

Sprawozdanie

Interpolacja metodą Lagrange'a i Newtona

Franciszek Zdobyłak

nr ind. 310313

8 listopada 2019

Streszczenie

W sprawozdaniu przedstawię metodę interpolacyjną Lagrange'a. Porównam metodę Lagrange'a z metodą Newtona oraz pokażę sposób zamiany postaci Lagrange'a na postać Newtona i sprawdzę efektywność tej zamiany.

1 Różne oblicza postaci Lagrange'a

Postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego jaką możemy najczęściej spotkać wygląda tak:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f_i L_i(x) \quad , \text{ gdzie } L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Widać w niej, że wielomian $L_i(x)$ przyjmuje wartość 1 dla $x = x_i$ oraz wartość 0 dla $x_j \neq x_i$. Do obliczeń numerycznych lepiej wykorzystać lekko zminioną postać:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n w_i f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)$$

Można w niej wyliczyć współczynniki w_i podczas konstruowania wielomianu i nie trzeba za każdym razem wykonywać dodatkowych mnożeń, jednak dalej liczba operacji potrzebnych do wyliczenia wartości wielomianu jest $O(n^2)$.

Aby uzyskać lepszą złożoność obliczeniową należy wykorzystać postać barycentryczną.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f_i}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}} & , \text{ gdy } x \neq x_k \\ f_k & , \text{ gdy } x = x_k \end{cases}$$

Do wyliczenia wartości wielomianu potrzebujemy wykonać $2n+3$ operacji mnożenia i $3n+1$ operacji dodawania. (Podczas obliczania w postaci Newtona wykonamy n operacji mnożenia i $2n$ dodawania.)

2 Zamiana postaci Lagrange'a na postać Newtona

Postać Lagrange'a oraz Newtona opisują dokładnie ten sam wielomian, więc chcemy, mając wyliczoną postać Lagrange'a, umieć wyliczyć postać Newtona, bez konstruowania go od nowa.

Od teraz będziemy prezentować postać Lagrange'a w ten sposób:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n \sigma_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad , \text{ gdzie } \sigma_i = w_i f_i$$

Współczynnik a_k w postaci Newtona będzie wyglądał następująco (Art. Wernera):

$$a_k = \sum_{i=0}^k \sigma_i \prod_{j=k+1}^n (x_i - x_j)$$

Algorytm wyliczania współczynników a_k , przy konwersji postaci Lagrange'a do postaci Newtona:

sig - tablica przechowująca sigmy jak we wzorze
a - tablica przechowująca współczynniki a_k

Dla $i=0,1,\dots,n$:
sigma[i][0] = sig[i]

Dla $k=0,1,\dots,n$:
sigma[n-k][k+1] = 0
Dla $i=0,1,\dots,n-k$:
sigma[n-k][k+1] += sigma[i][k]

Dla $i=n-k,\dots,1,0$:
sigma[i][k+1] = (x[i] - x[n-k]) * sigma[i][k]

Dla $i=0,1,\dots,n$:
a[i] = sigma[i][n+1-i]

Złożoność obliczeniowa tego algorytmu jest $O(n^2)$.

3 Efektywność zamiany Lagrange'a na Newtona

Sprawdzenie efektywności zamiany tych dwóch postaci zacząłem od porównania współczynników a_k w postaci Newtona policzonej wprost z odpowiadającymi im współczynnikami w postaci powstałej w wyniku konwersji. Można zauważyć, że dla wielomianów niskiego stopnia różnice we współczynnikach są niewielkie. W tabeli 1 przedstawiłem maksymalną różnicę we współczynnikach Newtona policzonego wprost a z Newtona otrzymanym z Lagrange'a.

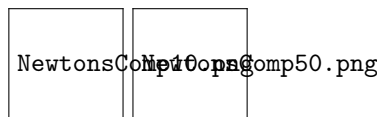
Przedstawię wyniki testów dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. (W programie wykonałem testy również dla funkcji $f_2(x) = \arctan x$ oraz $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$ z artykułu.)

5 1.1921e-07	10 3.3531e-05	15 1.4648e-03	20 2.4691e-01	25 3.1266e+01	30 5.8937e+03	35 5.0855e+06	40 1.1545e+11	45 1.3115e+14
6 3.1292e-07	11 4.0933e-05	16 9.8861e-03	21 5.0729e-01	26 5.9889e+01	31 2.5536e+04	36 4.6410e+07	41 4.8813e+10	46 7.8945e+14
7 9.8348e-07	12 1.8200e-04	17 1.4594e-02	22 1.4250e+00	27 2.9382e+02	32 2.2826e+05	37 5.0080e+08	42 4.9340e+11	47 1.1559e+15
8 2.3544e-06	13 3.2760e-04	18 4.1023e-02	23 6.5520e+00	28 5.9839e+02	33 2.9536e+05	38 4.1751e+09	43 4.4904e+12	48 1.1752e+16
9 4.8801e-06	14 6.5667e-04	19 6.8670e-02	24 1.4165e+01	29 2.3080e+03	34 6.2959e+06	39 1.2402e+09	44 1.6607e+13	49 3.9871e+17

Tabela 1: Maksymalna różnica we współczynnikach dwóch wielomianów Newtona

Jak widać, błąd rośnie wraz z ilością węzłów interpolacyjnych, co oznacza, że wielomian też zaczyna się znacząco różnić od właściwego wielomianu. Prowadzi nas to do wniosku, że zamiana będzie opłacała się jedynie dla wielomianów niskiego stopnia.

Na poniższych wykresach można zobaczyć, jak bardzo dwie postacie Newtona różnią się między sobą.



4 Porównanie postaci Lagrange'a i Newtona

Porównanie metody Lagrange'a i Newtona zrobię na dwa sposoby:

Sposób I: Dla różnej ilości węzłów liczę wartość funkcji w jednym punkcie, w którym wartość funkcji można łatwo policzyć i porównywać wyniki do wyniku dokładnego.

Sposób II: Dla różnej ilości węzłów liczę średni błąd w przybliżeniu funkcji wielomianem. (w tym przypadku ograniczyłem się jedynie do środka przedziału w którym interpolowałem, ponieważ na brzegach wielomiany wybuchają mocno psując wyniki i utrudnia ich interpretację)

Każdym ze sposobów przeprowadzę testy na każdej z funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ i $f_2(x) = \arctan x$ z treści zadania oraz na $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$ z artykułu. W tym sprawozdaniu pokażę, tylko po jednej z serii wyników dla jednego sposobu. Resztę wyników można uzyskać uruchamiając program załączony do sprawozdania.

Podczas prezentacji wyników będę używał oznaczeń:

- L - postać Lagrange'a wyliczona normalnie
- LB - postać barycentryczna Lagrange'a
- N - postać Newtona

4.1 Testy sposobem I

W tabeli 1 i 2 przedstawione są wyniki testów policzone sposobem I dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Wartości wielomianów są liczone w punkcie $x = 0$ gdzie funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość 1. Do przybliżania funkcji użyłem parzystej liczby węzłów, aby żaden węzeł wielomianu nie trafił w funkcję w punkcie $x = 0$ (wtedy postać barycentryczna daje dokładny wynik, natomiast inne postacie dają wynik dokładniejszy niż gdy węzłów jest tyle sam, ale żaden nie trafia w punkt w którym liczymy wartość funkcji)

Porównując wyniki można zauważyć, że w tym przypadku metoda Newtona i Lagrange'a barycentryczna są porównywalne. Zwykła postać Lagrange'a do pewnego czasu również jest z nimi porównywalna, jednak dużo szybciej przestaje dawać wiarygodne wyniki (licząc w pojedynczej precyzji błąd bardzo gwałtownie).

Pojedyncza precyzja				Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N	węzły	L	LB	N
4	7.0701e-01	7.0701e-01	7.0701e-01	4	7.0701e-01	7.0701e-01	7.0701e-01
8	2.4736e-01	2.4736e-01	2.4736e-01	8	2.4736e-01	2.4736e-01	2.4736e-01
12	7.7033e-02	7.7035e-02	7.7035e-02	12	7.7035e-02	7.7035e-02	7.7035e-02
16	2.3784e-02	2.3754e-02	2.3753e-02	16	2.3753e-02	2.3753e-02	2.3753e-02
20	7.6084e-03	7.3214e-03	7.3186e-03	20	7.3187e-03	7.3187e-03	7.3187e-03
24	1.9788e-03	2.2569e-03	2.2549e-03	24	2.2550e-03	2.2550e-03	2.2550e-03
28	7.0565e-03	7.0584e-04	6.9487e-04	28	6.9484e-04	6.9484e-04	6.9484e-04
32	-2.8920e-04	2.0075e-04	2.1392e-04	32	2.1410e-04	2.1410e-04	2.1410e-04
36	-8.5097e-01	0.0000e+00	6.6161e-05	36	6.5973e-05	6.5973e-05	6.5973e-05
40	-2.5313e+00	-2.1219e-05	2.0742e-05	40	2.0316e-05	2.0329e-05	2.0329e-05
44	-2.2632e+01	1.6093e-06	6.2585e-06	44	6.2433e-06	6.2642e-06	6.2642e-06

Tabela 2: Testy dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ w węzłach równoodległych

Pojedyncza precyzja				Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N	węzły	L	LB	N
4	7.5030e-01	7.5030e-01	7.5030e-01	4	7.5030e-01	7.5030e-01	7.5030e-01
8	3.9174e-01	3.9174e-01	3.9174e-01	8	3.9174e-01	3.9174e-01	3.9174e-01
12	1.8277e-01	1.8276e-01	1.8276e-01	12	1.8276e-01	1.8276e-01	1.8276e-01
16	8.2953e-02	8.3096e-02	8.3107e-02	16	8.3107e-02	8.3107e-02	8.3107e-02
20	3.9197e-02	3.7643e-02	3.7590e-02	20	3.7590e-02	3.7590e-02	3.7590e-02
24	2.3706e-01	2.4916e-02	1.6984e-02	24	1.6984e-02	1.6984e-02	1.6984e-02
28	2.6273e+00	-1.6117e-02	7.6719e-03	28	7.6719e-03	7.6719e-03	7.6719e-03
32	-5.3937e+01	-3.9829e-03	3.4652e-03	32	3.4654e-03	3.4654e-03	3.4654e-03
36	6.9465e+01	-4.3844e-03	1.5634e-03	36	1.5635e-03	1.5653e-03	1.5653e-03
40	3.5042e+03	-7.1418e-04	8.1325e-04	40	7.5698e-04	7.0710e-04	7.0702e-04
44	-8.9059e+04	8.9669e-04	-1.3804e-04	44	3.7474e-04	3.1928e-04	3.1935e-04

Tabela 3: Testy dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ w węzłach Chebysheva

4.2 Testy sposobem II

W tabelach 3 i 4 przedstawione są wyniki testów policzone sposobem II dla funkcji $f(x) = \arctan x$. Dla 100 losowych punktów z przedziału $(-0.25, 0.25)$ liczę wartości funkcji oraz wielomianów oraz wyliczam średni błąd przybliżenia funkcji wielomianem. (Używam zawężonego przedziału, aby wartości, które znacznie odbiegają od wartości funkcji (blisko brzegów przedziału) nie psuły nam wyników)

Analizując wyniki można zauważyć, że postać Newtona oraz postać Barycentryczna porównywalnie dobrze przybliżają funkcję, z lekką przewagą postaci Barycentrycznej Lagrange'a. Drugą rzeczą którą można dostrzec jest to, że zwykła postać Lagrange'a na początku również całkiem dobrze przybliża naszą funkcję.

Pojedyncza precyzja			
węzły	L	LB	N
5	2.6829e-03	2.6829e-03	2.6829e-03
10	4.8759e-07	5.2956e-07	5.3035e-07
15	1.0801e-06	1.3479e-08	3.1562e-08
20	4.3028e-05	1.0231e-08	2.2703e-08
25	2.7507e-05	1.0959e-08	2.2862e-08
30	3.8815e-03	1.2892e-08	2.5083e-08
35	4.1679e-02	2.8662e-08	4.2219e-08
40	3.6640e-01	7.7431e-07	2.5700e-07
45	4.5399e+01	8.2285e-06	9.0291e-06
50	1.0111e+03	4.1527e-05	2.3304e-04

Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N
5	2.6829e-03	2.6829e-03	2.6829e-03
10	5.3058e-07	5.3058e-07	5.3058e-07
15	1.2895e-08	1.2895e-08	1.2895e-08
20	3.9830e-12	4.0104e-12	4.0103e-12
25	5.7056e-13	9.5646e-14	9.5640e-14
30	1.8294e-11	3.4606e-17	5.1994e-17
35	2.8274e-10	2.4318e-17	3.6603e-17
40	2.1502e-09	2.9327e-17	3.8217e-17
45	1.4285e-07	2.7555e-17	4.6262e-17
50	1.1845e-06	3.0944e-17	4.8910e-17

Tablica 4: Testy dla funkcji $f(x) = \arctan x$ w węzłach równoodległych

Pojedyncza precyzja			
węzły	L	LB	N
5	3.3980e-03	3.3979e-03	3.3979e-03
10	1.8917e-06	1.9049e-06	1.9020e-06
15	2.9029e-05	2.0269e-07	1.9899e-07
20	2.2263e-04	1.0111e-08	1.8334e-08
25	6.8357e-02	2.0048e-07	1.9839e-08
30	3.2312e+00	6.0604e-05	6.8542e-08
35	1.5109e+02	6.4557e-05	9.2488e-06
40	3.3453e+03	9.9275e-05	2.5281e-03
45	8.9749e+05	2.4093e-02	9.0552e-02
50	6.8779e+07	1.5818e-01	4.4490e+00

Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N
5	3.3979e-03	3.3979e-03	3.3979e-03
10	1.9029e-06	1.9029e-06	1.9029e-06
15	2.0145e-07	2.0145e-07	2.0145e-07
20	1.6768e-10	1.6776e-10	1.6776e-10
25	4.0374e-11	1.7993e-11	1.7993e-11
30	4.2430e-09	2.2047e-14	2.2048e-14
35	3.3488e-07	2.2782e-15	2.2771e-15
40	4.1313e-05	2.4281e-17	5.0537e-17
45	4.3644e-03	7.2035e-16	4.6979e-17
50	1.9391e-02	1.4790e-12	6.5638e-17

Tablica 5: Testy dla funkcji $f(x) = \arctan x$ w węzłach Chebysheva

4.3 Podsumowanie testów

Dla wszystkich stopni wielomianów, metoda barycentryczna jest porównywalna lub lepsza od metody Newtona. Im mniejszy jest stopień wielomianu, tym mniejsza różnica jest pomiędzy tymi dwoma postaciami.

Warto również zauważyć, że zwykła postać Lagrange’a dla małych stopni wielomianów równie dobrze przybliża funkcję jak postać barycentryczna i postać Newtona. Co prowadzi do wniosku, że gdy przybliżamy funkcję wielomianami niskiego stopnia, nie musimy konstruować bardziej skomplikowanych postaci wielomianu interpolacyjnego. (Oczywiście w przypadku, gdy dla małej liczby węzłów wielomian dość dobrze przybliża funkcję.)