Sprawozdanie

Aproksymacja średniokwadratowa

Franciszek Zdobylak

nr ind. 310313

29 grudnia 2019

Streszczenie

W sprawozdaniu przedstawię aproksymację średniokwadratową. W testach skupie się na aproksymacji wielomianów.

1 Aproksymacja wielomianowa

Zadanie aproksymacji polega na znalezieniu wielomianu optymalnego w_n^* do danej funkcji f. Wielomian optymalny (n-tego stopnia) to taki dla którego zachodzi:

$$||f - w_n^*|| = \inf_{w \in \Pi_n} ||f - w||$$

Symbol $|| \cdot ||$ oznacza normę. Jest to funkcja $|| \cdot || : X \to \mathbb{R}$, gdzie X to pewna przestrzeń liniowa (nad $\mathbb{R}$), która musi spełniać następujące aksjomaty:

(N1) $||f|| \geq 0$

(N2) $||\alpha f|| = |\alpha| \cdot ||f||$

(N3) $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$

Przykłady aproksymacji wielomianowej to na przykład:

Aproksymacja jednostajna - zdefiniowana przy pomocy normy jednostajnej (normy supremum) $|| \cdot ||_\infty$

Aproksymacja średniokwadratowa – zdefiniowana przy pomocy normy indukowanej przez iloczyn skalarny

2 Aproksymacja średniokwadratowa

W aproksymacji średniokwadratowej, podstawowym pojęciem jest iloczyn skalarny. Jest to funkcja $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{R}$, spełniająca:

(I1) $\langle f, f \rangle \geq 0, \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

(I2) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(I3) $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle = \langle f, \alpha g \rangle$
$\langle f_1 + f_2, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle$
$\langle f, g_1 + g_2 \rangle = \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle$

Aproksymacja średniokwadratowa polega na znalezieniu n-tego wielomianu optymalnego w sensie normy średniokwadratowej zdefiniowanej w następujący sposób:

$$||f||_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

Najczęściej używanymi iloczynami skalarnymi w aproksymacji średniokwadratowej jest iloczyn zdefiniowany przy pomocy całki:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)p(x)dx \qquad \text{, gdzie } p(x) \text{ to pewna funkcja wagowa}$$

oraz iloczyn skalarny dyskretny:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i)p(x_i)$$

gdzie $p(x)$ – funkcja wagowa, a $x_1, ..., x_n$ – pewne punkty z przedziału na którym aproksymujemy funkcję.

3 Ortogonalność

Do znajdywania wielomianu optymalnego w sensie aproksymacji średniokwadratowej używamy ciągu wielomianów ortogonalnych.

Definicja.
Funkcje f i g nazywamy orogonalnymi, gdy $\langle f, g \rangle = 0$
Układ $f_1, f_2, ...$ nazywany ortogonalnym, gdy $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ dla $i \neq j$

Definicja.
Ciąg $P_{k\,k=1,2,...}$, gdzie P_k jest wielomianem stopnia dokładnie k, nazywamy ciągiem wieomianów ortogonalnych, gdy $\langle P_k, P_l \rangle = 0$ dla $k \neq l$.

Definicja.
Wielomian $\overline{P_k}$ nazywamy wielomianem standardowym, gdy $\overline{P_k} = x^k + Q_k(x)$, gdzie $Q_k(x)$ jest wielomianem stopnia $k-1$.

Twierdzenie. *Wielomiany ortogonalne $\overline{P_k}$ spełniają warunek rekurencyjny:*

$$\overline{P_0} = 1 \qquad \overline{P_1} = x - c_1$$

$$\overline{P_k} = (x - c_k)\overline{P_{k-1}} - d_k\overline{P_{k-2}}$$

$$c_k = \frac{\langle x\overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle}{\langle \overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle} \qquad d_k = \frac{\langle \overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle}{\langle \overline{P_{k-2}}, \overline{P_{k-2}} \rangle}$$

Twierdzenie. *Jeśli ciąg P_k jest ciągiem wielomianów ortogonalnych to n-ty wielomian optymalny wyraża sie wzorem:*

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k$$

4 Konstruowanie wielomianu optymalnego

Podczas konstuowania wielomianów optymalnych na potrzeby doświadczeń będę korzystał z twierdzeń wspomnianych w poprzednim rozdziale. Tzn. skonstuuję ciąg standardowych wielomianów ortogonalnych. Będę pamiętał:

– współczynniki relacji rekurencyjnej c_k i d_k

– iloczyny skalarne $\langle P_k, P_k \rangle$

– wartości $P(x_i)$, gdzie x_i – punkty, w których liczymy iloczyn skalarny

Przy konstrukcji wielomianu optymalnego będę wyliczał współczynniki $a_k = \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}$. Wtedy wielomian optymalny będzie miał postać: $\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$.

Do wyliczenia wartości wielomianu w punkcie wystarczy znać wartości wielomianów P_k w punkcie, co w prosty sposób możemy wyliczyć z zależności rekurencyjnej.

5 Opis doświadczenia

W moich doświadczeniach chciałem sprawdzić jak dobrze oryginalny wielomian jest przybliżany przez wielomian optymalny policzony dla zaburzonych danych.

W doświadczeniach dla losowych wielomianów o stopniach $n = 1, 2, ..., 10$ konstruowałem wielomiany optymalne stopnia $k = 1, 2, ..., 2n$. Konstrukcja jest oparta na iloczynie skalarnym dyskretnym liczonym w 100 losowych punktach przedziału $[-1, 1]$. W każdym z tych punktów policzyłem wartość dokładną wielomianu oraz zaburzyłem ją o czynnik z przedziału $[-10^{-1}, 10^{-1}]$ (w drugim teście $[-10^{-2}, 10^{-2}]$). W ten sposób otrzymałem dwa wielomiany stopnia k – dokładniejszy i mniej dokładny. Następnie dla dla każdego z wielomianów optymalnych liczyłem średni błąd (różnicę między oryginalnym, a optymalnym wielomianem).

Wielomian stopnia 5

Stopień wielomianu optymalnego	Dokł. dane	Zaburzone dane	Różnica
1	1.3359e-01	1.3558e-01	1.9898e-03
2	8.2468e-02	8.3564e-02	1.0959e-03
3	1.4890e-02	1.4756e-02	1.3407e-04
4	1.1408e-02	1.2784e-02	1.3766e-03
5	4.2738e-16	1.1982e-02	1.1982e-02
6	5.3945e-16	1.3387e-02	1.3387e-02
7	5.4510e-16	1.3337e-02	1.3337e-02
8	5.6015e-16	1.3313e-02	1.3313e-02
9	6.1901e-16	1.5448e-02	1.5448e-02
10	6.4117e-16	1.5211e-02	1.5211e-02

Wielomian stopnia 8

Stopień wielomianu optymalnego	Dokł. dane	Zaburzone dane	Różnica
1	2.0270e-01	2.0697e-01	4.2749e-03
2	2.0500e-01	2.0470e-01	2.9797e-04
3	2.0542e-01	2.0505e-01	3.7528e-04
4	4.7134e-02	4.8454e-02	1.3199e-03
5	4.7309e-02	5.0095e-02	2.7856e-03
6	5.6457e-03	1.2941e-02	7.2952e-03
7	3.8832e-03	1.2384e-02	8.5010e-03
8	5.7125e-16	1.3044e-02	1.3044e-02
9	6.3786e-16	1.3786e-02	1.3786e-02
10	7.7591e-16	1.3753e-02	1.3753e-02

Tablica 1: Tabele błędu między wielomianem, a wielomianem optymalnym (zaburzenia rzędu 10^{-2})

Wielomian stopnia 5				Wielomian stopnia 8			
Stopień wielomianu optymalnego	Dokł. dane	Zaburzone dane	Różnica	Stopień wielomianu optymalnego	Dokł. dane	Zaburzone dane	Różnica
1	2.5232e-01	2.5228e-01	3.2581e-05	1	1.1701e-01	1.1669e-01	3.1822e-04
2	8.4324e-02	8.4292e-02	3.2035e-05	2	1.1889e-01	1.1876e-01	1.3113e-04
3	1.2920e-02	1.3103e-02	1.8292e-04	3	6.2387e-02	6.2332e-02	5.5088e-05
4	7.0644e-03	7.1434e-03	7.8946e-05	4	2.5028e-02	2.5182e-02	1.5406e-04
5	2.0485e-15	1.2360e-03	1.2360e-03	5	2.3842e-02	2.3997e-02	1.5507e-04
6	2.1978e-15	1.4856e-03	1.4856e-03	6	2.5572e-03	3.1450e-03	5.8776e-04
7	2.0802e-15	1.5474e-03	1.5474e-03	7	1.3698e-03	2.4639e-03	1.0940e-03
8	2.1841e-15	1.5453e-03	1.5453e-03	8	2.2003e-15	2.0592e-03	2.0592e-03
9	3.6605e-15	2.0681e-03	2.0681e-03	9	2.5084e-15	2.0653e-03	2.0653e-03
10	4.0250e-15	1.9599e-03	1.9599e-03	10	2.6487e-15	2.9676e-03	2.9676e-03

Tablica 2: Tabele błędu między wielomianem, a wielomianem optymalnym (zaburzenia rzędu 10^{-3})

6 Podsumowanie

Po przeprowadzonych testach można zauważyć, że wielomian optymalny dla zaburzonych danych nie jest dużo gorszy od wielomianu optymalnego dla dokładnych danych. Przybliża on oryginalny wielomian z dokładnością rzędu równego rzędowi zaburzeń.