $x(p) > 0$.

$$Q(p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p > c'(0) \\ 0 & \text{si } p < c'(0). \end{cases}$$



Existencia de equilibrio a largo plazo

Proposición 114 (Existencia equilibrio a largo plazo)**.** *Para garantizar la existencia de un equilibrio con un número determinado de empresas, **la función de costos a largo plazo debe tener una escala eficiente estrictamente positiva**, lo que significa que existe un nivel de producción q donde los costos promedio de una empresa se minimizan*

Supongamos que la función de costos a largo plazo $c(\cdot)$ tiene una escala eficiente única $g > 0$, y el nivel de costo promedio minimizado es $\bar{c} = c(\bar{q})/\bar{q}$. Además, supongamos $x(\cdot) > 0$.

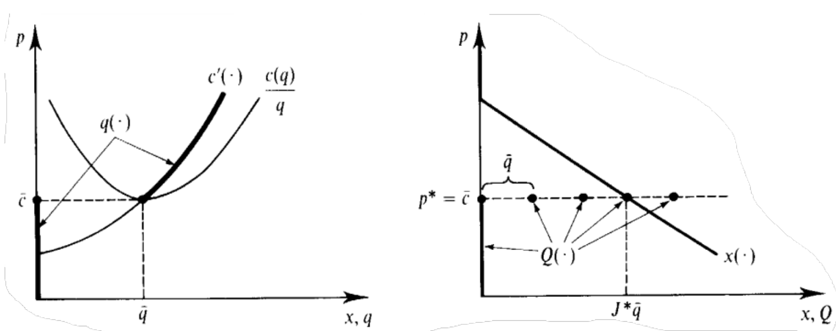
Si en un equilibrio a largo plazo (p^*, q^*, J^*) tenemos $p^* > \bar{c}$, entonces $p^*q^* > cq^*$, lo que implica $\pi(p^*) > 0$. Por lo tanto, en cualquier equilibrio a largo plazo, $p^* \leq \bar{c}$. Por el contrario, si $p^* < \bar{c}$, entonces $x(p^*) > 0$, pero dado que $p^*q - c(q) = p^*q - (c(q)/q)q < (p^* - \bar{c})q^* < 0$ para todos $q^* > 0$, una empresa obtendría beneficios estrictamente negativos en cualquier nivel de producción positivo. Por lo tanto, $p^* < \bar{c}$ no puede ser un precio de equilibrio a largo plazo.

Por lo tanto, en cualquier equilibrio a largo plazo, $p^* = \bar{c}$. Además, si $p^* = \bar{c}$, entonces la oferta de cada empresa activa debe ser $q^* = q$ (el único nivel de producción estrictamente positivo donde la empresa obtiene beneficios no negativos), y por lo tanto el número de empresas activas en equilibrio es $J^* = x(\bar{c})/\bar{q}$. Por lo tanto, el número de empresas activas está bien determinado en el equilibrio a largo plazo.

La correspondencia de oferta agregada a largo plazo es:

$$Q(p) = \begin{cases} \infty & \text{si } p > \bar{c} \\ \{Q > 0 : Q = Jq \text{ para algún entero } J > 0\} & \text{si } p = \bar{c} \\ 0 & \text{si } p < \bar{c}. \end{cases}$$

Tenga en cuenta que el precio de equilibrio y la producción agregada son exactamente los mismos que si las empresas tuvieran tecnología con rendimientos constantes a escala con un costo unitario $\bar{c}$.



Monopolio

Analizamos el comportamiento de un monopolista que maximiza sus beneficios. La demanda del producto al precio p está dada por $x(p)$, continua y estrictamente decreciente, con $x(p) = 0$ para p suficientemente alto. El monopolista incurre en un costo $c(q)$ al producir q.

Problema de Decisión del Monopolista

El monopolista elige el precio p para maximizar sus beneficios:

$$\max_{p} \; px(p) - c(x(p)).$$

O alternativamente, elige la cantidad q:

$$\max_{q \geq 0} \; p(q)q - c(q).$$

Nos enfocamos en la segunda formulación. Suponemos que $p(q)$ y $c(q)$ son continuas y dos veces diferenciables, $p(0) > c'(0)$, y que existe un nivel de producción q^0 tal que $p(q^0) = c'(q^0)$, representando el nivel óptimo social.

Condición de Primer Orden

La cantidad óptima del monopolista, q^m, satisface la condición de primer orden:[53]

$$p'(q^m)q^m + p(q^m) = c'(q^m).$$

Con $p'(q) < 0$ para todo $q \geq 0$, esto implica $p(q^m) > c'(q^m)$, indicando que **el precio de monopolio excede el costo marginal**. Por lo tanto, $q^m < q^0$.[54]

El monopolista tiene en cuenta, al aumentar q, la pérdida de ingreso que la consecuente caída del precio (por $p' < 0$) le genera en las unidades inframarginales. **Iguala IMg con CMg.**

Condición de Segundo Orden

La condición de segundo orden

$$p''(q^m)q^m + 2p'(p^m) < c''(q^m)$$

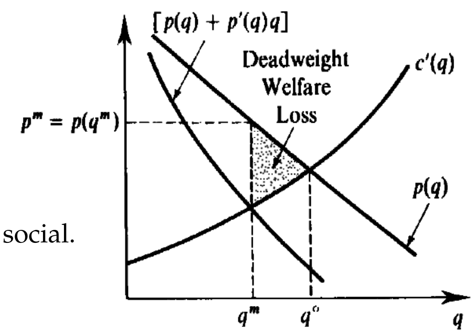
se cumple si la demanda es cóncava (o "no muy convexa") lo que implica que el ingreso marginal sea decreciente, y los rendimientos son no crecientes. **Claramente, la solución de monopolio no es eficiente.**

Pérdida de Eficiencia del Monopolio

La pérdida de bienestar, o pérdida irrecuperable (DWL), se mide por el cambio en el excedente agregado Marshalliano:

$$\int_{q^m}^{q^0} [p(s) - c'(s)]ds > 0,$$

donde q^0 es el nivel de producción óptimo social.



[53] Notar que la condición de primer orden original es

$$p'(q^m)q^m + p(q^m) \leq c'(q^m).$$

con igualdad si $q^m > 0$. Como dado que $P(0) > C'(0)$ tendremos que $q^m > 0$ y la CPO se cumple con igualdad.

[54] Notar que esto se cumple pues

$$c'(q) = \frac{d}{dq}(p(q)q) = p'(q)q + p(q) < p(q)$$

La magnitud de la pérdida depende de la demanda. Más específicamente, de su elasticidad (con $p = p(q)$)

$$\eta(q) = -\frac{dx(p)}{dp}\frac{p}{x(p)}.$$

Tomando $p = p^m = p(q^m)$, y partiendo de la CPO, se obtiene

$$p(q^m)\left(1 - \frac{1}{\eta(q^m)}\right) = c'(q^m).$$

Se obtiene entonces una conclusión clásica: el monopolista nunca se ubica en un tramo inelástico ($\eta(q) < 1$) de la demanda (el IMg sería negativo).

Además, se observa que el mark-up (la diferencia entre el precio y el CMg como porcentaje del precio) en el óptimo del monopolista tiene una relación inversa con la elasticidad.

$$\frac{p(q^m) - c'(q^m)}{p(q^m)} = \frac{1}{\eta(q^m)}.$$

Bienes públicos

Definición de Bienes Públicos

En esta sección, estudiamos los bienes que, en contraste con los considerados hasta ahora, tienen una característica de "publico" en su consumo. Estos bienes son conocidos como bienes públicos.

Definición 115 (Bien público)**.** Un bien público es un bien para el cual el uso de una unidad del bien por un agente no excluye su uso por otros agentes.

Dicho de otra manera, los bienes públicos poseen las característica de

- **Consumo no rival:** El consumo por un individuo no afecta la cantidad disponible para otros individuos.
- **Imposibilidad de exclusión:** No se puede excluir a un individuo de los beneficios del bien.

Condiciones para la Optimalidad de Pareto

Consideremos un escenario con I consumidores y un bien público, además de L bienes de comercio habituales, privados. Asumimos que la cantidad del bien público no afecta los precios de los L bienes comerciados y que **la función de utilidad de cada consumidor es cuasilineal respecto al mismo numerario, un bien comerciado**.

Podemos, por lo tanto, definir para cada consumidor i una función de utilidad derivada sobre el nivel del bien público. Sea x la cantidad del bien público, denotamos la **utilidad del consumidor**[55] i del bien público como $u_i(x)$.

$$u_i(x, m_i) = m_i + \phi_i(x)$$

donde x es el nivel del bien público (el mismo para todos).

[55] Asumimos que esta función es dos veces diferenciable, con $u_i'(x) < 0$ para todo $x > 0$. Nótese que, precisamente porque estamos tratando con un bien público, el argumento x no tiene un subíndice i.

El **costo de suministrar** q unidades del bien público es $c(q)$. [56] En este modelo cuasilineal, **cualquier asignación de Pareto óptima debe maximizar el excedente agregado** y, por lo tanto, debe implicar un nivel del bien público que resuelva:

$$\max_{q \geq 0} \sum_{i=1}^{I} \phi_i(q) - c(q).$$

La **condición de primer orden necesaria y suficiente** para la cantidad óptima q^0 es:

$$\sum_{i=1}^{I} \phi_i'(q^0) \leq c'(q^0),$$

con igualdad si $q^0 > 0$. En una solución interior, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{I} u_i'(q^0) = c'(q^0),$$

de modo que, **en el nivel óptimo del bien público, la suma de los beneficios marginales de los consumidores por el bien público se iguala a su costo marginal**.

[56] Asumimos que $c(\cdot)$ es dos veces diferenciable, con $c''(q) > 0$ para todo $q > 0$.

Para describir el caso de un bien público deseable cuya producción es costosa, tomamos $u_i'(\cdot) > 0$ para todo i y $c'(\cdot) > 0$. Excepto donde se indique lo contrario, sin embargo, el análisis se aplica igualmente bien al caso de un mal público cuya reducción es costosa, donde $u_i'(\cdot) < 0$ para todo i y $c'(\cdot) < 0$.

Ineficiencia de la Provisión Privada de Bienes Públicos

Consideremos la **circunstancia en la cual el bien público es provisto mediante compras privadas por los consumidores**. Imaginamos que **existe un mercado para el bien público y que cada consumidor** i **elige cuánto del bien público comprar**, denotado por $x_i \geq 0$, tomando como dado su precio de mercado p. La cantidad total del bien público comprada por los consumidores es entonces $x = \sum_i x_i$.

Formalmente, tratamos el lado de la oferta como consistente en una única empresa maximización de beneficios con una función de costo $c(\cdot)$ que elige su nivel de producción tomando el precio de mercado como dado.[57]

[57] Sin embargo, por el análisis de la firma, podemos realmente pensar en el comportamiento de la oferta de esta empresa como representando la oferta industrial de J empresas tomadoras de precios cuya función de costo agregado es $c(\cdot)$.

En un equilibrio competitivo que involucra el precio p^*, la compra del bien público x_i^* de **cada consumidor** i **debe maximizar su utilidad** y, resuelve:

$$\max_{x_i \geq 0} \phi_i\left(x_i + \sum_{k \neq i} x_k^*\right) - p^* x_i.$$

Al determinar sus compras óptimas, el consumidor i toma como dado la cantidad del bien privado que está siendo comprada por cada otro consumidor.

Las compras x_i^* del consumidor i deben, por lo tanto, satisfacer la condición de primer orden necesaria y suficiente:

$$\phi_i'(x_i^* + \sum_{k \neq i} x_k^*) \leq p^*, \quad \text{con igualdad si } x_i^* > 0.$$

Sea $x^* = \sum_i x_i^*$ el nivel de equilibrio del bien público, para cada consumidor i debemos tener:

$$\phi_i'(x^*) \leq p^*, \quad \text{con igualdad si } x_i^* > 0.$$

Por otro lado, **la oferta** q^* **de la empresa debe resolver** $\max_{q \geq 0}(p^* q - c(q))$ y, por lo tanto, debe satisfacer la condición de primer orden necesaria y suficiente estándar:

$$p^* \leq c'(q^*), \quad \text{con igualdad si } q^* > 0.$$

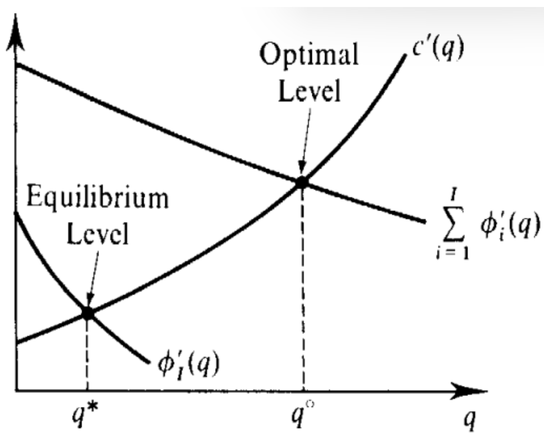
Si sumamos las CPO de los consumidores que compran el bien,[58] o sea $x_i^* > 0$ tenemos

$$\sum_{\{i:x_i^*>0\}} [\phi_i'(x^*) - p^*] > 0. \to \sum_{\{i:x_i^*>0\}} \phi_i'(x^*) - c'(x^*) > 0.$$

Recordando que $\phi_i'(\cdot) > 0$ y $c'(\cdot) > 0$, esto implica que siempre que $I > 1$ y $q^* > 0$ tenemos:[59]

$$\sum_i^I \phi_i'(q^*) > c'(q^*).$$

Gráficamente,



Comparando (la condición de equilibrio de bienes públicos) con (la condición de equilibrio de bienes públicos provistos por los privados), vemos que siempre que $q^* > 0$ y $I > 1$, el nivel del bien público provisto es demasiado bajo; es decir, $q^* < q^0$.

Observación 116 (Problema del free rider). Aquí, la compra del bien público por parte de cada consumidor proporciona un beneficio directo no solo para ella misma, sino también para todos los demás consumidores.

La incapacidad de cada consumidor para considerar los beneficios para los demás de su provisión del bien público se conoce a menudo como el problema del free rider (cada consumidor tiene un incentivo para disfrutar de los beneficios del bien público proporcionado por otros mientras lo provee de manera insuficiente ella misma).

De hecho, **en equilibrio solamente puede contribuir a la provisión del bien público un único agente.**[60] Si un agente i' satisface $\phi'_{i'}(x) > \phi_i'(x)$ para todo x, para todo $i \neq i'$, entonces en equilibrio x_i^*, (si hay provisión positiva) satisface

$$\phi_{i'}(x_{i'}^*) = p^* = c'(x_{i'}^*)$$

con $q^* = x^* = x_{i'}^*$ dado que $x_i^* = 0$ para todo $i \neq i'$.

Observación 117 (Soluciones al problema de free rider). Algunas posibles salidas

1. Provisión pública.

2. Impuestos o subsidios.

3. Diseñar (e instrumentar) mercados "personalizados" para el bien público (economías de Lindahl).

[58] Esto sucede pues en un equilibrio competitivo, $q^* = x^*$. En realidad esto sucede para los i que compran pues si lo sumamos para todos sabemos que en el caso de igualdades debe dar

$$\sum_i \phi_i'(x^*) - c'(x^*) = 0.$$

[59] a menos que $I = 1$

[60] Este único agente i' es el que aparece en el gráfico con el label I pues Mas collel lo piensa como el agente final que su utilidad marginal es mayor.

Equilibrio de Lindahl

Aunque la provisión privada del tipo estudiado anteriormente resulta en un nivel ineficiente del bien público, en principio existe una institución de mercado que puede lograr la optimización.

Supongamos que, para cada consumidor i, **tenemos un mercado para el bien público** "como experimentado por el consumidor i".[61] Denotamos el precio de este bien personalizado por p_i. Nótese que p_i puede diferir entre los consumidores. Supongamos también que, dado el precio de equilibrio p_i^{**}, cada consumidor i se ve a sí misma decidiendo sobre la cantidad total del bien público que consumirá, x_i, de manera que resuelve

$$\max_{x_i > 0} \phi_i(x_i) - p_i^{**} x_i.$$

[61] Es decir, pensamos en el consumo de cada consumidor del bien público como un bien distinto con su propio mercado.

Su nivel de consumo de equilibrio x_i^{**} debe por lo tanto satisfacer la **condición necesaria y suficiente de primer orden**

$$\phi_i'(x_i^{**}) \le p_i^{**}, \quad \text{con igualdad si } x_i^{**} > 0.$$

Ahora se considera que la empresa produce un paquete de I bienes con una tecnología de proporciones fijas (es decir, el nivel de producción de cada bien personalizado es necesariamente el mismo). Así, la empresa resuelve

$$\max_{q \ge 0} \left(\sum_{i=1}^{I} p_i^{**} q \right) - c(q).$$

El nivel de producción de equilibrio de la empresa q^{**} debe por lo tanto satisfacer **la condición necesaria y suficiente de primer orden**

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^{**} \le c'(q^{**}), \quad \text{con igualdad si } q^{**} > 0$$

Juntas, las dos CPO y la condición de equilibrio de mercado que $x_i^{**} = q^{**}$ para todo i implican que

$$\sum_{i=1}^{I} \phi_i'(q^{**}) \le c'(q^{**}), \quad \text{con igualdad si } q^{**} > 0.$$

Comparando (la condición de equilibrio de bienes públicos) con (la condición de equilibrio de bienes públicos Lindahl), vemos que el nivel de equilibrio del bien público consumido por cada consumidor es exactamente el nivel eficiente: $q^{**} = q^0$.

Este tipo de equilibrio en mercados personalizados para el bien público se conoce como un equilibrio de Lindahl, según Lindahl (1919). Para entender por qué obtenemos eficiencia, note que una vez que hemos definido mercados personalizados para el bien público, cada consumidor, tomando el precio en su mercado personalizado como dado, determina completamente su propio nivel de consumo del bien público; las externalidades se eliminan.

Elección bajo incertidumbre

Teoría de la utilidad esperada

Descripción de alternativas riesgosas

Imaginemos que un tomador de decisiones enfrenta una elección entre varias alternativas riesgosas. Cada alternativa riesgosa puede resultar en uno de varios resultados posibles, pero cuál resultado ocurrirá realmente es incierto en el momento en que debe tomar su decisión.

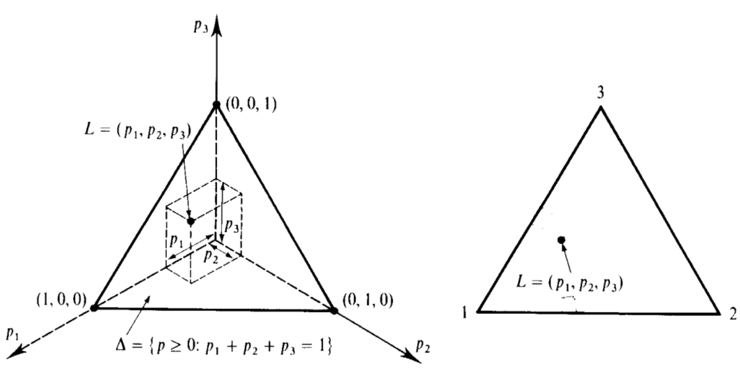
Formalmente, denotamos el conjunto de todos los posibles resultados por $C = \{a_1, ..., a_N\}$. Asumimos que el número de resultados posibles en C es finito, y los indexamos por $n = 1, \ldots, N$. Asumimos ademas que las probabilidades de los diversos resultados que surgen de cualquier alternativa elegida son objetivamente conocidas.

El bloque básico de la teoría es el concepto de una lotería, un dispositivo formal que se utiliza para representar alternativas riesgosas.

Definición 118 (Lotería simple)**.** Una lotería simple L es una lista $L = (p_1, \ldots, p_N)$ con $p_n \geq 0$ para todo n y $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$, donde p_n se interpreta como la probabilidad de que ocurra el resultado n.

Proposición 119 (Representación geométrica de lotería simple)**.** *Una lotería simple puede representarse geométricamente como un punto en el simplex de dimensión* $(N-1)$*,* $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^N : p_1 + \cdots + p_N = 1\}$*. Cada vértice del simplex representa la lotería degenerada donde un resultado es seguro y los otros* $N-1$ *resultados tienen probabilidad cero. Cada punto en el simplex representa una lotería sobre los* N *resultados.*

Cuando $N = 3$*, es conveniente representar el simplex en dos dimensiones (que es la representación en dos dimensiones del que se forma en tres), como en la Figura, donde toma la forma de un triángulo equilátero.*



En una lotería simple, los resultados que pueden ocurrir son ciertos. Una variante más general de una lotería, conocida como lotería compuesta, permite que los resultados de una lotería sean en sí mismos loterías simples.

Definición 120 (Loterías compuestas)**.** Dadas K loterías simples $L_k = (p_1^k, \ldots, p_N^k)$, para $k = 1, \ldots, K$, y probabilidades $\alpha_k \geq 0$ con $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$, la lotería compuesta

$(L_1,\dots,L_K;\alpha_1,\dots,\alpha_K)$ es la alternativa riesgosa que genera la lotería simple L_k con probabilidad α_k para $k=1,\dots,K$.

De estas loterías compuestas podemos obtener una lotería simple equivalente que se llama lotería reducida para poder interpretarlas de mejor modo.

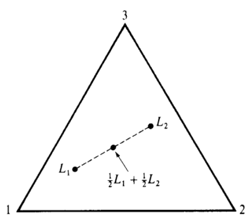
Definición 121 (Lotería reducida)**.** Para cualquier lotería compuesta $(L_1,\dots,L_K;\alpha_1,\dots,\alpha_K)$, podemos calcular una lotería reducida correspondiente como la lotería simple $L=(p_1,\dots,p_N)$ que genera la misma distribución final sobre los resultados. El valor de cada p_n se obtiene multiplicando la probabilidad de que surja cada lotería L_k, α_k, por la probabilidad p_n^k de que el resultado n surja en la lotería L_k, y luego sumando sobre k. Es decir, la probabilidad del resultado n en la lotería reducida es

$$p_n = a_1 p_n^1 + \cdots + a_K p_n^K = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k \quad \forall n = 1, ..., N$$

Por lo tanto, la lotería reducida L de cualquier lotería compuesta $(L_1,\dots,L_K;\alpha_1,\dots,\alpha_K)$ puede obtenerse mediante la adición vectorial:

$$L = \alpha_1 L_1 + \cdots + \alpha_K L_K \in \Delta$$

Podemos ver un ejemplo de lotería reducida para $N=3$ y para una lotería compuesta de dos loterías simples cada una con probabilidad $1/2$.



Preferencias sobre loterías

El análisis teórico que sigue se basa en un **principio consecuencialista básico** asumimos que **para cualquier alternativa arriesgada, solo la lotería reducida sobre los resultados finales es relevante para el tomador de decisiones.**[62]

[62] Si las probabilidades de varios resultados surgen como resultado de una lotería simple o de una lotería compuesta más compleja no tiene importancia. Nuestra hipótesis consecuencialista requiere que el tomador de decisiones vea estas dos loterías como equivalentes.

Ahora planteamos el problema de elección del tomador de decisiones. De acuerdo con nuestro principio consecuencialista, tomamos el **conjunto de alternativas, denotado aquí por** $\mathcal{L}$, como el **conjunto de todas las loterías simples sobre el conjunto de resultados** C.

A continuación, **asumimos que el tomador de decisiones tiene una relación de preferencia racional** $\succeq$ **en** $\mathcal{L}$**, una relación completa y transitiva** que permite la comparación de cualquier par de loterías simples. **Introducimos dos suposiciones adicionales**[63] sobre las preferencias del tomador de decisiones sobre las loterías **el axioma de continuidad y el de independencia**.

[63] También llamadas axiomas de Von Neumman-Morgenstein

Definición 122 (Axioma de continuidad)**.** $\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}$ tales que $L \succ L' \succ L''$, existe $\alpha \in (0,1)$ tal que[64]

$$L' \sim \alpha L + (\mathbf{1}-\alpha)\, L''$$

[64] Esto equivale a decir que las preferencias no son lexicográficas.

Proposición 123 (Existencia de función de utilidad)**.** *El axioma de continuidad implica la existencia de una función de utilidad que representa* $\succeq$*, una función* $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ *tal que* $L \succeq L'$ *si y solo si* $U(L) \geq U(L')$.

Nuestra segunda suposición, el axioma de independencia, nos permitirá imponer considerablemente más estructura sobre $U(\cdot)$.

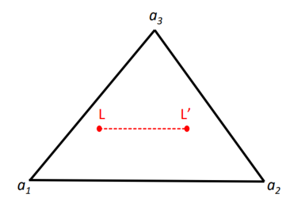
Definición 124 (Axioma de independencia)**.** La relación de preferencia $\succeq$ en el espacio de loterías simples $\mathcal{L}$ satisface el axioma de independencia si para todos $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ y $\alpha \in (0, 1)$ tenemos[65]

$$L \succeq L' \text{ si y solo si } \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L''.$$

Además se va a cumplir para el caso de preferencia estricta y el de indiferencia.[66]

[65] En otras palabras, si mezclamos cada una de dos loterías con una tercera, entonces el orden de preferencia de las dos mezclas resultantes no depende (es independiente) de la tercera lotería particular utilizada.

[66] Esto equivale a que las curvas de indiferencia en el símplex son lineales.



En el enunciado del axioma tomemos $L \sim L'$ y $L'' = L'$ entonces,

$$\alpha L + (1-\alpha) L' \sim \alpha L' + (1-\alpha) L' = L'$$

$\forall \alpha \in (0, 1)$

En la teoría de elección bajo certeza, la utilidad es puramente ordinal. Bajo incertidumbre, existe un grado de cardinalidad.

Definición 125 (Función de utilidad esperada)**.** La función de utilidad $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ tiene forma de función de utilidad esperada si existe un vector $(u_1, u_2, \ldots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$U(L) = u_1 p_1 + \cdots + u_N p_N = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i, \ \forall L \in \mathcal{L}$$

En este caso decimos que $U(\cdot)$ es una función de utilidad de von Neumann- Morgenstern.

Proposición 126 (Linealidad en las probabilidades)**.** *Si* $U(\cdot)$ *es una función de utilidad esperada, entonces* ***es lineal en las probabilidades****: dada una lotería compuesta* $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ *se cumple*

$$U\left(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k\right) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \, U(L_k).$$

Esta forma funcional es equivalente a nuestros supuestos.

Definición 127 (Función de utilidad de Bernoulli)**.** Podemos pensar que el agente tiene una función de utilidad sobre consecuencias

$$u : C \to \mathbb{R}$$

a la cual llamaremos función de utilidad de Bernoulli. Además $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ es el valor esperado de $u(\cdot)$. [67]

[67] Notar que la notación del Mas collel distingue

- $u(\cdot) \to$ función de utilidad de Bernoulli
- $U(\cdot) \to$ función de utilidad de von Neumann-Morgenstern

Proposición 128 (Cardinalidad)**.** *Sea* $U(\cdot)$ *una función de utilidad esperada que representa a* $\succsim$*. Entonces, una función de utilidad esperada* $\widehat{U}(\cdot)$ *también representa a* $\succsim$ *si y sólo si existen* $\beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0$ *tales que* $\forall L \in \mathcal{L}$*,*

$$\widehat{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$$

Observación 129. Sean $(u_1, u_2, ..., u_N)$ y $(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \ldots, \widehat{u}_N)$ los vectores (es decir, las funciones de utilidad de Bernoulli) asociados a $U(\cdot)$ y $\widehat{U}(\cdot)$ respectivamente. Entonces, $\widehat{U}(L) = \beta U(L) + \gamma\ \forall L$ es equivalente a $\widehat{u}_i = \beta u_i + \gamma\ \forall i$.

Observación 130. Podemos utilizar cualquier transformación creciente a $U(\cdot)$ y seguir representando las mismas preferencias $\succsim$, como siempre.[68] Pero si queremos preservar la utilidad esperada, sólo podemos emplear transformaciones afines crecientes. Esto equivale a decir que la función de utilidad de Bernoulli solamente puede modificarse mediante transformaciones afines[69] crecientes para preservar la representación.

[68] esa nueva utilidad va a representar las mismas preferencias pero no va tener utilidad esperada si no es afín.

[69] afín quiere decir cóncava y convexa a la vez o dicho de otro modo lineal

Teorema de la utilidad esperada

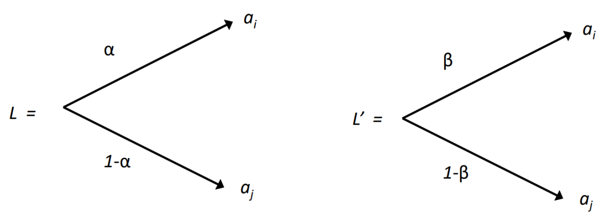
Teorema 131 (Teorema de la utilidad esperada). *El orden de preferencias $\succsim$ sobre $\mathcal{L}$ es racional y satisface continuidad e independencia si y sólo si es representado por una función $U : \mathcal{L} \to R$ que es una función de utilidad esperada.*

Observación 132 (La paradoja de Allais). La Paradoja de Allais, propuesta por Maurice Allais en 1953, **demuestra cómo las decisiones reales de las personas pueden contradecir la teoría de la utilidad esperada, que asume racionalidad en la maximización de la utilidad esperada**. En un experimento clave, se les presenta a las personas dos escenarios de elección. En el primero, deben elegir entre una lotería A1, que ofrece un 100 % de probabilidad de ganar 1 millón de dólares, y una lotería B1, que ofrece un 89 % de probabilidad de ganar 1 millón, un 10 % de probabilidad de ganar 5 millones y un 1 % de probabilidad de no ganar nada. En el segundo escenario, deben elegir entre una lotería A2, con un 11 % de probabilidad de ganar 1 millón y un 89 % de no ganar nada, y una lotería B2, con un 10 % de probabilidad de ganar 5 millones y un 90 % de no ganar nada.

Empíricamente, muchas personas prefieren A1 sobre B1 y B2 sobre A2. Estas elecciones son inconsistentes con la teoría de la utilidad esperada, que predice que la preferencia entre las loterías debería ser consistente entre ambos escenarios. La **paradoja revela que factores como la certeza y la percepción de riesgo influyen en las decisiones de las personas, cuestionando la capacidad de la teoría de la utilidad esperada para explicar completamente el comportamiento humano bajo incertidumbre.**

Lema 133 (Montonicidad). *Supongamos que $\succsim$ es racional y satisface continuidad e independencia. Tomemos dos consecuencias (en realidad, loterías degeneradas[70]) a_i, a_j tales que $a_i \succ a_j$, y dos loterías:*

[70] Loterías degeneradas son aquellas loterias en el cual el resultado de la lotería es totalmente cierto.



Entonces, se verifica que

$$L \succsim L' \Leftrightarrow \alpha \geq \beta$$

Loterías con consecuencias monetarias

Loterías sobre Resultados Monetarios y el Marco de Utilidad Esperada

Supongamos que denotamos las cantidades de dinero con la variable continua x, osea para simplificar $C = \mathbb{R}$. Podemos describir una lotería monetaria mediante una función de distribución acumulativa $F : \mathbb{R} \to [0,1]$. Es decir, para cualquier x, $F(x)$ es la probabilidad de que el resultado obtenido sea menor o igual a x. [71]

[71] Nótese que si la función de distribución de una lotería tiene una función de densidad $f(\cdot)$ asociada, entonces $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ para todo x.

Nótese que las funciones de distribución preservan la estructura lineal de las loterías (al igual que las funciones de densidad). Por ejemplo, la distribución final de dinero, $F(\cdot)$, inducida por una lotería compuesta $(L_1, \ldots, L_K; \alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ es simplemente el promedio ponderado de las distribuciones inducidas por cada una de las loterías que la constituyen:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k F_k(x)$$

donde $F_k(\cdot)$ es la distribución del resultado bajo la lotería L_k.

Comenzamos con un tomador de decisiones que tiene preferencias racionales $\succeq$ definidas sobre $\mathcal{L}$. La aplicación del teorema de utilidad esperada a resultados definidos por una variable continua nos dice que, bajo los supuestos del teorema, existe una asignación de valores de utilidad $u(x)$ a cantidades no negativas de dinero con la propiedad de que cualquier $F(\cdot)$ puede ser evaluada por una función de utilidad $U(\cdot)$ de la forma

$$U(F) = \int u(x)\,dF(x)$$

Notar que esta expresión es la extensión exacta de la forma de utilidad esperada al contexto actual. La función de utilidad vNM $U(\cdot)$ es la esperanza matemática, sobre las realizaciones de x, de los valores $u(x)$. Esta última toma el lugar de los valores $(u_1, \ldots, u_N)$ utilizados en el tratamiento discreto de la Sección 6.B.1. Nótese que, como antes, $U(\cdot)$ es lineal en $F(\cdot)$.

Razonablemente, tiene sentido en el contexto monetario actual postular que $u(\cdot)$ es creciente y continua. Mantenemos ambas suposiciones a partir de ahora.

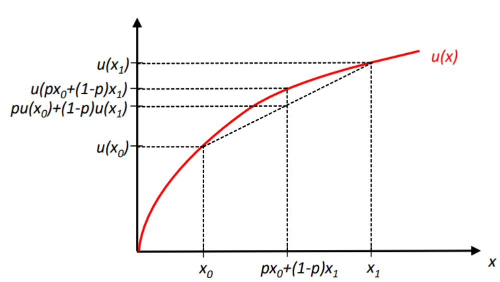
Actitud frente al riesgo

Excepto cuando lo puntualicemos, vamos a suponer que $u(\cdot)$ continua y dos veces diferenciable. Excepto cuando lo puntualicemos, vamos a suponer que $u(\cdot)$ es continua y dos veces diferenciable.

Definición 134 (Aversión al riesgo)**.** Un agente es **averso al riesgo** si, $\forall F$,

$$u\left(\int x dF(x)\right) \geq \int u(x) dF(x)$$

El valor esperado que le da obtener la lotería con certeza es mayor que enfrentar la lotería.



Notar que estas desigualdades son la llamada desigualdad de Jensen.

La **desigualdad de Jensen** establece que, para una función convexa f y una variable aleatoria X, se cumple que:

$$f(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[f(X)]$$

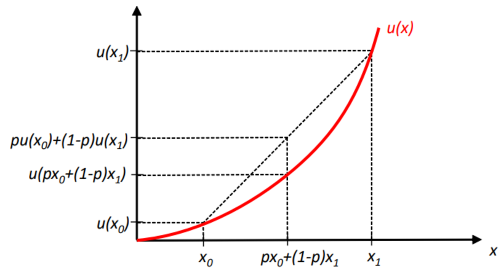
siempre y cuando $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ y $\mathbb{E}[|f(X)|] < \infty$.

Notar que en los gráficos p es la probabilidad de obtener x_0 y $(1-p)$ es la probabilidad de obtener x_1

Definición 135 (Amante del riesgo)**.** Un agente es **amante del riesgo** si, $\forall F$,

$$u\left(\int xdF(x)\right) \leq \int u(x)dF(x)$$

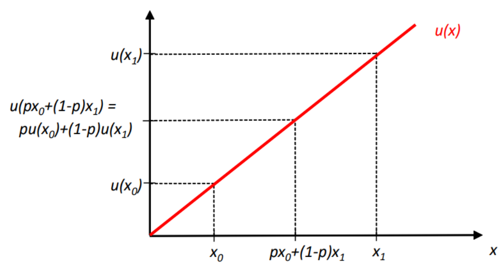
El valor esperado que le da enfrentar la lotería es mayor que obtener la lotería con certeza.



Definición 136 (Neutral al riesgo)**.** Un agente es **neutral al riesgo** si, $\forall F$,

$$u\left(\int xdF(x)\right) = \int u(x)dF(x)$$

El valor esperado que le da enfrentar la lotería es igual que obtener la lotería con certeza.



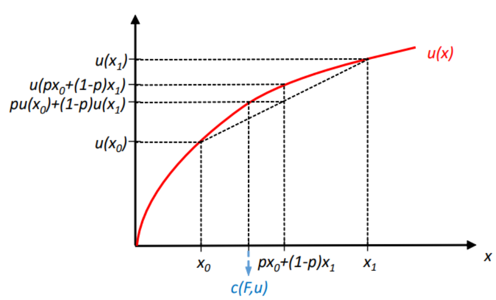
Definiciones relacionadas

Definición 137 (Equivalente cierto)**.** El equivalente cierto de una lotería F para un agente con función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$ es la **suma** $c(F,u)$ **tal que, si la obtiene con certeza, alcanza igual bienestar que enfrentando la lotería**:

$$u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x)$$

Observación 138 (Aversión al riesgo según equivalente cierto). Un agente es averso al riesgo si y sólo si

$$c(F,u) \leq \int xdF(x)\ \forall F.$$



Definición 139 (Prima de riesgo medida en dinero)**.** Suele definirse la prima de riesgo medida en dinero como

$$Prima\ riesgo = \int xdF(x) - c(F,u)$$

Observación 140 (Aversión al riesgo según prima medida en dinero). Un agente es averso al riesgo si y sólo si

$$Prima\ en\ dinero \geq 0\ \ \forall F$$

Definición 141 (Prima de riesgo medida en probabilidad)**.** La prima de riesgo medida en probabilidad es el valor $\pi(x, \varepsilon, u)$ tal que

$$u(x) = \left[\frac{1}{2} + \pi\left(x, \varepsilon, u\right)\right] u\left(x + \varepsilon\right) + \left[\frac{1}{2} - \pi\left(x, \varepsilon, u\right)\right] u\left(x - \varepsilon\right)$$

Observación 142 (Aversión al riesgo según prima medida en probabilidad). Un agente es averso al riesgo si y sólo si[72]

$$\pi(x, \varepsilon, u) \geq 0 \forall x, \varepsilon$$

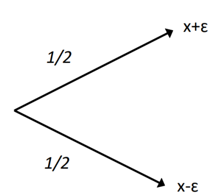
[72] Notar que se puede pensar como que alguien averso al riesgo va a querer tener más probabilidad de tener un valor epsilon ε a que perder un valor epsilon ε

Observación 143 (Definiciones equivalentes de aversión al riesgo). Notar que tenemos entonces cinco formas de caracterizar aversión al riesgo, todas equivalentes entre sí:

1. $u\left(\int x dF\left(x\right)\right) \geq \int u\left(x\right) dF\left(x\right) \; \forall F$
2. $u\left(\cdot\right)$ cóncava.
3. $c\left(F, u\right) \leq \int x dF\left(x\right) \; \forall F$
4. *Prima en dinero* $\geq 0 \; \forall F$.
5. $\pi\left(x, \varepsilon, u\right) \geq 0 \; \forall x, \varepsilon$

Medida de aversión absoluta al riesgo

Supongamos $u(\cdot)$ cóncava. ¿Cómo podemos medir la aversión al riesgo del agente? El agente tiene riqueza inicial x, y lo someten a la lotería



Sea $P(\varepsilon)$ la prima de riesgo medido en dinero para esta lotería, en función de ε. Entonces,

$$u(x - P(\varepsilon)) = \frac{1}{2}u(x + \varepsilon) + \frac{1}{2}u(x - \varepsilon)$$

Notar que $P(0) = 0$. Queremos tener una medida de cuán rápido crece $P(\varepsilon)$ con ε en $\varepsilon = 0$ (es decir, tomamos riesgos infinitesimales). **Cuanto más rápido crece** $P(\varepsilon)$ **más adverso al riesgo va a ser**.

Entonces diferenciamos la expresión anterior con respecto al ε

$$-u'(x - P(\varepsilon))P'(\varepsilon) = \frac{1}{2}u'(x + \varepsilon) - \frac{1}{2}u'(x - \varepsilon)$$

Notar que otra vez $P'(0) = 0$. Diferenciando otra vez con respecto a ε,

$$u''(x - P(\varepsilon))(P'(\varepsilon))^2 - u'(x - P(\varepsilon))P''(\varepsilon) = \frac{1}{2}u''(x + \varepsilon) + \frac{1}{2}u''(x - \varepsilon)$$

Evaluando en $\varepsilon = 0$, obtenemos $-u'(x)P''(0) = u''(x)$ o bien

$$P''(0) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

De aquí surge el **coeficiente Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo.**

Definición 144 (Coeficiente Arrow-Pratt de aversión absoluta al riesgo)**.** Dada una función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$ (dos veces diferenciable) para el dinero, el coeficiente de aversión absoluta al riesgo de Arrow-Pratt en x se define como

$$r_A(x,u) = -\frac{u''(x)}{u'(x)},$$

que refleja en qué medida pierde bienestar el agente al enfrentar riesgos medidos en términos absolutos (es decir, en dinero).

Comparaciones entre individuos

Dadas dos funciones de utilidad de Bernoulli $u_1(\cdot)$ y $u_2(\cdot)$, ¿cuándo podemos decir que $u_2(\cdot)$ tiene más aversión al riesgo que $u_1(\cdot)$? Varios enfoques posibles para una definición parecen plausibles:

1. $r_A(x,u_2) \geq r_A(x,u_1)$ para todo x.
2. Existe una función creciente y cóncava $\psi(\cdot)$ tal que $u_2(x) = \psi(u_1(x))$ en todo x; es decir, $u_2(\cdot)$ es una transformación cóncava de $u_1(\cdot)$. [En otras palabras, $u_2(\cdot)$ es "más cóncava"que $u_1(\cdot)$.]
3. $c(F,u_2) \leq c(F,u_1)$ para cualquier $F(\cdot)$.
4. $\pi(x,\varepsilon,u_2) \geq \pi(x,\varepsilon,u_1)$ para cualquier x y ε.
5. Siempre que $u_2(\cdot)$ considere una lotería $F(\cdot)$ al menos tan buena como un resultado sin riesgo x, entonces $u_1(\cdot)$ también considera $F(\cdot)$ al menos tan buena como x. Es decir, $\int u_2(x)dF(x) \geq u_2(X)$ implica $\int u_1(x)dF(x) \geq u_1(X)$ para cualquier $F(\cdot)$ y x.

De hecho, estas cinco definiciones son equivalentes.

Comparaciones entre niveles de riqueza

Consideremos dos niveles de riqueza iniciales $x_2 > x_1$. Denotemos los incrementos o decrementos a la riqueza por z. Entonces, el individuo evalúa el riesgo en x_2 y x_1 respectivamente, mediante las funciones de utilidad de Bernoulli inducidas $u_1(z) = u(x_1 + z)$ y $u_2(z) = u(x_2 + z)$. Comparar las actitudes de un individuo hacia el riesgo a medida que cambia su nivel de riqueza es similar a comparar las funciones de utilidad $u_1(\cdot)$ y $u_2(\cdot)$, un problema que acabamos de estudiar.

1. $r_A(x,u)$ cae con x (La función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$ exhibe aversión absoluta decreciente al riesgo DARA)[73]

[73] Notar que hay condiciones análogas para los casos de aversión absoluta creciente IARA y para aversión absoluta constante CARA.

2. Siempre que $x_2 < x_1$, $u_2(z) = u(x_2 + z)$ sea una transformación cóncava de $u_1(z) = u(x_1 + z)$.

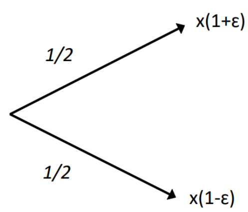
3. Para cualquier riesgo $F(z)$, el equivalente de certeza de la lotería formada al agregar el riesgo z al nivel de riqueza x_1, dado por la cantidad c en la que $u(c) = \int u(x+z)dF(z)$, es tal que $(x_2 - c)$ disminuye en x_1. Es decir, cuanto mayor sea x_1, menos estará dispuesto el individuo a pagar para deshacerse del riesgo.

4. La prima de probabilidad $\pi(x, c, u)$ disminuye en x.

5. Para cualquier $F(z)$, si $\int u(x_2 + z)dF(z) \geq u(x_2)$ y $x_2 < x_1$, entonces $\int u(x_1 + z)dF(z) > u(x_1)$.

Medida de aversión relativa al riesgo

Buscamos una medida que refleje la pérdida de bienestar generada por arriesgar "porcentajes de la riqueza". Tomemos un agente con riqueza x. Le hacemos enfrentar la lotería



Llamemos $\gamma(\varepsilon)$ al porcentaje de su riqueza que el individuo resigna a cambio de no enfrentar la lotería

$$u(x(1 - \gamma(\varepsilon))) = \frac{1}{2}u(x(1+\varepsilon)) + \frac{1}{2}u(x(1-\epsilon)).$$

Claramente, $\gamma(0) = 0$. **Queremos una medida de cómo crece** $\gamma(\varepsilon)$ con ε en $\varepsilon = 0$. Siguiendo pasos análogos a los que usamos en el caso de aversión absoluta, podemos comprobar que $\gamma'(0) = 0$, y que $\gamma''(0) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}$.

Obtenemos, entonces, el *coeficiente Arrow-Pratt de aversión relativa al riesgo*

$$r_R(x, u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Definición 145 (Coeficiente de Arrow-Pratt de aversión relativa al reisgo)**.** Dada una función de utilidad de Bernoulli $u(\cdot)$, el coeficiente de aversión relativa al riesgo en x es:

$$r_p(x, u) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)}.$$

Comparación de distribuciones de rendimientos

En esta sección, continuamos nuestro estudio de loterías con rendimientos monetarios. Nuestro objetivo aquí es comparar distribuciones de rendimientos. Hay dos formas naturales en que los resultados aleatorios pueden ser comparados: según el nivel de retornos y según la dispersión de los retornos.

Por lo tanto, intentaremos dar significado a dos ideas: la de una distribución $F(\cdot)$ que produce retornos inequívocamente mayores que $G(\cdot)$ y la de $F(\cdot)$ siendo inequívocamente menos arriesgada que $G(\cdot)$. Estas ideas son conocidas, respectivamente, por los términos técnicos de dominancia estocástica de primer orden y dominancia estocástica de segundo orden.

En todos los desarrollos subsecuentes, nos restringimos a distribuciones $F(\cdot)$ tales que $F(0) = 0$ y $F(x) = 1$ para algún x.

Dominancia Estocástica de Primer Orden

Dominancia estocástica de primer orden (DEPO) hace alusión A que "la distribución $F(\cdot)$ produce retornos inequívocamente mayores que la distribución $G(\cdot)$".

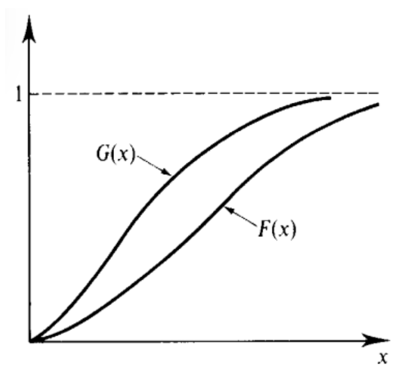
Definición 146 (Dominación estocástica de primer orden)**.** La distribución $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a $G(\cdot)$ si, para cada función no decreciente $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenemos:

$$U(F) \geq U(G)$$

o lo mismo

$$\int u(x)\, dF(x) \geq \int u(x)\, dG(x).$$

Proposición 147 (DEPO equivalencia)**.** *La distribución de rendimientos monetarios $F(\cdot)$ domina estocásticamente en primer orden a la distribución $G(\cdot)$ si y solo si $F(x) \leq G(x)$ para todo x. Gráficamente*



Esto se cumple pues $F(x)$ pondera más valores alto de x que bajos en comparación con $G(x)$.

Dominancia Estocástica de Segundo Orden

Dominancia estocástica de segundo orden (DESO) hace alusión a que "$F(\cdot)$ siendo inequívocamente menos arriesgada que $G(\cdot)$".

Definición 148 (Dominación estocástica de primer orden)**.** Para cualquier par de distribuciones $F(x)$ y $G(\cdot)$ con la misma media, $F(\cdot)$ domina estocásticamente en segundo orden (o es menos arriesgada que) $G(\cdot)$ si, para cada función cóncava no decreciente $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, tenemos:

$$U(F) \geq U(G)$$

o lo mismo

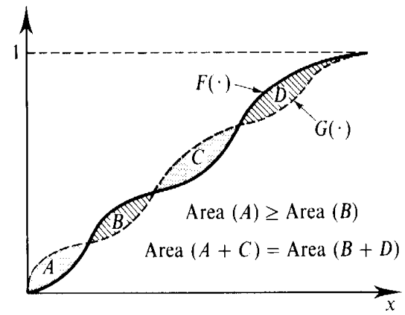
$$\int u(x)\, dF(x) \geq \int u(x)\, dG(x).$$

Observación 149 (DEPO y DESO). Notar que claramente $DEPO \implies DESO$

Proposición 150 (DESO equivalencia)**.** *La distribución de rendimientos monetarios $F(\cdot)$ domina estocásticamente en segundo orden a la distribución $G(\cdot)$ si y solo si*

$$\int_0^x G(t)\,dt \geq \int_0^x F(t)\,dt \quad \textit{para todo } x.$$

Gráficamente



Notar que en este ejemplo las areas son iguales.

Apendice I: Funciones cóncavas y cuasicóncavas

Definición 151 (Función Cóncava)**.** Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **cóncava** si, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y para todo $\lambda \in [0,1]$, se cumple que:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Intuitivamente, esto significa que la línea recta que conecta los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ en el plano está por debajo de la gráfica de f.

Definición 152 (Función Cuasicóncava)**.** Una función $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto convexo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, es **cuasicóncava** si sus conjuntos de contorno superior $\{x \in A : f(x) \geq t\}$ son conjuntos convexos; es decir, si:

$$f(x) \geq t \text{ y } f(x') \geq t \implies f(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq t$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$, $x, x' \in A$ y $\lambda \in [0,1]$.

Si la desigualdad anterior es estricta siempre que $x \neq x'$ y $\lambda \in (0,1)$, entonces decimos que f es **estrictamente cuasicóncava**.

Obsérvese que $f(\cdot)$ **es cuasicóncava si y sólo si la función** $-f(\cdot)$ **es cuasiconvexa.**

Observación 153. Si una función es cuasiconcava y creciente sus curvas de nivel van a ser convexas. Y notar que si es cuasiconvexa y creciente sus curvas de nivel van a ser cóncavas

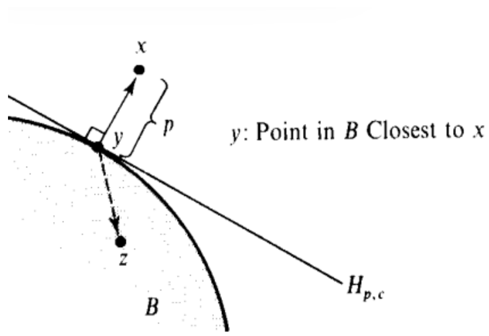
Apéndice II: Conjuntos convexos e hiperplanos separadores

Definición 154 (Conjunto convexo)**.** Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice convexo si, para cualquier par de puntos $x, x' \in A$ y para cualquier α tal que $\alpha \in [0,1]$, se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)x' \in A$.

Teorema 155 (Teorema del Hiperplano Separador)**.** *Supongamos que $B \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y cerrado, y que $x \notin B$. Entonces, existe $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$, y un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $p^\intercal x > c$ y $p^\intercal y < c$ para todo $y \in B$.*

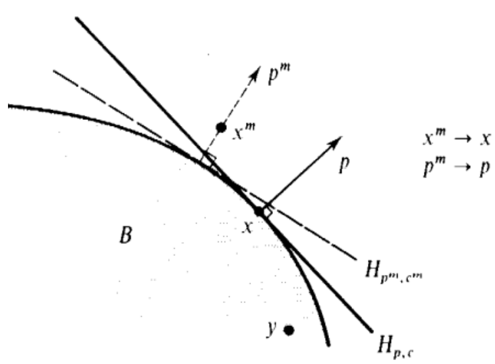
Más generalmente, supongamos que los conjuntos convexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son disjuntos (es decir, $A \cap B = \emptyset$). Entonces, existe $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$, y un valor $c \in \mathbb{R}$, tal que $p^\intercal x \geq c$ para todo $x \in A$ y $p^\intercal y \leq c$ para todo $y \in B$. Es decir, existe un hiperplano que separa A y B, dejando A y B en lados opuestos de este.

Observación 156 (Explicación del teorema del hiperplano separador). Este teorema, conocido como el Teorema del Hiperplano Separador, establece que si tenemos dos conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$, A y B, que son disjuntos, entonces podemos encontrar un hiperplano que los separa. Es decir, podemos encontrar un vector p y un escalar c tal que todos los puntos de A están en un lado del hiperplano (específicamente, en el lado donde $p^\intercal x > c$), y todos los puntos de B están en el otro lado (donde $p^\intercal y < c$).



Teorema 157 (Teorema del Hiperplano Soporte)**.** *Supongamos que $B \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y que x no es un elemento del interior del conjunto B (es decir, $x \notin$ Int B). Entonces, existe $p \in \mathbb{R}^n$ con $p \neq 0$ tal que $p^\intercal x > p^\intercal y$ para todo $y \in B$.*

Observación 158 (Explicación del teorema del hiperplano soporte). El Teorema del Hiperplano Soporte establece que si tenemos un conjunto convexo B en $\mathbb{R}^n$ y un punto x que no está en el interior de B, entonces existe un hiperplano de soporte para B en x. Es decir, existe un vector p tal que el producto escalar entre p y x es mayor que el producto escalar entre p y cualquier punto y en B.



Observación 159 (Comparación del teorema del hiperplano separador y del hiperplano soporte). La relación entre el Teorema del Hiperplano Soporte y el Teorema del Hiperplano Separador radica en su aplicación y contexto dentro de la geometría convexa y la optimización.

- **Teorema del Hiperplano Soporte:** Este teorema nos dice que dado un conjunto convexo B en $\mathbb{R}^n$ y un punto x que no está en el interior de B, existe un hiperplano de soporte en x. En otras palabras, podemos encontrar un hiperplano que toca el borde de B en x, dividiendo el espacio en dos partes, una que contiene a x y otra que contiene a B.
- **Teorema del Hiperplano Separador:** Este teorema establece que si tenemos dos conjuntos convexos disjuntos A y B en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un hiperplano que separa A y B. Es decir, podemos encontrar un hiperplano tal que todos los puntos de A están en un lado del hiperplano y todos los puntos de B están en el otro lado.