



UNIVERSIDAD AUSTRAL

Facultad de Ciencias Empresariales

Modelo de consumo intertemporal en tiempo continuo con preferencias
inconsistentes y descuento cuasi-hiperbólico.

TESIS

Licenciatura en Economía empresarial

PRESENTA:

Francisco Sesto

DIRECTOR:

Guillermo Federico Umbricht

Octubre de 2023

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Conceptos Preliminares	1
1.1. Modelos de consumo intertemporal	2
1.2. Funciones de descuento	2
1.2.1. Función de descuento de Samuelson	3
1.3. Sesgo de presente	3
1.4. Óptimo de pareto	4
1.4.1. Dominancia en pareto	4
1.5. Propensión marginal a consumir	4
2. Entorno del modelo	7
2.1. Función de descuento	9
2.1.1. Caso discreto	10
2.1.2. Caso continuo	11
2.2. Sesgo de presente	15
2.3. Problema del hogar	18

3. Condición de Pareto	29
3.1. Caso de lo realizado	30
3.2. Caso del compromiso	32
3.3. Contrastando acción y compromiso	34
4. Forma del perfil de consumo	43
4.1. Primera condición	43
4.2. Segunda condición	44
4.3. Tercera condición	44
4.4. Primera proposición de concavidad	44
4.5. Segunda proposición de concavidad	45
4.6. Condiciones en el descuento hiperbólico	45
5. Modelando decisiones con mayor precisión	47
5.1. Valor de la recompensa y reforzamiento	48
5.2. Medición del valor de la recompensa	49
5.3. Recompensas diferidas y descuento	50
5.4. Revisión de la ponderación futura fuerte	54
5.5. Revisión del sesgo de presente	56
5.6. Revisión de la condición de Pareto	58
5.6.1. Primera subcondición	60
5.6.2. Segunda subcondición	62
5.7. Revisión de la concavidad	63
Conclusiones generales	65

Posibles líneas de investigación futura	67
Apéndices	67
A. Función exponencial	69
A.1. Comparación	69
B. Relación del sesgo presente y los factores de ponderación futuros	71
B.1. Preferencias	71
C. Tasas de crecimiento relativas	75
C.1. Tasas de cambio y de crecimiento	75
C.2. Ejemplo de tasa de crecimiento	76
D. Análisis de la propensión marginal al consumo	77
D.1. Análisis de signos	77
E. Desarrollo de integrales	79
Referencias	82

Resumen

Esta tesis se centra en la investigación y en el desarrollo de una mejora del modelo propuesto por Feigenbaum y Raei (2021a) en el ámbito del consumo intertemporal. El objetivo principal de este estudio es incorporar una nueva función de descuento en el modelo existente y representar de manera más precisa la percepción de los individuos en el proceso de toma de decisiones relacionado con el consumo a lo largo del tiempo. Este trabajo se enfoca en los siguientes aspectos clave:

- **Formulación del modelo:** Se han completado los cálculos inconclusos y se han proporcionado comentarios relevantes sobre los resultados del modelo de consumo intertemporal en tiempo continuo que considera preferencias inconsistentes propuesto por Feigenbaum y Raei (2021a).
- **Función de descuento cuasi-hiperbólica:** En este trabajo, se ha incorporado al modelo de Feigenbaum y Raei (2021a), una función de descuento cuasi-hiperbólica introducida en (Myerson & Green, 1995), la cual, respaldada por evidencia empírica, proporciona una descripción más precisa del comportamiento individual en comparación con la función hiperbólica empleada en la versión original del modelo de Feigenbaum y Raei (2021a). Esta función, introduce un nuevo parámetro que permitirá ajustar el descuento o penalización del valor de la recompensa para retrasos largos.
- **Sesgo del presente:** Se ha identificado que la función de descuento cuasi-hiperbólica satisface el sesgo del presente, lo que significa que los individuos muestran impaciencia a corto plazo para obtener una mayor utilidad, pero una mayor paciencia a largo plazo.

- **Condición de Pareto y perfil de consumo:** La función de descuento cuasi-hiperbólica satisface la condición de Pareto, lo que implica que el plan inicial de consumo es preferible al plan realizado. Además, esta función de descuento es capaz de generar un perfil de consumo cóncavo, lo que se refleja en un patrón de consumo en forma de “joroba” (forma concava).

Introducción

La teoría del consumo y el ahorro constituye una rama fundamental de la economía que en la actualidad es utilizada para explicar el comportamiento agregado de las finanzas. Inicialmente, y en su sentido más amplio, ha sido desarrollada por economistas que centran su estudio en las relaciones de variables (como ingreso, ahorro, tasa de interés y consumo), quienes tuvieron la necesidad de implementar una teoría que les permita dar respuestas sobre cómo interactúa el consumo. La investigación sobre la decisión de consumo es vital ya que las familias e individuos ven afectado su bienestar y felicidad por ello. La decisión de consumo en el momento inicial implica necesariamente la renuncia a un consumo futuro, y del mismo modo la renuncia a un consumo en el momento inicial, o análogamente, ahorro implica postergarlo para un momento posterior. Como se ilustra claramente en (Larraín & Sachs, 2002) a nivel agregado la tasa de crecimiento económico, el equilibrio comercial, el nivel de ingresos y empleo se ve influenciado por las elecciones conjuntas de consumo y ahorro realizadas por los hogares.

Entre los modelos de consumo más significativos que aparecen en la bibliografía, se pueden mencionar: el modelo de ingreso absoluto (Keynes, 1936), el modelo de ingreso permanente (Friedman, 1957) y el modelo de ciclo de vida (Modigliani & Brumberg, 1954). Éste ofrece un enfoque temporal más completo que permite una evaluación más precisa de las políticas públicas. Al analizar cómo las familias toman decisiones de consumo y ahorro a lo largo del tiempo, los responsables de la formulación de políticas, pueden identificar áreas de vulnerabilidad económica y desarrollar estrategias para fomentar el ahorro responsable y el bienestar a largo plazo de los hogares. Tal perspectiva de largo plazo resulta primordial en un contexto económico caracterizado por la incertidumbre y la variabilidad de los ingresos y gastos a lo

largo del ciclo de vida de los individuos.

Dentro de los modelos que derivan del ciclo de vida es de suma relevancia investigar la interacción con preferencias inconsistentes y un enfoque de tiempo continuo como lo hacen (Feigenbaum & Raei, 2021a) debido a que estas extensiones permiten capturar de manera más realista el comportamiento de los individuos y su impacto en la economía a lo largo del tiempo.

En primer lugar, la consideración de preferencias inconsistentes en el modelo de ciclo de vida toma en consideración una limitación fundamental de los enfoques tradicionales que asumen preferencias consistentes. Las preferencias inconsistentes reflejan la posibilidad de que las personas tomen decisiones diferentes dependiendo de en que momento de su vida se encuentran. Esta variabilidad en las preferencias es particularmente relevante en contextos económicos inciertos lo que nos puede llevar a un mayor entendimiento de la toma de decisiones reales.

En segundo lugar, el enfoque de tiempo continuo permite reflejar escenarios más realistas donde el individuo está constantemente realizando elecciones y ponderando sus preferencias. Supera las restricciones de los modelos discretos, que consideran intervalos fijos de tiempo para la toma de decisiones.

La predicción del comportamiento económico desempeña un papel fundamental tanto en el diseño de políticas públicas como en la comprensión de las decisiones individuales. Es especialmente relevante investigar la posibilidad de mejorar la función en el modelo que representa las percepciones de las personas, de modo que estas reflejen con mayor precisión las valoraciones y percepciones que se producen en la vida real.

Esta tesis se enfoca en investigar la integración de una nueva función de descuento en el modelo propuesto por (Feigenbaum & Raei, 2021a), con el objetivo de representar de manera más precisa la percepción de los individuos. Esto permitirá una representación más fiel del proceso de toma de decisiones dentro del modelo. El objetivo principal de este estudio radica en la mejora continua del modelo propuesto. Esta mejora se lleva a cabo con la finalidad específica de emplear las salidas del modelo para predecir el comportamiento de consumo a lo largo de la vida del individuo de manera más precisa y detallada. Al perfeccionar el

modelo, se busca no solo incrementar su exactitud en las predicciones, sino también capturar matices y complejidades inherentes al proceso de toma de decisiones, relacionado con el consumo a lo largo del tiempo.

El modelo empleado en este trabajo se basa en la propuesta de (Feigenbaum & Raei, 2021a) en el ámbito del consumo intertemporal. Se trata de un modelo en tiempo continuo que aborda preferencias inconsistentes. Uno de los aspectos distintivos de este modelo es su capacidad para caracterizar la función de descuento en términos de un factor de ponderación futuro.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presenta de forma concisa una serie de conceptos fundamentales indispensables para la comprensión integral de este trabajo.

En el capítulo 2, se lleva a cabo un estudio del entorno del modelo descrito por (Feigenbaum & Raei, 2021a). Con el propósito de caracterizar este entorno, se introduce la función de descuento, la cual refleja la percepción del individuo en relación a una utilidad o recompensa futura, caracterizándola en términos de un factor de ponderación futuro. Además, se plantean las condiciones necesarias para el sesgo del presente y la reversión de preferencias. Posteriormente, se aborda el problema del hogar, que se centra en la maximización de su utilidad bajo restricciones presupuestarias.

En el capítulo 3, se prosigue con el estudio del modelo propuesto por (Feigenbaum & Raei, 2021a), centrándose en las condiciones que garantizan que el individuo se comprometa con el plan de consumo inicial. Se lleva a cabo una comparación entre la utilidad generada por el plan de consumo inicial y el plan de consumo efectivamente realizado y se establecen las condiciones necesarias.

En el capítulo 4, se avanza en el análisis del modelo propuesto por (Feigenbaum & Raei, 2021a), poniendo especial énfasis en las condiciones que aseguran que el plan de consumo exhiba concavidad. Esta propiedad es esencial para que el perfil de consumo tenga una forma de "joroba" que concuerde con las observaciones empíricas.

En el capítulo 5, se lleva a cabo un análisis exhaustivo acerca de la conceptualización del valor de la recompensa, examinando las perspectivas propuestas por diversos autores en re-

INTRODUCCIÓN

lación con su significado y las metodologías empleadas para su medición. Posteriormente, se procede a una detenida comparación de distintas funciones de descuento, basándose en la evidencia empírica recopilada, con el objetivo de identificar aquella que mejor se adecua a dicha evidencia. Finalmente, se evalúa la función seleccionada en relación con el cumplimiento de cada una de las condiciones establecidas por el modelo, con el fin de determinar su idoneidad y pertinencia en el contexto de la investigación.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

Con la intención de ofrecer un trabajo autocontenido, en este capítulo se presentan una serie de conceptos fundamentales para una comprensión más profunda y completa del desarrollo realizado en esta tesis. La discusión de estos relevantes temas permitirá a los lectores que no están familiarizados con ellos entender mejor las problemáticas que se abordan en los siguientes capítulos.

En cada sección de este capítulo, se proporciona una definición breve y/o clasificación del concepto que se presenta, lo que establece un marco teórico general para el desarrollo de este trabajo. Asimismo, se incluye bibliografía relevante para aquellos lectores interesados en profundizar en algunos de los temas tratados.

Se analizan los *modelos de consumo intertemporal* y sus principales características, los cuales son fundamentales en economía. Se estudian las *funciones de descuento*, esenciales para evaluar la percepción del individuo sobre una recompensa futura en términos del valor presente. Se explora el *sesgo de presente*, un fenómeno clave en la psicología económica. Se define el *óptimo de Pareto*, crucial para evaluar políticas. Por último, se aborda la *propensión marginal a consumir*, vital para entender cómo los cambios en los ingresos afectan el consumo.

En resumen, este capítulo presenta una visión integral y detallada de conceptos esenciales en el ámbito de la economía y la teoría económica, brindando las bases necesarias para un análisis riguroso y académico en este campo de estudio.

1.1. Modelos de consumo intertemporal

Un modelo de consumo intertemporal (Feigenbaum & Raei, 2021a; Fisher, 1930; D. Laibson, 1997; Modigliani & Brumberg, 1954; Samuelson, 1937; Strotz, 1955) es un enfoque teórico utilizado en la economía para analizar cómo las personas toman decisiones de consumo a lo largo del tiempo. Se basa en la idea de que las personas consideran tanto el consumo presente como el futuro al tomar decisiones sobre cómo gastar su dinero.

En un modelo de consumo intertemporal, se tienen en cuenta varios factores, incluyendo:

- ***Preferencias temporales:*** Las personas manifiestan preferencias en cuanto a la valoración del consumo en el presente en comparación con el consumo en el futuro. Un ejemplo simple de preferencia temporal se observa cuando una persona prefiere recibir \$100 hoy que \$200 dentro de 10 años. Esta elección refleja una clara preferencia por el dinero en el presente en lugar de esperar una cantidad mayor en el futuro. Este comportamiento se denomina preferencia temporal.
- ***Restricciones presupuestarias:*** Las personas se enfrentan a la limitación de sus ingresos y deben tomar decisiones respecto a cómo distribuir su consumo a lo largo del tiempo. Esto implica considerar los trade-offs entre el consumo presente o desahorro y el consumo futuro o ahorro.
- ***Tasas de interés:*** Las personas pueden ahorrar dinero en cuentas de ahorro o invertirlo en activos que generen intereses. Las tasas de interés influyen en las decisiones de ahorro y gasto, ya que determinan cuánto cuesta optar por gastar en lugar de guardar o invertir dinero.

1.2. Funciones de descuento

Las funciones de descuento (Madden & Johnson, 2010; Mazur, 1987; Myerson & Green, 1995; Samuelson, 1937), son expresiones que permiten calcular el valor actual de una recompensa futura. Básicamente, indican que a medida que la recompensa se aleja en el tiempo,

1.3. *SESGO DE PRESENTE*

po, su valor disminuye. Son una herramienta utilizada para reflejar las preferencias temporales del individuo.

1.2.1. **Función de descuento de Samuelson**

La función más difundida es la propuesta en (Samuelson, 1937) la cual se expresa de la siguiente manera

$$V(t, \rho) = \frac{A}{1 + \rho t},$$

donde, $V(t, \rho)$ representa el valor presente de una cantidad A que se encuentra en el período t y está descontado a una tasa ρ . Es evidente que para cualquier valor de $t > 0$, el denominador será mayor que 1, lo que implica una disminución en el valor de A .

Suponiendo que $A = 100$, que la tasa de descuento a 1 año es $\rho = 1$ y que el individuo va a recibir A dentro de 1 año. En este caso, claramente puede observarse que el valor presente de esa cantidad hoy se valuaría en 50.

$$V(1, 1) = \frac{100}{1 + 1} = 50.$$

1.3. **Sesgo de presente**

El concepto de sesgo de presente hace referencia primero al concepto de preferencias inconsistentes. Se denominan preferencias inconsistentes cuando el valor que una persona asigna a consumir algo en el futuro depende de cuándo tome esa decisión. En (Strotz, 1955) se demuestra que para cualquier función de descuento diferente de la exponencial planteada en (Samuelson, 1937) este fenómeno ocurre.

El sesgo de presente es un tipo de preferencia inconsistente en la cual existe una inclinación por gastar más en el presente a medida que el individuo se acerca al punto de decisión en una compensación a lo largo del tiempo. Un ejemplo claro ilustrado en (Feigenbaum & Raei, 2021a) es el siguiente; imagínese que un individuo se enfrenta a la decisión de elegir entre dos opciones, recibir un extra de \$1.000 dólares dentro de diez años o un extra de \$1.100

1.4. ÓPTIMO DE PARETO

dólares dentro de once años. Con un método de descuento no exponencial, es posible que inicialmente el individuo piense que la diferencia de un año entre recibir el dinero en diez años o en once años es insignificante y, por lo tanto, elija esperar y tomar los \$1.100 dólares. Sin embargo, cuando llegue el momento, es probable que considere que los \$1.000 dólares inmediatos son más valiosos que los \$1.100 dólares que recibirá dentro de un año.

1.4. Óptimo de pareto

El óptimo de Pareto es un concepto desarrollado por el economista Vilfredo Pareto utilizado en economía y en teoría de juegos, que también se aplica en la toma de decisiones.

Hace referencia a una situación en la que no es posible mejorar la posición de una persona o entidad sin empeorar la posición de otra. En otras palabras, se trata de un equilibrio en el que no se pueden hacer cambios que beneficien a una parte sin perjudicar a otra.

1.4.1. Dominancia en pareto

La dominancia de Pareto es un concepto relacionado con el óptimo de Pareto y se utiliza para evaluar y comparar situaciones en un contexto de toma de decisiones.

Ocurre cuando una situación es considerada al menos tan buena como otra y mejor para al menos una persona, sin que la elección de tal situación perjudique a nadie. En otras palabras, una asignación domina a otra si mejora o deja igual el bienestar de todos los individuos involucrados, mejorando al menos a uno.

1.5. Propensión marginal a consumir

La propensión marginal a consumir (PMC) es un concepto fundamental en la teoría económica. Representa cuanto cambia el consumo en relación con un cambio en el ingreso disponible de una persona. En otras palabras, la PMC mide cuánto adicionalmente una persona está dispuesta a gastar cuando su ingreso aumenta en una unidad adicional.

1.5. PROPENSIÓN MARGINAL A CONSUMIR

La PMC se expresa como un porcentaje o una fracción y se calcula dividiendo el cambio en el gasto de consumo entre el cambio en el ingreso disponible. Matemáticamente, se representa de la siguiente manera:

$$PMC = \frac{\Delta C}{\Delta Y},$$

donde PMC es la propensión marginal a consumir, ΔC es el cambio en el gasto de consumo, ΔY es el cambio en el ingreso disponible.

Capítulo 2

Entorno del modelo

En este capítulo se describirán las bases del modelo de consumo intertemporal descrito en (Feigenbaum & Raei, 2021a). El problema del consumo intertemporal ha sido objeto de interés para los economistas desde la época de Irving Fisher. En su libro "The Theory of Interest" (Fisher, 1930) fue pionero en demostrar cómo los individuos toman decisiones de consumo en función de sus ingresos y riqueza a lo largo del tiempo; cómo estas elecciones influyen en las tasas de interés y la inversión en la economía.

Por otra parte, el modelo de descuento exponencial propuesto por Samuelson (1937) sugiere que todos los planes de consumo seleccionados en diferentes etapas de la vida coincidirán con el plan de consumo inicial.

El trabajo de Roy Harrod aportó también al desarrollo del problema del consumo intertemporal al reconocer que las decisiones de consumo y ahorro de los hogares están influenciadas por factores como el ingreso y las expectativas futuras (Harrod, 1948).

Luego en (Modigliani & Brumberg, 1954) se presentó un modelo del ciclo de vida en el que se propone que la tasa de consumo de una persona no solo depende de su ingreso actual, sino también de su ingreso esperado en el futuro, lo que se conoce como hipótesis del ciclo de vida. Según tal hipótesis, las personas intentan distribuir su consumo a lo largo de toda su vida en función de su ingreso esperado y no solo de su ingreso actual. Lo cual implica que pueden optar por endeudarse cuando son jóvenes y tienen ingresos bajos para luego ahorrar y disminuir el consumo cuando se acercan a la jubilación y sus ingresos suelen ser menores.

En (Strotz, 1955) se explora una variación del modelo de Samuelson, presentando una formulación distinta de la función de descuento. En contraste, con el modelo original de Samuelson, donde el descuento se basaba en el tiempo absoluto del consumo futuro. En el modelo de Strotz, la tasa marginal de sustitución entre diferentes momentos de consumo depende del instante en el que el individuo evalúa la utilidad de esos consumos. Lo que luego dará lugar a las preferencias inconsistentes.

Más tarde en (Ando & Modigliani, 1963), los autores examinan las implicaciones agregadas de la hipótesis del ciclo de vida en términos de ahorro y consumo a nivel de toda la economía. La idea central es que, a nivel agregado, el patrón de ahorro y consumo de una economía seguirá una secuencia similar a la que se observa en la vida de un individuo.

Por su parte Modigliani (1986) destaca que dos de los supuestos incluidos en la versión simplificada del modelo de ciclo de vida (la duración determinista de la vida y la ausencia de un motivo de herencia) parecen, a la luz de la información disponible, llamativamente contra-fácticos. Existe evidencia de que en la vejez la riqueza decrece lentamente incluso luego de sopesar las fuentes de sesgo, lo que se traduce en que los hogares, en promedio, dejen herencias cuantiosas en relación con la riqueza máxima.

Luego y en un contexto de tiempo continuo, D. Laibson (1997) demostró que el uso del descuento hiperbólico, podría ofrecer una explicación para diversos enigmas encontrados en la literatura sobre el consumo y el ahorro. Entre estos interrogantes se encuentra el fenómeno conocido como la "joroba del consumo".

El modelo de ciclo de vida, hasta este punto contemplaba que existen preferencias inconsistentes, lo que se puede interpretar como una multiplicidad de "yoes". Tener un modelo donde conviven varios "yoes" hace que el problema básico de la elección pública sea importante, para determinar qué preferencias del yo deben utilizarse para evaluar el bienestar. Una solución frecuentemente utilizada en la bibliografía (al problema de evaluar el bienestar con preferencias inconsistentes en el tiempo) es utilizar las preferencias del yo inicial. (Véanse, por ejemplo, (D. Laibson, 1996), (D. Laibson, 1997), (D. Laibson, 1998), (D. I. Laibson et al., 1998), (O'Donoghue & Rabin, 1999), (O'Donoghue & Rabin, 2000), (O'Donoghue & Rabin, 2001), entre muchos otros).

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

Esta tesis se sitúa en el modelo de ciclo de vida abordado por Feigenbaum y Raei (2021a) el cual está desarrollado en tiempo continuo con preferencias inconsistentes. La particularidad del modelo es la caracterización de la función de descuento en términos de un factor de ponderación futuro.

Se centra particularmente en un modelo de ciclo de vida en tiempo continuo. Un hogar vive con seguridad hasta la edad T y recibe una renta o ingreso exógeno $y(t)$ en una edad $t \in [0, T]$ que puede consumir $c(t)$ o ahorrar en forma de activos $k(t)$. Se toma de supuesto que los hogares son ignorantes en cuanto a la inconsistencia temporal de sus preferencias, no tienen noción de que van a cambiar sus preferencias dependiendo cuando analicen su consumo, por lo que no prevén que volverán a optimizar su plan de consumo y ahorro en el futuro.

2.1. Función de descuento

En la presente sección se definirá cuál es la utilidad en el modelo, que son los factores de ponderación futuros y cuál es la relación con la función de descuento.

La función de descuento dentro del modelo de consumo intertemporal es introducida por primera vez en (Samuelson, 1937), el autor trataba de reflejar la dinámica del paso del tiempo y la disminución del valor de la recompensar. No obstante, Samuelson reconoció que se centró en este modelo debido a la simplicidad matemática resultante y no por su respaldo empírico. De hecho, este modelo no se ajusta adecuadamente a las elecciones de consumo observadas en la realidad de las personas.

Sin embargo, en (Strotz, 1955), al explorar una variante de la función de descuento de Samuelson, se descubrió que la función propuesta en (Samuelson, 1937) es la única que logra que los planes sean consistentes a lo largo del tiempo. Por lo tanto, cualquier otra función de descuento llevaría a la inconsistencia temporal y, por ende, a preferencias inconsistentes. En lugar de utilizar una función de descuento absoluta, como lo suponía Samuelson (1937), Strotz (1955) introdujo una función de descuento relativa que ajusta la utilidad del consumo futuro en función del tiempo que transcurre hasta que el individuo experimenta ese consumo. Esto significa que el valor que una persona asigna al consumo futuro dependerá del momento

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

preciso en que toma esa decisión.

Posteriormente, tal como se mencionó previamente, D. Laibson (1997) demostró que la función de descuento hiperbólica permitiría explicar con mayor precisión los fenómenos observados empíricamente.

2.1.1. Caso discreto

Se considera primero un hogar que vive en tiempo discreto de 0 a T , con una edad $t \in [0, T] \subseteq \mathbb{N}_0$. El hogar valora las asignaciones futuras de consumo $c(s)$ para $s \geq t$ según

$$U(t) = \sum_{s=t}^T D(s-t)u(c(s)),$$

siendo $u(\cdot)$ una función de utilidad y $D(\cdot)$ una función de descuento que trae un valor del futuro al presente del individuo para poder valuarlo, penalizando el tiempo de retraso para recibir la utilidad asociada a ese consumo.

Ejemplo 2.1 Utilidad con función de descuento convencional

Para caracterizar esta utilidad, se supone que la función de descuento utilizada por el individuo es la misma que se presenta en (Samuelson, 1937).

$$D(t) = \frac{1}{(1+r)^t},$$

siendo r la tasa de incremento y t el retraso o momento en el futuro. Por lo tanto, la utilidad podría reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{s=t}^T \frac{1}{(1+r)^{(s-t)}} u(c(s)) \\ &= \frac{1}{(1+r)^0} u(c(t)) + \frac{1}{(1+r)^1} u(c(t+1)) + \dots + \frac{1}{(1+r)^{T-t}} u(c(T)). \end{aligned}$$

Nótese que este tipo de descuento es el mismo utilizado para traer a valor presente el valor de un flujo de fondos en el futuro. El mismo supone que la tasa de descuento es constante.

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

En la subsección siguiente, se llevará a cabo un análisis detallado del caso suponiendo la variable temporal continua y se profundizará en sus implicaciones con respecto a la función de utilidad.

2.1.2. Caso continuo

Siendo ahora el tiempo continuo en vez de discreto, las sumatorias se transforman en integrales, resultado de la suma de Riemman. El hogar entonces vive en tiempo continuo de 0 a T y con una edad $t \in [0, T]$ el hogar valora las asignaciones futuras de consumo $c(s)$ para $s \geq t$ según

$$U(t) = \int_t^T D(s-t)u(c(s))ds, \quad (2.1)$$

para alguna función de utilidad $u(c)$ y una función de descuento $D(t) \geq 0$. Se normaliza $D(0) = 1$ y se supone $D(t) > 0$ en un entorno positivo de 0. Para un parámetro específico $\rho > 0$ dado, se definen factores de ponderación futuros $\varepsilon(t) \geq -1$. Estos factores de ponderación futuros miden la desviación de la función de descuento de una función exponencial para todo $t \in [0, T]$ tales que

$$D(t) = \exp(-\rho t)(1 + \varepsilon(t)). \quad (2.2)$$

Nótese que $\varepsilon(0) = 0$ por definición.

Se dice que una función de descuento $D(t)$ muestra una ponderación futura fuerte si existe un $\rho > 0$ tal que los $\varepsilon(t)$ definidos por (2.2) son todos no negativos. Del mismo modo, una función de descuento exhibe una ponderación futura ligera si existe una $\rho > 0$ tal que los $\varepsilon(t)$ son todos no positivos.

Según indican (Feigenbaum & Raei, 2021a) las ponderaciones futuras, fuertes o ligeras en el marco del tiempo discreto, brindaban la capacidad de identificar el sesgo hacia el presente o hacia el futuro. En cambio, en tiempo continuo el énfasis se desplaza desde la consideración exclusiva de los signos de los factores hacia la comprensión de su dinámica, dado que, el sesgo presente y futuro imponen condiciones sobre los factores marginales de ponderación futura.

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

Nótese que si para $\rho > 0$

$$\varepsilon_{\rho}(t) = \frac{D(t)}{\exp(-\rho t)} - 1 = \exp(\rho t)D(t) - 1 \geq 0, \quad (2.3)$$

para todo $t \in [0, T]$, entonces se evidencia que la desigualdad (2.3) se cumpliría para cualquier $\rho' > \rho$. Esto quiere decir que la desviación de la función de descuento de una función exponencial será mayor, o en otras palabras, la función de descuento será más grande que la exponencial para cualquier $\rho' > \rho > 0$. Un aumento en ρ afecta a la función exponencial haciendo que tienda más rápidamente a 0, o lo mismo que traiga los valores del futuro más rápido, por tanto, al buscar un ρ mayor lo que hacemos es, en cierto sentido, acercar la exponencial al eje de abscisas, por lo cual la función de descuento original quedaría por encima de la misma. Ver en el Apéndice A.

Por tanto, en el caso de una ponderación futura fuerte, tiene sentido definir

$$\rho^* = \inf\{\rho > 0 : (\forall t \in [0, T])[D(t) \geq \exp(-\rho t)]\} \quad (2.4)$$

ρ^* será el ínfimo del conjunto de $\rho > 0$ tal que para todo t dentro de la edad, la función de descuento sea mayor o igual a la exponencial. Es conocido que si $\rho \rightarrow \infty$ la función exponencial decrece más rápidamente por lo cual la función de descuento será mayor, pero no es de interés que se aproxime infinito sino encontrar cual es el ρ más chico que cumpla la condición (que la función de descuento sea mayor o igual a la función exponencial), por ello se busca el ínfimo. Al ser siempre mayor o igual que la función exponencial, entonces los factores de ponderación futuros serán todos positivos.

Del mismo modo, en caso de ponderación ligera del futuro, tiene sentido definir

$$\rho^* = \sup\{\rho > 0 : (\forall t \in [0, T])[D(t) \leq \exp(-\rho t)]\} \quad (2.5)$$

ρ^* será el supremo del conjunto de $\rho > 0$ tal que para todo t dentro de la edad, la función de descuento sea menor o igual a la exponencial. Al ser siempre menor o igual que la función exponencial, entonces los factores de ponderación futuros serán todos negativos.

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

Ejemplo 2.2 *La función hiperbólica de descuento*

Se considera que la función de utilidad es la siguiente

$$D(t) = \frac{1}{1 + \eta t} \quad (2.6)$$

donde $\eta > 0$. La función dada en (2.6) es la misma que se implementa en (Feigenbaum & Raei, 2021a) fue desarrollada por (Mazur, 1987) al estudiar el comportamiento de preferencias de las palomas. Esta función se deriva al ajustar los puntos de indiferencia de una recompensa dada en diferentes momentos, tanto después de un tiempo fijo como después de un tiempo variable. También es una función de descuento caracterizada por una ponderación futura fuerte.

En este caso se puede observar que el ρ óptimo es igual a η o sea $\rho^* = \eta$

$$D(t) \geq \exp(-\eta t) \Rightarrow \frac{1}{1 + \eta t} \geq \exp(-\eta t) \Rightarrow \exp(\eta t) \geq 1 + \eta t, \quad (2.7)$$

la última desigualdad de (2.7) resulta evidente si se observa que en el momento 0 vale la igualdad. Si se comparan las tasas de crecimiento se puede apreciar que la de la función exponencial es mayor ya que

$$\left(\frac{d}{dt}(\exp(\eta t)) = \eta \exp(\eta t) \quad y \quad \frac{d}{dt}(1 + \eta t) = \eta \right) \Rightarrow \eta \exp(\eta t) \geq \eta.$$

Entonces ahora se evidencia que con $\rho = \eta$ la función de descuento es mayor que la exponencial pero es de interés buscar si existe algún número aún menor que η que satisfaga la condición (2.7). Se supone que $\rho \in (0, \eta)$ y

$$\frac{1}{1 + \eta t} \geq \exp(-\rho t),$$

para todo $t \geq 0$. Entonces la inversa multiplicativa de la exponencial es mayor que la inversa de la función de descuento debido a que

$$\exp(\rho t) \geq 1 + \eta t, \quad (2.8)$$

2.1. FUNCIÓN DE DESCUENTO

para todo $t \geq 0$. Se define $f(t, \rho)$ una función que mida la diferencia entre la inversa multiplicativa de la exponencial y de la inversa multiplicativa de la función de descuento. Es decir

$$f(t, \rho) = \exp(\rho t) - \eta t - 1.$$

Entonces se tiene

$$f(0, \rho) = 0, \quad f'(t, \rho) = \rho \exp(\rho t) - \eta, \quad f''(t, \rho) = \rho^2 \exp(\rho t) > 0,$$

Dado que f es convexa y su segunda derivada en t es positiva, el punto crítico será un mínimo de f en t^* , que satisface la siguiente ecuación

$$\rho \exp(\rho t) - \eta = 0 \Rightarrow \exp(\rho t^*) = \frac{\eta}{\rho} > 1$$

y es mayor a 1, pues es de común conocimiento ρ está entre 0 y η . El mínimo que se deduce es

$$t^* = \frac{1}{\rho} \ln \left(\frac{\eta}{\rho} \right) > 0. \quad (2.9)$$

Por lo tanto, se obtiene

$$f(t^*, \rho) = \exp \left(\ln \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \right) - \frac{\eta}{\rho} \ln \left(\frac{\eta}{\rho} \right) - 1 = \frac{\eta}{\rho} \left(1 - \ln \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \right) - 1, \quad (2.10)$$

Sea $\delta = \frac{\eta}{\rho} - 1 > 0$, entonces se puede escribir (2.10) como

$$f(t^*, \rho) = \delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta). \quad (2.11)$$

Para simplificar el análisis se desea ahora evaluar si la función, en términos de δ , exhibe un carácter positivo o negativo para $\delta > 0$.

Sea la función $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por,

$$f(t^*, \rho) = g(\delta) = \delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta),$$

2.2. SESGO DE PRESENTE

satisface

$$g(0) = 0 - (1 - 0) \ln(1 + 0) = 0.$$

Se busca determinar la tasa de cambio para discernir si la función exhibirá un comportamiento positivo o negativo.

$$\frac{d}{d\delta}(\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta)) = 1 - \left(\ln(1 + \delta) + (1 + \delta) \frac{1}{1 + \delta} \right) = -\ln(1 + \delta) < 0.$$

De modo que

$$\delta - (1 + \delta) \ln(1 + \delta) < 0,$$

equivalentemente,

$$\delta < (1 + \delta) \ln(1 + \delta), \quad (2.12)$$

para $\delta > 0$ se obtiene que $f(t^*, \rho) < 0$, lo que contradice (2.8). Dado que la ecuación (2.12) se deriva al utilizar $\rho \in (0, \eta)$ y señala que la función de descuento es inferior a la función de descuento exponencial, lo cual contradice la condición (2.7) que se intentaba demostrar, se concluye que no existe ningún valor de ρ menor que η que cumpla con esta condición. Por lo tanto, el valor óptimo de ρ es el ínfimo, que en este caso coincide con η , y así se tiene que $\rho^* = \eta$. Por tanto, para una función de descuento hiperbólica, una elección natural del factor de ponderación futuro es

$$\varepsilon(t) = \frac{\exp(\eta t)}{1 + \eta t} - 1 \geq 0, \quad (2.13)$$

con igualdad solo si $t = 0$.

2.2. Sesgo de presente

En esta sección, se examinará el concepto de sesgo de presente y las condiciones que deben cumplirse para que este fenómeno se manifieste.

Una idea más comúnmente abordada en la literatura relacionada con las funciones de descuento intertemporal es el “sesgo de presente” el cual modifica la percepción del “yo” in-

2.2. SESGO DE PRESENTE

duciéndolo a ser más impaciente a corto plazo y la función de descuento hiperbólica se considera un ejemplo paradigmático de este sesgo. Mientras que el signo de los factores de ponderación futuros depende de la elección de ρ , como se verá más adelante, ρ no entra en la condición de sesgo presente en tiempo continuo. Por consiguiente, el único supuesto que se hace sobre ρ en las proposiciones que se derivaron es que $\rho > 0$.

Se dice que se manifiesta un sesgo de presente (futuro) cuando un hogar muestra preferencia por una retribución menor (mayor) en el presente en lugar de una retribución mayor (menor) que se recibiría en un momento posterior con un retraso, denotado como $\Delta t > 0$. No obstante, esta preferencia se invertiría si se efectuara una comparación entre un instante en el futuro, representado como t y otro instante $t + \Delta t$. En otras palabras, si padece de sesgo de presente, entonces este hogar exhibe impaciencia en el momento presente y muestra una falta de disposición para postergar la obtención de una retribución más sustancial, prefiriendo una recompensa inmediata en su lugar. En el Apéndice B, se deduce la relación entre esta condición y los factores de ponderación futuros.

A partir de ahora se nombrará a $\varepsilon'(t)$ como el factor de ponderación futuro marginal en t . Sin embargo, si $\varepsilon(t) > -1$ también se puede definir

$$\mu(t) = \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)}, \quad (2.14)$$

como el factor de ponderación futuro marginal ajustado en t . En primer orden en $\varepsilon(t)$, las ponderaciones futuras marginales y marginales ajustados son idénticos, pero la corrección en el denominador de (2.14) será importante para los resultados exactos, como muestran (Feigenbaum & Raei, 2021a) y que se ve reflejado en el apéndice B. Específicamente, una condición necesaria para que las reversiones de preferencias basadas en el presente en $t > 0$ se mantengan en el límite a medida que $\Delta t \rightarrow 0$ es que

$$\mu(0) \leq \mu(t), \quad (2.15)$$

para todo $t > 0$. En otras palabras que la tasa de incremento del factor de ponderación futuro ajustado en t en el momento 0 sea menor que la tasa de incremento en el momento t .

2.2. SESGO DE PRESENTE

A una función de descuento que satisface (2.15) con desigualdad estricta para todo $t > 0$ se la denominará continuamente sesgada al presente. Por el contrario, una función de descuento que satisface

$$\mu(0) \geq \mu(t), \quad (2.16)$$

para todo $t > 0$ se la denominará continuamente sesgada hacia el futuro. Cabe destacar, no obstante, que esta definición solo es aplicable si $\varepsilon(t) > -1$ para todo $t > 0$.

Es de interés identificar la tasa de descuento instantánea, notar que si el descuento fuera solo exponencial entonces la tasa sería ρ y en este caso al definir la función de descuento como la desviación de una función de descuento exponencial para poder llegar a ella se debería usar la derivada del logaritmo natural de la exponencial. Utilizando (2.3) y (2.14), se puede reescribir $\mu(t)$ en función de la tasa de descuento instantánea en el plazo t del siguiente modo

$$\rho(t) = -\frac{d \ln D(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \ln(\exp(-\rho t)(1 + \varepsilon(t))) = \rho - \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)} = \rho - \mu(t). \quad (2.17)$$

Se observa que la tasa de descuento instantánea, es la tasa de la función de descuento exponencial menos la ponderación futura marginal en t . Se puede entonces reescribir $\mu(t)$ como la tasa de descuento de la función exponencial menos la tasa de descuento instantánea. Si se utiliza esta idea en (2.15)-(2.16), como ρ es constante, desaparece de las condiciones para el sesgo continuo presente o futuro, que únicamente dependen de si $\rho(t)$ es mayor o menor que $\rho(0)$. Esto demuestra por qué la elección de ρ es tan poco importante en lo que sigue.

Como explican (Feigenbaum & Raei, 2021a), lo que importa para la forma del perfil de consumo logarítmico es la dinámica de la rapidez con que decae la función de descuento y el factor de ponderación futuro marginal ajustado $\mu(t)$ capta esta dinámica. Dado que ρ no contribuye a la dinámica, la elección de ρ es inocua.

Por otra parte, el hecho de que la trayectoria de compromiso domine en Pareto a la trayectoria realizada y sea la que mejore el bienestar resultará estar asociado a una ponderación futura fuerte terminal, no a un sesgo presente. Existen funciones de descuento con sesgo de presente en las que el compromiso no mejora en Pareto porque la ponderación futura terminal no es lo suficientemente alta en relación con los demás factores de ponderación futuros.

2.3. Problema del hogar

En esta sección, se introducirá la restricción presupuestaria, la cual agregará al modelo un conjunto adicional de condiciones que deben cumplirse para que pueda maximizarse.

Siendo ahora más precisos sobre el problema que resolverá, un hogar con las preferencias (2.1). Se supone que el hogar obtiene un flujo de ingresos exógeno $y(t) \geq 0$ para $t \in [0, T]$ con $y(t)$ estrictamente positivo sobre algún subconjunto de medida positiva y que los ahorros $k(t)$ a la edad t obtienen la rentabilidad instantánea $r(t)$. Por tanto, la restricción presupuestaria instantánea a la edad t se expresa como

$$\frac{dk(t)}{dt} = y(t) + r(t)k(t) - c(t), \quad (2.18)$$

en otras palabras, la variación en el nivel de ahorro debe ser equivalente a la diferencia entre el ingreso y el costo, además de los ahorros obtenidos mediante su rendimiento. Por lo tanto, si el ingreso aumenta, el ahorro debería incrementarse, mientras que si el costo se eleva, el ahorro debería reducirse.

Tal restricción presenta una condición terminal dada por

$$k(T) = 0. \quad (2.19)$$

Es importante destacar que la premisa que subyace en esta condición da lugar a la expresión “la herencia es un error de cálculo”, que se atribuye a Modigliani. Esta idea se relaciona con su teoría del ciclo vital, que postula que las personas ahorran a lo largo de su vida laboral con el propósito de financiar su consumo durante la jubilación. Si una persona termina acumulando más ahorros de los necesarios para su propio consumo en la jubilación, esto se convierte en herencia. Desde esta perspectiva, la herencia podría interpretarse como un “error de cálculo”, en el sentido de que la persona ahorró más de lo requerido para satisfacer sus necesidades de consumo personal.

Dado $k(t)$, el problema que enfrenta el hogar en la etapa t se puede formular como la búsqueda de los niveles de consumo y ahorro que maximizan su utilidad, es decir:

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

$$U(t) = \max_{c(s,t), k(s,t)} \int_t^T D(s-t)u(c(s,t))ds, \quad (2.20)$$

tal que

$$\frac{dk(s,t)}{ds} = y(s) + r(s)k(s,t) - c(s,t), \quad (2.21)$$

donde

$$k(T,t) = 0. \quad (2.22)$$

A lo largo del resto de esta tesis, se asumirá que la función de utilidad está representada por $u(c) = \ln(c)$ siguiendo el modelo propuesto en (Feigenbaum & Raei, 2021a).

Se revisarán algunos resultados relevantes de (Feigenbaum, 2016). Se define la rentabilidad bruta generada por la capitalización de intereses entre la edad 0 y t de la siguiente manera:

$$R(t) = \exp \left(\int_0^t r(s)ds \right). \quad (2.23)$$

Notar que

$$\frac{dR(t)}{dt} = r(t) \exp \left(\int_0^t r(s)ds \right) = r(t)R(t). \quad (2.24)$$

Esto permite reescribir la restricción presupuestaria (2.18) utilizando la rentabilidad bruta (2.24)

$$\frac{dk(t)}{dt} = y(t) + \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} k(t) - c(t) \Rightarrow \frac{dk(t)}{dt} - \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt} k(t) = y(t) - c(t),$$

equivalentemente

$$\frac{\frac{dk(t)}{dt} R(t) - k(t) \frac{dR(t)}{dt}}{R(t)} = y(t) - c(t) \Rightarrow \frac{\frac{dk(t)}{dt} R(t) - k(t) \frac{dR(t)}{dt}}{R^2(t)} = \frac{y(t) - c(t)}{R(t)},$$

operando resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{k(t)}{R(t)} \right) = \frac{y(t) - c(t)}{R(t)}. \quad (2.25)$$

Se integra de t a T , se utiliza la condición terminal (2.19) y se obtiene

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

$$\int_t^T \frac{d}{ds} \left(\frac{k(s)}{R(s)} \right) ds = \frac{k(s)}{R(s)} \Big|_t^T = \frac{k(T)}{R(T)} - \frac{k(t)}{R(t)} = \frac{0}{R(T)} - \frac{k(t)}{R(t)} = -\frac{k(t)}{R(t)},$$

donde

$$-\frac{k(t)}{R(t)} = \int_t^T \frac{y(s) - c(s)}{R(s)} ds \Rightarrow k(t) = \int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} [c(s) - y(s)] ds. \quad (2.26)$$

Este planteamiento implica que, si se dispone del plan de consumo y del de ingresos exógenos, se puede calcular el nivel de ahorro $k(t)$ en cualquier punto del tiempo t .

Es interesante comprender las funciones de $R(s)$ y $R(t)$. Mientras $R(s)$, al estar en el denominador, retrotrae cualquier valor a lo largo de la vida al momento 0, $R(t)$, en el numerador, proyecta un valor hacia adelante en el tiempo t momentos. Por lo tanto, la expresión $\int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} ds$ transporta los valores desde su ubicación actual hasta el momento t .

Si se define la riqueza durante la vida como

$$W(t) = \left(\int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} y(s) ds \right) + k(t), \quad (2.27)$$

esto permite reemplazar (2.27) en la restricción presupuestaria dada por (2.26) y reexpresarla de la siguiente manera:

$$\int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} c(s) ds = W(t). \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) encierra el conocido resultado de que el valor actual del plan de consumo a partir de cualquier edad t debe ser igual a la riqueza durante la vida en t .

Se continua con el procedimiento de (Feigenbaum & Raei, 2021a), las restricciones se expresan de la forma (2.28) y el Lagrangiano del problema del hogar en t se representa como se muestra en (2.20):

$$\mathcal{L} = D(s-t) \ln(c(s,t)) - \lambda(t) \frac{R(t)}{R(s)} c(s,t).$$

La condición de primer orden con respecto al consumo es

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c(s,t)} = \frac{D(s-t)}{c(s,t)} - \frac{\lambda(t) R(t)}{R(s)} = 0.$$

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

Por lo tanto,

$$c(s, t) = \frac{1}{\lambda(t)} \cdot \frac{D(s-t) \cdot R(s)}{R(t)}. \quad (2.29)$$

Se utiliza (2.29) en la restricción presupuestaria de vida útil (2.28) y se obtiene

$$\frac{1}{\lambda(t)} \int_t^T D(s-t) ds = W(t) \Rightarrow \frac{1}{\lambda(t)} = \frac{W(t)}{\int_t^T D(s-t) ds}$$

y el consumo del plan de edad t del hogar a la edad s es

$$c(s, t) = \frac{R(s)}{R(t)} \cdot \frac{D(s-t)}{\int_t^T D(s-t) ds} \cdot W(t). \quad (2.30)$$

Pero el hogar sólo sigue este plan en $s = t$, para lo cual

$$c(t) = \frac{1}{\int_t^T D(s-t) ds} W(t). \quad (2.31)$$

La propensión marginal al consumo (PMC) que ahora se denotará $m(t)$ hace referencia a la proporción de la riqueza que se consume, la cual se define tomando en consideración la acumulación total de riqueza a lo largo de toda la vida hasta el período de tiempo t , incluyendo los ingresos que se esperan en el futuro, de la siguiente manera:

$$m(t) = \frac{c(t)}{W(t)} = \frac{1}{\int_t^T D(s-t) ds} = \frac{1}{\int_0^{T-t} D(s) ds}. \quad (2.32)$$

El hecho de que la PMC varíe con t indica que la fracción de riqueza consumida cambia a lo largo del ciclo de vida.

(Feigenbaum, 2016) muestra que una condición necesaria para que la solución del problema del hogar satisfaga las restricciones (2.21) y (2.22) es

$$\lim_{t \rightarrow T} m(t)(T-t) = 1, \quad (2.33)$$

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

lo que implica que el hogar consumirá toda su riqueza restante en el último instante de vida ya que la proporción marginal a consumir aumentaría al 100 % de la riqueza. Lo cual también está conectado con la observación que realizó Mogiliani.

La tasa de crecimiento del consumo es

$$G_c(t) \equiv \frac{d \ln(c(t))}{dt} = \frac{d \ln(m(t)W(t))}{dt}$$

que implica,

$$G_c(t) \equiv \frac{d \ln(c(t))}{dt} = \frac{d \ln(m(t))}{dt} + \frac{d \ln(W(t))}{dt}. \quad (2.34)$$

En el Apéndice C, se encuentra información detallada sobre la tasa de crecimiento y su relación con la derivada del logaritmo natural.

A partir de (2.32), se tiene

$$\frac{d \ln(m(t))}{dt} = \frac{m'(t)}{m(t)} = - \frac{D(T-t) \cdot (-1)}{\left(\int_t^T D(s-t) ds \right)^2} \int_t^T D(s-t) ds,$$

equivalentemente,

$$\frac{d \ln(m(t))}{dt} = \frac{D(T-t)}{\int_t^T D(s-t) ds} = m(t)D(T-t). \quad (2.35)$$

Se deriva (2.27) y se obtiene

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(R(t) \int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds \right) + \frac{dk(t)}{dt},$$

se aplica la regla del producto de derivadas y se separa términos,

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} \int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds + R(t) \frac{d}{dt} \left(\int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds \right) + \frac{dk(t)}{dt},$$

se expresa la derivada del segundo término,

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} \int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds + R(t) \left(\frac{y(T)}{R(T)} \cdot \frac{dT}{dt} - \frac{y(t)}{R(t)} \cdot \frac{dt}{dt} \right) + \frac{dk(t)}{dt},$$

al no depender de t entonces $\frac{y(T)}{R(T)} \cdot \frac{dT}{dt} = 0$ y se obtiene,

$$\frac{dW(t)}{dt} = \frac{dR(t)}{dt} \int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds - \frac{R(t)}{R(t)} y(t) + \frac{dk(t)}{dt},$$

se utiliza (2.21) y (2.24),

$$\frac{dW(t)}{dt} = r(t)R(t) \int_t^T \frac{y(s)}{R(s)} ds - y(t) + y(t) + r(t)k(t) - c(t),$$

se reexpresa la integral,

$$\frac{dW(t)}{dt} = r(t) \int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} y(s) ds + r(t)k(t) - c(t),$$

se simplifica esta expresión, lo cual da lugar a

$$\frac{dW(t)}{dt} = r(t) \left[\int_t^T \frac{R(t)}{R(s)} y(s) ds + k(t) \right] - c(t).$$

Por lo tanto, si se utiliza (2.26), (2.27) y (2.32) se obtiene,

$$\frac{dW(t)}{dt} = r(t)W(t) - c(t) = r(t)W(t) - m(t)W(t) = (r(t) - m(t))W(t)$$

o de forma equivalente

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \frac{\frac{dW(t)}{dt}}{W(t)} = r(t) - m(t). \quad (2.36)$$

Se utiliza (2.34), (2.35) y (2.36), la tasa de crecimiento del consumo es

$$G_c(t) = m(t)D(T-t) + r(t) - m(t) \Rightarrow G_c(t) = r(t) + m(t)[D(T-t) - 1].$$

Se sustituye $m(t)$ por (2.32) y reescribe el numerador como integral, se tiene

$$G_c(t) = r(t) + \frac{D(T-t) - 1}{\int_t^T D(s-t)ds} = r(t) + \frac{\int_t^T D'(s'-t)ds'}{\int_t^T D(s-t)ds}, \quad (2.37)$$

Se destaca que para una función de descuento exponencial $D(t) = \exp(-\rho t)$, dado que $D'(t) = -\rho D(t)$, (2.37) se simplifica

$$G_c(t) = r(t) - \rho \quad (2.38)$$

En este escenario que el consumo crezca va a depender de que el interés que se obtenga sea mayor al factor de descuento ρ . Con una función de descuento no exponencial, como la hiperbólica, la desviación de la tasa de crecimiento del consumo de (2.38) dependerá de

$$Z(t) = \frac{\int_t^T D'(s'-t)ds'}{\int_t^T D(s-t)ds} = \frac{D(T-t) - 1}{\int_t^T D(s-t)ds}. \quad (2.39)$$

Como explican (Feigenbaum & Raei, 2021a) los fenómenos que se estudian en las secciones siguientes se derivan de cómo la dinámica en (2.39) del numerador $\int_t^T D'(s-t)ds$ difiere de la dinámica del denominador $\int_t^T D(s-t)ds$. Las preferencias de los distintos “yoes” por la senda de consumo realizada frente a la senda de consumo del yo inicial dependen principalmente de cómo se compara la función de descuento con una exponencial en los plazos más largos, que solo importan para $Z(t)$ cuando $t \approx 0$. La forma de la función de consumo depende de $Z(t)$ en todos los t y, por tanto, de cómo se compara la función de descuento con una exponencial en todos los plazos.

Feigenbaum y Raei (2021a) introducen factores de ponderación futuros de (2.2). En primer lugar, se reescribe la propensión marginal a consumir PMC en (2.32) para esta función de descuento como

$$m(t) = \frac{1}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho s)[1 + \varepsilon(s)]ds} \quad (2.40)$$

o equivalentemente,

$$m(t) = \frac{1}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho s) ds + \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}.$$

Puesto que para $\rho \neq 0$

$$\int_0^t \exp(-\rho s) ds = \frac{\exp(-\rho s)}{-\rho} \Big|_0^t = \frac{\exp(-\rho t)}{-\rho} - \frac{1}{-\rho} = \frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho t)], \quad (2.41)$$

se tiene

$$m(t) = \frac{1}{\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho(T-t))] + \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds},$$

se saca en el denominador $\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho(T-t))]$ como factor común

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{1}{\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho(T-t))] \left[1 + \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right]} \\ &= \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \left[1 + \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Se aproxima la PMC a primer orden en $\varepsilon(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \\ &\quad \left[1 - \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right] + O(\varepsilon^2). \quad (2.42) \end{aligned}$$

Se puede observar en el Apéndice D que, para un $W(t)$ dado, las ponderaciones futuras fuertes reducirán $c(t)$ mientras que las ponderaciones futuras ligeras aumentarán $c(t)$.

Se sustituye la función de descuento por (2.2), se puede reescribir $Z(t)$ dada por (2.39) como

$$Z(t) = \frac{\exp(-\rho(T-t)) [1 + \varepsilon(T-t)] - 1}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho s) [1 + \varepsilon(s)] ds}. \quad (2.43)$$

Esto equivale a

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= \frac{\exp(-\rho(T-t))[1 + \varepsilon(T-t)] - 1}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho s) ds + \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds} \\
 &= \frac{\exp(-\rho(T-t))[1 + \varepsilon(T-t)] - 1}{\frac{1 - \exp(-\rho(T-t))}{\rho} + \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds} \\
 &= -\frac{(1 - \exp(-\rho(T-t))) \left[1 - \frac{\exp(-\rho(T-t))}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \varepsilon(T-t) \right]}{\frac{1 - \exp(-\rho(T-t))}{\rho} \left[1 + \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right]} \\
 &= -\rho \frac{1 - \frac{\exp(-\rho(T-t))}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \varepsilon(T-t)}{1 + \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Se reescribe (2.44) a primer orden en $\varepsilon(t)$,

$$\begin{aligned}
 Z(t) &= -\rho \left[1 - \frac{\exp(-\rho(T-t))}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \varepsilon(T-t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right] + O(\varepsilon^2).
 \end{aligned}$$

De manera equivalente,

$$Z(t) = -\rho \left[1 - \frac{\exp(-\rho(T-t)) \varepsilon(T-t) - \rho \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{1 - \exp(-\rho(T-t))} \right] + O(\varepsilon^2),$$

se distribuye multiplicando ρ convenientemente y se obtiene,

$$Z(t) = -\rho + \frac{\exp(-\rho(T-t)) \varepsilon(T-t) + \rho \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\frac{1}{\rho} [1 - \exp(-\rho(T-t))]} + O(\varepsilon^2),$$

se reescribe el denominador,

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

$$Z(t) = -\rho + \frac{\exp(-\rho(T-t))\varepsilon(T-t) + \rho \int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon(z)dz}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z')dz'} + O(\varepsilon^2). \quad (2.45)$$

Dado que

$$\frac{d}{dt}(-\exp(-\rho t)) = \rho \exp(-\rho t)$$

y que

$$\varepsilon(0) = 0$$

se puede utilizar integración por partes

$$\begin{aligned} \rho \int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon(z)dz &= -\exp(-\rho z)\varepsilon(z) \Big|_0^{T-t} + \int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon'(z)dz \\ &= -\exp(-\rho(T-t))\varepsilon(T-t) + \int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon'(z)dz, \end{aligned} \quad (2.46)$$

se reemplaza (2.46) en (2.45), esto permite expresar a $Z(t)$ como

$$Z(t) = -\rho + \frac{\exp(-\rho(T-t))\varepsilon(T-t) - \exp(-\rho(T-t))\varepsilon(T-t) + \int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon'(z)dz}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z')dz'} + O(\varepsilon^2)$$

o equivalentemente

$$Z(t) = -\rho + \frac{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z)\varepsilon'(z)dz}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z')dz'} + O(\varepsilon^2), \quad (2.47)$$

Así, considerando una función de descuento general con factor de ponderación futuro $\varepsilon(t)$, se puede obtener una expresión analítica para la tasa de crecimiento del consumo correspondiente a la estrategia implementada. Se utiliza la expresión (2.47) en (2.39) y (2.37), luego se obtiene,

2.3. PROBLEMA DEL HOGAR

$$G_c(t) = r(t) - \rho + \frac{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z) \varepsilon'(z) dz}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z') dz'} + O(\varepsilon^2). \quad (2.48)$$

En el orden cero, es decir, cuando la función de descuento no se aleja de una forma exponencial, se recupera la tasa de crecimiento del consumo (2.38), debido a que $\varepsilon(t)$ será igual cero lo que hace que el numerador entero sea cero. Por otro lado la contribución de primer orden de una función de descuento no exponencial a la tasa de crecimiento del consumo se expresa del siguiente modo:

$$G_c^1(t) = \frac{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z) \varepsilon'(z) dz}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z') dz'}. \quad (2.49)$$

Como se explica detalladamente en el estudio de (Feigenbaum & Raei, 2021a), este resultado es análogo al obtenido por los mismos autores en el contexto del tiempo discreto, según se presenta en (Feigenbaum & Raei, 2021b). En ese contexto, la contribución de primer orden a la tasa de crecimiento del consumo se interpreta como una media ponderada de las diferencias entre los factores de ponderación futuros. La clave para entender por qué un hogar con una función de descuento no exponencial se desvía de una senda exponencial de consumo, radica en la dinámica de estos factores de ponderación futuros. Es importante destacar, que los cambios en $\varepsilon(t)$ tienen un mayor impacto en un período t cercano a cero que en uno cercano a T . Esto se debe a que la media (2.49) está influenciada por la función de descuento de orden cero $\exp(-\rho z)$.

En el próximo capítulo, se analizará la condición de Pareto, la cual es un requisito fundamental para que el plan inicial pueda considerarse como óptimo.

Capítulo 3

Condición de Pareto

En este capítulo, se analizarán las condiciones necesarias para que el plan que prevalezca entre todos los “yoes” sea el inicial, tal como se afirma en (Feigenbaum & Raei, 2021a). Esta solución es la habitualmente utilizada y propuesta en estudios anteriores, como los de (D. Laibson, 1997; D. Laibson, 1996, 1998; D. I. Laibson et al., 1998; O’Donoghue & Rabin, 2001; O’Donoghue & Rabin, 1999, 2000).

Como se explica en (Feigenbaum & Raei, 2021a) una vez que se ha definido de manera precisa el contexto y desafío en el cual se encuentran los hogares con descuentos no exponenciales y se ha delineado su solución, es posible abordar las implicaciones políticas que surgen de esta problemática. Uno de los motivos fundamentales detrás del interés en la consideración del sesgo temporal, reside en la posibilidad de que justifique intervenciones gubernamentales.

Desde una perspectiva intuitiva, si un hogar se encuentra constantemente ajustando sus planes futuros para incrementar ligeramente su consumo presente a expensas de una significativa reducción en el consumo futuro, podría argumentarse que muchos “yoes” preferirían tener la capacidad de comprometerse con el plan de consumo inicial a lo largo de todo su ciclo de vida. En tal caso, los responsables políticos tendrían “razones” sólidas para ayudar al hogar a mantenerse en esa senda inicial, independientemente de cómo un observador externo pueda evaluar las preferencias de los distintos “yoes”.

Por otro lado, un hogar orientado hacia el futuro podría estar constantemente ajustando sus

3.1. CASO DE LO REALIZADO

planes para posponer más su consumo futuro, lo que llevaría a todos los “yoes” a preferir la senda realizada en lugar de la de compromiso, a excepción del primer “yo”, que naturalmente preferiría el plan inicial.

Ciertamente, es importante destacar que las medidas gubernamentales en este contexto pueden tener limitaciones en cuanto a su eficacia. Esto se debe a una noción fundamental explicada por (Lucas, 1976), que sugiere que cuando los agentes económicos, como los hogares, pueden anticipar las futuras medidas de política económica, ajustarán su comportamiento en consecuencia para mitigar los efectos de dichas medidas. En otras palabras, si los hogares pueden prever las acciones del gobierno en términos de políticas económicas, es probable que ajusten sus decisiones de consumo y ahorro en función de esas previsiones. Por lo tanto, para que las medidas gubernamentales sean realmente efectivas, deben ser impredecibles y comunicadas de manera inesperada. Estas sorpresas en las políticas públicas pueden tomar desprevenidos a los mercados y, en consecuencia, generar respuestas económicas más deseables.

El estudio de (Feigenbaum & Raei, 2021a) revela que, contrariamente a lo que podría suponerse, no es el sesgo presente o futuro el factor determinante que dicta si la estrategia de compromiso prevalece sobre la estrategia realizada, o viceversa. En cambio, lo crucial es como se desenvuelven los factores de ponderación futuros en un horizonte temporal más amplio. En este punto, se avanzará para establecer la condición que rige la función de descuento, bajo la cual comprometerse con el plan inicial resultará en un aumento de la función objetivo realizada para los múltiples “yoes” a lo largo de la vida. Este análisis, se llevará a cabo en un estado estacionario, caracterizado por una tasa de interés constante, es decir, $r(t) = r$.

3.1. Caso de lo realizado

Como se observa en (2.32), dado que $c(t) = m(t)W(t)$, la determinación de la senda realizada del consumo requiere previamente establecer la senda realizada de la riqueza total. Como se ha examinado previamente, la evolución de la riqueza se describe mediante (2.36).

3.1. CASO DE LO REALIZADO

Si se define

$$M(t) = \exp \left(\int_0^t m(s) ds \right), \quad (3.1)$$

entonces

$$\frac{dM(t)}{dt} = m(t) \exp \left(\int_0^t m(s) ds \right) = m(t)M(t),$$

y la tasa de crecimiento relativa de $M(t)$ será

$$\frac{d \ln M(t)}{dt} = m(t), \quad (3.2)$$

De (2.23), (2.36) y (3.2) se obtiene

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \frac{d \ln R(t)}{dt} - \frac{d \ln M(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{R(t)}{M(t)} \right). \quad (3.3)$$

Como $R(0) = M(0) = 1$, se aplica integral a ambos lados de la ecuación (3.3) diferencial de 0 a t

$$\int_0^t \frac{d \ln W(t)}{dt} dt = \int_0^t \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{R(t)}{M(t)} \right) dt,$$

se integra,

$$\ln(W(t)) - \ln(W(0)) = \ln \left(\frac{R(t)}{M(t)} \right) - \ln(1),$$

equivalentemente,

$$\ln \left(\frac{W(t)}{W(0)} \right) = \ln \left(\frac{R(t)}{M(t)} \right),$$

se aplica la función exponencial,

$$\exp \left(\ln \left(\frac{W(t)}{W(0)} \right) \right) = \exp \left(\ln \left(\frac{R(t)}{M(t)} \right) \right),$$

se simplifica,

$$W(t) = \frac{1}{M(t)} R(t) W(0). \quad (3.4)$$

Se utiliza (2.32), por lo que el consumo realizado en el momento t será

$$c(t) = \frac{m(t)R(t)}{M(t)} W(0). \quad (3.5)$$

3.2. CASO DEL COMPROMISO

Se reescribe explícitamente $M(t)$ en términos de la función de descuento y se utilizan (2.32) y (3.1),

$$c(t) = \frac{1}{\int_0^{T-t} D(s) ds} \frac{R(t)}{\exp\left(\int_0^t m(s) ds\right)} W(0),$$

se reemplaza (2.32) dentro de la exponencial,

$$c(t) = \frac{1}{\int_0^{T-t} D(s) ds} \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'}\right) R(t) W(0). \quad (3.6)$$

En consecuencia, la utilidad realizada percibida por un hogar a la edad τ siendo la función de utilidad $u(c(t)) = \ln(c(t))$ se obtiene reemplazando (3.6) en (2.1), es decir:

$$U^*(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \ln \left[\frac{1}{\int_0^{T-t} D(s) ds} \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'}\right) R(t) W(0) \right] dt. \quad (3.7)$$

3.2. Caso del compromiso

Como se muestra en (Feigenbaum & Raei, 2021a) cuando un hogar se compromete con el plan inicial del “yo” de 0 años, su comportamiento se asemejará al de actuar bajo la suposición de que $D(t)$ es una función de descuento que se mantiene consistente en el tiempo. Se especifica que $c(t|0)$ es el consumo a la edad t si se siguiera el plan inicial. En consecuencia, en la senda de compromiso, el hogar llevará a cabo la maximización de la siguiente manera:

$$\int_0^T D(t) \ln c(t|0) dt, \quad (3.8)$$

sujeto a la restricción presupuestaria (2.28) pero considerando que el consumo descontado sea igual a la riqueza en el momento 0 del siguiente modo

$$\int_0^T \frac{R(0)}{R(t)} c(t|0) dt = W(0) \Rightarrow \int_0^T \frac{c(t|0)}{R(t)} dt = W(0). \quad (3.9)$$

3.2. CASO DEL COMPROMISO

El Lagrangiano del problema del hogar es

$$\mathcal{L} = D(t) \ln c(t|0) - \lambda \frac{c(t|0)}{R(t)},$$

y la condición de primer orden con respecto al consumo viene dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c(t|0)} = \frac{D(t)}{c(t|0)} - \frac{\lambda}{R(t)} = 0.$$

Por tanto, dado que según (Feigenbaum & Raei, 2021a) $c(t|0) = c(0) = \lambda^{-1}$ se tiene,

$$\frac{D(t)}{c(t|0)} = \frac{\lambda}{R(t)} = \frac{1}{R(t)c(0)},$$

o equivalentemente,

$$c(t|0) = D(t)R(t)c(0). \quad (3.10)$$

Se reemplaza (3.10) en la restricción presupuestaria (3.9),

$$\int_0^T \frac{D(t)R(t)c(0)}{R(t)} dt = W(0) \Rightarrow c(0) \int_0^T D(t) dt = W(0).$$

Se introduce de nuevo la solución para $c(0)$ en (3.10), luego el plan inicial de consumo es

$$c(t|0) = \frac{D(t)R(t)W(0)}{\int_0^T D(s)ds} = \frac{R(t)W(0)}{\int_0^T \frac{D(s)}{D(t)} ds}. \quad (3.11)$$

Por consiguiente, la utilidad obtenida al aplicar la expresión (3.11) en (3.8), a partir de la edad t , siguiendo la senda de consumo de compromiso según (Feigenbaum & Raei, 2021a), se expresa como:

$$U_c(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \ln \left[\frac{D(t)}{\int_t^T D(s)ds} \exp \left(- \int_0^t \frac{D(s)ds}{\int_s^T D(s')ds'} \right) R(t)W(0) \right] dt. \quad (3.12)$$

En (Feigenbaum & Raei, 2021a), se muestra que esto se simplifica a

$$U_c(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \ln \left[\frac{D(t)}{\int_0^T D(s) ds} R(t) W(0) \right] dt. \quad (3.13)$$

3.3. Contrastando acción y compromiso

Ahora el interés se centra en comparar estas expresiones para determinar las condiciones necesarias que hagan que la senda de compromiso con el plan inicial sea dominante en Pareto en relación con la senda realizada. Para llevar a cabo la comparación entre la utilidad realizada (3.7) y la utilidad del compromiso (3.12), se define la diferencia entre ambas de la siguiente manera:

$$\Delta U(\tau) = U_c(\tau) - U^*(\tau). \quad (3.14)$$

Si se encuentra que $\Delta U(\tau) > 0$, esto indica que comprometerse con la estrategia de consumo de tiempo cero aumentará la utilidad total que el hogar experimentaría en comparación con la utilidad que obtendría al seguir la estrategia realizada (o sea la actualmente implementada). Es importante destacar que si $\Delta U(\tau) \geq 0$ para todos los valores de τ en el intervalo $[0, T]$, y al menos en un caso se cumple la desigualdad de manera estricta, entonces la estrategia de compromiso superará a la estrategia actual en términos de dominio de Pareto. En otras palabras, la estrategia de compromiso resultará en una mejor situación para el hogar en todos los casos, y al menos en uno de esos casos, será significativamente mejor.

Se pueden reemplazar las expresiones (3.7) y (3.12) en la ecuación (3.14) para obtener el siguiente resultado:

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \ln \left[\frac{\frac{D(t)}{\int_0^T D(z') dz'} R(t) W(0)}{\frac{1}{\int_0^{T-t} D(z) dz} \exp \left(- \int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'} \right) R(t) W(0)} \right] dt$$

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

o equivalentemente,

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \ln \left[\frac{\frac{D(t)}{\int_0^T D(z') dz'}}{\frac{1}{\int_0^{T-t} D(z) dz} \exp \left(- \int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'} \right)} \right] dt, \quad (3.15)$$

que puede simplificarse en

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \left[\ln \left(D(t) \frac{\int_0^{T-t} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \ln \exp \left(\int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'} \right) \right] dt,$$

se simplifica, nuevamente y se obtiene

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T D(t - \tau) \left[\ln \left(D(t) \frac{\int_0^{T-t} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'} \right] dt. \quad (3.16)$$

En una función de descuento exponencial, la estrategia realizada es equivalente a la estrategia de compromiso debido a su consistencia a lo largo del tiempo. En una función de descuento exponencial, descontar un valor θ desde el momento t hasta el momento 0 proporciona un valor θ' que es equivalente a descontar θ desde el momento $t + \Delta t$ hasta el momento Δt . En otras palabras, descontar la misma cantidad por el mismo período de tiempo siempre resulta en el mismo valor, sin importar en qué punto del tiempo se esté situado. Por lo tanto, $\Delta U(\tau)$ debe ser igual a cero si $\varepsilon(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Esto significa que $\Delta U(\tau) = O(\varepsilon)$ para todo $\tau \in [0, T]$ y en términos de primer orden, $\Delta U(\tau)$ será una función lineal de $\varepsilon(t)$, que se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T B(t, \tau) \varepsilon(t) dt + O(\varepsilon^2), \quad (3.17)$$

siendo

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

$$B(t, \tau) = \frac{D(t - \tau)}{\varepsilon(t)} \left[\ln \left(D(t) \frac{\int_0^{T-t} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \int_0^t \frac{ds}{\int_0^{T-s} D(s') ds'} \right].$$

En (Feigenbaum & Raei, 2021a), se demuestra que $B(z, \tau)$ es

$$B(z, \tau) = \exp(-\rho(z - \tau)) \left[\Theta(z - \tau) + \int_0^{T-z} \frac{\exp(-\rho t) \Theta(t - \tau)}{\int_0^{T-t} \exp(-\rho z') dz'} dt - \int_\tau^T \exp(-\rho t) M(t, z) dt \right], \quad (3.18)$$

con

$$M(t, z) = \frac{1}{\int_0^T \exp(-\rho z') dz'} + \int_0^{\min\{t, T-z\}} \frac{ds}{\left(\int_0^{T-s} \exp(-\rho z') dz' \right)^2}, \quad (3.19)$$

y $\Theta(z)$ es la función escalón de Heaviside definida por

$$\Theta(z) = \begin{cases} 0 & z < 0, \\ 1 & z \geq 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

En el caso especial de $\tau = 0$ también se debe tener $\Delta U(0) \geq 0$ ya que la estrategia del compromiso es, por definición, la mejor estrategia posible desde la perspectiva del $\tau = 0$. Si $\Delta U(0)$ tuviera algún término de primer orden, el signo de $\Delta U(0)$ podría hacerse positivo cambiando el signo de $\varepsilon(t)$, por lo que es posible deducir que $\Delta U(0) = O(\varepsilon^2)$. En (Feigenbaum & Raei, 2021a), se presenta un cálculo directo que demuestra que $B(t, 0) = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

En el estudio realizado por Feigenbaum y Raei (2021a) se muestra que la expresión encerrada entre paréntesis en (3.16) es al menos de primer orden en $\varepsilon(t)$. Por lo tanto, se puede reescribir (3.16) como:

$$\Delta U(\tau) = \int_{\tau}^T \exp(-\rho(t-\tau)) \left[\ln \left(D(t) \frac{\int_0^{T-t} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \int_0^t \frac{ds}{\int_s^T D(s'-s) ds'} \right] dt + O(\varepsilon^2).$$

En (Feigenbaum & Raei, 2021a) se realiza la derivada y los autores obtienen,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \Delta U(\tau) &= \rho \int_{\tau}^T \exp(-\rho(t-\tau)) \left[\ln \left(D(t) \frac{\int_0^{T-t} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \int_0^t \frac{ds}{\int_s^T D(s'-s) ds'} \right] dt \\ &\quad - \ln \left(D(\tau) \frac{\int_0^{T-\tau} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) - \int_0^{\tau} \frac{ds}{\int_s^T D(s'-s) ds'} + O(\varepsilon^2) \\ &= \rho \Delta U(\tau) - \ln \left(D(\tau) \frac{\int_0^{T-\tau} D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + \int_0^{\tau} \frac{ds}{\int_s^T D(s'-s) ds'} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En conclusión

$$\frac{d}{d\tau} \Delta U(0) = \rho \Delta U(0) - \ln \left(\frac{\int_0^T D(z) dz}{\int_0^T D(z') dz'} \right) + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon^2). \quad (3.21)$$

En el trabajo de (Feigenbaum & Raei, 2021a), se señala que este resultado es el equivalente en tiempo continuo de la conclusión en tiempo discreto que señala $\Delta U_1 = O(\varepsilon^2)$, como se mostró en su investigación anterior (Feigenbaum & Raei, 2021b). En el contexto del tiempo continuo, explican que $\Delta U(\tau)$ es una integral, lo que significa que no se pueden aislar los efectos de $\varepsilon(T)$. Lo que se puede demostrar, no obstante, es que $B(T, \tau) > 0$ para todo $\tau \in (0, T)$.

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

$$B(T, \tau) = \exp(-\rho T) \left[\exp(\rho T) - \int_{\tau}^T \exp(-\rho(t - \tau)) M(t, T) dt \right]$$

y utilizando que

$$M(t, T) = \frac{1}{\int_0^T \exp(-\rho z') dz'},$$

se tiene

$$B(T, \tau) = \exp(-\rho T) \left[\exp(\rho T) - \frac{\int_0^{T-\tau} \exp(-\rho z) dz}{\int_0^T \exp(-\rho z) dz} \right] > 0,$$

para $\tau > 0$.

Como explican (Feigenbaum & Raei, 2021a) es crucial notar que $\Delta U(T)$ es trivialmente cero y, por ende, no relevante para el análisis. Por lo tanto, el enfoque es en el caso terminal, donde el valor máximo de τ que se puede calcular es $T - \Delta\tau$. En este escenario, solo $\varepsilon(T)$ es relevante para $t > T - \Delta\tau$. Si se observa que $B(T, \tau) > 0$, se puede hacer $\Delta U(\tau)$ arbitrariamente grande y, por lo tanto, positivo para todo $\tau \in (0, T - \Delta\tau]$ aumentando suficientemente $\varepsilon(T)$.

Para el caso terminal, se adopta un enfoque en tiempo continuo y se establece una cota inferior en $\varepsilon(T)$, asegurando que el yo terminal prefiera la estrategia de compromiso sobre la estrategia realizada ($c(T|0) > c(T)$). Esta comparación se vuelve fundamental, ya que lo que es óptimo para el yo inicial puede no serlo para el yo terminal, especialmente a medida que avanza el tiempo. Por tanto, al compararlo, se puede asegurar que se siga la senda de compromiso.

En (Feigenbaum & Raei, 2021b) se proporcionan condiciones precisas para valores pequeños de T (hasta 5), estableciendo las circunstancias bajo las cuales esta preferencia del yo terminal por la estrategia de compromiso es válida y óptima.

La expresión (3.6) para la estrategia de consumo realizado no está definida en el límite a medida que $t \rightarrow T$. En (Feigenbaum & Raei, 2021a) se obtiene una expresión equivalente

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

$$c(t) = \frac{1}{\int_0^T D(s)ds} \exp \left(- \int_{T-t}^T \frac{(1-D(t'))}{\int_0^{t'} D(s')ds'} dt' \right) R(t)W(0).$$

Por lo tanto, el consumo terminal en la estrategia realizada es

$$c(T) = \frac{1}{\int_0^T D(s)ds} \exp \left(- \int_0^T \frac{(1-D(t'))}{\int_0^{t'} D(s')ds'} dt' \right) R(T)W(0). \quad (3.22)$$

Mientras tanto, el consumo terminal a lo largo de la estrategia de compromiso, es decir siguiendo el plan del yo inicial está dado por (3.11),

$$c(T|0) = \frac{D(T)R(T)W(0)}{\int_0^T D(s)ds}. \quad (3.23)$$

Se divide (3.22) por (3.23) y se obtiene la siguiente relación

$$\frac{c(T|0)}{c(T)} = D(T) \exp \left(\int_0^T \frac{(1-D(t'))}{\int_0^{t'} D(s')ds'} dt' \right).$$

Luego, la condición exacta para $c(T|0) > c(T)$ es

$$\frac{c(T|0)}{c(T)} > 1,$$

o expresado de otra manera

$$D(T) > \exp \left(- \int_0^T \frac{(1-D(t))dt}{\int_0^t D(s)ds} \right). \quad (3.24)$$

Se puede reescribir (3.24) en términos de los factores de ponderación futuros (2.2) como

$$\exp(-\rho T)(1 + \varepsilon(T)) > \exp \left(- \int_0^T \frac{(1 - \exp(-\rho t))(1 + \varepsilon(t))}{\int_0^t \exp(-\rho s)(1 + \varepsilon(s))ds} dt \right).$$

Utilizando (2.41) en el segundo paso, el argumento del exponente se puede reexpresar como

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{(1 - \exp(-\rho t))(1 + \varepsilon(t))}{\int_0^t \exp(-\rho s)(1 + \varepsilon(s))ds} dt &= \int_0^T \frac{(1 - \exp(-\rho t)) \left[1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t) \right]}{\int_0^t \exp(-\rho s) ds \left[1 + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s') \varepsilon(s') ds'}{\int_0^t \exp(-\rho s'') ds''} \right]} dt \\ &= \rho \int_0^T \frac{(1 - \exp(-\rho t)) \left[1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t) \right]}{(1 - \exp(-\rho t)) \left[1 + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s') \varepsilon(s') ds'}{\int_0^t \exp(-\rho s'') ds''} \right]} dt. \end{aligned}$$

Así pues, la condición exacta se simplifica a

$$\exp(-\rho T)(1 + \varepsilon(T)) > \exp \left(- \rho \int_0^T \frac{1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t)}{1 + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'}} dt \right).$$

Reordenando, se obtiene

$$\exp(T) > \exp \left(\rho \left[T - \int_0^T \frac{1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t)}{1 + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'}} dt \right] \right) - 1. \quad (3.25)$$

La expresión (3.25) establece un límite inferior en $\varepsilon(T)$ tal que $c(T|0) \geq c(T)$ si la ponde-

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

ración futura terminal es suficientemente grande en relación con un agregado de los otras ponderaciones futuras. Esta condición es exacta y necesaria (aunque no suficiente) para que la estrategia de consumo de compromiso con el plan inicial sea dominante en Pareto en comparación con la estrategia de consumo realizada.

Para tener una mejor intuición sobre lo que implica esta condición, (Feigenbaum & Raei, 2021a) aproximaron la integral con respecto a t en (3.25) hasta el primer orden en $\varepsilon(t)$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t)}{1 + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'}} dt = \\ = \int_0^T \left[1 - \frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t) - \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'} \right] dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

En (Feigenbaum & Raei, 2021a) se reexpresa la condición de primer orden para $c(T|0) > c(T)$ de la siguiente forma

$$\varepsilon(T) > \rho \int_0^T \left[\frac{\exp(-\rho t)}{1 - \exp(-\rho t)} \varepsilon(t) + \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'} \right] dt + O(\varepsilon^2). \quad (3.26)$$

Utilizando de nuevo (2.41), se puede combinar las fracciones en el integrando para obtener

$$\varepsilon(T) > \int_0^T \left[\frac{\rho \int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds + \exp(-\rho t) \varepsilon(t)}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'} \right] dt + O(\varepsilon^2).$$

Se integra por partes y se obtiene

$$\rho \int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds = -\exp(-\rho t) \varepsilon(t) + \int_0^t \exp(-\rho s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds. \quad (3.27)$$

Así pues, (3.26) se simplifica en

3.3. CONTRASTANDO ACCIÓN Y COMPROMISO

$$\varepsilon(T) > \int_0^T \left[\frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') ds'} \right] dt + O(\varepsilon^2). \quad (3.28)$$

Como se explica en (Feigenbaum & Raei, 2021a) se puede entender la intuición detrás de este resultado de primer orden de la siguiente manera. A partir de (3.10) se tiene que

$$c(t|0) = (1 + \varepsilon(t)) \exp(-\rho t) R(t) c(0),$$

entonces

$$\ln c(t|0) = \varepsilon(t) - \rho + \ln(R(t)c(0)) + O(\varepsilon^2).$$

Por lo tanto, el factor de ponderación futuro $\varepsilon(t)$ mide la desviación de primer orden de la estrategia de compromiso en comparación con la estrategia de consumo logarítmico que se aplicaría si la función de descuento fuera exactamente $\exp(-\rho t)$. Mientras tanto, el integrando del lado derecho de (3.26) es la contribución de primer orden a $d \ln c(t)/dt$, que se ha denotado como $G_c^1(t)$ según (2.49). La desigualdad (3.28) compara $\varepsilon(t)$ con la integral $\int_0^T G_c^1(t) dt$ de esta aproximación de la tasa de crecimiento del consumo a lo largo del ciclo de vida.

En el capítulo siguiente, se llevará a cabo un análisis exhaustivo de las condiciones necesarias para que la función de consumo adquiera una forma de joroba.

Capítulo 4

Forma del perfil de consumo

En este capítulo, se analizarán las condiciones necesarias y proposiciones según (Feigenbaum & Raei, 2021a) para la concavidad (convexidad) del plan de consumo. Centrando el análisis principalmente en cómo cambia el consumo con el tiempo y estableciendo una regla para determinar si el patrón de consumo es cóncavo o convexo. La forma del perfil del consumo es un factor fundamental para describir con mayor precisión el comportamiento observado en las personas. Esta regla se basa en los factores de ponderación futuros y afecta a todos los momentos temporales, no solo al más lejano.

4.1. Primera condición

En (Feigenbaum & Raei, 2021a) se deriva que el perfil del consumo logarítmico será cóncavo en $T - t$ en primer orden si y sólo si

$$\varepsilon'(t) \geq \frac{\int_0^t \exp(-\rho z) \varepsilon'(z) dz}{\int_0^t \exp(-\rho z') dz'}, \quad (4.1)$$

y el perfil será estrictamente cóncavo si la desigualdad (4.1) es estricta. Es decir, el perfil de consumo logarítmico será cóncavo si la ponderación futura marginal en t es mayor que una media ponderada de ponderaciones futuras marginales de 0 a t .

4.2. Segunda condición

En (Feigenbaum & Raei, 2021a) se obtiene que el perfil de consumo logarítmico es cóncavo en $T - t$ si y sólo si

$$\varepsilon'(t) \geq \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon'(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') (1 + \varepsilon(s')) ds'} (1 + \varepsilon(t)). \quad (4.2)$$

Si la desigualdad (4.2) es estricta, la concavidad también será estricta.

Se supone que el perfil de consumo logarítmico es cóncavo para todo $t \in [0, T]$, por lo que (4.2) se satisface para todo $t > 0$.

4.3. Tercera condición

Según se ve en (Feigenbaum & Raei, 2021a) el perfil de consumo logarítmico es cóncavo en $T - t$ si y sólo si

$$\mu(t) = \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)} \geq \frac{\int_0^t \exp(-\rho s) \varepsilon'(s) ds}{\int_0^t \exp(-\rho s') [1 + \varepsilon(s')] ds'} = \frac{\int_0^t D(s) \mu(s) ds}{\int_0^t D(s') ds'}. \quad (4.3)$$

donde se emplea (2.2) para obtener la igualdad final. La concavidad (convexidad) estricta en $T - t$ resulta si la ponderación futura marginal ajustada es mayor (menor) que una media ponderada de las ponderaciones futuras marginales ajustadas en retrasos más cortos que t , donde las ponderaciones son la función de descuento exacta.

4.4. Primera proposición de concavidad

Proposición 4.1 Si $\varepsilon(t) > -1$ y satisface (4.2) (o equivalentemente la condición (4.3)) para todo $t \in (0, T]$, por lo que el perfil de consumo logarítmico es cóncavo, entonces la función

4.5. SEGUNDA PROPOSICIÓN DE CONCAVIDAD

de descuento estará continuamente sesgada hacia el presente. Por el contrario, si el perfil de consumo logarítmico es convexo y $\varepsilon(t) > -1$ para todo $t \in (0, T]$, la función de descuento estará continuamente sesgada hacia el futuro.

4.5. Segunda proposición de concavidad

Proposición 4.2 Si $\varepsilon(t) > -1$ y $\mu(t)$ es creciente, entonces (4.2) (o equivalentemente (4.3)) se cumplirá para todo t y el perfil de consumo logarítmico será cóncavo. Si $\mu(t)$ es estrictamente creciente, estas desigualdades se cumplirán estrictamente y el perfil de consumo logarítmico será estrictamente cóncavo. Por el contrario, si $\mu(t)$ es decreciente, el perfil del consumo logarítmico será convexo. Si $\mu(t)$ es estrictamente decreciente, el perfil del consumo logarítmico será estrictamente convexo.

4.6. Condiciones en el descuento hiperbólico

Ejemplo 4.3 Caso hiperbólico: El resultado bien establecido de que una función de descuento hiperbólica produce un perfil de consumo logarítmico estrictamente cóncavo se deduce inmediatamente de la proposición 4.1 o también de la proposición 4.2. A partir de (2.13),

$$\varepsilon'(t) = \frac{\eta \exp(\eta t)}{1 + \eta t} - \frac{\eta \exp(\eta t)}{(1 + \eta t)^2} = \frac{\eta(1 + \eta t) \exp(\eta t) - \eta \exp(\eta t)}{(1 + \eta t)^2}$$

que equivale a

$$\varepsilon'(t) = \frac{\eta^2 t \exp(\eta t)}{(1 + \eta t)^2} \quad (4.4)$$

Así, el factor de ponderación marginal futuro ajustado para la función de descuento hiperbólica es

$$\mu(t) = \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)} = \frac{\frac{\eta^2 t \exp(\eta t)}{(1 + \eta t)^2}}{\frac{\exp(\eta t)}{1 + \eta t}} = \frac{\eta^2 t}{1 + \eta t} \quad (4.5)$$

Puesto que

4.6. CONDICIONES EN EL DESCUENTO HIPERBÓLICO

$$\mu'(t) = \eta^2 \frac{1 + \eta t - t(\eta)}{(1 + \eta t)^2} = \frac{\eta^2}{(1 + \eta t)^2} > 0,$$

la ponderación futura marginal ajustada es estrictamente creciente y el perfil de consumo logarítmico es estrictamente cóncavo. En (Feigenbaum & Raei, 2021a), los autores muestran que directamente se satisface.

En el capítulo próximo, se llevará a cabo una revisión en profundidad sobre el valor de la recompensa, las funciones de descuento existentes y se presentará una nueva función propuesta para su consideración.

Capítulo 5

Modelando decisiones con mayor precisión

En el siguiente capítulo, se explorará una faceta fundamental en la teoría económica y de toma de decisiones, la introducción de un nuevo factor de descuento de la utilidad. Este factor resulta esencial para reflejar de manera más precisa y fiel el comportamiento de los individuos. La premisa fundamental aquí es mejorar la valoración que cada uno de los “yoes” asigna a las distintas opciones y escenarios a lo largo del tiempo, de modo que esta valoración sea un reflejo más ajustado a la realidad y a las complejas dinámicas que influyen en las decisiones.

A lo largo de este capítulo, se examinará en detalle cómo este nuevo factor de descuento de la utilidad contribuye a una toma de decisiones más informada y precisa. Explorándose su impacto en la economía y en la psicología de las decisiones, considerando cómo los seres humanos ponderan las recompensas y consecuencias a lo largo del tiempo.

En última instancia, este enfoque más preciso y realista en la valoración de la utilidad representa un avance significativo en el entendimiento del comportamiento humano en el contexto de la toma de decisiones económicas. A través de este capítulo, se espera proporcionar una visión más completa, detallada y precisa de cómo las personas evalúan las opciones y cómo esta evaluación puede influir en una amplia gama de decisiones que se toman en la vida cotidiana.

5.1. Valor de la recompensa y reforzamiento

En esta sección se abordará el concepto de valor de la recompensa, los diferentes enfoques para estudiarlo y cómo afecta el reforzamiento en las decisiones.

En principio el factor de descuento se utiliza para “penalizar” un valor o utilidad que no se encuentra en el momento presente, sino en uno ulterior o futuro. En otras palabras, representa el descuento temporal de una recompensa atrasada.

En (Buriticá & Dos Santos, 2016) se distinguen dos enfoques para estudiar el valor de la recompensa. Por un lado, un enfoque empírico que reconoce el valor de una recompensa está dado por lo bien que un evento aumenta la posibilidad de que alguien dé una respuesta específica, tal como ratifica (Mazur, 2001). Es como evaluar qué tan efectivo es ese evento para motivar una acción. Por otro lado, un enfoque de inferencia en el cual la noción de valor de la recompensa hace alusión la utilidad como la define (Mankiw, 2012) que es una medida abstracta de felicidad o bienestar que se recibe de ciertos bienes.

Para medir el valor de tal recompensa según el enfoque empírico diferentes autores se aprovechan del estudio del reforzamiento. El reforzamiento, según la definición de (Miltenberger, 2012), es el proceso por el cual una conducta se refuerza o fortalece debido a las consecuencias que ocurren después de esa conducta. En (Miltenberger, 2012) se distinguen dos tipos de reforzamiento, el reforzamiento positivo y el reforzamiento negativo. En el reforzamiento positivo, después de que ocurre una conducta, esta es seguida por la presentación de un estímulo reforzante o un aumento en su intensidad, lo que lleva al fortalecimiento de la conducta. En cambio, en el reforzamiento negativo, después de la ocurrencia de la conducta, esta es seguida por la eliminación de un estímulo aversivo o la reducción de su intensidad, lo que también conduce al fortalecimiento de la conducta.

El tiempo que transcurre entre que ocurre un comportamiento y la aparición de la consecuencia reforzante será de vital importancia al momento de medir el valor de la recompensa pues cuanto más tiempo transcurra disminuirá la efectividad de una consecuencia como reforzador.

Otro factor crucial a tener en cuenta, como lo indica Miltenberger (2012), es el programa

5.2. MEDICIÓN DEL VALOR DE LA RECOMPENSA

de reforzamiento de una conducta. Este programa especifica en qué circunstancias cada respuesta es seguida por un reforzador. Se pueden identificar cuatro tipos distintos de programas de reforzamiento.

- **Razón fija:** En este programa, el reforzador se otorga después de un número específico de respuestas.
- **Razón variable:** En este caso, el reforzador se entrega después de un promedio de un número variable de respuestas.
- **Intervalo fijo:** Bajo este programa, el reforzador se otorga por la primera respuesta que ocurre después de un intervalo de tiempo fijo.
- **Intervalo variable:** En este programa, el reforzador se entrega por la primera respuesta después de un intervalo de tiempo variable.

5.2. Medición del valor de la recompensa

En el estudio de (Buriticá & Dos Santos, 2016), se realiza un seguimiento de varias mediciones del valor de la recompensa utilizando un enfoque empírico. A continuación, se procederá a examinar algunas de las mediciones que son presentadas en la investigación.

En (Hursh & Silberberg, 2008) se midió el valor de la recompensa en términos de fuerza de la respuesta estableciendo una relación directa entre la fuerza de la respuesta y el valor. Es decir, cuanto mayor es la fuerza de la respuesta, se considera que el valor de la recompensa asociada también es mayor.

En (Verhave, 1963) se utilizó un “valor de equilibrio” para medir el esfuerzo necesario para obtener una recompensa y también para expresar las preferencias relativas de las palomas entre dos programas de refuerzo de razón fija. Las palomas participaron en un experimento con dos componentes de razón fija, uno con razón fija 100 y otro con razón fija 10. El cambio entre estos componentes ocurría cuando las palomas tocaban una tecla de cambio y el valor de equilibrio representaba el punto en el que se estabilizaba su elección.

5.3. RECOMPENSAS DIFERIDAS Y DESCUENTO

En (Hodos, 1961) se propuso medir la fuerza de la recompensa utilizando un programa de razón progresiva donde, cada vez que el sujeto obtiene una recompensa, el número de respuestas necesarias para obtener la siguiente aumenta según un criterio fijo. Descubrió que el punto de quiebre, es decir, el número de respuestas en el cual el sujeto abandona la tarea, dependía de la densidad de la recompensa.

En (Hursh & Silberberg, 2008) se propone una alternativa para medir el valor de la recompensa utilizando un modelo que refleja cómo el consumo de la recompensa responde a los cambios en los costos y beneficios, o lo que se conoce como la “elasticidad de la demanda”. En su modelo cuentan con un parámetro que representa la elasticidad para toda la curva. Tal parámetro, se considera como un reflejo del valor de la recompensa.

Luego en (Buriticá & Dos Santos, 2016) se distingue el valor de la recompensa como constructo hipotético siendo que el valor de la recompensa existe, en alguna medida, más allá de lo observado y como variable interviniente siendo parte de un conjunto de relaciones entre variables. En el caso del constructo hipotético cabe destacar el estudio de (Chib et al., 2009), que sostiene que en el cerebro, los bienes son procesados en áreas similares, tal como si hubiera una especie de “moneda” común que representara el valor y que pudiera ser utilizada para comparar distintos bienes y tomar decisiones.

5.3. Recompensas diferidas y descuento

Tal como se ha señalado previamente en (Miltenberger, 2012), al medir el valor de la recompensa, es importante tener en cuenta que a medida que aumenta el tiempo entre un comportamiento y la consecuencia reforzante, la efectividad de esta consecuencia como refuerzo disminuirá.

En (Buriticá & Dos Santos, 2016) se resaltan dos líneas de estudio que se derivan del retraso en la obtención de la recompensa. La primera línea, busca explicar que la disminución en la efectividad de una recompensa retrasada se debe a una reducción en la tasa global de reforzamiento. La segunda línea, sugiere que hay un fenómeno de descuento temporal en el cual el valor de la recompensa disminuye a medida que se retrasa su entrega.

5.3. RECOMPENSAS DIFERIDAS Y DESCUENTO

Siguiendo la línea del descuento temporal, en (Madden & Johnson, 2010) se hace un estudio exhaustivo sobre la evolución de las funciones que reflejan el descuento. Se describe el descuento temporal como parte de un proceso de decisiones impulsivas en el cual el valor subjetivo de una cantidad pequeña ahora es mayor que el de una cantidad mayor luego.

Una de las fórmulas propuesta para describir tal descuento es la de descuento exponencial propuesta en (Samuelson, 1937) la cual fue ampliamente utilizada. Además, debe destacarse, como se menciona en (Myerson & Green, 1995), que en dicho modelo se postula que el valor de una recompensa futura es descontado en función del riesgo asociado con su espera, implicando, por consiguiente, la existencia de una tasa de riesgo constante relacionada con el potencial fracaso en su obtención. Este modelo se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$V = A \exp(-\rho t), \quad (5.1)$$

donde V es el valor presente de una recompensa futura, A el monto de tal recompensa, t es el delay o retraso a su obtención y ρ es un parámetro que indica la tasa de riesgo constante. Es relevante destacar que en el contexto del modelo de consumo intertemporal estudiado, $\exp(-\rho t)$ es empleado como la base para medir posteriormente la desviación en los factores de ponderación futuros.

En (Madden & Johnson, 2010) se señala que se han registrado desvíos sistemáticos de la función 5.1 de descuento exponencial en investigaciones con sujetos humanos (Kirby, 1997; Myerson & Green, 1995) y con animales (Mazur, 1997). Por tanto, (Ainslie, 1975; Mazur, 1987) proponen la siguiente función de descuento hiperbólica, que se ajusta de manera más precisa al comportamiento tanto de las personas como de los animales

$$V = \frac{A}{1 + \eta t}, \quad (5.2)$$

donde V el valor presente de una recompensa futura, A el monto de tal recompensa, t es el delay o retraso a su obtención y η es un parámetro que rige la tasa de disminución del valor, el cual es análogo al parámetro ρ de (5.1). Como se explica en (Myerson & Green, 1995) si se ajusta a los mismos datos, la hipérbola decrecerá inicialmente (en intervalos

5.3. RECOMPENSAS DIFERIDAS Y DESCUENTO

cortos) más rápido que la función exponencial, pero luego (en intervalos largos) decrecerá más lentamente. En el contexto del modelo de consumo intertemporal estudiado, la función de descuento principal utilizada es $1/(1 + \eta t)$.

En el estudio de (Myerson & Green, 1995) se destaca que la función hiperbólica de descuento es más efectiva que la exponencial al ajustar datos de grupo, como se señala en el trabajo previo de (Rachlin et al., 1991). Sin embargo, en (Myerson & Green, 1995) se advierte también que la forma de la función que mejor describe los datos agregados no siempre coincide con la forma que describe los datos no agregados, como se observa en estudios anteriores (Estes, 1956; Sidman, 1952). Por lo tanto, no se ha demostrado que el modelo hiperbólico proporcione una descripción más precisa de los datos cuando se trata de sujetos individuales que un modelo exponencial.

Como no está demostrado, en (Myerson & Green, 1995) se reanalizan los datos de investigaciones previas realizadas por ellos en (Green et al., 1994) para comparar el comportamiento de individuos y su ajuste en funciones de descuentos hiperbólicas y exponenciales. Los participantes en el estudio original eran 12 estudiantes universitarios. El experimento se llevó a cabo de forma individual en una habitación tranquila. Cada participante tenía ante ellos dos juegos de cartas. Uno de los juegos se ubicaba a la derecha y representaba una cantidad fija de dinero (\$1000 o \$10,000), pero esta cantidad estaría sujeta a un retraso previamente establecido antes de recibirla. El otro juego estaba situado a la izquierda y ofrecía una cantidad que variaba entre el 0.1 % y el 100 % de la cantidad fija, pero esta cantidad estaba disponible de inmediato. A los participantes se les presentaba simultáneamente una carta de cada uno de los mazos, y se les pedía que eligieran entre la cantidad fija con retraso y la cantidad variable de entrega inmediata. Para cada cantidad fija y cada período de retraso, calcularon el promedio de la cantidad inmediata en la que el participante cambió su preferencia de la recompensa inmediata a la retrasada en la valoración descendente, así como la cantidad en la que el participante cambió su preferencia de la recompensa retrasada a la inmediata en la valoración ascendente.

Como resultado, encontraron que el descuento hiperbólico se ajusta mejor a los datos que el descuento exponencial. Además, al revisar tanto los datos agregados como los de algunos sujetos individuales, observaron que el valor presente de una recompensa retrasada disminuye

5.3. RECOMPENSAS DIFERIDAS Y DESCUENTO

menos abruptamente en retrasos largos de lo que se predice mediante las funciones de descuento exponencial o hiperbólico. Debido a ello, propusieron un modelo cuasi-hiperbólico de dos parámetros que también puede captar la forma de la disminución del valor actual y que fue presentado previamente en (Green et al., 1994; Loewenstein & Prelec, 1992):

$$V = \frac{A}{(1 + \eta t)^j}, \quad (5.3)$$

donde V el valor presente de un recompensa futura, A el monto de tal recompensa, t es el delay o retraso a su obtención y η es un parámetro que rige la tasa de disminución del valor, el cual es análogo al parámetro η de (5.2) y al parámetro ρ de (5.1). El parámetro j modifica la forma de la hipérbola de tal manera que cuando j es menor que 1.0, la curva se aplana, nivelándose a medida que t (el retraso) aumenta.

En (Myerson & Green, 1995) se demuestra que el descuento cuasi hiperbólico (5.3) no solo se ajusta significativamente mejor a los datos, sino que también, describe el descuento temporal de cada individuo de manera más precisa que el modelo exponencial. En adición, este modelo permite reflejar gracias al parámetro del exponente que el valor presente disminuye menos abruptamente en retrasos largos. Adicionalmente, llevaron a cabo una búsqueda para determinar el valor del parámetro j que mejor reflejaba el comportamiento de los individuos, y descubrieron que en 8 de los 12 sujetos, j era significativamente diferente de 1.0. De estos 8 sujetos, en 7 de ellos, j resultó ser significativamente inferior a 1.0. En base a los resultados, se puede concluir que el parámetro j se encuentra en el intervalo $(0, 1]$, ya que si fuera menor que 0, perdería su función de descontar y no es mayor a 1 de acuerdo con los hallazgos empíricos.

En las siguientes secciones, se analizará la función (5.3) propuesta por Myerson y Green (1995) en el marco del modelo de consumo intertemporal. Primero, se corroborará si garantiza una ponderación futura fuerte. Luego, se verificará si cumple con el sesgo de presente, lo que asegurará que se cumplan las reversiones de preferencias. Después, se evaluará si respeta la condición de Pareto. Por último, se comprobará si respeta la concavidad del plan de consumo. Si se cumplen las condiciones, se podrá afirmar que la función cuasi-hiperbólica es adecuada para el modelo y que proporciona mejores resultados según la evidencia empírica.

5.4. Revisión de la ponderación futura fuerte

En esta sección, se procederá a examinar la función de descuento (5.3) con el fin de determinar la dinámica de los parámetros η y j que garantice una ponderación futura fuerte.

La función de descuento cuasi-hiperbólica, tal como fue propuesta en (Myerson & Green, 1995), se expresa de la siguiente manera:

$$D(t) = \frac{1}{(1 + \eta t)^j}. \quad (5.4)$$

El resultado de que los valores del parámetro j se encuentren en el rango de 0 a 1 se conservará, ya que esto se deriva de los hallazgos del estudio empírico.

Como primer paso, se busca identificar los valores de $\eta > 0$ y $\rho > 0$ con $j \in (0, 1)$ para los cuales la funcional de descuento exponencial es inferior a la cuasi-hiperbólica, con el fin de posteriormente determinar el valor óptimo de ρ .

Es importante destacar que cuando j es igual a 1, la ecuación (5.4) es idéntica a (5.2) y en aras de mantener la coherencia del modelo, se asume que el parámetro óptimo ρ es igual a η y posteriormente se verificará la validez de esta afirmación.

Siendo $\rho^* = \eta$ entonces debido a la expresión (2.4) se busca que

$$D(t) \geq \exp(-\eta t) \Rightarrow \frac{1}{(1 + \eta t)^j} \geq \exp(-\eta t) \quad (5.5)$$

lo cual es equivalente a

$$\exp(\eta t) \geq (1 + \eta t)^j.$$

En $t = 0$ vale la igualdad y por tanto bastará con que la derivada que es la tasa de cambio de $\exp(\eta t)$ sea mayor o igual que la derivada de $(1 + \eta t)^j$

$$\frac{d}{dt} \exp(\eta t) \geq \frac{d}{dt} (1 + \eta t)^j \Rightarrow \eta \exp(\eta t) \geq j(1 + \eta t)^{j-1} \eta$$

se simplifica y se obtiene

$$\exp(\eta t) \geq j(1 + \eta t)^{j-1}.$$

Analizando $j(1 + \eta t)^{j-1}$ si se tiene en consideración que $j \in (0, 1)$

$$j(1 + \eta t)^{j-1} = j \overbrace{\frac{1}{(1 + \eta t)^{1-j}}}^{\in (0,1]} < 1.$$

Puesto que queda evidenciado que $1 > j(1 + \eta t)^{j-1}$ entonces es prueba suficiente para mostrar que $\exp(\eta t) \geq (1 + \eta t)^j$ debido a que $\exp(\eta t) \geq 1$ y por tanto

$$j(1 + \eta t)^{j-1} < 1 \leq \exp(\eta t). \quad (5.6)$$

Entonces, al cumplirse (5.6) se verifica que con $\rho = \eta$, la función de descuento supera a la función exponencial. Sin embargo, es de interés determinar si existe algún valor aún menor que η que mantenga la función de descuento por encima de la función exponencial. Se supondrá que ρ está en el intervalo $(0, \eta)$ y

$$\frac{1}{(1 + \eta t)^j} \geq \exp(-\rho t)$$

siendo $t \geq 0$. En consecuencia, el inverso multiplicativo de la función exponencial supera al de la función de descuento de tal manera que

$$\exp(\rho t) \geq (1 + \eta t)^j.$$

De manera similar a lo demostrado en 2.2, se definirá una función $f(t, \rho)$ que evalúa la diferencia entre el inverso multiplicativo de la función exponencial y el de la función de descuento del siguiente modo

$$f(t, \rho) = \exp(\rho t) - (1 + \eta t)^j.$$

Para evaluar si cumple con los requisitos, resultará de interés buscar los extremos de la función y en caso de que el extremo genere un valor negativo, será suficiente como prueba para afirmar que el parámetro óptimo ρ es igual a η .

Por tanto, se tiene

5.5. REVISIÓN DEL SESGO DE PRESENTE

$$f(0, \rho) = \exp(0) - (1)^j = 0, \quad \frac{d}{dt}f(t, \rho) = \rho \exp(\rho t) - j(1 + \eta t)^{j-1} \eta.$$

y además

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} f(t, \rho) = \rho^2 \exp(\rho t) - j(j-1)(1 + \eta t)^{j-2} \eta^2 > 0.$$

De este análisis se deducen dos conclusiones: 1) no es factible resolver de manera analítica la primera derivada igualándola a cero pues queda una ecuación trascendente y 2) pueden existir mínimos dependiendo de los valores de j , η y ρ (por ejemplo $t = 0$ es un mínimo si $\rho = j\eta$).

Por lo tanto, podemos concluir que existen valores del parámetro ρ que son menores que η y que cumplen (5.5) pero no se pueden deducir mediante una fórmula general, ya que no se puede despejar ρ para ellos. En consecuencia, consideramos que $\rho = \eta$ es un subóptimo, pero se continuará trabajando con este valor, ya que garantiza que la función de descuento cuasi-hiperbólica sea siempre mayor que la función exponencial y además, mantiene la coherencia con el caso hiperbólico en el cual $j = 1$.

5.5. Revisión del sesgo de presente

En esta sección, se analizará si el descuento cuasi-hiperbólico (5.4) cumple con la condición de sesgo de presente establecida en (B.7).

La condición que debe cumplirse, para que un hogar manifieste sesgo de presente, lo que también implica la reversión de preferencia, es la siguiente

$$\varepsilon'(0) \leq \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)},$$

además, debe cumplirse $\varepsilon(t) > -1$.

A partir de la ecuación (2.3), se procede al cálculo de $\varepsilon(t)$ y $\varepsilon'(t)$ para el descuento cuasi-hiperbólico. El factor de ponderación futuro $\varepsilon(t)$ resulta

5.5. REVISIÓN DEL SESGO DE PRESENTE

$$\varepsilon(t) = \exp(\rho t)D(t) - 1 = \frac{\exp(\rho t)}{(1 + \eta t)^j} - 1 = \exp(\rho t)(1 + \eta t)^{-j} - 1. \quad (5.7)$$

$\varepsilon'(t)$ se puede expresar como

$$\varepsilon'(t) = \frac{\rho \exp(\rho t)}{(1 + \eta t)^j} - \frac{j\eta \exp(\rho t)}{(1 + \eta t)^{j+1}}. \quad (5.8)$$

se valúa en $t = 0$

$$\varepsilon'(0) = \rho - j\eta. \quad (5.9)$$

Se procede a calcular $\frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)}$ resultando en

$$\frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)} = \left(\frac{\rho \exp(\rho t)}{(1 + \eta t)^j} - \frac{j\eta \exp(\rho t)}{(1 + \eta t)^{j+1}} \right) \frac{(1 + \eta t)^j}{\exp(\rho t)} = \rho - \frac{j\eta}{(1 + \eta t)}. \quad (5.10)$$

Se evaluará entonces la condición de sesgo de presente considerando que los parámetros $\rho > 0$, $\eta > 0$ y $j \in (0, 1)$

$$\rho - j\eta \leq \rho - \frac{j\eta}{(1 + \eta t)} \Rightarrow \frac{j\eta}{(1 + \eta t)} \leq j\eta.$$

Dado que $(1 + \eta t) \geq 1$, la desigualdad está demostrada.

Se analiza, por ultimo, la condición $\varepsilon(t) > -1$. Dado que $\varepsilon(t) = \exp(\rho t)(1 + \eta t)^{-j} - 1$, tal como se muestra en (5.7),

$$\exp(\rho t)(1 + \eta t)^{-j} - 1 > -1,$$

lo cual es equivalente a

$$\exp(\rho t)(1 + \eta t)^{-j} > 0.$$

Considerando que los parámetros $t \geq 0$, $\rho > 0$, $\eta > 0$ y $j \in (0, 1)$, se puede establecer que $\exp(\rho t) \geq 1$ y $(1 + \eta t)^{-j} \geq 1$. Por lo tanto, la siguiente condición $\varepsilon(t) > -1$ se encuentra satisfecha.

En conclusión, se confirma que el descuento cuasi-hiperbólico cumple con el sesgo de presente.

5.6. Revisión de la condición de Pareto

En esta sección, se llevará a cabo un análisis para determinar si el descuento cuasi-hiperbólico (5.4) cumple con la condición de óptimo de Pareto, tal como se establece en (3.24), con el propósito de que prevalezca el plan inicial por encima de los demás planes.

La condición de óptimo de Pareto, como se ha explicado previamente en (Feigenbaum & Raei, 2021a), es necesaria pero no suficiente y se expresa de la siguiente manera

$$D(T) > \exp \left(- \int_0^T \frac{(1 - D(t))dt}{\int_0^t D(s)ds} \right). \quad (5.11)$$

Es equivalente a que el consumo terminal siguiendo el plan inicial sea mayor o igual al consumo terminal realizado. Para verificar su cumplimiento se analizará cada componente por separado. El primero de ellos $D(T)$ indica el descuento de un valor o utilidad en la edad terminal T y se expresa de la siguiente manera

$$D(T) = \frac{1}{(1 + \eta T)^j}.$$

El segundo de ellos, es una función de la propensión marginal a consumir, tal cual se ve en (3.1), (3.6) y (3.22). Para hallar una equivalencia para la integral, se analizarán minuciosamente todas sus composiciones.

El desarrollo de cada integral que se presentará en esta sección se halla en el Apéndice E. La integral del denominador equivale a

$$\int_0^t D(s)ds = \int_0^t \frac{1}{(1 + \eta s)^j} ds = \frac{1}{\eta(1-j)} ((1 + \eta t)^{1-j} - 1).$$

La integral dentro de la exponencial de (5.11) equivale a

$$\int_0^T \frac{(1 - D(t))dt}{\int_0^t D(s)ds} = \int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)} ((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt, \quad (5.12)$$

que se puede expresar equivalentemente del siguiente modo

$$\int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt =$$

$$= \int_0^T \frac{1}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt - \ln((1 + \eta T)^{1-j} - 1) + \lim_{t \rightarrow 0} \ln((1 + \eta t)^{1-j} - 1)$$

Cabe destacar que para la primera integral no se pudo obtener una expresión general por lo cual se buscará una expresión alternativa que permita resolver la inecuación. Para ello se le asignará el nombre $I(t)$ al integrando de (5.12) y la inecuación se puede escribir del siguiente modo

$$\frac{1}{(1 + \eta T)^j} > \exp\left(-\int_0^T I(t) dt\right),$$

se usan propiedades de la potencia y se obtiene

$$\frac{1}{(1 + \eta T)^j} > \frac{1}{\exp\left(\int_0^T I(t) dt\right)}.$$

Dado que no se ha encontrado una expresión general para la integral de $I(t)$, se buscará una función $q(t)$ que sea comparable tanto con $I(t)$ como con $D(T)$, de manera que sea posible corroborar la inecuación original (5.11).

Notar que $q(t) > 0$ si se considera que en el integrando de (5.12) se verifica que el numerador es positivo ya que $\frac{1}{(1 + \eta t)^j} < 0$ y que el denominador es positivo dado que $\eta(1-j) > 0$ y $(1 + \eta t)^{1-j} > 1$.

Si se verifica que $I(t) > 0$ y se cumple

$$\frac{1}{\exp\left(\int_0^T q(t) dt\right)} > \frac{1}{\exp\left(\int_0^T I(t) dt\right)},$$

o equivalentemente

$$\int_0^T q(t) dt < \int_0^T I(t) dt, \quad (5.13)$$

5.6. REVISIÓN DE LA CONDICIÓN DE PARETO

si se logra demostrar también que

$$\frac{1}{(1 + \eta T)^j} > \frac{1}{\exp \left(\int_0^T q(t) dt \right)}, \quad (5.14)$$

entonces se corrobora (5.11) que es equivalente a

$$\frac{1}{(1 + \eta T)^j} > \frac{1}{\exp \left(\int_0^T I(t) dt \right)}. \quad (5.15)$$

5.6.1. Primera subcondición

En esta subsección, se procederá a realizar un análisis detallado de la subcondición (5.13), con el propósito de identificar una función $q(t) > 0$ que cumpla con los requisitos establecidos. Para determinar $q(t)$ se propone que cumpla lo siguiente

$$\frac{1}{(1 + \eta T)^{j+1}} = \frac{1}{\exp \left(\int_0^T q(t) dt \right)}.$$

Pues bien, si se llega a corroborar lo mencionado, entonces es evidente que la función cumplirá con (5.11) y (5.15), dado que $\frac{1}{(1 + \eta T)^j} > \frac{1}{(1 + \eta T)^{j+1}}$.

$$(1 + \eta T)^{j+1} = \exp \left(\int_0^T q(t) dt \right). \quad (5.16)$$

se aplican logaritmos a ambos lados

$$\ln \left((1 + \eta T)^{j+1} \right) = \int_0^T q(t) dt.$$

se deriva para t

$$\frac{d}{dt} \left(\ln \left((1 + \eta T)^{j+1} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^T q(t) dt \right).$$

se despeja $q(T)$

$$\frac{j\eta(1 + \eta T)^{j-1}}{(1 + \eta T)^{j+1}} = q(T). \quad (5.17)$$

5.6. REVISIÓN DE LA CONDICIÓN DE PARETO

Cabe notar que $q(T) > 0$ considerando que el numerador es positivo puesto que $\eta > 0$, $j \in (0, 1)$ y $(1 + \eta T)^{j-1} \geq 1$ y que el denominador es positivo dado que $(1 + \eta T)^{j-1} \geq 1$

Luego de haber encontrado la función $q(t)$ que cumple con los requisitos se debe comprobar

$$\int_0^T \frac{j\eta(1+\eta t)^{j-1}}{(1+\eta t)^{j+1}} dt < \int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1+\eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1+\eta t)^{1-j} - 1)} dt.$$

Dado que $\eta > 0$ y $j \in (0, 1)$, entonces es fácil comprobar $1 + \eta t \geq 1$ y $\eta(1-j) > 0$ para $t > 0$ puesto que en $t = 0$ no está definido el dominio de $I(t)$. Para $t > 0$ vale que $I(t) > 0$ y $q(t) > 0$. Si ambos son positivos y existe una desigualdad estricta entre ellos para todo $t > 0$, entonces al compararlos directamente se puede demostrar la desigualdad original. Para ello, se aplicará la generalización del Teorema Fundamental del Cálculo.

$$\frac{d}{dT} \left(\int_0^T \frac{j\eta(1+\eta t)^{j-1}}{(1+\eta t)^{j+1}} dt \right) < \frac{d}{dT} \left(\int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1+\eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1+\eta t)^{1-j} - 1)} dt \right).$$

$$\frac{j\eta(1+\eta T)^{j-1}}{(1+\eta T)^{j+1}} < \frac{1 - \frac{1}{(1+\eta T)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1+\eta T)^{1-j} - 1)}.$$

Se considera $T > 0$ se puede renombrar $k = 1 + \eta T > 1$ y por ello reescribir la desigualdad del siguiente modo

$$\frac{j\eta k^{j-1}}{k^j + 1} < \frac{1 - \frac{1}{k^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}(k^{1-j} - 1)}. \quad (5.18)$$

Se simplifica y se reformula la desigualdad (5.18)

$$\frac{jk^{j-1}}{k^j + 1} < \frac{(1-j) \left(1 - \frac{1}{k^j}\right)}{k^{1-j} - 1}.$$

Dada la complejidad de la desigualdad, se la analiza tomando en consideración la diferencia $d(k, j)$ de los términos que la componen (el término a derecha menos el término a izquier-

5.6. REVISIÓN DE LA CONDICIÓN DE PARETO

da), la cual deberá ser un valor mayor a cero. Este análisis se llevará a cabo gráficamente, considerando valores específicos para $k > 0$ (pero sabiendo que $k > 1$) y valores de $j \in (0, 1)$.

$$d(k, j) = \frac{(1-j) \left(1 - \frac{1}{k^j}\right)}{k^{1-j} - 1} - \frac{jk^{j-1}}{k^j + 1}$$

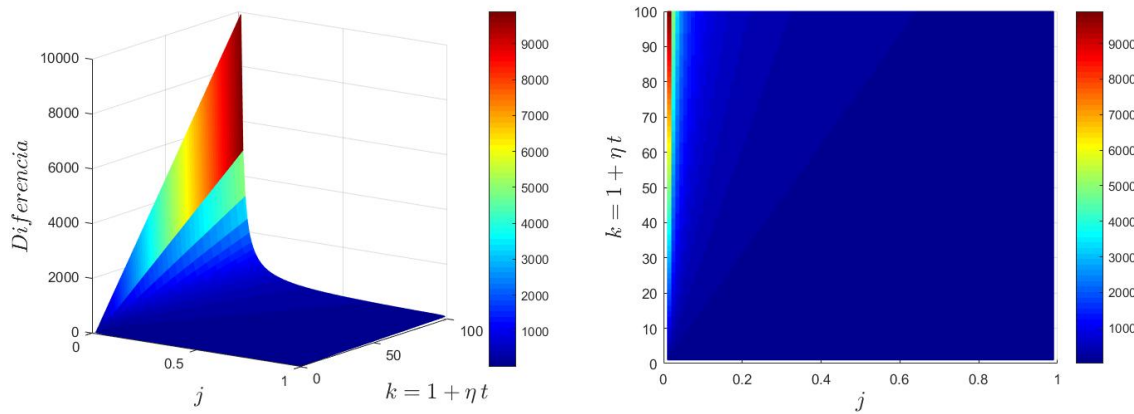


Figura 5.1: Gráfico de $d(k, j)$ para $(k, j) \in (0, 100) \times (0, 1)$.

En (5.1) se puede observar que la función $d(k, j)$ es estrictamente positiva y que aumenta considerablemente para valores pequeños de j y grandes de k . Al verificar numéricamente que esta desigualdad es cierta, se procede al análisis de la segunda subcondición (5.14) para confirmar que cumple la condición de Pareto (5.15).

5.6.2. Segunda subcondición

En esta subsección, se llevará a cabo un análisis minucioso de la subcondición (5.14), ya que si se verifica, esto implica que se cumplen tanto (5.11) como (5.15).

Dado que, de acuerdo a (5.16),

$$\exp \left(\int_0^T q(t) dt \right) = (1 + \eta T)^j + 1,$$

como parte de la condición establecida, entonces,

$$\frac{1}{(1+\eta T)^j} > \frac{1}{\exp\left(\int_0^T I(t)dt\right)} = \frac{1}{(1+\eta T)^{j+1}} \Rightarrow \frac{1}{(1+\eta T)^j} > \frac{1}{(1+\eta T)^{j+1}}.$$

Esta desigualdad se verifica puesto que $\eta > 0$, $T > 0$ y $j \in (0, 1)$. Una vez constatada esta segunda subcondición, se puede afirmar con certeza que se cumplen (5.11) y (5.15).

5.7. Revisión de la concavidad

En esta sección, se llevará a cabo un análisis para determinar si el descuento cuasi-hiperbólico (5.4) cumple con la condición para la concavidad del plan de consumo, tal como se establece en (4.2).

Las condiciones establecidas en la proposición (4.2) son que $\varepsilon(t) > -1$ y que $\mu(t)$ sea creciente, o de manera equivalente, que $\mu'(t) > 0$.

Dado que la primera condición ya ha sido demostrada en la sección (5.5), se procede a analizar la segunda condición.

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)) > 0,$$

como se ve en (4.3) $\mu(t)$ es igual $\frac{\varepsilon'(t)}{1+\varepsilon'(t)}$ por lo cual se puede reescribir la desigualdad anterior como

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\varepsilon'(t)}{1+\varepsilon'(t)}\right) > 0.$$

Dado que $\frac{\varepsilon'(t)}{1+\varepsilon'(t)} = \rho - \frac{j\eta}{(1+\eta t)}$, tal como se muestra en (5.10), entonces

$$\frac{d}{dt}\left(\rho - \frac{j\eta}{(1+\eta t)}\right) = \frac{j\eta^2}{(1+\eta t)^2} > 0.$$

Se considera que $t \geq 0$, $\eta > 0$ y $j \in (0, 1)$, se verifica que $j\eta^2 > 0$ y $(1+\eta t)^2 \geq 1$. Por lo tanto, la segunda condición se encuentra satisfecha. Dadas ambas condiciones, se puede confirmar que el descuento cuasi-hiperbólico cumple la concavidad del plan de consumo.

Conclusiones generales

Los resultados generales obtenidos en esta tesis son los siguientes:

- Se ha formulado el modelo de consumo intertemporal en tiempo continuo considerando preferencias inconsistentes de Feigenbaum y Raei (2021a). Se han completado los cálculos inconclusos y se han agregado comentarios pertinentes a los resultados posteriores.
- Se ha planteado una función de descuento cuasi-hiperbólica fundamentada en evidencia empírica, la cual captura de manera más precisa el comportamiento individual en cuanto a las preferencias futuras y su valoración. Esta función introduce un parámetro j que varía entre individuos y cuyos valores son estimados a partir de investigaciones y evidencia empírica. Se ha llegado a la conclusión de que este parámetro se sitúa en el intervalo abierto $(0,1)$.
- Se ha observado que, a diferencia de la función de descuento hiperbólica, en la función cuasi-hiperbólica el parámetro ρ óptimo de la función exponencial no es igual a η y no puede calcularse con precisión. Sin embargo, se ha encontrado que $\rho = \eta$ es una elección subóptima que garantiza siempre una ponderación futura fuerte.
- Se ha identificado que la función de descuento cuasi-hiperbólica cumple con el sesgo del presente. Esta característica se manifiesta en los individuos como una percepción de impaciencia a corto plazo para esperar un aumento mayor en la utilidad y una reversión de preferencias a largo plazo, donde muestran una mayor paciencia para esperar un incremento en la utilidad.

- Se ha llegado a la conclusión de que la función de descuento cuasi-hiperbólica satisface la condición de Pareto, la cual establece que el plan inicial de consumo es superior en términos de utilidad al plan efectivamente llevado a cabo. Debido a que el plan inicial domina en el sentido de Pareto, el individuo se comprometerá con dicho plan.
- Se ha constatado que la función de descuento cuasi-hiperbólica cumple con las condiciones necesarias para generar un perfil de consumo cóncavo. Esta propiedad es suficiente para que el perfil de consumo exhiba una forma de "joroba", un patrón comúnmente observado empíricamente.

Los resultados obtenidos en el presente estudio revelan que la función de descuento cuasi-hiperbólica no solo satisface las condiciones fundamentales del modelo, sino que también representa un avance en el campo de la teoría económica y del comportamiento. Este hallazgo indica que dicha función no solo es compatible con las premisas teóricas establecidas, sino que también proporciona una representación más precisa y fidedigna de cómo los individuos valoran las utilidades o recompensas futuras. La introducción de esta nueva función de descuento es crucial para mejorar el modelo propuesto, ya que sus propiedades ofrecen una descripción más profunda del proceso de toma de decisiones intertemporal. Al reflejar de manera más fiel las preferencias temporales de los agentes económicos, ofrece una base sólida para prever con mayor precisión el comportamiento futuro de los individuos y hogares. Por ende, la inclusión de esta función de descuento cuasi-hiperbólica en el marco analítico no solo amplía nuestra comprensión teórica, sino que también tiene implicaciones prácticas significativas al mejorar la capacidad predictiva del modelo.

Posibles líneas de investigación futura

Los problemas que se abordan en el contexto de esta tesis plantean una serie de interrogantes y áreas de investigación que resultan novedosas y de gran relevancia en la actualidad. Al examinar detenidamente los contenidos de cada uno de los capítulos de esta tesis, se identifican dos líneas de investigación que atraviesan todo el trabajo.

En primer lugar, se plantea la necesidad de explorar el modelo de consumo intertemporal con una función de utilidad no logarítmica. Este enfoque permitirá analizar las condiciones esenciales que deben cumplirse para optimizar dicho modelo, lo que representa un aspecto fundamental para comprender el comportamiento económico en diferentes contextos.

Un segundo aspecto crucial que se desprende de esta tesis se relaciona con la incorporación de un factor de consumo inesperado de considerable magnitud en el modelo. Esta inyección de gastos inesperados arroja luz sobre cómo los individuos reaccionan ante situaciones financieras imprevistas. Se busca, en este caso, derivar las condiciones bajo las cuales los agentes económicos seguirían prefiriendo mantener su plan inicial, incluso en presencia de estos gastos inesperados.

Estas dos áreas de investigación prometen ofrecer valiosas conclusiones sobre el comportamiento humano en términos de decisiones de consumo y planificación financiera.

Apéndice A

Función exponencial

En este apéndice, se lleva a cabo una comparación de los factores ρ en la función exponencial, examinando cómo estos parámetros ejercen una influencia en la forma de la función. Esta comparación se presenta de manera concisa pero exhaustiva, explorando las variaciones en el comportamiento de la función exponencial en función de los valores de ρ .

A.1. Comparación

Es relevante observar que en la ecuación (2.2), la desviación de una función exponencial con parámetro ρ se evalúa $D(t) = \exp(-\rho t)(1 + \varepsilon(t))$. Se comparará exclusivamente la función exponencial $\exp(-\rho t)$.

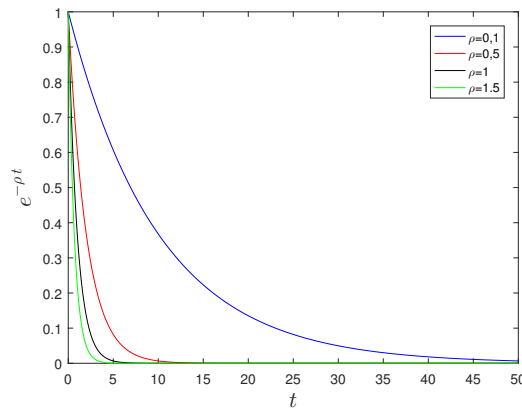


Figura A.1: Gráfico de $e^{-\rho t}$ para distintos valores de ρ .

Apéndice B

Relación del sesgo presente y los factores de ponderación futuros

En este apéndice, se realiza una deducción de la relación que vincula los sesgos de presente y futuro con los factores de ponderación futuros según (Feigenbaum & Raei, 2021a).

B.1. Preferencias

Las preferencias manifiestan un sesgo hacia el presente si la utilidad marginal que un hogar obtiene de un incremento en el consumo c_0 en el momento $t = 0$ es mayor que la utilidad marginal, descontada, de un incremento en el consumo $c_{\Delta t}$ que se produce después de esperar un período de tiempo $\Delta t > 0$. Sin embargo, en caso de que el consumo c_0 se ubique en el instante $t > 0$ y consecuentemente el consumo $c_{\Delta t}$ se presente en el momento $t + \Delta t$, el hogar experimenta una utilidad marginal superior al aumentar el consumo de $c_{\Delta t}$ en comparación con el aumento en el consumo de c_0 . En (Feigenbaum & Raei, 2021a) señalan que en el contexto matemático, esto conlleva la existencia de un valor $c > 0$ con la función de descuento $D(\cdot)$ tal que:

$$u'(c_0)\Delta c_0 - D(\Delta t)u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t} > 0, \quad (\text{B.1})$$

mientras que para $t > 0$ en (Feigenbaum & Raei, 2021a) se obtiene

$$D(t)u'(c_0)\Delta c_0 - D(t + \Delta t)u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t} < 0. \quad (\text{B.2})$$

Se opera algebraicamente en (B.1) se puede expresar

$$u'(c_0)\Delta c_0 > D(\Delta t)u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t} \Rightarrow \frac{u'(c_0)\Delta c_0}{u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t}} > D(\Delta t). \quad (\text{B.3})$$

Se procede con manipulaciones algebraicas también en (B.2) quedando

$$D(t)u'(c_0)\Delta c_0 < D(t + \Delta t)u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t} \Rightarrow \frac{u'(c_0)\Delta c_0}{u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t}} < \frac{D(t + \Delta t)}{D(t)}, \quad (\text{B.4})$$

entonces (B.3) y (B.4) pueden combinarse para establecer la condición

$$D(\Delta t) < \frac{u'(c_0)\Delta c_0}{u'(c_{\Delta t})\Delta c_{\Delta t}} < \frac{D(t + \Delta t)}{D(t)}. \quad (\text{B.5})$$

Se reemplaza (2.2) en (B.5) y se obtiene

$$\exp(-\rho\Delta t)(1 + \varepsilon(\Delta t)) < \frac{\exp(-\rho(t + \Delta t))(1 + \varepsilon(t + \Delta t))}{\exp(-\rho t)(1 + \varepsilon(t))},$$

de forma análoga,

$$\exp(-\rho\Delta t)(1 + \varepsilon(\Delta t)) < \frac{\exp(-\rho t)\exp(-\rho\Delta t)(1 + \varepsilon(t + \Delta t))}{\exp(-\rho t)(1 + \varepsilon(t))},$$

se opera algebraicamente,

$$\frac{\exp(-\rho\Delta t)}{\exp(-\rho\Delta t)}(1 + \varepsilon(\Delta t)) < \frac{\exp(-\rho t)}{\exp(-\rho t)} \frac{(1 + \varepsilon(t + \Delta t))}{(1 + \varepsilon(t))},$$

se simplifica y se obtiene

$$1 + \varepsilon(\Delta t) < \frac{1 + \varepsilon(t + \Delta t)}{1 + \varepsilon(t)} \Rightarrow \varepsilon(\Delta t) < \frac{1 + \varepsilon(t + \Delta t)}{1 + \varepsilon(t)} - 1. \quad (\text{B.6})$$

Si las inversiones de preferencia continúan en el límite a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, se pueden dividir ambos lados de (B.6) por Δt y se mantiene la desigualdad, dado que es positivo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(\Delta t)}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1 + \varepsilon(t + \Delta t)}{1 + \varepsilon(t)} - 1 \right],$$

operando algebraicamente,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(0 + \Delta t) - \varepsilon(0)}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1 + \varepsilon(t + \Delta t) - 1 - \varepsilon(t)}{1 + \varepsilon(t)} \right],$$

simplificando,

$$\varepsilon'(0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(0 + \Delta t) - \varepsilon(0)}{\Delta t} \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\varepsilon(t + \Delta t) - \varepsilon(t)}{\Delta t} \right] \frac{1}{1 + \varepsilon(t)} = \frac{\varepsilon'(t)}{1 + \varepsilon(t)}. \quad (\text{B.7})$$

La condición (B.7) indica que la tasa de incrementos de los factores de ponderación futuros marginales en 0 debe ser menor que la tasa de incremento en un tiempo t dado dividido 1 más el factor de ponderación futuro en t .

Obsérvese que para un sesgo de futuro las inecuaciones (B.1) y (B.7) se invertirían.

Apéndice C

Tasas de crecimiento relativas

Este apéndice se centra en el uso de las derivadas logarítmicas para analizar la tasa de crecimiento de funciones. Se presentaran ejemplos concretos que ilustran su utilidad en la toma de decisiones informadas y en la modelización de fenómenos complejos.

C.1. Tasas de cambio y de crecimiento

El concepto fundamental de la tasa de cambio se define como el cociente incremental, es decir, la derivada de una función $f(x)$, la cual indica cuánto afecta un cambio infinitesimal en x a la función. Matemáticamente, se expresa de la siguiente manera:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

La derivada proporciona una medida del crecimiento absoluto en un punto dado. Sin embargo, cuando el interés se centra en comprender el crecimiento relativo, es decir, cuánto aumentará o disminuirá la función porcentualmente desde un valor específico, se debe adoptar un enfoque diferente. Para abordar esta perspectiva de crecimiento relativo, se recurrirá a la derivada del logaritmo natural de la función $f(x)$. Esta derivada permite cuantificar el crecimiento relativo y se define de la siguiente manera:

C.2. EJEMPLO DE TASA DE CRECIMIENTO

$$\ln'(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Esta expresión indica el porcentaje de cambio en relación con el valor total de la función, proporcionando así una valiosa información sobre el crecimiento relativo de la función.

C.2. Ejemplo de tasa de crecimiento

Se presenta un ejemplo que contribuirá a esclarecer la comprensión de la tasa de crecimiento.

Si se considera una función $f(x) = x$:

$$f'(x) = (x)' = 1 \Rightarrow \ln'(f(x)) = \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Entonces, para determinar la tasa de crecimiento en $x = 2$, se evalúa la función derivada del logaritmo y se observa que devuelve 0,5. Esto tiene sentido, dado que la función siempre aumenta en 1 unidad, y en el punto 2, un aumento de 1 se traduciría en un 50 %.

Apéndice D

Análisis de la propensión marginal al consumo

En este apéndice, se explorará la Propensión marginal al consumo (PMC) según (Feigenbaum & Raei, 2021a) en el contexto de un $W(t)$ dado y cómo varía dependiendo de si la función de descuento es mayor que la exponencial (ponderación futura fuerte) o menor (ponderación futura ligera).

D.1. Análisis de signos

Obsérvese que, dado que $\rho > 0$ y $T - t > 0$, entonces $\exp(-\rho(T - t)) < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T - t))} > 0.$$

Si se considera el escenario en el que la función de descuento es mayor que la función exponencial, esto se traduce en una ponderación futura fuerte, lo que implica que $\varepsilon(t) \geq 0$. En este caso, a medida que $\int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds$ aumenta, la PMC dada por (D.1) disminuye. Lo cual se traduce en una reducción del consumo.

$$m(t) = \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T - t))} \left[1 - \frac{\rho}{1 - \exp(-\rho(T - t))} \int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds \right] \quad (D.1)$$

D.1. ANÁLISIS DE SIGNOS

Ahora si se considera el escenario en el que la función de descuento es menor, lo cual se traduce en una ponderación futura ligera, implica que $\varepsilon(t) \leq 0$. En este caso, a medida que $\int_0^{T-t} \exp(-\rho s) \varepsilon(s) ds$ disminuye, la PMC descrita en (D.1) aumenta. Esto se traduce en un aumento en el consumo.

Apéndice E

Desarrollo de integrales

En este apéndice, se procederá al desarrollo de las integrales necesarias con la finalidad de poner a prueba la condición de Pareto para la función de descuento cuasi-hiperbólica presentada en (Myerson & Green, 1995).

Lema E.1 *Desarrollo 1er integral*

$$\int_0^t \frac{1}{(1 + \eta s)^j} ds.$$

Se sustituye $w = 1 + \eta s \rightarrow dw = \eta ds$ y la integral se puede presentar convenientemente de la siguiente manera

$$\int (1 + \eta s)^{-j} ds = \frac{1}{\eta} \int w^{-j} dw = \frac{1}{\eta} \frac{w^{1-j}}{(1-j)}.$$

Se reemplaza $w = 1 + \eta s$ y se procede a evaluar la integral

$$\int_0^t (1 + \eta s)^{-j} ds = \frac{1}{\eta} \frac{(1 + \eta s)^{1-j}}{(1-j)} \Big|_0^t = \frac{1}{\eta} \frac{(1 + \eta t)^{1-j}}{(1-j)} - \frac{1}{\eta(1-j)}.$$

Simplificando la integral para $j \neq 1$, se presenta de la siguiente manera

$$\int_0^t (1 + \eta s)^{-j} ds = \frac{1}{\eta(1-j)} ((1 + \eta t)^{1-j} - 1).$$

Lema E.2 *Desarrollo 2da integral*

$$\int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt.$$

Se reescribe la integral en dos partes

$$\int_0^T \frac{1}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt - \int_0^T \frac{\frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt.$$

La resolución de la primera integral plantea dificultades significativas, lo que motiva la decisión de aplazar su solución dentro de este contexto.

La segunda integral se expresa de la siguiente manera

$$\int_0^T \frac{\frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt.$$

Sustituyendo $w = (1 + \eta t)^{1-j} - 1 \rightarrow dw = \eta(1-j)(1 + \eta t)^{-j} dt$ la integral se puede presentar de la siguiente forma

$$\int \frac{\frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt = \int \frac{1}{w} dw = \ln(|w|)$$

Se sustituye $w = (1 + \eta t)^{1-j} - 1$ y se procede a evaluar la integral

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt &= \ln(|(1 + \eta t)^{1-j} - 1|) \Big|_0^T = \\ &= \ln(|(1 + \eta T)^{1-j} - 1|) - \lim_{t \rightarrow 0} \ln(|(1 + \eta t)^{1-j} - 1|) \end{aligned}$$

Se destaca que como $\eta > 0$ y $j \in (0, 1)$ entonces $|(1 + \eta t)^{1-j} - 1| = (1 + \eta t)^{1-j} - 1$. Por tanto la integral final resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1 - \frac{1}{(1 + \eta t)^j}}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt = \\ & = \int_0^T \frac{1}{\frac{1}{\eta(1-j)}((1 + \eta t)^{1-j} - 1)} dt - \ln((1 + \eta T)^{1-j} - 1) + \lim_{t \rightarrow 0} \ln((1 + \eta t)^{1-j} - 1) \end{aligned}$$

Referencias

- Ainslie, G. (1975). Specious Reward: A Behavioral Theory of Impulsiveness and Impulse Control. *Psychological Bulletin*, 82(4), 463-496. <https://doi.org/10.1037/h0076860>
- Ando, A., & Modigliani, F. (1963). The "life cycle" hypothesis of saving: Aggregate implications and tests. *The American economic review*, 53(1), 55-84. <https://www.jstor.org/stable/1817129>
- Buriticá, J., & Dos Santos, C. (2016). Valor del Reforzador: ¿Cómo se Usa y Para qué se Usa el Concepto? *Revista Colombiana de Psicología*. <https://doi.org/10.15446/rcp.v25n2.50405>
- Chib, V. S., Rangel, A., Shimojo, S., & O'Doherty, J. P. (2009). Evidence for a Common Representation of Decision Values for Dissimilar Goods in Human Ventromedial Prefrontal Cortex. *The Journal of Neuroscience*, 29(39), 12315-12320. <https://doi.org/10.1523/jneurosci.2575-09.2009>
- Estes, W. K. (1956). The Problem of Inference from Curves Based on Group Data. *Psychological Bulletin*, 53(2), 134-140. <https://doi.org/10.1037/h0045156>
- Feigenbaum, J. (2016). Equivalent representations of non-exponential discounting models. *Journal of Mathematical Economics*, 66, 58-71. <https://doi.org/10.1016/j.jmateco.2016.08.001>
- Feigenbaum, J., & Raei, S. (2021a). *Deviation from exponential discounting and present bias in continuous time* (inf. téc.). working paper. <http://www.platonicadventures.com/uploads/3/8/7/0/38707599/expdeviationcont21sep20.pdf>
- Feigenbaum, J., & Raei, S. (2021b). *Explaining the consumption hump in terms of deviations from exponential discounting* [Working Paper]. <http://www.platonicadventures.com/uploads/3/8/7/0/38707599/humpexpdeviation21aug17.pdf>

- Fisher, I. (1930). The theory of interest. *New York*, 43, 1-19. http://files.libertyfund.org/files/1416/0219_Bk.pdf
- Friedman, M. (1957, diciembre). *Theory of the Consumption Function*. Princeton University Press. <https://doi.org/10.1515/9780691188485>
- Green, L., Fry, A. F., & Myerson, J. (1994). Discounting of Delayed Rewards: A Life-Span Comparison. *Psychological Science*, 5(1), 33-36. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9280.1994.tb00610.x>
- Harrod, R. (1948). *Towards a dynamic economics: Some Recent Developments of Economic Theory and their Application to Policy*. Macmillan & Co. <https://doi.org/10.2307/2F2984185>
- Hodos, W. (1961). Progressive Ratio as a Measure of Reward Strength. *Science*, 134(3483), 943-944. <https://doi.org/10.2307/1708217>
- Hursh, S. R., & Silberberg, A. (2008). Economic Demand and Essential Value. *Psychological Review*, 115, 186-198. <https://doi.org/10.1037/0033-295x.115.1.186>
- Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest, and Money*. Macmillan. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-70344-2>
- Kirby, K. N. (1997). Bidding on the Future: Evidence Against Normative Discounting of Delayed Rewards. *Journal of Experimental Psychology: General*, 126(1), 54-70. <https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.54>
- Laibson, D. (1997). Golden Eggs and Hyperbolic Discounting. *The Quarterly Journal of Economics*, 112(2), 443-478. <https://doi.org/10.1162/003355397555253>
- Laibson, D. (1996, junio). *Hyperbolic Discount Functions, Undersaving, and Savings Policy* (inf. téc.). National Bureau of Economic Research. <https://doi.org/10.3386/w5635>
- Laibson, D. (1998). Life-cycle consumption and hyperbolic discount functions. *European Economic Review*, 42(3-5), 861-871. [https://doi.org/10.1016/s0014-2921\(97\)00132-3](https://doi.org/10.1016/s0014-2921(97)00132-3)
- Laibson, D. I., Repetto, A., Tobacman, J., Hall, R. E., Gale, W. G., & Akerlof, G. A. (1998). Self-Control and Saving for Retirement. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1998(1), 91. <https://doi.org/10.2307/2534671>

- Larraín, F., & Sachs, J. D. (2002). *Macroeconomía en la economía global*. Pearson Educación.
- Loewenstein, G. F., & Prelec, D. (1992). Anomalies in Intertemporal Choice: Evidence and an Interpretation. *Quarterly Journal of Economics*, 107, 573-597. <https://doi.org/10.2307/2118482>
- Lucas, R. E. (1976). Econometric policy evaluation: A critique. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1, 19-46. [https://doi.org/10.1016/s0167-2231\(76\)80003-6](https://doi.org/10.1016/s0167-2231(76)80003-6)
- Madden, G. J., & Johnson, P. S. (2010). A Delay-Discounting Primer. En G. J. Madden & W. K. Bickel (Eds.), *Impulsivity: The Behavioral and Neurological Science of Discounting* (pp. 11-37). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/12069-001>
- Mankiw, N. G. (2012). *Principios de Economía* (Sexta). Cengage Learning. <https://clea.edu.mx/biblioteca/files/original/bd2711c3969d92b67fcf71d844bcbaed.pdf>
- Mazur, J. E. (1987). An Adjusting Procedure for Studying Delayed Reinforcement. En M. L. Commons, J. E. Mazur, J. A. Nevin & H. Rachlin (Eds.), *The Effect of Delay and of Intervening Events on Reinforcement Value* (pp. 55-73). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Mazur, J. E. (1997). Choice, Delay, Probability, and Conditioned Reinforcement. *Animal Learning & Behavior*, 25(2), 131-147. <https://doi.org/10.3758/BF03199051>
- Mazur, J. E. (2001). Hyperbolic value addition and general models of animal choice. *Psychological Review*, 108(1), 96-112. <https://doi.org/10.1037/0033-295x.108.1.96>
- Miltenberger, R. G. (2012). *Behavior Modification. Principles & Procedures* (5th).
- Modigliani, F. (1986). Life Cycle, Individual Thrift, and the Wealth of Nations. *Science*, 234(4777), 704-712. <https://doi.org/10.1126/science.234.4777.704>
- Modigliani, F., & Brumberg, R. (1954). Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross-section data. *Franco Modigliani*, 1(1), 388-436. <https://www.arabictrader.com/cdn/application/2009/08/15/pdf/v202/B4E8E626-EFEE-42B4-FE04-862C02B7AC83.pdf#page=18>

- Myerson, J., & Green, L. (1995). Discounting of delayed rewards: Models of individual choice. *Journal of the experimental analysis of behavior*, 64(3), 263-276. <https://doi.org/10.1901/jeab.1995.64-263>
- O'Donoghue, T., & Rabin, M. (2001). Choice and Procrastination. *The Quarterly Journal of Economics*, 116(1), 121-160. <https://doi.org/10.1162/003355301556365>
- O'Donoghue, T., & Rabin, M. (1999). Doing It Now or Later. *American Economic Review*, 89(1), 103-124. <https://doi.org/10.1257/aer.89.1.103>
- O'Donoghue, T., & Rabin, M. (2000). The economics of immediate gratification. *Journal of Behavioral Decision Making*, 13(2), 233-250. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1099-0771\(200004/06\)13:2<233::aid-bdm325>3.0.co;2-u](https://doi.org/10.1002/(sici)1099-0771(200004/06)13:2<233::aid-bdm325>3.0.co;2-u)
- Rachlin, H., Raineri, A., & Cross, D. (1991). Subjective Probability and Delay. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 55(2), 233-244. <https://doi.org/10.1901/jeab.1991.55-233>
- Samuelson, P. A. (1937). A Note on Measurement of Utility. *The Review of Economic Studies*, 4(2), 155. <https://doi.org/10.2307/2967612>
- Sidman, M. (1952). A Note on Functional Relations Obtained from Group Data. *Psychological Bulletin*, 49(3), 263-269. <https://doi.org/10.1037/h0063643>
- Strotz, R. H. (1955). Myopia and Inconsistency in Dynamic Utility Maximization. *The Review of Economic Studies*, 23(3), 165. <https://doi.org/10.2307/2295722>
- Verhave, T. (1963). Toward an Empirical Calculus of Reinforcement Value. *Journal of the Experimental Analysis of Behavior*, 6, 525-536. <https://doi.org/10.1901/jeab.1963.6-525>