

Sprawozdanie

Interpolacja metodą Lagrange'a i Newtona

Franciszek Zdobyłak

nr ind. 310313

27 listopada 2019

Streszczenie

W sprawozdaniu przedstawię metodę interpolacyjną Lagrange'a. Porównam metodę Lagrange'a z metodą Newtona oraz pokażę sposób zamiany postaci Lagrange'a na postać Newtona i sprawdzę efektywność tej zamiany.

1 Różne oblicza postaci Lagrange'a

Funkcję $f(x)$ interpolujemy w $n + 1$ punktach x_0, x_1, \dots, x_n . Oznaczmy $f_i = f(x_i)$. Postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego jaką możemy najczęściej spotkać wygląda tak[1]:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x), \quad \text{gdzie } l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Widać w niej, że wielomian $l_i(x)$ przyjmuje wartość 1 dla $x = x_i$ oraz wartość 0 dla $x_j \neq x_i$. Do obliczeń numerycznych lepiej wykorzystać lekko zminioną postać:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n w_i f_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j), \quad \text{gdzie } w_i = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_j - x_i)}$$

Współczynniki w_i nie zależą od punktu x , w którym liczymy wartość funkcji, więc można je wyliczyć podczas konstruowania wielomianu, dzięki czemu nie trzeba wykonywać dodatkowych mnożeń podczas wyliczania wartości wielomianu. Do ich wyliczenia można zastosować poniższy algorytm. (Działa on w czasie $O(n^2)$ gdzie n to liczba współczynników do policzenia, czyli liczba węzłów interpolacyjnych.)

$$a_0^{(0)} = 1, a_k^{(0)} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\left. \begin{aligned} a_k^{(i)} &= a_k^{(i-1)} / (t_k - t_i) \\ a_i^{(k+1)} &= a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots, i-1$$

$$w_i = a_i^{(n)}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Warto również zauważyć, że w przypadku gdy interpolujemy wielomian w węzłach równoodległych lub Czebyszewa postać współczynników znacząco się upraszcza i możemy je policzyć w czasie liniowym ze wzorów [2]:

W przypadku węzłów równoodległych:

$$w_i = (-1)^i \binom{n}{i}$$

W przypadku węzłów Czebyszewa:

$$w_i = (-1)^i \sin \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}$$

Mimo iż w trakcie konstruowania wielomianu obliczamy współczynniki w_i , to dalej wartość wielomianu jest liczona w czasie kwadratowym. Chcielibyśmy znaleźć sposób, który pozwoli nam to robić szybciej. Z pomocą przychodzi postać barycentryczna wielomianu Lagrange'a. Przedstawię krótkie jej wyprowadzenie.

Niech

$$l(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Wtedy

$$l_i(x) = l(x) \frac{w_i}{x - x_i}$$

W takim razie:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x) = \sum_{i=0}^n f_i l(x) \frac{w_i}{x - x_i} = l(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f_i$$

Zauważmy, że

$$1 = \sum_{i=0}^n L_i(x) = \sum_{i=0}^n l(x) \frac{w_i}{x - x_i} = l(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}$$

1

Więc

$$L(x) = \frac{L(x)}{1} = \frac{l(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f_i}{l(x) \sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}} = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f_i}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}$$

W takim razie wzór na postać barycentryczną Lagrange'a wygląda w ten sposób:

$$L(x) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i} f_i}{\sum_{i=0}^n \frac{w_i}{x - x_i}}, & \text{gdy } x \neq x_k \\ f_k, & \text{gdy } x = x_k \end{cases}$$

Do wyliczenia wartości wielomianu używając tej postaci potrzebujemy wykonać $2n + 3$ operacji mnożenia i $3n + 1$ operacji dodawania. (Podczas obliczania w postaci Newtona wykonamy n operacji mnożenia i $2n$ dodawania.)

2 Trochę o postaci Newtona

Inną postacią wielomianu interpolacyjnego jest postać Newtona. Przedstawia ona się w ten sposób:

$$N(x) = \sum_{i=0}^n a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \quad , \text{gdzie } a_i = f[x_0, x_1, \dots, x_i]$$

wyrażenie $f[x_0, \dots, x_k]$ nazywane jest ilorazem różnicowym oraz przedstawia się wzorem:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_0, \dots, x_{k-1}] - f[x_1, \dots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

Do obliczenia współczynników a_k można użyć następującego algorytmu. Jego złożoność jest $O(n^2)$, gdzie n to liczba współczynników do policzenia (liczba węzłów interpolacyjnych).

Dla $i = 0, \dots, n$:

$a[i] = f(x[i])$

Dla $i = 1, \dots, n$:

Dla $k = i, i+1, \dots, n$:

$a[k] = (a[k] - a[k-1]) / (x[k] - x[k-1])$

3 Błąd interpolacji

W zadaniu na temat interpolacji warto również wspomnieć o błędzie interpolacji. Błąd interpolacji dla wielomianu n -tego stopnia wyraża się wzorem:

$$E_n = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} P_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$$

$$P_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p_{n+1}(x)|,$$

gdzie $p_{n+1}(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$

Można zauważyć, że aby zmniejszyć błąd dla ustalonej funkcji możemy jedynie zmieniać rozłożenie węzłów interpolacji. Zostało udowodnione, że najlepszym rozkładem węzłów interpolacji są zera wielomianu Czebyszewa. Wtedy wielomian $p_{n+1}(x)$ wyraża się wzorem:

$$p_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x), \quad \text{gdzie } T_{n+1} \text{ to wielomian Czebyszewa}$$

A błąd interpolacji wynosi:

$$E_n = \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}$$

4 Zamiana postaci Lagrange'a na postać Newtona

Postać Lagrange'a oraz Newtona opisują dokładnie ten sam wielomian, więc chcemy, mając wyliczoną postać Lagrange'a, umieć wyliczyć postać Newtona, bez konstruowania go od nowa.

Od teraz będziemy prezentować postać Lagrange'a w ten sposób:

$$L(x) = \sum_{i=0}^n \sigma_i \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \quad , \text{gdzie } \sigma_i = w_i f_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{f_j}{x_i - x_j}$$

Współczynnik a_k w postaci Newtona będzie wyglądał następująco:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k] = \sum_{i=0}^k \frac{f_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^k (x_i - x_j)} = \sum_{i=0}^k \sigma_i \prod_{j=k+1}^n (x_i - x_j)$$

Algorytm wyliczania tych współczynników realizuje eliminację Gaussa na równaniu:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \prod_{j=1}^n (x_0 - x_j) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \prod_{j=2}^n (x_0 - x_j) & \prod_{j=2}^n (x_1 - x_j) & 0 & \dots & 0 \\ \prod_{j=3}^n (x_0 - x_j) & \prod_{j=3}^n (x_1 - x_j) & \prod_{j=3}^n (x_2 - x_j) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_0 - x_n) & (x_1 - x_n) & (x_2 - x_n) & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix}$$

Algorytm wyliczania współczynników a_k , przy konwersji postaci Lagrange'a do postaci Newtona:

sig - tablica przechowująca sigmy jak we wzorze
a - tablica przechowująca współczynniki a_k

Dla $i=0, 1, \dots, n$:
sigma[i][0] = sig[i]

Dla $k=0, 1, \dots, n$:
sigma[n-k][k+1] = 0
Dla $i=0, 1, \dots, n-k$:
sigma[n-k][k+1] += sigma[i][k]

Dla $i=n-k, \dots, 1, 0$:
sigma[i][k+1] = (x[i] - x[n-k]) * sigma[i][k]

Dla $i=0, 1, \dots, n$:
a[i] = sigma[i][n+1-i]

Złożoność obliczeniowa tego algorytmu jest $O(n^2)$.

5 Efektywność zamiany Lagrange'a na Newtona

Sprawdzenie efektywności zamiany tych dwóch postaci zacząłem od porównania współczynników a_k w postaci Newtona policzonej wprost z odpowiadającymi im współczynnikami w postaci powstałej w wyniku konwersji. Można zauważyć, że dla wielomianów niskiego stopnia różnice we współczynnikach są niewielkie. W tabeli 1 przedstawiłem maksymalną różnicę we współczynnikach Newtona policzonego wprost a z Newtonem otrzymanym z Lagrange'a.

Przedstawię wyniki testów dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. (W programie wykonałem testy również dla funkcji $f_2(x) = \arctan x$ oraz $f_3(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$ z artykułu [1].)

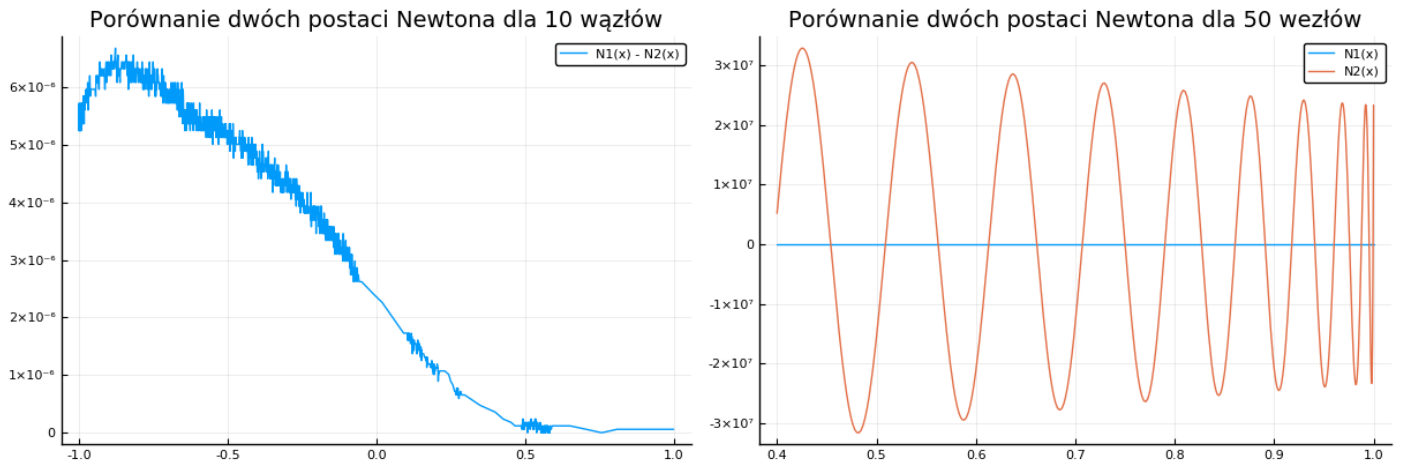
5	10	15	20	25	30	35	40	45
1.1921e-07	3.3531e-05	1.4648e-03	2.4691e-01	3.1266e+01	5.8937e+03	5.0855e+06	1.1545e+11	1.3115e+14

Tablica 1: Maksymalna różnica we współczynnikach dwóch wielomianów Newtona (funkcja f_1)

Jak widać, błąd rośnie wraz z ilością węzłów interpolacyjnych, co oznacza, że wielomian też zaczyna się znacząco różnić od właściwego wielomianu. Prowadzi nas to do wniosku, że zamiana będzie opłacała się jedynie dla wielomianów niskiego stopnia.

Dla wielomianów o niskim stopniu wielomiany różnią się, lecz różnica jest bardzo niewielka. Jest ona różna w różnych częściach przedziału, ponieważ w algorytmie wyliczania kolejnych współczynników wyliczamy kolejne na podstawie poprzednich, co powoduje kumulowanie się błędów.

Na poniższych wykresach można zobaczyć, jak bardzo dwie postacie Newtona różnią się między sobą.



6 Porównanie postaci Lagrange'a i Newtona

Porównanie metody Lagrange'a i Newtona zrobię na dwa sposoby:

Sposób I: Dla różnej ilości węzłów liczę wartość funkcji w jednym punkcie, w którym wartość funkcji można łatwo policzyć i porównywać wyniki do wyniku dokładnego.

Sposób II: Dla różnej ilości węzłów liczę średni błąd w przybliżeniu funkcji wielomianem. (w tym przypadku ograniczyłem się jedynie do środka przedziału w którym interpolowałem, ponieważ na brzegach wielomiany wybuchają mocno psując wyniki i utrudnia ich interpretację)

Każdym ze sposobów przeprowadzę testy na każdej z funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ i $f_2(x) = \arctan x$ z treści zadania oraz na $f(x) = \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$ z artykułu. W tym sprawozdaniu pokażę, tylko po jednej z serii wyników dla jednego sposobu. Resztę wyników można uzyskać uruchamiając program załączony do sprawozdania.

Podczas prezentacji wyników będę używał oznaczeń:

- L - postać Lagrange'a wyliczona normalnie
- LB - postać barycentryczna Lagrange'a
- N - postać Newtona

6.1 Testy sposobem I

W tabeli 1 i 2 przedstawione są wyniki testów policzone sposobem I dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$. Wartości wielomianów są liczone w punkcie $x = 0$ gdzie funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość 1. Do przybliżania funkcji użyłem parzystej liczby węzłów, aby żaden węzeł wielomianu nie trafił w funkcję w punkcie $x = 0$ (wtedy postać barycentryczna daje dokładny wynik, natomiast inne postacie dają wynik dokładniejszy niż gdy węzłów jest tyle sam, ale żaden nie trafia w punkt w którym liczymy wartość funkcji)

Porównując wyniki można zauważyć, że w tym przypadku metoda Newtona i Lagrange'a barycentryczna są porównywalne. Zwykła postać Lagrange'a do pewnego czasu również jest z nimi porównywalna, jednak dużo szybciej przestaje dawać wiarygodne wyniki (licząc w pojedynczej precyzji błąd bardzo gwałtownie).

Pojedyncza precyzja				Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N	węzły	L	LB	N
4	7.0701e-01	7.0701e-01	7.0701e-01	4	7.0701e-01	7.0701e-01	7.0701e-01
8	2.4736e-01	2.4736e-01	2.4736e-01	8	2.4736e-01	2.4736e-01	2.4736e-01
12	7.7033e-02	7.7035e-02	7.7035e-02	12	7.7035e-02	7.7035e-02	7.7035e-02
16	2.3784e-02	2.3754e-02	2.3753e-02	16	2.3753e-02	2.3753e-02	2.3753e-02
20	7.6084e-03	7.3214e-03	7.3186e-03	20	7.3187e-03	7.3187e-03	7.3187e-03
24	1.9788e-03	2.2569e-03	2.2549e-03	24	2.2550e-03	2.2550e-03	2.2550e-03
28	7.0565e-03	7.0584e-04	6.9487e-04	28	6.9484e-04	6.9484e-04	6.9484e-04
32	-2.8920e-04	2.0075e-04	2.1392e-04	32	2.1410e-04	2.1410e-04	2.1410e-04
36	-8.5097e-01	0.0000e+00	6.6161e-05	36	6.5973e-05	6.5973e-05	6.5973e-05
40	-2.5313e+00	-2.1219e-05	2.0742e-05	40	2.0316e-05	2.0329e-05	2.0329e-05
44	-2.2632e+01	1.6093e-06	6.2585e-06	44	6.2433e-06	6.2642e-06	6.2642e-06

Tablica 2: Testy dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ w węzłach równoodległych

6.2 Testy sposobem II

W tabelach 3 i 4 przedstawione są wyniki testów policzone sposobem II dla funkcji $f(x) = \arctan x$. Dla 100 losowych punktów z przedziału $(-0.25, 0.25)$ liczę wartości funkcji oraz wielomianów oraz wyliczam średni błąd przybliżenia funkcji wielomianem. (Używam zawężonego przedziału, aby wartości, które znacznie odbiegają od wartości funkcji (blisko brzegów przedziału) nie psuły nam wyników)

Pojedyncza precyzja			
węzły	L	LB	N
4	7.5030e-01	7.5030e-01	7.5030e-01
8	3.9174e-01	3.9174e-01	3.9174e-01
12	1.8277e-01	1.8276e-01	1.8276e-01
16	8.2953e-02	8.3096e-02	8.3107e-02
20	3.9197e-02	3.7643e-02	3.7590e-02
24	2.3706e-01	2.4916e-02	1.6984e-02
28	2.6273e+00	-1.6117e-02	7.6719e-03
32	-5.3937e+01	-3.9829e-03	3.4652e-03
36	6.9465e+01	-4.3844e-03	1.5634e-03
40	3.5042e+03	-7.1418e-04	8.1325e-04
44	-8.9059e+04	8.9669e-04	-1.3804e-04

Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N
4	7.5030e-01	7.5030e-01	7.5030e-01
8	3.9174e-01	3.9174e-01	3.9174e-01
12	1.8276e-01	1.8276e-01	1.8276e-01
16	8.3107e-02	8.3107e-02	8.3107e-02
20	3.7590e-02	3.7590e-02	3.7590e-02
24	1.6984e-02	1.6984e-02	1.6984e-02
28	7.6719e-03	7.6719e-03	7.6719e-03
32	3.4654e-03	3.4654e-03	3.4654e-03
36	1.5635e-03	1.5653e-03	1.5653e-03
40	7.5698e-04	7.0710e-04	7.0702e-04
44	3.7474e-04	3.1928e-04	3.1935e-04

Tablica 3: Testy dla funkcji $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ w węzłach Chebysheva

Analizując wyniki można zauważyć, że postać Newtona oraz postać Barycentryczna porównywalnie dobrze przybliżają funkcję, z lekką przewagą postaci Barycentrycznej Lagrange’a. Drugą rzeczą którą można dostrzec jest to, że zwykła postać Lagrange’a na początku również całkiem dobrze przybliża naszą funkcję.

Pojedyncza precyzja			
węzły	L	LB	N
5	2.6829e-03	2.6829e-03	2.6829e-03
10	4.8759e-07	5.2956e-07	5.3035e-07
15	1.0801e-06	1.3479e-08	3.1562e-08
20	4.3028e-05	1.0231e-08	2.2703e-08
25	2.7507e-05	1.0959e-08	2.2862e-08
30	3.8815e-03	1.2892e-08	2.5083e-08
35	4.1679e-02	2.8662e-08	4.2219e-08
40	3.6640e-01	7.7431e-07	2.5700e-07
45	4.5399e+01	8.2285e-06	9.0291e-06
50	1.0111e+03	4.1527e-05	2.3304e-04

Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N
5	2.6829e-03	2.6829e-03	2.6829e-03
10	5.3058e-07	5.3058e-07	5.3058e-07
15	1.2895e-08	1.2895e-08	1.2895e-08
20	3.9830e-12	4.0104e-12	4.0103e-12
25	5.7056e-13	9.5646e-14	9.5640e-14
30	1.8294e-11	3.4606e-17	5.1994e-17
35	2.8274e-10	2.4318e-17	3.6603e-17
40	2.1502e-09	2.9327e-17	3.8217e-17
45	1.4285e-07	2.7555e-17	4.6262e-17
50	1.1845e-06	3.0944e-17	4.8910e-17

Tablica 4: Testy dla funkcji $f(x) = \arctan x$ w węzłach równoodległych

Pojedyncza precyzja			
węzły	L	LB	N
5	3.3980e-03	3.3979e-03	3.3979e-03
10	1.8917e-06	1.9049e-06	1.9020e-06
15	2.9029e-05	2.0269e-07	1.9899e-07
20	2.2263e-04	1.0111e-08	1.8334e-08
25	6.8357e-02	2.0048e-07	1.9839e-08
30	3.2312e+00	6.0604e-05	6.8542e-08
35	1.5109e+02	6.4557e-05	9.2488e-06
40	3.3453e+03	9.9275e-05	2.5281e-03
45	8.9749e+05	2.4093e-02	9.0552e-02
50	6.8779e+07	1.5818e-01	4.4490e+00

Podwójna precyzja			
węzły	L	LB	N
5	3.3979e-03	3.3979e-03	3.3979e-03
10	1.9029e-06	1.9029e-06	1.9029e-06
15	2.0145e-07	2.0145e-07	2.0145e-07
20	1.6768e-10	1.6776e-10	1.6776e-10
25	4.0374e-11	1.7993e-11	1.7993e-11
30	4.2430e-09	2.2047e-14	2.2048e-14
35	3.3488e-07	2.2782e-15	2.2771e-15
40	4.1313e-05	2.4281e-17	5.0537e-17
45	4.3644e-03	7.2035e-16	4.6979e-17
50	1.9391e-02	1.4790e-12	6.5638e-17

Tablica 5: Testy dla funkcji $f(x) = \arctan x$ w węzłach Chebysheva

7 Podsumowanie

Po wykonaniu wszystkich testów mogę stwierdzić, że dla wszystkich stopni wielomianów, metoda barycentryczna jest porównywalna lub lepsza od metody Newtona. Im mniejszy jest stopień wielomianu, tym mniejsza różnica jest pomiędzy tymi dwoma postaciami.

Warto również zauważyć, że zwykła postać Lagrange’a dla małych stopni wielomianów równie dobrze przybliża funkcję jak postać barycentryczna i postać Newtona. Co prowadzi do wniosku, że gdy przybliżamy funkcję wielomianami niskiego stopnia, nie musimy konstruować bardziej skomplikowanych (postaci wielomianu interpolacyjnego).

Zamiana jednej postaci na drugą według algorytmu podanego w tym sprawozdaniu może być wykorzystywana, jeśli stopień wielomianu nie jest duży. Jedynym powodem, dla którego można to zrobić jest chęć wielokrotnego liczenia wartości wielomianu, gdyż złożoność obliczania wartości w punkcie dla postaci Newtona jest lepsza ($O(n)$ zamiast $O(n^2)$).

Bibliografia

- [1] W. Werner, *Polynomial interpolation: Lagrange versus Newton*, Math. Comp., 43 (1984), pp. 205-217.
- [2] Jean-Paul Berrut, Lloyd N. Trefethen, *Barycentric Lagrange interpolation* SIAM Review Vol. 46, No. 3, pp. 501–517.