Analiza błędów

$|a-\widetilde{a}| \leqslant \frac{1}{2}\cdot B^{-p}$ – $\widetilde{a}$ ma p cyfr dokładnych.
Cyfry znaczące – cyfry dokładne, przed którymi były zera.

Precyzja arytmetyki

$u=\frac{1}{2}\cdot 2^{-t}$, t – liczba bitów mantysy
$|rd(x)-x| \leqslant 2^{-t-1}\cdot 2^{c}$

Twierdzenie 1

dla $|\alpha_j| \leqslant u$, $|p_j|=1$: $\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)^{p_j}=1+\theta_n$, $|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1-nu}$, $nu<1$

Twierdzenie

dla $|\alpha_j|<u$: $\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha_j)=1+\eta_n$, $nu \leqslant 0.01$, $|\eta_n| \leqslant 1.01nu$

Uwarunkowanie zadania

Wskaźnik uwarunkowania

$C_f(x)=\frac{|xf'(x)|}{|f(x)|}$ – obliczanie funkcji f w punkcie x

Równania nieliniowe

Błąd w metodzie Newtona:
$\epsilon_{n+1}=\frac{1}{2}F''(\eta_n)\epsilon_n^2$ gdy pierwiastek 1 krotny, $\eta_n \in (\alpha, x_n)$

Reguła Falsi

to samo co siecznych, ale zawsze wybieramy x_n i $x_{n'}$ tak aby $f(x_n)\cdot f(x_{n'})<0$

Schemat Hornera

obliczania $p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)$
$p(x)=a_n$
$p'(x)=p''(x)=p'''(x)=0$
Dla $k=n-1,\ldots,0$
$p'''(x)=3\cdot p''(x)+x\cdot p'''(x)$
$p''(x)=2\cdot p'(x)+x\cdot p''(x)$
$p'(x)=p(x)+xp'(x)$
$p(x)=a_k+x\cdot p(x)$
Wynik: $p(x), p'(x), p''(x), p'''(x)$

Interpolacja

Postać barycentryczna

$$L_n(x)=\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{\sigma_k}{x-x_k}\cdot y_k}{\sum_{k=0}^{n}\frac{\sigma_k}{x-x_k}},\ \sigma_k=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}$$

Ilorazy różnicowe

$f[x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}]=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

Reszta interpolacji

$f(x)-L_n(x)=f[x,x_0,\ldots,x_n]p_{n+1}(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)p_{n+1}(x)$,
$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}P_{n+1}}{(n+1)!}$,
dla $-1\leqslant x\leqslant 1$, $M_{n+1}=\max|f^{(n+1)}(x)|$, $P_{n+1}=\max|p_{n+1}(x)|$

Wielomiany Czebyszewa

$T_0=1, T_1=x, T_k=2x\cdot T_{k-1}-T_{k-2}$
$T_k=\cos(k\arccos x)$
zera wielomianu: $t_j=\cos\frac{2j+1}{2k}\pi$
punkty ekstremalne: $u_j=\cos\frac{j\pi}{k}$
współczynnik wiodący: $a_k=2^{k-1}$

Algorytm Clenshawa

$W(x)=\sum_{k=1}^{n}c_kT_k(x)$,
$B_{n+2}=B_{n+1}=0, B_k=2xB_{k+1}-B_{k+2}+c_k$, $W(x)=\frac{1}{2}(B_0-B_2)$

Funkcja Sklejana

warunki:

1° s, s', s'' – ciągłe

2° na każdym $[x_{k-1},x_k]$ s jest wielomianem st $\leqslant 3$

3° $s(x_k)=f(x_k)$

warianty:

4°n naturalna: $s''(a)=s''(b)=0$

4°c zupełna: $s'(a)=f'(a), s'(b)=f'(b)$

4°p okresowa: $s'(a)=s'(b), s''(a)=s''(b)$

Aproksymacja średniokwadratowa

ortogonalizacja Gramma-Schmidta

$g_1=f_1, g_k=f_k-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\langle f_k;g_i\rangle}{\langle g_i;g_i\rangle}g_i$

wielomiany standardowe

$\{\bar{P}_k\}$ - ortogonalne i współczynnik przy x^k w $\bar{P}_k$ jest $=1$
$\bar{P}_0=1, \bar{P}_1=x, \bar{P}_k=(x-c_k)\bar{P}_{k-1}-d_k\bar{P}_{k-2}$, $c_k=\frac{\langle x\bar{P}_{k-1};\bar{P}_{k-1}\rangle}{\langle \bar{P}_{k-1};\bar{P}_{k-1}\rangle}$,
$d_k=\frac{\langle \bar{P}_{k-1};\bar{P}_{k-1}\rangle}{\langle \bar{P}_{k-2};\bar{P}_{k-2}\rangle}$
gdy $\bar{P}_k$ są ortogonalne względem parzystej funkcji wagowej:
$\bar{P}_0=1, \bar{P}_1=x, \bar{P}_k=x\bar{P}_{k-1}-d_k\bar{P}_{k-2}$

N-ty wielomian optymalny

$W_n^*=\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f;P_k\rangle}{\langle P_k;P_k\rangle}P_k$ – takie $w_n\in\Pi_n$, że $||f-w_n||_2$ – najmniejsze
$||f-w_n^*||=\sqrt{||f||^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{\langle f;P_k\rangle^2}{\langle P_k;P_k\rangle}}$
n-ty wielomian optymalny dla x^{n+1} to $x^{n+1}-T_{n+1}(x)\cdot\frac{1}{2^n}$

uogólniony algorytm Clenshawa

$\{P_k\}$ – ciąg wielomianów,
$P_0=\alpha_0, P_1=(\alpha_1x-\beta_1)P_0, P_k=(\alpha_kx-\beta_k)P_{k-1}-\gamma_kP_{k-2}$,
obliczamy wartość $s_n=\sum_{k=0}^{n}a_kP_k$
$V_{n+1}=V_{n+2}=0$
dla $k=n,n-1,\ldots,0$
$V_k=a_k+(\alpha_{k+1}x-\beta_{k+1})V_{k+1}-\gamma_{k+2}V_{k+2}$
$S_n(x)=a_0V_0$

Kwadratury liniowe

kwadratury interpolacyjne

Idea: całkujemy wielomian interpolacyjny
$A_k=\int_a^b\lambda_k(x)dx$
$h=\frac{b-a}{n}$
błąd w złożonym wzorze Trapezów: $R_n=-(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi)$
błąd w złożonym wzorze Simpsona: $R_n=-(b-a)\frac{h^4}{180}f^4(\xi)$

metoda Romberga

$T_{m,k}=\frac{4^mT_{m-1,k+1}-T_{m-1,k}}{4^m-1}$

kwadratura Gaussa-Czebyszewa

$A_k=\frac{\pi}{n+1}$ (zera Czebyszewa)

kwadratura Lobbato

$A_k=\frac{\pi}{n}$ (ekstrema Czebyszewa)

kwadratura Gaussa

w zerach wielomianu ortogonalnego

kwadratura Newtona-Cotesa

węzły równoodległe

wielomiany Czebyszewa

$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int_{-1}^{1}p(x)(T_k(x))^2=\pi$ dla $k=0$, $\frac{\pi}{2}$ w przeciwnym wypadku
$\int_{-1}^{1}p(x)T_k(x)T_l(x)=0, k\neq l$
$\int_{-1}^{1}T_n(x)=\frac{2}{1-n^2}$ dla $2|n$, $=0$ w przeciwnym wypadku

Równania różniczkowe

metoda Eulera

$y_{n+1}=y_n+h\cdot y'_n$ (jawna), $y_{n+1}=y_n+h\cdot y'_{n+1}$ (niejawna)

metoda Cranka-Nicolsona

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(y'_n+y'_{n+1})$

Algebra liniowa

$||x||_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $||x||_2=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|x_i|^2}$, $||x||_\infty=\max_{i\leqslant n}|x_i|$
Norma indukowana: $||A||=\sup_{x\in R^n\setminus\{0\}}\frac{||Ax||}{||x||}$,
$||A||_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$ (max z kolumn)
$||A||_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$ (max z wierszy)
$||A||_2=\sqrt{\text{najw. wart. wł}(A^TA)}$

Metody Iteracyjne

$Ax=b\rightarrow x=Bx+c\rightarrow x^{k+1}=Bx^k+c$

- Richardson $x^{k+1}=B_\tau x^k+c, B_\tau=I-\tau A, c=\tau b$
- Jakobiego $A=L+D+U, x=-D^{-1}(L+U)x+D^{-1}b$
- Gaussa-Seidla $x=-(L+D)^{-1}Ux+(L+D)^{-1}b$