Di Tella University - 2024

Lecture Notes - MICRO II

Sesto Francisco

10 de septiembre de 2024

Índice

Equilibrio general

Equilibrio con intercambio puro

Introducción

Una economía de intercambio puro (o, simplemente, una economía de intercambio) es una economía en la que no existen oportunidades de producción. Los agentes económicos de tal economía son consumidores que poseen existencias iniciales, o dotaciones, de mercancías. La actividad económica consiste en el intercambio y el consumo.

Economía con L bienes e I consumidores

En todo momento, **asumimos que los dos consumidores actúan como tomadores de precios, los mercados con completos y no hay externalidades ni bienes públicos**.

Dado que las preferencias son racionales y continuas, pueden representarse mediante una función de utilidad. Además por conveniencia a veces asumiremos supuestos más exigentes como convexidad estricta o monotonicidad fuerte.

Definición 1 (Economía de intercambio puro)**.** Una economía de intercambio puro $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^I, \overline{\omega}\}$$

con I consumidores y L bienes consiste en

- **Conjuntos de consumo:** El vector de consumo del consumidor i es $x_i = (x_{1i}, ..., x_{Li})$; es decir, el consumo del consumidor i del bien l es x_{li}. Asumimos que el conjunto de consumo del consumidor i es $\mathbb{R}^L_+$.
- **Preferencias** El consumidor i tiene un orden de preferencias $\succsim_i$ sobre los vectores de consumo en este conjunto. El orden de preferencias según sea conveniente será racional y continuo, convexo y satisface no saciedad local.
- **Vector de dotaciones:** Cada consumidor i está inicialmente dotado con una cantidad $w_{li} \geq 0$ del bien l. Así, el vector de dotación del consumidor i es $\omega_i = (\omega_{1i}, ..., \omega_{Li})$. La dotación total del bien l en la economía se denota por $\omega_l = \omega_{l1} + ... + \omega_{lI}$; asumimos que esta cantidad es estrictamente positiva para ambas mercancías.

Equilibrio competitivo

Definición 2 (Equilibrio walrasiano)**.** Un equilibrio walrasiano (o competitivo) es un par $(p^*, (x_1^*, ..., x_I^*))$, donde p^* es un vector de precios y $(x_1^*, ..., x_I^*)$ es una asignación, tal que

1. **Resuelve el problema del agente**: $\forall i, x_i^*$ resuelve

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \quad \textit{sujeto a} \quad p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i$$

2. **Vacía el mercado**:

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_i^*$$

Entonces notemos que en un equilibrio competitivo hay dos propiedades

Proposición 3 (Solo importan los precios relativos)**.** *En un equilibrio competitivo, "solamente importan los precios relativos". Es decir, si $(p^*, (x_1^*, ..., x_I^*))$ es un equilibrio competitivo, $(\lambda p^*, (x_1^*, ..., x_I^*))$ también lo es, para todo $\lambda > 0$.* [1]

[1] ¿Por qué? Para todo i, $x_i \in X_i$, $\lambda > 0$,

$$p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i \iff (\lambda p^*) \cdot x_i \leq (\lambda p^*) \cdot \omega_i$$

Proposición 4 (Ley de Walras). *Dado $\overline{\omega}$, sea $x_i(p)$ la demanda del agente i:*

$$x_i(p) = \begin{cases} arg\max_{x_i \in X_i} & u_i(x_i) \\ suj.\ a & p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i \end{cases}$$

Definimos la "demanda excedente"

(puede ser una correspondencia, pero pensemos que es una función para simplificar).

$$z(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

Entonces,[2]

$$\forall p, \quad p \cdot z(p) = 0$$

Esto implica que, si $p \gg 0$, cuando $(L-1)$ mercados se vacían, también lo hace el mercado restante.

[2] ¿Por qué? Por no saciedad local, $\forall i$

$$p \cdot x_i(p) = p \cdot \omega_i$$

por lo que

$$p \cdot \sum_{i=1}^{I} x_i(p) = p \cdot \sum_{i=1}^{I} \omega_i$$

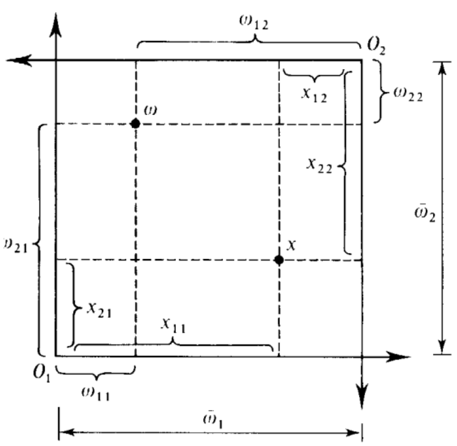
y entonces

$$p \cdot \left[\sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i \right] = 0$$

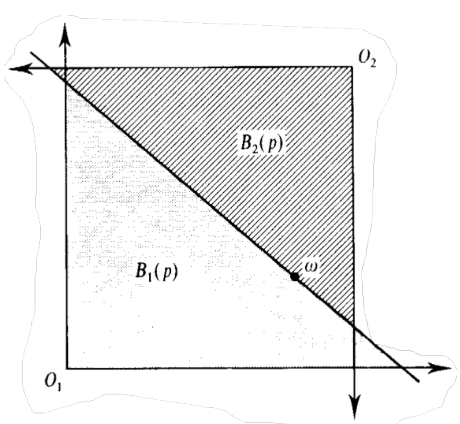
$$p \cdot z(p) = 0$$

Caja de Edgeworth

Si $I = L = 2$ podemos representar a la economía a través de una "caja de Edgeworth"



En la caja de Edgeworth, las cantidades del consumidor 1 se miden de la manera habitual, con la esquina suroeste como el origen. En contraste, las cantidades del consumidor 2 se miden usando la esquina noreste como el origen. Para ambos consumidores, la dimensión vertical mide las cantidades de la mercancía 2, y la dimensión horizontal mide las cantidades de la mercancía 1. La longitud de la caja es ω_1, la dotación total de la economía de la mercancía 1; su altura es ω_2, la dotación total de la economía de la mercancía 2. **Cualquier punto en la caja representa una asignación** de la dotación total de la economía entre los consumidores 1 y 2.

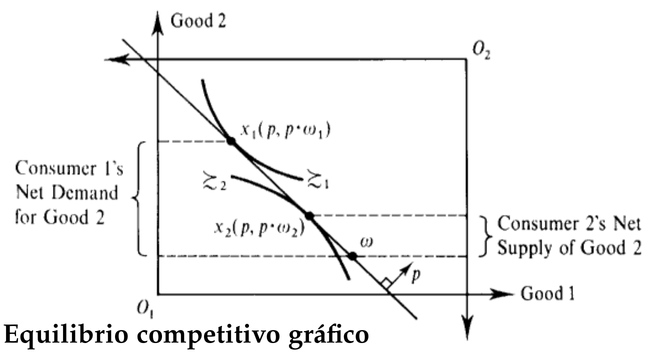


Para cualquier precio $p = (p_1, p_2)$, la riqueza del consumidor i es igual al valor de mercado de sus dotaciones de mercancías, $p \cdot \omega_i = p_1\omega_{1i} + p_2\omega_{2i}$. Los niveles de riqueza, por lo tanto, se determinan por los valores de los precios. Así, dada la dotación del consumidor ω_i, su conjunto presupuestario puede verse únicamente como una función de los precios:

$$B_i(p) = \{x_i \in \mathbb{R}^2_+ : p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i\}.$$

Los conjuntos presupuestarios de los dos consumidores pueden representarse en la caja de Edgeworth de manera sencilla. Para hacerlo, dibujamos una línea, conocida como la línea presupuestaria, a través del punto de dotación ω con pendiente $-\frac{p_1}{p_2}$.

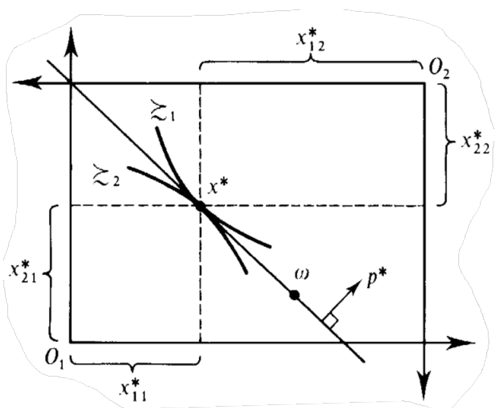
Equilibrio de mercado gráfico



En un equilibrio de mercado donde los consumidores toman los precios como dados, los mercados deben equilibrarse.

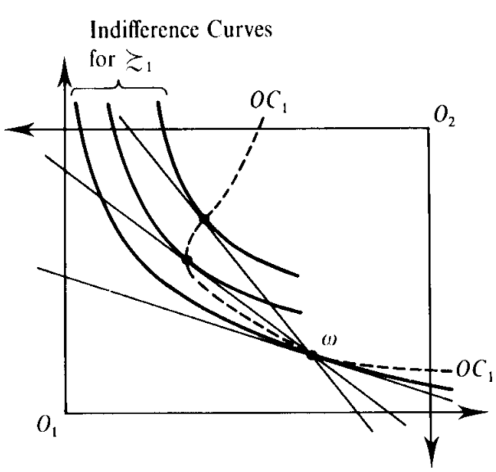
Así, si un consumidor desea ser un demandante neto de algún bien, el otro debe ser un proveedor neto de este bien en exactamente la misma cantidad; es decir, la demanda debe igualar la oferta.

Equilibrio competitivo gráfico



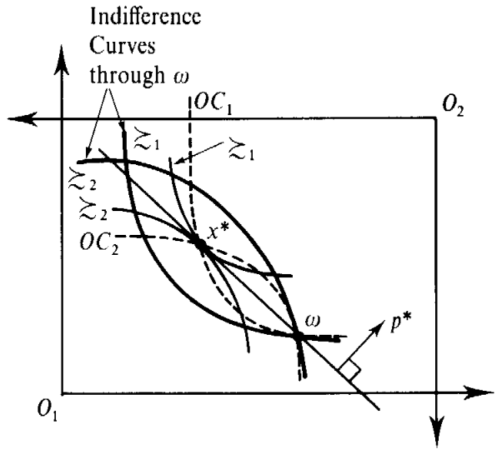
Para que las dos condiciones que caracterizan un equilibrio competitivo se cumplan, ambos agentes deben estar optimizando en el mismo punto.

Curva de oferta



En la figura, vemos que a medida que el vector de precios p varía, la línea presupuestaria gira alrededor del punto de dotación ω, y las consumos demandados trazan una curva, denotada por OC_1, que se llama la curva de oferta del consumidor 1.[3] Dado que en cada p el vector de dotación $\omega_1 = (\omega_{11}, \omega_{21})$ es asequible para el consumidor 1, se sigue que este consumidor debe encontrar cada punto en su curva de oferta al menos tan bueno como su punto de dotación.

[3] Nótese que esta curva pasa por el punto de dotación.



Un **equilibrio competitivo, entonces, puede visualizarse como una intersección de curvas de oferta** en la caja de Edgeworth. Pero cabe destacar que es posible que las curvas de oferta se corten más de una vez (fuera de la dotación inicial) o que no se corten (por ejemplo, si alguna es discontinua).

Propiedades de bienestar del equilibrio walrasiano

Asignación óptima paretiana

Definición 5 (Asignación óptima)**.** Una asignación $(x_1, \ldots, x_I)$ en $\mathcal{E}$ es óptima en el sentido de Pareto si no existe otra asignación $(x'_1, \ldots, x'_I)$ tal que:

1. $(x'_1, \ldots, x'_I)$ sea factible: $\sum_{i=1}^{I} x'_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_i$
2. $x'_i \succsim_i x_i \; \forall i$ y $x'_j \succ_j x_j$ para algún j.

Veamos algunos casos gráficamente

Gráfico 1 **(No es óptima):** Notar que en este caso toda el area que se encuentre entre las curvas de indiferencia son asignaciones factibles mejores o igual para todos.

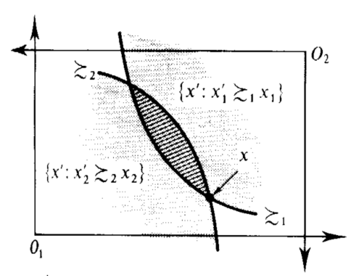


Gráfico 2 **(Es óptima):** Notar que en este caso las curvas de indiferencia no son tangentes entre sí pero no hay asignaciones factibles mejores o igual para todos.

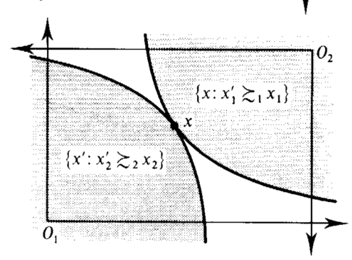
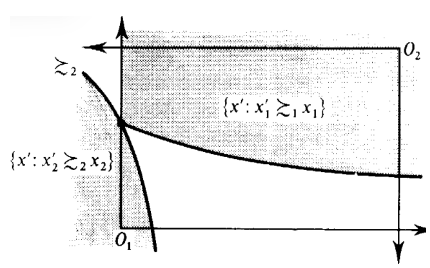


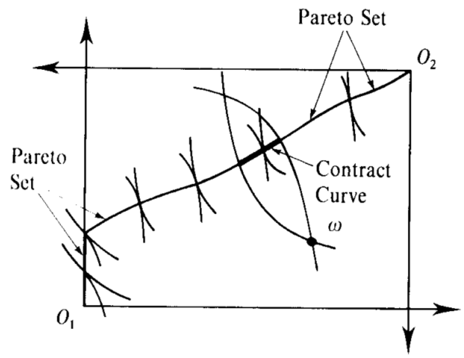
Gráfico 3 **(Es óptima):** Notar que en este caso las curvas de indiferencia son tangentes entre sí y no hay asignaciones factibles mejores o igual para todos.



Conjunto de pareto y curva de contrato

Uniendo el concepto de asignación óptima obtenemos las siguientes definiciones

Definición 6 (Conjunto de pareto)**.** El conjunto de Pareto de $\mathcal{E}$ es el conjunto de asignaciones óptimas de Pareto en $\mathcal{E}$.



Notar que la curva de contrato es un subconjunto del conjunto de pareto

Definición 7 (Curva de contrato)**.** La curva de contrato de $\mathcal{E}$ es el conjunto de asignaciones óptimas de Pareto $(x_1, \ldots, x_I)$ tales que $x_i \succeq \omega_i \ \forall i$.

Existencia del equilibrio competitivo en economías con intercambio puro

Cuando se estudia una teoría positiva, la primera pregunta que debemos hacernos es: ¿bajo qué condiciones el modelo formal posee una solución? Es decir, ¿es capaz de predecir un resultado definitivo? Esto se conoce como el problema de existencia. Conceptualmente, la garantía de existencia de un equilibrio significa que nuestra noción de equilibrio pasa la prueba lógica de consistencia.

Objetivos y supuestos

Buscamos un conjunto de condiciones suficientes para asegurar la existencia del equilibrio. En esta parte, para simplificar, vamos a suponer que $\succsim_i$ es fuertemente monótono y estrictamente convexo para todo i (podríamos no hacerlo). Esto tiene algunas consecuencias inmediatas:

1. Si $x_i(p)$ está bien definida, es una función.
2. En un equilibrio competitivo, $p \gg 0$.
3. Si nos concentramos exclusivamente en vectores de precios $p \gg 0$, el problema de maximización de utilidad de un agente i tiene algunas propiedades:
   - Existe una solución (por el Teorema de Weierstrass).
   - Esa solución es única (por $\succsim_i$ estrictamente convexo).
   - $x_i(p)$ es continua (por el Teorema del Máximo).

Existencia de equilibrio para 2 bienes

> **Proposición 8** (Condiciones de existencia de equilibrio para 2 bienes)**.** *Con $L = 2$, si, para todo i, $\omega_i \gg 0$, y $\succsim_i$ es racional, continuo, estrictamente convexo y fuertemente monótono, entonces existe un equilibrio competitivo en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Supongamos $p_2 = 1$. Ignoremos la posibilidad de $p_1 = 0$. Por la Ley de Walras, podemos examinar solamente un mercado, en nuestro caso el del bien 1.

Notar que $z_i(p)$ es el exceso de demanda para el individuo i dado los precios p.

$$z_1(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_{1i}$$

Como $x_i(p)$ es continua para todo i, $z_1(p)$ también lo es.

$$\text{Si } \; p_1 \to 0, \; z_1(p) \to \infty$$

Se puede demostrar formalmente. Usando ε arbitrariamente chico del bien 2 (recordar $\omega_{2i} > 0$) se consiguen cantidades arbitrariamente grandes del bien 1, y las preferencias son fuertemente monótonas.
Lo verificamos. Para cualquier i, $p_1 x_{1i} + x_{2i} \leq p_1 \omega_{1i} + \omega_{2i}$, por lo que

$$x_{2i} - \omega_{2i} \leq p_1(\omega_{1i} - x_{1i})$$

Si $p_1 \to \infty$ (lo que equivale a $p_2 \to 0$), el lado izquierdo de esta desigualdad tiende a infinito. Entonces, el lado derecho es positivo: $\omega_{1i} > x_{1i}$ para todo i. Por consiguiente, $z_1(p) < 0$.

Además,

$$\text{Si } \; p_1 \to \infty, \; z_1(p) < 0$$

Como $z_1(p)$ es continua, para algún p_1 tendremos $z_1(p_1, 1) = 0$. Esto se cumple por Bolzano. □

Existencia de equilibrio para el caso general

Para esta demostración vamos a necesitar algunos teoremas y lemas que nombraremos

Teorema 9 (Teorema de punto fijo de Brouwer)**.** *Si T es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^L$, con L finito, y $g : T \to T$ es una función continua, entonces existe $t^* \in T$ tal que $t^* = g(t^*)$.*

Para hacerlo, vamos a construir una función sobre el símplex de $(L-1)$ dimensiones.

$$S = \{p \in \mathbb{R}^L_+ | \sum_{l=1}^{L} p_l = 1\}.$$

Esta construcción implica considerar la posibilidad de $p_l = 0$ para algún bien l, lo que genera dos problemas técnicos.

1. **Problema 1:** El problema de maximización de utilidad de un agente **puede no tener solución.** Para evitar este problema, en nuestra demostración **vamos a acotar los conjuntos de consumo.**

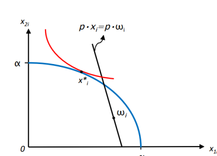
   $$X_i' = \{x \in \mathbb{R}^L_+ | \|x_i\| \leq \alpha\},$$

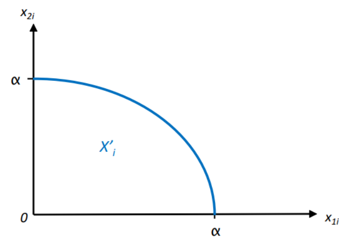
   con $\alpha > 0$ y $\|x_i\| = \left[\sum_{l=1}^{L} x_{li}^2\right]^{1/2}$

Notar que acotar los conjuntos de consumo genera un cambio en la ley de Walras. Ahora el agente puede no gastar toda su riqueza entonces la ley de walras se cumple con desigualdad

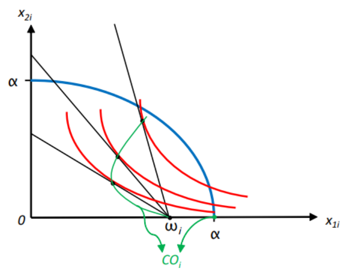
$$\forall p, \quad p \cdot z(p) \leq 0$$

Esto implica que en algún caso puede suceder que el óptimo original este afuera de la cota entonces el nuevo va a estar sobre la cota.





2. **Problema 2 (de arrow):**La demanda puede no ser continua, como en este gráfico:



Dada una sucesión $(p^n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $p^n \to (0,1)$, el conjunto presupuestario del agente i converge al segmento $(0,0),(\omega_{1i},0)$. Además, $x_i(p^n) \to (\omega_{1i},0)$. Pero en el límite, con $p_1 = 0$, el conjunto presupuestario es $(0,0),(\alpha,0)$, y $x_i(0,1) = (\alpha,0)$. **Para eludir este problema, vamos a suponer $\omega_i \gg 0$ para todo i.**

Luego de resolver los problemas podemos enunciar el teorema

Teorema 10 (Existencia de equilibrio). *Dada la economía de intercambio puro $\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^{I}, \overline{\omega}\}$ si para todo i*

- $X_i = \mathbb{R}_+^L$
- $\succsim_i$ *es racional, continuo, estrictamente convexo y fuertemente monótono.*
- $\omega_i \gg 0$

entonces existe un equilibrio competitivo

Lo vamos a demostrar usando un par de lemas.

Lema 11 (Existencia de un vector de precios tal que el excedente de demanda es no positivo). *Dada la economía de intercambio puro $\mathcal{E}' = \{(X_i', \succsim_i)\}_{i=1}^{I}, \bar{\omega}$, en la que las preferencias y las dotaciones cumplen los supuestos del teorema, existe un vector de precios p^* tal que $z(p^*) \leq 0$.*

- En el lema, los conjuntos de consumo están acotados.
- Ahora bien, como la dotación total de la economía está acotada, y $z(p^*) \leq 0$, el lema se aplica para valores de α para los que $\|x_i(p^*)\| \leq \alpha$ para todo i. Por ejemplo, $\alpha > \|\sum_{i=1}^{L} \omega_i\|$.

- Supongamos, a partir de ahora, que $\|x_i(p^*)\| \leq \alpha$.

Lema 12 (La cantidad óptima con cota también lo es sin cota)**.** *Para cualquier i, p, bajo los supuestos del teorema, si x_i^* resuelve*

$$\max_{x_i \in \mathbb{R}_+^L} u_i(x_i) \quad \textit{sujeto a} \quad p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i \quad \textit{y} \quad \|x_i\| \leq \alpha \tag{1}$$

y $\|x_i^*\| < \alpha$, entonces x_i^* resuelve

$$\max_{x_i \in \mathbb{R}_+^L} u_i(x_i) \quad \textit{sujeto a} \quad p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i. \tag{2}$$

Con estos dos lemas enunciados ahora se puede probar el teorema

Demostración del teorema de existencia del equilibrio. Por el primer lema, en $\mathcal{E}'$ sabemos que existe p^* tal que $z(p^*) \leq 0$. Para todo i, sea $x_i^* = x_i(p^*)$ en $\mathcal{E}'$. Si tomamos α suficientemente alto, $\|x_i^*\| < \alpha \ \forall i$. Entonces, por el segundo lema sabemos que $x_i^* = x_i(p^*)$ en $\mathcal{E}$.

Pero eso implica que $p^* \gg 0$ (o $x_i(p^*)$ no estaría bien definido en $\mathcal{E}$). Además, por la Ley de Walras en $\mathcal{E}$, $p^* \cdot z(fp^*) = 0$, por lo que

$$z(p^*) = 0$$

y $(p^*, (x_1^*, ..., x_L^*))$ es un equilibrio competitivo.

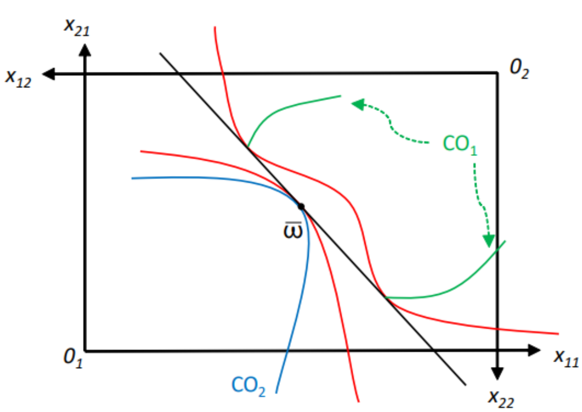
□

Supuestos objetables

Hicimos algunos supuestos más "objetables" que otros...

- $\omega_i \gg 0 \ \forall i$:
  Lo usamos para asegurar $x_i(p)$ continua $\forall i$, incluso donde $p_l = 0$ para algún l. Se puede evitar este supuesto, y pasar a hablar de "cuasiequilibrios"

- $\succ_i$ estrictamente convexo $\forall i$:
  Relajar la convexidad es simple. Habría que recurrir a otro argumento de punto fijo (Kakutani). Dejar la convexidad es más complejo.



En el gráfico las curvas de oferta no se intersecan por lo cual no hay equilibrio. Notar que CO_1 no es continua. Existe un caso en el garantizar la existencia no requiere convexidad y es en economías de réplica.

Equilibrio en economías de réplica

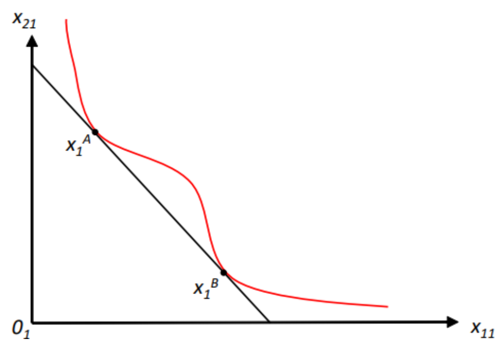
Partimos de $\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^{I}, \overline{\omega}\}$ e interpretamos a cada i, $i = 1, ..., I$ como un "tipo" de agente caracterizado por una terna $(X_i, \succsim_i, \omega_i)$.

Definición 13 (Réplica-r)**.** Una réplica-r de $\mathcal{E}$ es una economía en la que hay r agentes de cada tipo.

En este contexto x_{ih} se refiere a la canasta que corresponde al h-ésimo agente del tipo i. En tal caso podemos definir la demanda "promedio" del tipo i

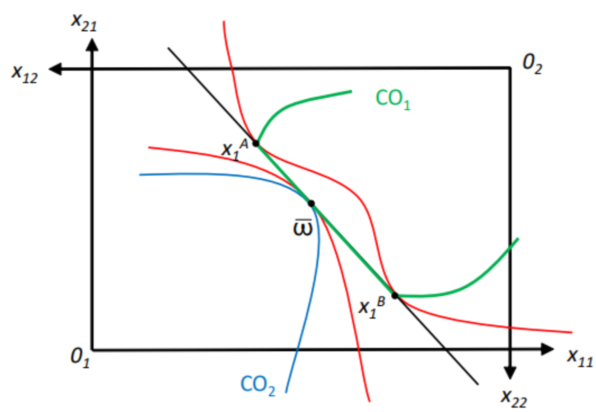
$$x_{ir}(p) = \frac{1}{r}\left(\underbrace{x_i(p) + x_i(p) + \ldots + x_i(p)}_{\text{r veces}}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\{(x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{ir}) \mid x_{ih} \in x_i(p) \forall h,\, h = 1, \ldots, r\}$$



En el gráfico, con $r = 2$, $x_{12}(p) = \left\{x_1^A, x_1^B, \frac{x_1^A + x_1^B}{2}\right\}$.

Notar que si $r \to \infty$, la demanda promedio del tipo i se convexifica. En el gráfico, todo el segmento $\overline{x_i^A x_i^B}$ forma parte de $x_{ir}(p)$, y el equilibrio existe.



Equilibrio competitivo y bienestar con intercambio puro

Suponiendo que el equilibrio existe ahora nos interesa estudiar sus propiedades acerca de si es eficiente o único.

Comenzamos evaluando los equilibrios desde el punto de vista del bienestar, lo que nos lleva a algunos de los resultados más importantes de la teoría del equilibrio general. Pregunta básica: **¿Cuál es la relación entre que una asignación sea de equilibrio competitivo y la optimalidad paretiana de la asignación?**

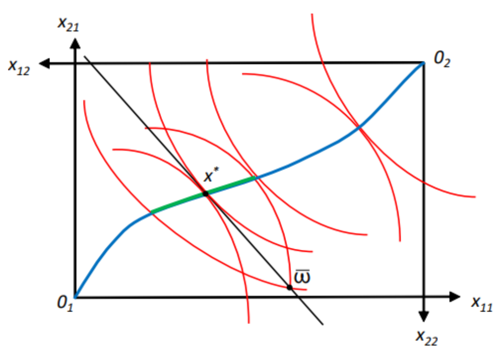
> **Definición 14** (Conjunto de asignaciones factibles)**.** El conjunto de asignaciones factibles es
>
> $$F = \{(x_1, ..., x_I) | x_i \in \mathbb{R}^L_+ \forall i \;\; y \;\; \sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_i\}$$

> **Definición 15** (Asignación optima paretiana)**.** Una asignación $(x_1, ..., x_I) \in F$ es óptima en el sentido de Pareto si no existe otra asignación $(x'_1, ..., x'_I) \in F$ tal que $x'_i \succsim x_i \forall i$ y $x'_j \succ_j x_j$ para algún j.

Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar

> **Teorema 16** (Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar)**.** *Si para todo i las preferencias $\succsim_i$ son racionales, continuas y localmente no saciadas. Entonces si $(p^*, (x_1^*, ..., x_I^*))$ es un equilibrio competitivo, $(x_1^*, ..., x_I^*)$ es óptima en el sentido de Pareto.*

Cualquier asignación de equilibrio, entonces, pertenece a la curva de contrato.



Si las funciones de utilidad son diferenciables, las tasas marginales de sustitución para todos los agentes se igualan en las asignaciones de equilibrio:

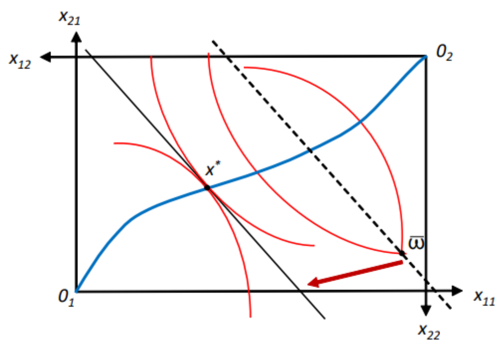
$$\frac{\partial u_i / \partial x_{li}}{\partial u_i / \partial x_{ki}} = \frac{\partial u_j / \partial x_{lj}}{\partial u_j / \partial x_{kj}} = \frac{p_l^*}{p_k^*} \;\; \forall l, k \;\; \forall i, j$$

Segundo Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar

Teorema 17. *Supongamos que para todo i, $\succsim_i$ racional y continua es representada por una función de utilidad $u_i(\cdot)$ no decreciente, es convexa y satisface no saciedad local. Entonces si $(x_1^*, ..., x_I^*)$ es una asignación óptima en el sentido de Pareto (y si $x_i^* \gg 0 \forall i$), entonces existen $p^* \in \mathbb{R}_+^L$ y un vector de transferencias $(t_1, ..., t_I) \in R^I$ tales que*

1. $\forall i\, x_i^* \in arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \quad s.a. \quad p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + t_i$
2. $\sum_{i=1}^{I} t_i = 0$

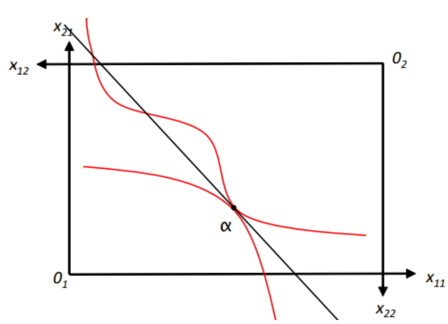
El Segundo Teorema afirma, entonces, que cualquier asignación (estrictamente positiva) en el conjunto de Pareto puede alcanzarse a través de un equilibrio competitivo si es posible realizar las transferencias de riqueza apropiadas. Gráficamente:



Supuestos objetables del segundo teorema

Hicimos supuestos fuertes. Mencionemos algunos.

- **En** $(x_1^*, \ldots, x_I^*)$, $x_i^* \gg 0$ **para todo** i. Sin ese supuesto, aparece el "problema de Arrow". Se puede relajar de modo análogo al caso de existencia. Ver MWG.
- $\succsim_i$ **convexo para todo** i. Sin convexidad, el resultado no se sostiene.



α es una asignación óptima de Pareto que nunca podría sostenerse en equilibrio competitivo.

- **Requisitos fortísimos:** un planificador puede lograr cualquier asignación óptima mediante un equilibrio competitivo si

  1. conoce $\succsim_i, \omega_i$ para todo i y
  2. puede redistribuir riqueza

  De todos modos, también hay un rol técnico para el resultado (Negishi).

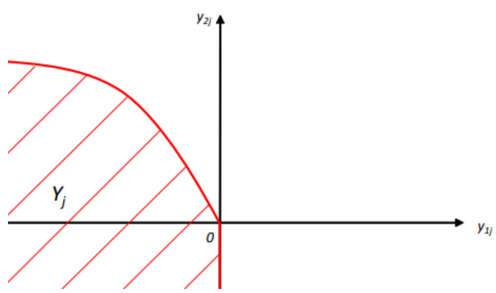
Equilibrio con producción

Objetivos

Al esquema anterior de intercambio puro, agregamos J firmas, $j = 1, ..., J$. Cada firma j cuenta con un conjunto de producción $Y_j \subseteq \mathbb{R}^L$

> **Definición 18** (Plan de producción factible)**.** Si $y_j \in Y_j$ entonces es un plan de producción factible para j

Observación 19. Tener en cuenta que $y_j = (y_1, ..., y_L)$ done $y_{lj} > 0$ (< 0) indica que el bien l es un output (input) para j.



Supuestos

Normalmente suponemos que, para todo j:

- Y_j es cerrado
- $0 \in Y_j$
- Y_j es convexo (rendimientos no crecientes a escala)

En general, tomamos una **economía de propiedad privada** o seas que las firmas pertenecen a los consumidores. Definimos θ_{ij} es la participación del consumidor i en la propiedad de la firma j. Naturalmente,

- $\theta_{ij} \in [0, 1] \forall i, j$
- $\sum_{i=1}^{I} \theta_{ij} \forall j$

El **beneficio de una firma** j que elige el plan de producción y_j, dado un vector de precios p es $p \cdot y_j$.

Entonces **la riqueza de un consumidor** i a precios p cuando las firmas eligen planes $(y_1, ..., y_J)$ es $p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j$

Observación 20. Dado el comportamiento tomador de precios, los propietarios de- cualquier firma unánimemente desean que esa firma elija un plan de producción que maximice sus beneficios.

Equilibrio competitivo

Definición 21 (Economía de propiedad privda)**.** Una economía de propiedad privada $\mathcal{E}$ con L bienes, I consumidores y J firmas es una tupla

$$\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^{I}, (Y_j)_{j=1}^{J}, \overline{\omega}, \theta\},$$

en la que $\overline{\omega}$ y, para todo i, X_i y $\succsim_i$ se definieron previamente, Y_j es el conjunto de producción de la firma j, y $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$, con $\theta_i = (\theta_{1i}, , \ldots, \theta_{Ji}), i = 1, \ldots, I$ donde θ_{ij} es la participación del consumidor i en la propiedad de la firma j.

Definición 22 (Equilibrio competitivo)**.** Un equilibrio competitivo es una terna

$$(p^*, (x_1^*, \ldots, x_I^*), (y_1^*, \ldots, y_I^*))$$

donde p^* es un vector de precios, $(x_1^*, \ldots, x_I^*)$ es una asignación de consumo y $(y_1^*, \ldots, y_I^*)$ es una asignación de producción , tal que

1. **Resuelve el problema del agente**: $\forall i, x_i^*$ resuelve

$$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \quad s.a. \quad p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot p^* \cdot y_j^*$$

2. **Resuelve el problema de la firma**: $\forall j, y_j^*$ resuelve

$$\max_{y_j \in Y_j} p^* \cdot y_j^*$$

3. **Se vacían los mercados**:

$$\sum_{i=1}^{I} x_i^* = \sum_{i=1}^{I} \omega_i + \sum_{j=1}^{J} y_j^*$$

Existencia del equilibrio con producción

Objetivos y supuestos

Si definimos para $j = 1, ..., J$

$$y_j(p) = \arg\max_{y_j \in Y_j} p \cdot y_j$$

y como siempre

$$x_i(p) = \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i) \quad s.a. \quad p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{J} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j(p)$$

podemos definir también la demanda excedente contemplando producción

$$\overline{z}(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i - \sum_{j=1}^{J} y_j(p)$$

Sobre la base de $\overline{z}(p)$, puede usarse un argumento de punto fijo (muy probablemente Kakutani) para demostrar existencia. Para dicho argumento, necesitaremos además de los supuestos sobre preferencias y dotación que

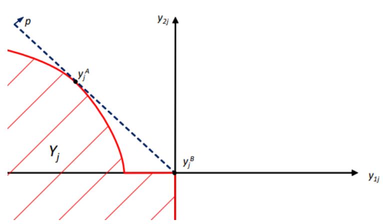
- Y_j convexo $\forall j$
- Condición técnica para evistar que la tecnología agregada produzca de la nada. [4] Una condición que se suele suponer para evitar este problema es "no free lunch" agregado o sea $\mathbb{R}_+^L \cap \left(\sum_{j=1}^{J} Y_j\right) \subseteq \{0\}$

[4] Por ejemplo tomemos $J = L = 2$ y supongamos que $(-1, 2) \in Y_1$, $(3/4, -1) \in Y_2$. Entonces,
1 un. del bien 1 $\rightarrow$ 2 un. del bien 2
2 un. del bien 2 $\rightarrow$ 1,5 un. del bien 1

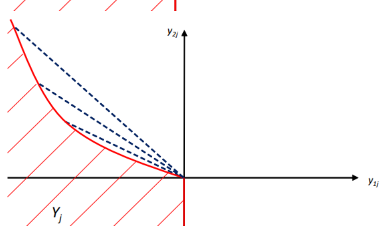
Equilibrio en economías de réplica

¿En economías de réplica, es posible garantizar la existencia del equilibrio sin convexidad, al estilo de lo que vimos en el caso de intercambio?

En el primer caso tenemos una no convexidad "acotada". Replicar hace que planes entre y_j^A e y_j^B formen parte de $y_j(p)$ (es decir, convexifica).



En el segundo caso, la convexidad es "no acotada", y replicar no convexifica. Los rendimientos crecientes a escala son un problema.



Equilibrio competitivo y bienestar con producción

Suponiendo que el equilibrio existe ahora nos interesa estudiar sus propiedades acerca de si es eficiente o único.

Definición 23 (Conjunto de asignaciones factibles)**.** En $\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^I, (Y_j)_{j=1}^J, \overline{\omega}, \theta\}$ el conjunto de asignaciones factibles es

$$\overline{F} = \{(x_1, ..., x_I), (y_1, ..., y_I) | x_i \in \mathbb{R}_+^L \forall i, \ \ y_j \in Y_j \forall j \ \ y \ \ \sum_{i=1}^I x_i = \sum_{i=1}^I \omega_i + \sum_{j=1}^J y_j\}$$

Definición 24 (Asignación óptima paretiana)**.** Una asignación $((x_1^*, ..., x_I^*), (y_1^*, ..., y_I^*)) \in \overline{F}$ es óptima en el sentido de Pareto si no existe otra asignación $((x_1', ..., x_I'), (y_1', ..., y_I')) \in \overline{F}$ tal que $u_i(x_i') \geq u_(x_i^*) \forall i$ y $u_j(x_j') > u_j(x_j^*)$ para algún j.

Primer Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar

El Primer Teorema se demuestra usando exactamente el mismo argumento formal que en el caso de intercambio puro. **No se requiere ningún supuesto adicional relevante.** En particular, el argumento no requiere convexidad.

Segundo Teorema Fundamental de la Economía del Bienestar

El Segundo Teorema se prueba con un argumento muy similar al del caso de intercambio puro. Se construye un conjunto de posibles vectores de demanda (al estilo de Z en el caso de intercambio puro) sin incluir producción, y se toma el conjunto $\sum_{j=1}^J Y_j + \sum_{i=1}^I \omega_i$. Dados ambos conjuntos, se usa el Teorema del Hiperplano Separador. El argumento, una vez más, requiere convexidad.

Unicidad del equilibrio

¿Bajo qué condiciones podemos asegurar que existe un único vector (normalizado) de precios de equilibrio? No es fácil pues los efectos ingreso complican todo. Si sube p_l para un bien l, ¿cae $z_l(p)$? Hay individuos con dotaciones del bien l, y con participaciones en la propiedad de firmas que producen el bien l.

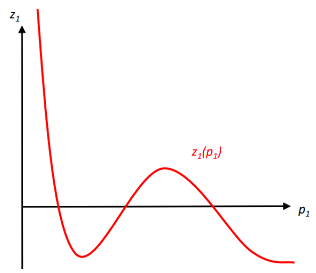
Supuestos

Supongamos, para simplificar que, para todo consumidor i, $\succsim_i$ es racional, continuo, estrictamente convexo y fuertemente monótono.

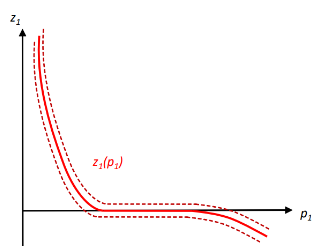
Unicidad local

Hay una variante menos ambiciosa de la pregunta por unicidad, la de unicidad local. Dado un vector de precios de equilibrio, ¿podemos asegurar que, en una vecindad de dicho vector, no hay otro vector de precios de equilibrio?

Tomemos intercambio puro, $L = 2$ y $p_2 = 1$



En este primer caso, no hay unicidad global pero sí local ("**economía regular**")



En este segundo, no hay unicidad local ("**economía no regular**"). Cualquier perturbación de los parámetros de la economía restaura la unicidad local.

Unicidad global

Sigamos pensando en economías de intercambio puro, para simplificar. Con nuestros supuestos, sabemos que la demanda excedente, $z(p)$, es continua, homogénea de grado cero (sólo importan los precios relativos) y satisface la Ley de Walras. Sabemos que estas tres propiedades no garantizan unicidad global.

Observación 25. ¿Es posible que nuestra economía tenga otras propiedades, no halladas aún por nosotros? Un resultado famoso, debido a Sonnenschein, Mantel y Debreu, da una respuesta negativa. Según dicho resultado, dada cualquier $z(p)$ continua, homogénea de grado cero y que satisfaga la Ley de Walras, es posible construir una economía $\mathcal{E}$ que satisfaga nuestros supuestos básicos cuya demanda excedente sea $z(p)$.

Entonces, **para garantizar unicidad global es necesario adoptar más supuestos que los básicos.** Existen distintos enfoques (es decir, conjuntos de supuestos) que garantizan unicidad:

- Suponer sustituibilidad bruta entre bienes
- Adoptar el axioma débil de preferencia revelada agregado
- Suponer diferenciabilidad, y adoptar supuestos adecuados.

Vemos brevemente los dos primeros

Unicidad global con sustituiblidad bruta entre bienes

Suponiendo intercambio puro para simplificar. Dos bienes l, k son sustitutos brutos para el agente i si

$$\uparrow p_l \implies \uparrow x_{ki}(p)$$

Es decir, si son sustitutos aun contemplando efectos ingreso.

Definición 26 (Sustituibilidad bruta)**.** La función de demanda excedente $z(p)$ satisface la condición de sustituibilidad bruta entre bienes si, para todo p' , p'' tales que

- para algún bien l, ${p''}_l > p'_l$
- para todo $k \neq l$, ${p''}_k = p'_k$

se cumple

$$z_k(p'') > z_k(p') \quad \forall k \neq l$$

Observación 27. Esta condición es suficiente para garantizar unicidad.

Proposición 28 (Sustituiblidad bruta implica unicidad global)**.** *Con nuestros supuestos, en una economía de intercambio puro cuya demanda excedente satisface la condición de sustituibilidad bruta entre bienes existe un único vector (normalizado) de precios de equilibrio.*

A WARP agregado también se lo puede llamar en español Axioma débil de la preferencia revelada agregado cuya abreviación es (ADPRA)

Unicidad global con WARP agregado (ADPRA)

Vamos a tomar un caso particular de economía con producción, en la que el conjunto de producción agregado es un cono convexo. Es decir, para $Y = \sum_{j=1}^{J} Y_j$, $y \in Y \Longrightarrow \lambda y \in Y \; \forall \lambda > 0$.

En otros términos, **la tecnología agregada exhibe rendimientos constantes a escala**. Los beneficios de las firmas van a ser nulos en equilibrio.

Proposición 29 (Vector de precios de equilibrio)**.** *p^* es un vector de precios de equilibrio si y sólo si*

- $p^* \cdot y \leq 0 \; \forall y \in Y$
- $z(p^*) \in Y$

donde $z(p) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p) - \sum_{i=1}^{I} \omega_i$.

Definición 30 (ADPRA)**.** La demanda excedente de los consumidores, $z(p)$, satisface el ADPRA si, para todo p', p'' tales que $p' \neq \lambda p'' \; \forall \lambda > 0$

$$z(p') \neq z(p''), \; p' \cdot z(p'') \leq 0 \Longrightarrow p'' \cdot z(p') > 0$$

Observación 31. Con $I = 1$, el ADPRA (o WARP agregado) se reduce al ADPR (o WARP individual). Pero con $I > 1$, que todos los agentes satisfagan el ADPR (o WARP) no implica que se satisfaga el ADPRA (WARP agregado).

Proposición 32 (ADPRA implica unicidad global)**.** *Si $z(p)$ satisface ADPRA (o WARP agregado), el conjunto de vectores de precios de equilibrio es convexo. Si el número de tales vectores es finito, entonces existe un único vector de precios de equilibrio.*

Observación 33 (Casos que cumplen ADPRA). Algunos casos posibles que satisfacen ADPRA (o WARP agregado) son

- **Consumidores idénticos:** iguales preferencias e iguales dotaciones;
- **Consumidores con iguales preferencias homotéticas** (pero no necesariamente iguales dotaciones);
- **Consumidores con preferencias homotéticas** (no necesariamente iguales) **y una distribución fija de la riqueza**; con intercambio puro,

$$\omega_i = \alpha_i \sum_{j=1}^{I} \omega_j \quad \forall i$$

  con $\alpha_i \in [0,1]\ \forall i$ y $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1$.

Núcleo o core de una economía

En cierta medida, las reglas básicas de funcionamiento de la economía que adoptamos hasta ahora son especiales. Tomemos ahora un marco institucional muy diferente, muy parsimonioso. Se basa en dos supuestos centrales:

- **Los agentes conocen la información "fundamental" de la economía** (preferencias, dotaciones, tecnología)
- **Los agentes pueden lograr compromisos**, acuerdos vinculantes de intercambio.

Supuestos

Para simplificar, nos concentramos en una economía de intercambio puro

$$\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^{I}, \overline{\omega}\},$$

con I agentes y L bienes en la que $X_i = \mathbb{R}_+^L$ y $\succsim_i$ es racional, continuo, estrictamente convexo y fuertemente monótono para todo i.

Coaliciones y core

Definición 34 (Coalición)**.** Una coalición S es un subconjunto no vacío de $\{1, ..., I\}$. O sea es un subconjunto de agentes.

Definición 35 (Bloqueo de una asignación)**.** Una coalición S bloquea una asignación $(x_1, \ldots, x_I)$ si existe una asignación entre los agentes en S, $(x'_i)_{i \in S}$, tal que

- $u_i(x'_i) \geq u_i(x_i) \; \forall i \in S$,
- $u_j(x'_j) > u_j(x_j)$ para algún $j \in S$,
- $\sum_{i \in S} x'_i = \sum_{i \in S} \omega_i$.

Es decir que S bloquea una asignación si, "separándose", es capaz de lograr una mejora en el sentido de Pareto para sus miembros.

Observación 36 (Implicancias del bloqueo de una asignación). Dada una asignación $(x_1, \ldots, x_I)$,

- si $u_i(x_i) < u_i(\omega_i)$, $S = \{i\}$ la bloquea,
- si $(x_1, \ldots, x_I)$ no es óptima de Pareto, $S = \{1, \ldots, I\}$ la bloquea.

Definición 37 (Asignación no bloqueada)**.** Decimos que una asignación $(x_1, ..., x_I)$ en $\mathcal{E}$ es no bloqueada si no existe ninguna coalición S que la bloquee.

Definición 38 (Núcleo o core de una economía)**.** El núcleo de S es el conjunto de asignaciones factibles no bloqueadas en S. Es decir,
$C(\mathcal{E}) = \{(x_1, ..., x_I) \in F | \; \nexists S \subseteq \{1, ..., I\}, S \neq \varnothing$ tal que S bloquea$(x_1, ..., x_I)\}$

Observación 39. Si $I = 2$, el núcleo de la economía es la curva de contrato. Pero con $I > 2$, caracterizar $C(\mathcal{E})$ no es tan simple .

Siempre sigue siendo cierto que $C(\mathcal{E})$ es un subconjunto del conjunto de asignaciones óptimas de Pareto, y tales que nadie está peor que quedándose con su dotación inicial.

Relación entre núcleo y equilibrio competitivo

Notemos que

- Con $I = 2$, es sencillo concluir que **cualquier asignación de equilibrio competitivo está en el núcleo**[5]
- Con $I \geq 2$, sólo sabemos que **una asignación de equilibrio competitivo no puede ser bloqueada por** $\{i\}$**, para todo** i**, ni por** $\{1, \ldots, I\}$.[6]

Proposición 40 (Generalización del primer teorema)**.** *Si* $(p^*, (x_1^*, \ldots, x_I^*))$ *es un equilibrio competitivo de* $\mathcal{E}$*, entonces* $(x_1^*, \ldots, x_I^*) \in C(\mathcal{E})$.

Ahora **la conversa no es cierta** pues la curva de contrato, con $I = 2$, incluye asignaciones que no son de equilibrio. Sin embargo, **en economías de réplica, esta conclusión cambia**[7]

[5] Esto sucede pues

- es óptima de Pareto, por el Primer Teorema del Bienestar
- el intercambio es voluntario, por lo que nadie termina peor que con su dotación inicial.

[6] Cabe preguntarse ¿Puede ser bloqueada por otras coaliciones? Con la generalización del Primer Teorema se ve que la respuesta es negativa.

[7] pues el núcleo "se reduce" y converge al conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo.

Relación entre núcleo y equilibrio competitivo en réplicas

Recordemos lo que vimos sobre réplicas y precisemos un poco más

Definición 41 (Economías de réplica). $\{1, \ldots, l\}$ se interpreta como un conjunto de "tipos" de agentes; cada tipo i está caracterizado por $X_i, \succsim_i, \omega_i$. Partimos de una "economía básica" $\mathcal{E} = \{(X_i, \succsim_i)_{i=1}^{l}, \overline{\omega}\}$ Una réplica-r de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_r$, es una economía en la que hay r agentes de cada tipo. El agente in es el n-ésimo agente del tipo i.

Llegaremos al resultado en dos pasos

1. Igual tratamiento

2. Convergencia propiamente dicha

Proposición 42 (Igual tratamiento). *Si $((x'_{in})_{i=1}^{I})_{n=1}^{r} \in C(\mathcal{E}_r)$, entonces $x'_{in} = x'_{im} \forall i, \forall n, m$. O sea que los del mismo tipo consumen la misma cantidad.* [8]

[8] Por este resultado, si una asignación está en el núcleo, se la puede describir mediante un vector de l canastas, una por tipo. No volveremos a usar "*in*" para asignaciones en el núcleo, sino solamente "*i*"

Proposición 43 (Convergencia propiamente dicha). *La idea central de la convergencia propiamente dicha es que, **cuando la economía se replica, el conjunto de asignaciones de equilibrio competitivo no cambia, pero el núcleo se contrae.***

Pregunta 44 (¿Por qué el conjunto de asignaciones de equilibrio no cambia?). *Esto sucede pues*

- *Si $(x_1^*, \ldots, x_I^*)$ es una asignación de equilibrio en $\mathcal{E}$, entonces también lo es en $\mathcal{E}_r$ para cualquier r, para el mismo vector de precios. Si a esos precios los agentes eligen óptimamente en $\mathcal{E}$ todos los agentes del mismo tipo, haciendo lo mismo, eligen óptimamente en $\mathcal{E}_r$.*

- *Al mismo tiempo, si una asignación $((x_{in}^*)_{i=1}^{I})_{n=1}^{r}$ es de equilibrio en $\mathcal{E}_r$ para $r > 1$, sabemos que está en el núcleo. Entonces, satisface igual tratamiento. Todos los agentes de cada tipo eligen óptimamente lo mismo. Al mismo vector de precios, en $\mathcal{E}$, cada agente, a los mismos precios, debería actuar igual que en $\mathcal{E}_r$, y los mercados se vaciarían. La asignación correspondiente es de equilibrio en $\mathcal{E}$.*

Teorema 45 (Si una asignación está en el núcleo entonces es un equilibrio competitivo). *Si $(x_1^*, ..., x_I^*) \in C(\mathcal{E}_r) \, \forall r$ entonces existe p^* tal que $(p^*, (x_1^*, ..., x_I^*))$ es un equilibrio competitivo de $\mathcal{E}$.*

Se obtienen resultados similares en economías con un continuo de agentes

Observación 46 (Comparación con el segundo teorema del bienestar). Notar que ahí no hay que redistribuir riqueza pero a diferencia del segundo teorema, el resultado solo vale para un número arbitrariamente grande de réplicas.

Teoría de juegos

Introducción

Origen de la teoría de juegos

La microeconomía tradicional estudia el comportamiento de los agentes de manera aislada. Es decir, se enfoca en el proceso de toma de decisiones en un contexto donde los individuos no prestan atención a lo que hacen los otros.

Sin embargo, el comportamiento de otros individuos afecta el bienestar de los agentes. En una gran cantidad de situaciones, los individuos reconocen la externalidad que terceros les imponen. **Lo que hacen otros individuos influye sobre el resultado que acaban obteniendo los agentes y en la decisión óptima de estos.**

De esta manera, se conduce a la consideración de decisiones interdependientes que, como corolario, redunda en un comportamiento estratégico de los agentes. La Teoría de Juegos formaliza estos problemas.

Objeto de estudio

Las decisiones interdependientes son aquellas en las que lo que hacen otros individuos influye en el resultado que obtienen los agentes. **Un juego es una representación formal de un problema de decisiones interdependientes.**

Ejemplos de esto son:

- Las decisiones que toma un técnico de un equipo de fútbol son diferentes a las decisiones que toma un pintor.
- Un partido de tenis es diferente a jugar al frontón, ya que el entorno es mucho más neutral en el frontón.

En los problemas de decisiones interdependientes, los agentes no están aislados, sino que interactúan entre sí. **La Teoría de los Juegos estudia estas decisiones interdependientes.** Los agentes (jugadores) son conscientes de esta interdependencia y, por lo tanto, su comportamiento es estratégico.

Aplicaciones

La Teoría de Juegos tiene aplicaciones en diversas áreas de la economía y las ciencias políticas. A continuación, se presentan algunas de las principales aplicaciones:

- Microeconomía
    - Oligopolio
    - Subastas
    - Modelos de Negociación
    - Modelos Principal-Agente
    - Mercado de Trabajo

- Seguros
- Patentes

- Macroeconomía
  - Guerra de tarifas (entre países)
  - Autoridades Monetarias vs Público
  - Tipo de Presidente del Banco Central
- Ciencias Políticas
  - Elecciones
  - Campañas Políticas
  - Votación conjunta o particular
  - Fijación de Agenda

Historia

La Teoría de los Juegos ha evolucionado a lo largo del tiempo, con contribuciones significativas de diversos autores en diferentes períodos. A continuación, se presenta un desarrollo de cada punto clave:

- **Cournot (1838):** Augustin Cournot fue uno de los pioneros en formalizar modelos de competencia entre empresas, introduciendo conceptos como el equilibrio de Cournot en oligopolios.
- **Bertrand (1883):** Joseph Bertrand desarrolló modelos de competencia de precios, explorando el equilibrio de Bertrand en mercados donde las empresas compiten fijando precios.
- **Zermelo (1913):** Ernst Zermelo estableció los fundamentos matemáticos para los juegos con estrategias mixtas y demostró el teorema que lleva su nombre, fundamental para la teoría de juegos.
- **Hotelling (1919):** Harold Hotelling introdujo el modelo de competencia espacial, donde las empresas eligen ubicaciones en un espacio geográfico para maximizar sus beneficios.
- **Von Neumann y Morgenstern (1944):** John von Neumann y Oskar Morgenstern publicaron "Theory of Games and Economic Behavior", que formalizó la teoría de juegos y estableció los conceptos de estrategia, equilibrio y utilidad esperada.
- **Nash (1950):** John Nash desarrolló el concepto de equilibrio en estrategias mixtas en juegos no cooperativos, conocido como el equilibrio de Nash, que revolucionó la teoría de juegos.

- **Década de los 50:** Argentina y Japón fueron importantes centros de desarrollo de la Teoría de los Juegos y la Econometría, trabajando en paralelo en la aplicación de estos modelos a contextos económicos.
- **Fines de los 70:** Se marcó un cambio en la evolución de la Teoría de los Juegos, con nuevas aplicaciones y desarrollos teóricos que rompieron el paralelismo anterior.
- **Historia de los 90:** Durante esta década, la teoría de juegos continuó consolidándose como una herramienta fundamental en economía, ciencias políticas y otras disciplinas sociales.
- **Actualidad:** Lo desarrollado desde la década de los 70 se ha consolidado como parte integral de la matemática aplicada a las ciencias sociales, con aplicaciones extendidas en análisis económico, político y estratégico.
- **La Matemática de las Ciencias Sociales:** La teoría de juegos ha contribuido significativamente a la comprensión matemática de los fenómenos sociales, proporcionando modelos formales para el análisis y la toma de decisiones en entornos interdependientes.

Clasificación de juegos

La teoría de los juegos estudia el comportamiento estratégico de individuos en interdependencia.

- **Juegos cooperativos:** Los juegos cooperativos **no hacen énfasis en las decisiones individuales, sino en coaliciones** y en lo que esperamos que pase dada una situación.
- **Juegos no cooperativos:** Los juegos no cooperativos **ponen énfasis en la decisión individual** y en lo que esperamos que los individuos hagan.[9]

[9] En este curso nos concentraremos en estudiar estos juegos no cooperativos.

Juegos no cooperativos

Clasificación de juegos no cooperativos

- **Juegos Estáticos:** Los jugadores no observan lo que otros juegan antes de jugar.
- **Juegos Dinámicos:** Al menos un jugador observa la jugada de otro antes de jugar (por ejemplo, Ajedrez).
- **Información Completa:** Los jugadores conocen la estructura completa y los pagos del juego.
- **Información Incompleta:** Los jugadores no conocen la estructura completa y los pagos del juego.

Conceptos de solución

Dividiremos los juegos no cooperativos en cuatro:

1. Juegos estáticos con información completa
2. Juegos dinámicos con información completa
3. Juegos estáticos con información incompleta
4. Juegos dinámicos con información incompleta [10]

[10] En este curso no se va a abarcar este tipo de juegos

Los conceptos de solución que se derivan de esta clasificación son

	Info. Completa	**Info. Incompleta**
Estáticos	Nash	Bayesiano de Nash
Dinámicos	Subjuego Perfecto	Bayesiano Perfecto, Secuencial

Formas de representacion de un juego

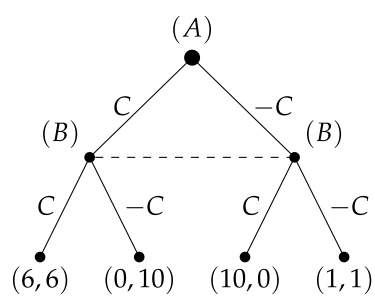
Existen diferentes formas de representar juegos no cooperativos:

- Forma extensiva (arbol)
- Forma normal (matriz)

Forma Extensiva

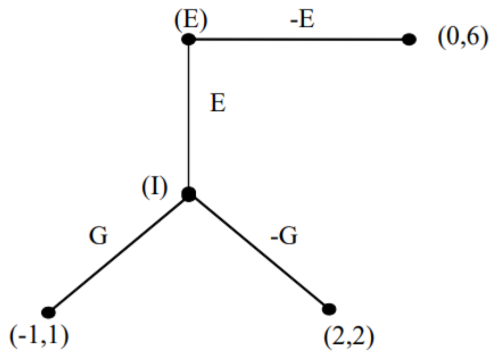
La forma extensiva representa el juego mediante un árbol de decisiones, donde cada nodo representa un estado del juego y las ramas las decisiones disponibles en ese estado. Veremos algunos ejemplos de ellos.

Ejemplo 47 (Dilema del prisionero)**.** El dilema del prisionero es un ejemplo clásico de teoría de juegos. Dos prisioneros, A y B, son arrestados y se les ofrece un trato. Si ambos confiesan (C), obtienen una condena de 6 cada uno. Si uno traiciona (no confiesa, -C) y el otro confiesa, el que confiesa obtiene una pena de 0 y el otro de 10. Si ambos deciden no confesar, obtienen una condena de 1 cada uno.



Este juego también es conocido como "Entry Deterrence".

Ejemplo 48 (Disuasión de entrada)**.** Este es un árbol de juego que representa una situación de "disuasión de entrada".El jugador E (entrante) decide si entrar (E) o no entrar (-E) . Si E entra, I (incumbente) decide si competir fuerte (G) o no (-G). Los pagos finales se muestran como pares ordenados de los pagos de E y I.



Los elementos que intervienen en un juego en forma extensiva son:

- Un conjunto finito de **nodos** X, un conjunto finito de posibles **acciones** A, y un conjunto finito de **jugadores** $\{1, \ldots, I\}$.
- Una **función** $p : X \to \{X \cup \emptyset\}$ **que indica el predecesor inmediato** de cada nodo x. [11]

[11] $p(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$, con excepción del nodo inicial x_0. Esto significa que todos los nodos tienen un predecesor inmediato, excepto el nodo inicial.

- Una **función** $s(x) : \{x' \in X : p(x') = x\}$, es decir, $s(x)$ son los **sucesores inmediatos** de x. Representa la inversa de $p(x)$.
- Iterando $p(x)$, encontramos $P(x)$, el conjunto de todos los predecesores de x.
- Iterando $s(x)$, encontramos $S(x)$, el conjunto de todos los sucesores de x.

Para que tenga estructura de árbol, requerimos que $P(x) \cap S(x) = \emptyset$ para todo x. Es decir, un predecesor no puede ser un sucesor de un nodo. Denotamos el conjunto de nodos terminales como $T = \{x \in X : s(x) = \emptyset\}$, es decir, son aquellos nodos que no tienen nodos sucesores. Por otro lado llamaremos nodos de decisión al complemento $X - T$.

También interviene

- Una **función** $a : X - \{x_0\} \to A$ **especifica la acción predecesora** que nos condujo a un determinado nodo (exceptuando el nodo inicial).[12]

[12] Se asume que si $x', x'' \in s(x)$ con $x' \neq x''$, entonces $a(x') \neq a(x'')$.
Es decir, si existen dos nodos sucesores inmediatos de x que son distintos, entonces deben haber provenido de dos acciones distintas. La misma acción no puede conducir al mismo nodo.

- Llamaremos $c(x) = \{a \in A : \text{para algún } x' \in s(x), a = a(x')\}$ al **conjunto de acciones disponibles** en cada nodo.

Por otro lado también se distinguen los conjuntos de información

- Sea $\mathcal{H}$ una **colección de conjuntos de información**, y sea una función $H : X - T \to \mathcal{H}$, la cual asigna un nodo de decisión x a un conjunto de información $H(x) \in \mathcal{H}$. Los conjuntos de información en $\mathcal{H}$ forman una partición de X. [13]

[13] Requerimos que si $H(x) = H(x')$, entonces $c(x) = c(x')$. Es decir, todos los nodos de decisión asignados a un mismo conjunto de información deben tener las mismas acciones disponibles, de tal manera que no se pueda inferir información adicional sobre dónde está el jugador. De este modo, podemos escribir las acciones disponibles en un conjunto de información H como $C(H) = \{a \in A : a \in c(x) \text{ tal que } x \in H\}$.

- Una **función** $\iota : \mathcal{H} \to \{N, 1, \ldots, I\}$, donde N refiere a la naturaleza como jugador, **asigna cada conjunto de información a un jugador.**
- A partir de esto, podemos definir los conjuntos de información donde juega el jugador i-ésimo como $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : i = \iota(H)\}$.

  Además debemos distinguir la naturaleza

- La naturaleza no es un jugador estratégico, sus elecciones no se determinan endógenamente.
- Definimos una función $\rho : \mathcal{H}_0 \times A \to [0, 1]$ que asigna probabilidades a las acciones en aquellos conjuntos de información donde la naturaleza toma decisiones.[14]
- Una colección de funciones de pago $u = \{u_1(\cdot), \ldots, u_I(\cdot)\}$, donde $u_i : T \to \mathbb{R}$, asigna utilidades a los jugadores para cada nodo terminal que pudiera alcanzarse.

  Entonces, formalmente, definimos un juego en forma extensiva como

[14] Esta función satisface las siguientes propiedades:

- $\rho(H, a) = 0$ si $a \notin C(H)$.
- $\sum_{a \in C(H)} \rho(H, a) = 1$ para todo $H \in \mathcal{H}_0$.

Definición 49 (Juego en forma extensiva)**.** Juego en forma extensiva es una colección Γ_E tal que:

$$\Gamma_E = \{X, A, I, p(\cdot), a(\cdot), \mathcal{H}, H(\cdot), \iota(\cdot), \rho(\cdot), u\}$$

Forma Normal

La forma normal representa el juego mediante una matriz que muestra las estrategias y pagos posibles para cada jugador, sin representar explícitamente la secuencia temporal de las decisiones.

Estrategia mixta es uan estrategia derivada de la forma normal. Estrategia de conducta son las estrategias mixtas asociadas a la formas extensiva. Le pedimos a los jugadores que nos defina con que probabilidad van a jugar cada una de las acciones.

Definición 50 (Estrategia)**.** Una estrategia es un **plan contingente completo** para la acción. Especifica cómo un jugador actuará en cada posible circunstancia en la que le toque jugar.
Formalmente, la estrategia del jugador i-ésimo es una función:

$$s_i : \mathcal{H}_i \to A \quad \text{tal que} \quad s_i(H) \in C(H) \; \forall H \in \mathcal{H}_i$$

Notemos que la estrategia no se define por nodo de decisión, sino por conjunto informativo. Cada perfil de estrategias induce un resultado del juego al determinar una distribución probabilística sobre los nodos terminales.

Podemos definir un juego a través de su forma normal:

Definición 51 (Juego en forma normal)**.** La representación de juegos en forma normal (o estratégica) especifica tres elementos:

1. Un conjunto de jugadores $\mathcal{I} = \{1, \ldots, I\}$.
2. Para cada jugador i, un espacio de estrategias puras $S_i = \{s_{1i}, s_{2i}, \ldots, s_{K_i i}\}$.
3. Para cada jugador i, una función de utilidad (o de "pagos"):

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_I \to \mathbb{R}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_I) \mapsto u_i(s_1, s_2, \ldots, s_I)$$

Notar que $s = (s_1, \ldots, s_I) = (s_i, s_{-i})$ es un "perfil de estrategias". El conjunto de perfiles de estrategias es $S = \prod_{i=1}^{I} S_i$. Tomamos a cada S_i como finito para simplificar, aunque nada depende de eso.

Para cada i, $u_i(\cdot)$ es una función de utilidad de Bernoulli, que refleja el comportamiento de un agente que respeta los axiomas de von Neumann y Morgenstern. Entonces, podemos computar utilidades esperadas. Los jugadores intentan maximizar el valor esperado de $u_i(\cdot)$.

Por lo tanto, un juego en forma normal es una terna:

$$\{I, (S_i)_{i=1}^{I}, (u_i)_{i=1}^{I}\}$$

Relación entre la forma normal y la extensiva

En Γ_E está toda la información de un juego, mientras que Γ_N es un "resumen" de Γ_E.

Proposición 52. *Existe una única forma normal Γ_N asociada a una forma extensiva Γ_E. Pero el recíproco no es verdadero pues distintas formas Γ_E se mapean en la misma forma normal Γ_N.*

Las soluciones asociadas a la forma extensiva pueden diferir. Se podría decir que a veces la forma extensiva tiene "demasiada información".

Estategias

Definición 53 (Estrategia pura)**.** Una estrategia pura especifica una elección $s_i(H)$ para cada $H \in \mathcal{H}_i$.

Definición 54 (Estrategia mixta)**.** La estrategia mixta es una función de probabilidad

$$\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1]$$

Asigna a cada estrategia pura s_i una probabilidad $\sigma_i(s_i) \geq 0$ que cumple:

$$\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$$

Nótese que las estrategias mixtas permiten convexificar el espacio de estrategias.

Definición 55 (Espacio de estrategias mixtas)**.** Denotamos con $\Delta(S_i)$ al espacio de estrategias mixtas, el cual incluye también las estrategias puras.

Definición 56 (Utilidad de un perfil de estrategias)**.** Las estrategias mixtas conducen a un resultado que es aleatorio y, por lo tanto, lleva a una distribución de probabilidad sobre los nodos terminales del juego. La utilidad de un perfil de estrategias mixtas σ es:

$$U_i(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_I) = \sum_{s \in S} [\sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2) \ldots \sigma_I(s_I)]\, u_i(s_1, \ldots, s_I)$$

Las probabilidades de jugar cada estrategia son independientes, es decir, no existen señales comunes entre los jugadores.

En estrategias mixtas, se asume que el jugador randomiza sobre el conjunto de estrategias puras. En contraste, en las estrategias de conducta, el jugador randomiza sobre las acciones disponibles en cada conjunto de información.

Definición 57 (Estrategias de conducta)**.** Dado un juego en forma extensiva Γ_E, definimos las estrategias de conducta si para cada conjunto de información $H \in \mathcal{H}_i$ y para cada acción $a \in C(H)$ el jugador i-ésimo especifica una probabilidad

$$\lambda_i(a, H) \quad \text{donde} \quad \sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1 \quad \forall H \in \mathcal{H}_i$$

Notemos que tanto en estrategias mixtas como en estrategias de conducta especificamos todo lo que cada jugador debe hacer.

Corolario 58 (Relación estrategias mixtas y de conducta)**.** *Dada una estrategia mixta, existe una única estrategia de conducta asociada. Sin embargo, existen varias estrategias mixtas que coinciden con la misma estrategia de conducta.*

Pero para nosotros es equivalente. ¿Por qué? Todas producen la misma distribución sobre los nodos terminales que es lo único que importa.

Juegos estáticos con información completa

Introducción y supuestos

Para los juegos estáticos con información completa, con la forma normal alcanza.

Suponemos dominio público o conocimiento común (common knowledge) de toda la información en la matriz. Cada jugador lo sabe, sabe que sus rivales lo saben, sabe que sus rivales saben que él lo sabe et iterum.

Modo de juego

Cabe preguntase ¿Qué esperaríamos que escojan los jugadores? Tomemos al **jugador (1)**. En primer lugar, **podría advertir que no puede condicionar su acción a lo que hagan los otros jugadores** ya que no observa lo que estos hacen previo a tomar su acción. Asimismo, **los otros jugadores** tampoco observan lo que (1) hace. Entonces **tampoco pueden condicionar en lo que hace (1)**. Luego, (1) no puede tomar una acción con el objeto de influenciar lo que hacen los otros. Así, **el jugador (1) va a tomar la acción de los otros jugadores como dada.** Lo mismo ocurre para todos los jugadores.

Estrategias estrictamente dominantes

Ejemplo 59 (Juego del prisionero)**.** Dado el siguiente juego

		(2)	
		C	-C
(1)	C	1,1	5,0
	-C	0,5	4,4

El jugador (1) puede imaginar dos situaciones:

- (2) confiesa:

$$\left.\begin{aligned} u_1(C \mid C_2) &= 1 \\ u_1(-C \mid C_2) &= 0 \end{aligned}\right\} decide\, C$$

- (2) no confiesa:

$$\left.\begin{aligned} u_1(C \mid C_2) &= 5 \\ u_1(-C \mid C_2) &= 4 \end{aligned}\right\} decide\, C$$

De este modo, independientemente de lo que haga el otro jugador, a (1) siempre le conviene confesar. **Esperamos que los dos confiesen (es un juego simétrico) (CC) lleva a utilidades (1, 1)**. [15]

Generalizando del anterior ejemplo podemos derivar el primer concepto de solución el cual se denomina **Equilibrio en estrategias estrictamente dominantes**.

[15] Esto no es Pareto óptimo. Cada jugador toma decisiones considerando únicamente su propio bienestar y existe una influencia de cada jugador sobre el resultado que obtiene el resto. En otros términos, la mano invisible de Adam Smith no actúa debido a que cada jugador impone una externalidad sobre el otro. Podriamos pensar no hay externalidades (son la esencia de la Teoria) ¿Qué pasa con el Teorema de Coase? Aca existen costos de transaccion. No se permiten contratos.

Definición 60 (Estrategia estrictamente dominante)**.** Decimos que una estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ es una estrategia estrictamente dominante para el jugador i-ésimo en un juego Γ_N si:

$$u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) > u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right) \forall \sigma_{-i} \forall \sigma_i' \neq \sigma_i$$

En palabras, decimos que una estrategia σ_i **es estrictamente dominante para el jugador i-ésimo si maximiza su pago para cualquier cosa que pudieran jugar sus rivales.** Le gana a todas las otras estrategias siempre.

Proposición 61. *Nótese que puede haber solo una estrategia dominante. En caso de existir una estrategia dominante, los jugadores la elegirían. Y siempre que existe es en puras.*

Estrategias estrictamente dominadas

Ejemplo 62. Dado el siguiente juego

(2)

		D	E
	A	2,-2	-2,2
(1)	B	-2,2	2,-2
	C	-3,6	-4,4

Ninguno de los jugadores posee una estrategia estrictamente dominante. En este caso, el jugador (I) preferiría siempre jugar la acción A respecto a la C para cualquier conjetura que pudiera armarse. Es decir, A domina estrictamente a C. Si bien para este juego no redundaría en determinar qué jugaría el jugador, al menos permitiría deducir qué es lo que no jugaría. No va a jugar C.

Definición 63 (Estrategia estrictamente dominada)**.** Una estrategia $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ está estrictamente dominada para el jugador i-ésimo si existe otra estrategia $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ tal que

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

En tal caso, decimos que σ_i' domina estrictamente a σ_i.

Observación 64. En la definición, solamente verificamos que σ_i' genere pagos más altos que σ_i cuando los rivales juegan estrategias puras. ¿Por qué?

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \; \forall s_{-i} \iff u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \; \forall \sigma_{-i}$$

En resumen, los pagos "contra mixtas" son combinaciones convexas de los pagos "contra puras".

Proposición 65 (Combinación mixta con estrategia dominada)**.** *Notar que si una estrategia pura s_i está dominada, entonces cualquier estrategia mixta que pondere positivamente a esta estrategia $(\sigma_i(s_i) > 0)$ estará dominada también.*

Proposición 66 (Puras solo dominadas por mixtas)**.** *Puede haber puras dominadas por mixtas pero no dominadas por puras? Sí*

Proposición 67 (Mixta dominada no compuesta por puras dominadas)**.** *Puede haber mixtas dominadas a pesar de que ninguna de las puras que la componen este dominada? sí*

La determinación de estrategias dominadas involucra la comparación de a pares mientras que la determinación de dominantes involucra una comparación de la estrategia contra todas las otras.

> **Definición 68** (Jugador racional)**.** Un jugador es **racional en caso de que no juegue estrategias estrictamente dominadas**.

Proposición 69 (Racionalidad y estrategia dominante)**.** *Racionalidad implica que si hay dominante es eso lo que juegan. Al revés solo vale si* $\#S_i = 2$. [16]

[16] Si existe una estrategia dominante todas las otras estan dominadas Si existe una dominada solo indica que existe otra estrategia que la está dominando, lo cual no puede traducirse corno que exista una dominante. Esto únicamente ocurre cuando $\#S_i = 2$.

Eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas

Ejemplo 70. Tomemos el siguiente juego

(2)

(1)		C	D	E
	A	1,0	1,2	0,1
	B	0,3	0,1	2,0

Veamos que para el jugador (1) A no domina a B y B no domina a A. Para el jugador (2), C no domina a D y D no domina a C, pero D domina a la acción E. Es decir, bajo la racionalidad de los jugadores, (1) escogería entre (A y B) y (2) entre (C y D) . Queda

(2)

(1)		C	D
	A	1,0	1,2
	B	0,3	0,1

Para obtener una solución de este juego, podríamos agregar supuestos sobre el conocimiento de la racionalidad entre los jugadores. Supongamos que (1) sabe que (2) es racional. Luego, (1) sabría que (2) no jugaría E. De este modo, (1) tendría que B se encontraría dominada por A y, por tanto, (1) acabaría jugando A. (Usamos por primera vez que conocen los pagos de los otros)

(2)

(1)		C	D
	A	1,0	1,2

Si (2) sabe que (1) es racional y que (1) sabe que él es racional, entonces sabe que (1) juega A entonces (2) juega D. Resultado

(2)

(1)		C
	A	1,0

Definición 71 (Eliminación de estrategias estrictamente dominadas)**.** En términos generales, podríamos asumir conocimiento común de la racionalidad. O sea que todos saben que todos saben et iterum que todos son racionales. **Obtenemos así una solución a través de las estrategias sobrevivientes de un proceso de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas.** El procedimiento es

1. Elimino las estrategias puras que se encuentran dominadas por puras.
2. Elimino las estrategias puras que se encuentran dominadas por mixtas.
3. Eliminar las estrategias mixtas que dan una probabilidad positiva a una estrategia pura dominada.
4. Eliminar las estrategias mixtas que están dominadas a pesar de que ninguna de las estrategias que forman el soporte esté dominada.
5. Volver a 1. Continuar hasta que no elimino mas nada.

Si del proceso[17] surge una sola estrategia para cada jugador. Decimos que el juego se resuelve por la eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas.

Es de notar que **este procedimiento es robusto al orden en que se realiza la eliminación sucesiva.** Es decir, el conjunto de estrategias sobrevivientes termina siendo el mismo independientemente del orden en que efectuemos la eliminación.

[17] Es de destacar que, para llevar a cabo el proceso, necesitamos también de conocimiento común de la estructura del juego.

Estrategias débilmente dominadas

Definición 72 (Estrategia débilmente dominada)**.** Una estrategia $\sigma_i \in \Delta(S_i)$ está débilmente dominada para el jugador i-ésimo si existe otra estrategia $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$ tal que

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) \geq u_i(\sigma_i, s_{-i}) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

y además

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \qquad \text{para algún } s_{-i} \in S_{-i}$$

En tal caso, decimos que σ_i' domina débilmente a σ_i.

Proposición 73. *Racionalidad no implica que un jugador no elija estrategias débilmente dominadas.*

Proposición 74. *Estrictamente dominada* $\Longrightarrow$ *Débilmente dominada. Pero el recíproco no es verdadero*

Estrategias débilmente dominantes

Definición 75 (Estrategia débilmente dominante)**.** Si una estrategia σ_i domina débilmente a todo $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$, decimos que es débilmente dominante si

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \ \forall \sigma_{-i}, \forall \sigma_i'$$

y además

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \ \forall \sigma_i', \exists \sigma_{-i}$$

Mejor respuesta

Pensemos en cambio en una pregunta complementaria. ¿Cuál es el conjunto de estrategias que un jugador, optimizando, podría usar? Aquellas que podrían ser óptimas para él según alguna conjetura que tenga sobre el comportamiento de los rivales. Cambio importante: cada jugador tendrá conjeturas o predicciones sobre el comportamiento de sus rivales. Esto **nos lleva a la noción de racionalizabilidad.**

Definición 76 (Mejor respuesta)**.** Decimos que para el jugador i-ésimo σ_i es una mejor respuesta a la estrategia de los rivales σ_{-i} si

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \forall \sigma_i'$$

Definición 77 (Conjunto de mejores respuesta)**.** Definimos el conjunto de mejores respuesta a la estrategia σ_{-i} a

$$MR_i\left(\sigma_{-i}\right) = \left\{\sigma_i : u_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}\right) \geq u_i\left(\sigma_i', \sigma_{-i}\right) \forall \sigma_i'\right\}$$

En palabras, σ_i es mejor respuesta en caso de que, dada una estrategia de los otros σ_i es elección óptima. No hay nada mejor.

Proposición 78 (Mejor respuesta y estrictamente dominante)**.** *σ_i es estrictamente dominante entonces es siempre la mejor respuesta*

$$\sigma_i = MR_i\left(\sigma_{-i}\right) \forall \sigma_{-i}$$

Definición 79 (Nunca mejor respuesta)**.** σ_i nunca es mejor respuesta si $\nexists\ \sigma_{-i}$ para el cual es mejor respuesta. En palabras, significa que no hay σ_{-i} que se pueda formar el jugador tal que lo conduzca a elegir σ_i.

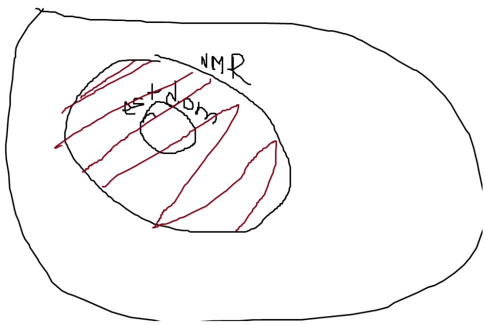
Proposición 80 (Nunca mejor respuesta y estrictamente dominada)**.** *σ_i esta estrictamente dominada entonces nunca es mejor respuesta. La recíproca no es verdadera (si vale para juegos de dos jugadores)*

> **Definición 81** (Racionalidad Bayesiana)**.** El jugador i-ésimo es bayesianamente racional en caso de que no juegue estrategias que nunca son mejor respuesta.

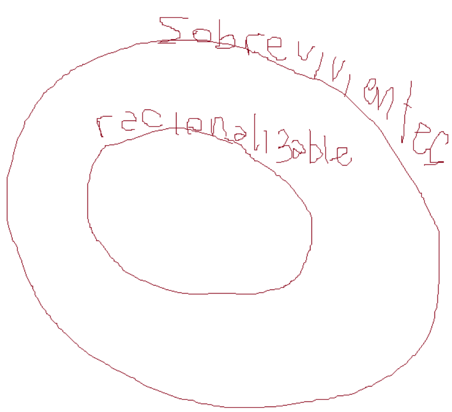
Observación 82 (Relación de racionalidad bayesiana con racionalidad)*.* Previamente habíamos definido racionalidad como no jugar estrategias estrictamente dominadas. La relación de esta con racionalidad bayesiana viene dada por:

$$\text{Racionalidad bayesiana} \implies \text{Racionalidad}$$

$$\text{Racionalidad} \;\not\!\!\implies \text{Racionalidad bayesiana}$$



> **Definición 83** (Estrategias racionalizables)**.** Si asumimos que existe conocimiento común de la racionalidad bayesiana podemos hacer **eliminación sucesiva de estrategias que nunca son mejor respuesta**. Las estrategias sobrevivientes a este proceso se conocen con el nombre de estrategias racionalizables.



Observación 84 (Propiedades estrategias racionalizables)*.* El proceso de estrategias racionalizables tiene las siguiente propiedades

1. Este proceso es **robusto al orden de eliminación**

2. Estrategias racionalizables $\subseteq$ estrategias sobrevivientes al proceso de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas. [18]

3. Para que las estrategias sean racionalizables **se debe poder formar una cadena de justificaciones sobre por qué se eligió cada acción.** Un ciclo así llegamos al infinito.

4. Bajo condiciones no muy exigentes, se puede probar que el conjunto de perfiles de estrategias racionalizables es no vacío.

[18] Una estrategia estrictamente dominada nunca es mejor respuesta pero su recíproca no es verdadera. Conjuntos son iguales en caso de que el número de jugadores sea dos.

Equilibrio de Nash

Definición 85 (Equilibrio de Nash)**.** Decimos que un perfil de estrategias σ^* es un equilibrio de Nash si

$$\sigma_i^* \in MR_i(\sigma_{-i}^*) \ \forall i$$

Es decir, para cada i debe cumplirse que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \ \forall \sigma_i; \ \forall i$$

En palabras, un equilibrio de Nash cada jugador está en su mejor respuesta.

Así, el Equilibrio de Nash asume el conocimiento común de la racionalidad bayesiana y la estructura del juego agrega que las conjeturas sean las "correctas".

Nótese que éste es un mero refinamiento de los equilibrios propuestos anteriormente, es un subconjunto de los equilibrios anteriores

$$\text{NE} \subseteq \text{Racionalizables} \subseteq \text{Sobrevivientes}$$

El concepto de equilibrio de Nash (EN) brinda predicciones más precisas.

Partimos de la misma base que en el caso de racionalizabilidad.

- Cada jugador forma una conjetura o predicción de cómo van a jugar sus rivales.
- Dada su predicción, responde óptimamente.

Pero el concepto de EN agrega un requisito adicional: todas las conjeturas tienen que ser "correctas", consistentes entre sí.

Entonces:

- Todo jugador responde óptimamente a una conjetura.
- Las conjeturas son correctas
- Todo jugador responde óptimamente al comportamiento de sus rivales

Se generan conjeturas que se autoconfirman, una situación "estable": si todos creen que se va a jugar así, nadie tiene incentivos a desviarse. Nota: es suficiente verificar que ninguna estrategia pura sea un desvío conveniente. Como siempre, la utilidad que genera una estrategia mixta como desvío es una combinación convexa de la utilidad generada por estrategias puras.

> **Teorema 86.** *Todo Equilibrio de Nash sobrevive al PESEED (proceso de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas). Pero notar que hay equilibrios de Nash que no sobreviven al PESEDD (proceso de eliminación sucesiva de estrategias débilmente dominadas).*

En todo EN en estrategias mixtas, el jugador tiene que estar indiferente entre todas las estrategias puras a las que asigna probabilidad positiva. • En caso contrario, podría reasignar probabilidades entre las estrategias puras y ganar utilidad esperada, una contradicción. De hecho, dicha indiferencia es una buena forma de hallar EN en estrategias estrictamente mixtas.

Definición alternativa de Nash

$S_i^+ \subset S_i$ es el conjunto de estrategias que i juega con probabilidad positiva en $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_I)$

σ es un equilibrio de Nash $\iff$

1. $U_i(s_i, \sigma_{-i}) = U_i(s_i', \sigma_{-i}) \quad \forall s_i, s_i' \in S_i^+$
2. $U_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq U_i(s_i'', \sigma_{-i}) \quad \forall s_i \in S_i^+, \forall s_i'' \notin S_i^+$

> **Proposición 87** (Cantidad de EN). *Siempre que hay equilibrio de Nash puede haber*
>
> - *sólo 1 en puras*
> - *sólo 1 en mixtas*
> - *2 en puras y 1 en mixtas*

> **Proposición 88.** *Si algún jugador tiene una estrategias dominante entonces existe solo un equilibrio y es en puras*

> **Proposición 89.** *Si ningún jugador tiene estrategia dominante entonces existe un equilibrio en estrategias mixtas. Puede haber 2 en puras o no.*

Existencia del equilibrio de Nash

Proposición 90. *Un juego en forma estratégica $\{\mathcal{I}, (S_i)_{i=1}^{I}, (u_i)_{i=1}^{I}\}$ es finito si S_i es finito para todo i.*

> **Teorema 91** (Nash - Existencia en forma normal). *Todo juego finito en forma normal tiene al menos un equilibrio de Nash.*

¿Por qué puede ser razonable esperar que se juegue un EN? "I jugadores racionales, con conocimiento común del juego y de la racionalidad de los jugadores, deberían jugar un EN". Pero eso no es correcto pues nuestros supuestos de racionalidad y conocimiento nos llevan sólo hasta Sobrevivientes PESEED.

EN como resultado de un proceso de evolución o aprendizaje. Existen dos ramas de la teoría que evalúan esta posibilidad: la teoría de juegos evolutivos y la teoría de aprendizaje en juegos. Convenciones sociales, o "puntos focales" EN como resultado de un acuerdo o de comunicación previa.

Teorema 92 (Glicksberg - Existencia en forma estratégica)**.** *Todo juego en forma estratégica en el que*

- S_i *es no vacío y compacto para todo* i*,*
- $u_i(\cdot)$ *es continua en* $s = (s_i, s_{-i})$ *para todo* i*,*

tiene al menos un equilibrio de Nash (mixtas o puras)*. Notemos que no se requiere* S_i *convexo (las estrategias mixtas convexifican).*

Teorema 93 (Debreu-Glicksberg-Fan - Existencia en forma estratégica)**.** *Todo juego en forma estratégica en el que*

- S_i *es no vacío, compacto y convexo para todo* i*,*
- $u_i(\cdot)$ *es continua en* s *y cuasicóncava en* s_i *para todo* i*,*

tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Equilibrio correlacionado

Hasta ahora, solamente hemos permitido que los jugadores elijan sus estrategias mixtas (es decir, distribuciones de probabilidad) de forma independiente. **En algunas circunstancias, es posible que correlacionen sus elecciones.**

Ejemplo 94 (Batalla de los sexos)**.** Tomemos a la batalla de los sexos como ejemplo

	F	C
F	2,1	0,0
C	0,0	1,2

Los tres EN del juego generan pagos $(2,1)$, $(1,2)$ y $(2/3, 2/3)$ Imaginemos ahora que los agentes observan una "señal aleatoria", y la usan para coordinar sus elecciones. Por ejemplo, un tercer agente (naturaleza) tira una moneda, y si sale cara (ceca) ambos jugadores eligen F (C). Tenemos un "equilibrio": nadie quiere desviarse. Y los pagos son $(3/2, 3/2)$

Pero existen más posibilidades.

- Pensemos en que un tercer agente tira un dado. La señal ahora tiene un conjunto de resultados posibles $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Es posible que el jugador 1 observe solamente si el resultado fue "bajo" o "alto". Es decir, que sepa si el resultado se halla en $\{1, 2, 3\}$ o en $\{4, 5, 6\}$
- Asimismo, es posible que el jugador 2 observe si el resultado fue par o impar. Es decir, que distinga si el resultado se halla en $\{1, 3, 5\}$ o en $\{2, 4, 6\}$

Generalicemos un poco. Pensemos en una terna $\{\Omega, (H_i)_{i=1}^{I}, p\}$, donde

- Ω es un espacio de estados finito [19]
- p es una distribución de probabilidad sobre Ω
- para cada i, H_i es una partición de Ω [20] .

[19] e.g. $\{\text{Cara, Ceca}\}$ para la moneda, $\{1,2,3,4,5,6\}$ para el dado

[20] e.g. los subconjuntos de Ω entre los que i distingue, como $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\}\}$

Sea ω un elemento de Ω (ej.: 1 en el caso del dado), y sea h_i un elemento de H_i (ej.: $\{1,2,3\}$). Un jugador puede condicionar lo que juega a lo que observa.

Omitiendo formalidades, pensemos en una estrategia para i en este contexto. Es una función

$$\hat{\sigma}_i : \Omega \to \Delta(S_i)$$

tal que $\hat{\sigma}_i(\omega') = \hat{\sigma}_i(\omega'')$ si $\omega', \omega'' \in h_i$ para algún $h_i \in H_i$ (ej.: para el jugador 1, jugar F si sale $\omega \in \{1,2,3\}$, C si sale $\omega \in \{4,5,6\}$).

Sea $\widehat{\Sigma}_i$ el conjunto de tales estrategias para i. Ahora podemos definir equilibrio correlacionado.

Definición 95 (Equilibrio correlacionado)**.** Para un juego en forma estratégica $\{\mathcal{I}, (S_i)_{i=1}^I, (u_i)_{i=1}^I\}$, un equilibrio correlacionado consiste en:

1. una terna $\{\Omega, (H_i)_{i=1}^I, p\}$,
2. un perfil de estrategias $\widehat{\sigma}^* = (\widehat{\sigma}_1^*, \dots, \widehat{\sigma}_n^*)$, con $\widehat{\sigma}_i^* \in \widehat{\Sigma}_i$ para todo i, tales que, para todo i,

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\widehat{\sigma}_i^*(\omega), \widehat{\sigma}_{-i}^*(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) u_i(\widehat{\sigma}_i(\omega), \widehat{\sigma}_{-i}^*(\omega))$$

para todo $\widehat{\sigma}_i \in \widehat{\Sigma}_i$.

Notar que cualquier EN es un caso particular de equilibrio correlacionado. A su vez el equilibrio colacionado es un caso particular de equilibrio bayesiano de Nash (el cual es el concepto de solución para juegos estáticos con información incompleta).

Juegos dinámicos con información completa

Introducción

Pasamos ahora a juegos en los que la elección ya no es "simultánea" Un juego es dinámico si, **en al menos una instancia, al menos un jugador observa una decisión rival antes de definir su propio comportamiento.**

En este tipo de juegos, el orden de movidas es central, y aparecen dos posibilidades nuevas.

- Un jugador puede reaccionar al comportamiento previo de sus rivales.
- Un jugador puede, a través de su comportamiento, influir en las decisiones de quienes mueven más adelante, y por supuesto incorpora esta posibilidad al evaluar su elección.

Información perfecta e imperfecta

Definición 96 (Información perfecta e imperfecta)**.** Un juego en forma extensiva es un juego **con información perfecta si todo conjunto de información $h \in H$ tiene un solo elemento.**
Que cada conjunto de información tenga un solo nodo implica que, en todo momento, cada jugador que mueve conoce todo lo ocurrido antes en el juego.
En un juego **con información imperfecta, al menos un jugador, en al menos una instancia, mueve en un conjunto de información con más de un nodo** (ignora algo ocurrido previamente).

Estrategias y acciones

¿Cómo describimos las posibles formas de jugar un juego dinámico con información completa (o cualquier juego general en forma extensiva)? Para cada jugador i, tomamos

$$H_i = \{h \in H \mid l(h) = i\},$$

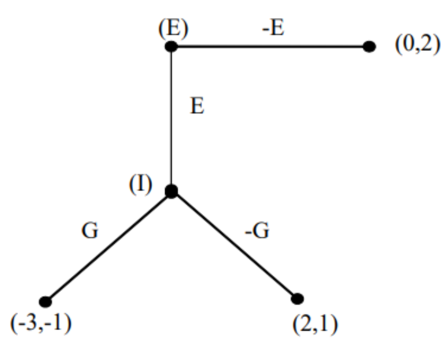
es decir, el conjunto de conjuntos de información en los que mueve i.

Definición 97 (Estrategia pura en un juego en forma extensiva)**.** En un juego en forma extensiva, una estrategia pura para un jugador i es una función

$$s_i : H_i \to A \quad \text{tal que} \quad s_i(h_i) \in A(h_i) \quad \forall h_i \in H_i$$

Entonces, una ***acción*** **es una elección posible para el jugador en un conjunto de información**. Una ***estrategia pura*****, en cambio, es un plan de contingencia completo**, que especifica, en cada conjunto de información en el que dicho jugador mueve, cuál es la acción que va a elegir.

Ejemplo 98 (Entry deterrence)**.** Consideremos el juego de entry deterrence



Representándolo en su forma normal

		(I)	
		G	$-G$
(E)	E	$-3,-1$	$2,1$
	$-E$	$0,2$	$0,2$

Los equilibrios de Nash son $(-E, G)$ y $(E, -G)$.

El incumbente solo decide si ve que la firma entra. ¿Es creible que haga la guerra? Solo es un Nash que elija Guerra porque no afecta sus pagos. Si hubiera entrado -G es óptimo. Es un problema de decisión.

Principio de racionalidad secuencial

Para juegos dinámicos con información completa y perfecta vamos a recurrir al principio de racionalidad secuencial (la estrategia de un jugador debe ser óptima en cada punto del arbol).

Proposición 99 (Principio de racionalidad secuencial)**.** *La estrategia de un jugador debe especificar elecciones óptimas en cada conjunto de información en el que deba decidir (se llegue a dicho conjunto o no) dadas las estrategias de sus rivales.*

De este modo, nos aseguramos que la estrategia escogida por un jugador sea óptima desde ese punto en el árbol en adelante, dado lo que eligieron sus oponentes. El procedimiento de inducción hacia atrás nos asegura que, bajo ciertas condiciones, se cumpla este principio.

Ejemplo 100 (Batalla de los sexo)**.** Una pareja debe decidir individualmente si concurrir al ballet o a una pelea. Cada uno tiene una opción favorita, pero prefieren ir a su opción menos favorita antes que ir a dónde no está el otro.

	B	P
B	2,1	0,0
P	0,0	1,2

Cuando el juego es simultáneo existen 2 equilibrios de Nash en estrategias puras (B, B) y (P, P). Mas uno en mixtas.

Ahora pensemos que el juego se da de manera secuencial. Las estrategias de quien juegue primero siguen siendo las mismas: "Ballet" o "Pelea". Sin embargo las estrategias de quien juega segundo se vuelven más complejas. Recordar que la estrategias es una guía completa de acción. Como el jugador 2 tiene dos conjuntos informativos, su estrategia consiste en elegir Ballet o Pelea para cada de esos conjuntos. Las combinaciones son 4:

	BB	BP	PB	PP
B	2,1	2,1	0,0	0,0
P	0,0	1,2	0,0	1,2

La forma normal asociada nos muestra que existen tres equilibrios de Nash en estrategias puras: (B, BB), (B, BP) y (P, PP). Sin embargo, haciendo inducción hacia atrás vemos que el único equilibrio creíble es (B, BP).

Duopolio de Stackelberg

Similar a Cournot pero secuencial. $P = a - q_1 - q_2$. $c_i = cq_i$. Cronología:

- Firma 1 elige q_1.
- Firma 2 observa q_1.
- Firma 2 elige q_2.

Empezamos de atrás para adelante. Condicional en lo que hizo la firma 1, ¿qué va a hacer la firma 2?

$$\max_{q_2}(a - q_1 - q_2 - c)q_2$$

Condición de primer orden:

$$a - q_1 - 2q_2 - c = 0 \implies q_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}$$

Hasta acá es idéntico a Cournot. Sin embargo, como la firma 1 sabe que la firma 2 va a observar lo que produzca y a actuar en consecuencia, incorpora esa función de reacción adentro de su problema de maximización.

Problema de la firma 1, que sabe que la firma 2 va a observar lo que haga y actuar óptimamente en consecuencia:

$$\max_{q_2}(a - q_1 - \frac{a - q_1 - c}{2} - c)q_1$$

Condición de primer orden:

$$\frac{1}{2}a - q_1 - \frac{1}{2}c = 0 \implies q_1^{Stackelberg} = \frac{a - c}{2}$$

Reemplazando en la función de reacción de la firma 2:

$$q_2^{Stackelberg} = \frac{a - \frac{a-c}{2} - c}{2} = \frac{a - c}{4}$$

Como en Cournot,

$$0 < \pi_1 + \pi_2 < \pi^M$$

Sin embargo no es un juego simétrico

$$\pi_1 > \pi_2$$

Quien juega primero va a producir más porque sabe que el segundo va a ajustar su estrategia, produciendo poco para mantener alto el precio. Esto le da una ventaja al primero, llamado **líder de Stackelberg**.

Inducción hacia atrás

Definición 101 (Inducción hacia atrás)**.** En juegos dinámicos finitos con información completa y perfecta, todos los conjuntos de información contienen un único nodo. El proceso de inducción hacia atrás **consiste en, primero, identificar el comportamiento óptimo al final del juego y, luego, utilizando ese comportamiento como referencia, determinar las acciones óptimas en etapas anteriores**.
El proceso consta de

1. Encontrar los últimos nodos de decisión, los que tienen como sucesores solo a nodos terminales.

2. En esos nodos los jugadores eligen el óptimo (es problema de decisión, no es juego)

3. Sabemos que van a hacer ahi (en los últimos nodos de decision) los reemplazamos por los pagos asociados. Tenemos un juego reducido.

4. Repetimos el procedimiento hasta que llegamos a una solucion (una estrategia para cada jugador).

Definición 102 (Teorema de Zermelo)**.** Cada juego Γ_E finito de información perfecta posee un equilibrio de Nash en estrategias puras que puede ser derivado a través del proceso de inducción hacia atrás. Si no hay empates, hay unicidad del Nash que surge de este proceso.

Equilibrio de subjuego perfecto

Uno de los supuestos para poder aplicar el procedimiento de inducción hacia atrás está dado porque la información del juego sea perfecta (otro es que el juego es finito). Esto excluye juegos donde en un momento del juego se juegue un juego estático. Cómo aplicar el principio de racionalidad secuencial en un juego más general? Pasamos al caso de Información imperfecta

Definición 103 (Subjuego)**.** Definimos un subjuego como "una parte del juego que podemos analizar de manera independiente".
Formalmente, decimos que un subjuego en una forma extensiva se caracteriza por cumplir las siguientes propiedades:

- Comienza con un conjunto de información unitario y contiene a todos sus sucesores y solo a sus sucesores.

- Si x se encuentra en un subjuego, entonces cada $x' \in H(x)$ también se encuentra en el subjuego.

Notemos que: el juego entero es un subjuego.

Definición 104 (Equilibrio perfecto en subjuegos)**.** Un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*)$ es un equilibrio perfecto en subjuegos (ESP) en caso de que induzca un equilibrio de Nash en cada subjuego de Γ_E.

El ESP es un refinamiento de Nash, no crea nuevos equilibrios, sino que descarta algunos Nash ya existentes. $ESP \subset NE$

Proposición 105. *En un juego con información perfecta, en cada nodo de decisión "comienza" un subjuego. Al especificar una elección óptima para quien mueve en cada nodo, especificamos un EN de cada subjuego. En otros términos,* ***cualquier solución obtenida por el proceso de inducción hacia atrás es un ESP.***

Proposición 106. *Todo juego estático tiene un solo subjuego. Por consiguiente, todos los NE son a la vez ESP.*

Inducción hacia atrás generalizada

Para poder encontrar los ESP definimos el siguiente proceso

Definición 107 (Inducción hacia atrás generalizada)**.** Procedimiento para encontrar los ESP (en juegos finitos):

1. Comenzar en el final del árbol e identificar los equilibrios de Nash de los últimos subjuegos (no tienen subjuegos propios).
2. Seleccionar uno de los equilibrios de Nash de cada uno de los últimos subjuegos.
3. Reemplazar estos últimos subjuegos por sus pagos asociados. Tenemos una forma extensiva reducida del juego.
4. Repetir los pasos anteriores para el juego reducido. Continuar el procedimiento hasta que cada movimiento en la forma extensiva quede determinado. La colección de estos movimientos constituye el perfil de estrategias de ESP.
5. Si existen equilibrios múltiples, el conjunto de ESP se identifica repitiendo el procedimiento para cada posible equilibrio que podría ocurrir.

El procedimiento de inducción hacia atrás generalizado es equivalente al procedimiento de inducción hacia atrás si la información es perfecta.

Juegos repetidos

Nos interesa estudiar si se logar conseguir que los jugadores jueguen algo distinto del Nash estático y en que tipo de situaciones.

Proposición 108. *Si tenemos un juego G que tiene un único equilibrio de Nash y lo repetimos un número finito de veces, el único equilibrio de ESP es que los jugadores jueguen siempre (en todas las etapas) el Equilibrio de Nash del juego G.*

Consideremos un juego G con dos jugadores, donde los pagos en una única etapa del juego están dados por la función de utilidad $u_i(s_1, s_2)$, donde s_1 y s_2 son las estrategias de los jugadores 1 y 2, respectivamente, y $i \in \{1, 2\}$.

Definición 109 (Estructura de un juego repetido infinitas veces)**.** Cuando el juego G se repite infinitas veces, los jugadores eligen estrategias en cada etapa $t = 1, 2, 3, \ldots$. Los pagos totales a lo largo del tiempo se calculan tomando en cuenta una tasa de descuento $\delta \in [0, 1]$, que mide cuánto valoran los jugadores las recompensas futuras en comparación con las actuales.

$$U_i = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t u_i(s_1^t, s_2^t)$$

Donde:

- U_i es el pago total descontado del jugador i a lo largo del tiempo.
- $u_i(s_1^t, s_2^t)$ es el pago en la etapa t para el jugador i, dado que en esa etapa se jugaron las estrategias s_1^t y s_2^t.
- $\delta \in [0, 1]$ es la tasa de descuento. Cuando $\delta = 1$, los jugadores valoran el futuro tanto como el presente; cuando $\delta = 0$, solo valoran los pagos inmediatos

Una clase común de estrategias en los juegos repetidos infinitos son las llamadas estrategias disparadoras (trigger strategies).

Definición 110 (Estrategia trigger)**.** La estrategias trigger consiste en

- Comenzar cooperando, es decir, jugar $s_1 = s_1^{coop}$ y $s_2 = s_2^{coop}$.
- Continuar cooperando siempre que ambos jugadores hayan cooperado en todos los periodos anteriores.
- Si alguno de los jugadores se desvía, a partir de ese momento jugar la estrategia de castigo (por ejemplo, el equilibrio de Nash del juego de etapa).

Para que las estrategias de cooperación puedan ser sostenidas en un Equilibrio

Secuencial Perfecto (ESP), la condición de no desvío debe cumplirse:

Definición 111 (Condición de no desvío)**.**

$$U_i^{coop} \geq U_i^{desvo}$$

Esto se traduce a:

$$\frac{u_i^{coop}}{1-\delta} \geq u_i^{desvo} + \frac{\delta u_i^{nash}}{1-\delta}$$

Donde:

- u_i^{coop} es el pago en la estrategia cooperativa.
- u_i^{desvo} es el pago que obtiene el jugador si se desvía en un solo periodo.
- u_i^{nash} es el pago que obtiene el jugador si ambos juegan el equilibrio de Nash en cada periodo futuro después de un desvío.
- δ es el factor de descuento.

La condición implica que los jugadores cooperarán mientras los beneficios futuros descontados de la cooperación superen los beneficios inmediatos de desviarse más los beneficios futuros de jugar el equilibrio de Nash.

Observación 112. Si conviene desviarse entonces conviene desviarse en el primer período, pues la utilidad es mayor. Entonces no debo preocuparme por desvíos que ocurren en varios períodos. Por ello es que en la condición de no desvío se evalua como si el desvío estuviera en el momento actual.

Teorema 113 (Pago socialmente posible)**.** *Si G es un juego estático, finito, con información completa. Cualquier* ***pago socialmente posible tal que cada uno de los jugadores gana mas que lo que gana en un NASH estático.*** *Puede ser sostenido como un ESP del juego repetido infinitas veces si el δ es lo suficientemente cercano a 1.*

Es muy importante profundizar también en el concepto de minmax

Definición 114 (MINMAX)**.** MINMAX es la utilidad mínima que un jugador puede asegurar, incluso si los otros jugadores intentan minimizar su pago.

$$\text{MINMAX}_i = \min_{\sigma_{-i}} \left(\max_{\sigma_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \right) = \min_{\sigma_{-i}} U_i(\sigma_i(\sigma_{-i}), \sigma_{-i})$$

MINMAX es el máximo castigo que un jugador puede imponer a otro.

Los otros jugadores pueden castigar de manera que yo no reciba más que mi MINMAX. Los jugadores minimizan mi utilidad sabiendo que yo les voy a jugar mi mejor respuesta. Si los jugadores maximizan su utilidad, el pago es mayor o igual que el MINMAX.

Proposición 115. *En todo equilibrio de Nash estático, cada jugador recibe al menos su MINMAX.*

Proposición 116. *En el juego repetido infinitas veces, si un jugador juega la mejor respuesta del estático, no puede recibir menos que el MINMAX.*

Proposición 117. *En un equilibrio secuencial perfecto (ESP), nunca nadie recibe menos que el MINMAX.*

Teorema 118 (Fudenberg y Maskin)**.** *Si la dimensión del conjunto de pagos socialmente posibles es igual al número de jugadores, cualquier pago socialmente posible en el que todos los jugadores reciban más que su MINMAX puede ser sostenido como un Equilibrio Secuencial Perfecto (ESP) del juego repetido infinitas veces si los jugadores son lo suficientemente pacientes.*