TP 8

# Méthode d'Euler (1/2)

✌ **Explication** ✌ Ce *TP 8 - Méthode d'Euler* est un TP de découverte. Outre l'introduction au monde de la résolution numérique d'équations différentielles, il permet de réviser des notions précédemment vues (méthode des rectangles, manipulation de fichiers).

> Voici les objectifs du TP 8 :
> - ↪ Comprendre les enjeux et le concept de résolution numérique d'équations différentielles,
> - ↪ Découvrir la méthode d'Euler pour résoudre numériquement des équations différentielles du premier ordre,
> - ↪ Savoir tracer des courbes,
> - ↪ Réviser la méthode des rectangles,
> - ↪ Réviser la manipulation de fichiers.

**Un compte-rendu soigné du TP doit être remis en fin de séance !**

## I - Introduction à la résolution numérique d'équations différentielles

✌ **Explication** ✌ Il suffit de suivre pas à pas les questions de l'exercice suivant pour découvrir le principe de résolution numérique d'une équation différentielle.
Pour les commandes relatives aux tracés de courbes, il suffit de se référer à l'annexe situé à la fin du présent TP.

### 1 — *Exercice*

Considérons le problème de Cauchy suivant sur $[0,4]$ d'inconnue la fonction $y : t \mapsto y(t)$ :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,4], & y'(t) = 2y(t) \quad (E) \\ & y(0) = 1 \end{cases}$$

**1)** *Résolution exacte de ce problème de Cauchy*

**a)** Quelle est l'unique fonction $y$ solution de ce problème de Cauchy ?

**b)** *Tracé de la courbe représentative $\mathscr{C}_y$ de cette fonction $y$*

i. Écrire une fonction

`cauchy1(t),`

qui prend en paramètre un réel `t`, et renvoie la valeur de $y(t)$.

ii. À l'aide de l'annexe, tracer en rouge la courbe $\mathscr{C}_y$ de la fonction $y$.
*On pourra relier 100 points.*

*Cliquez ici pour accéder au corrigé*

**2)** *Résolution numérique à la main de ce problème de Cauchy*

Imaginons un instant qu'on eût été incapable de déterminer l'expression de la fonction $y$ unique solution de ce problème de Cauchy. Dans ce cas qui arrive fréquemment, on cherche à résoudre numériquement ce problème de Cauchy, c'est-à-dire à tracer approximativement la courbe représentative de $y$ en en déterminant des points approchés.

**a)** *Résolution numérique avec $n = 4$ points approchés*

On sait que la courbe $\mathscr{C}_y$ passe par le point de coordonnées $(t_0, y(t_0)) = (0, 1)$.
En approximant localement $\mathscr{C}_y$ par ses tangentes, la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 permet d'écrire la formule d'approximation suivante :

$$y(t_{\text{suivant}}) \approx y(t_{\text{précédent}}) + (t_{\text{suivant}} - t_{\text{précédent}}) \times y'(t_{\text{précédent}}) \qquad (\bigstar)$$

i. En appliquant $(\bigstar)$ avec le temps précédent $t_0 = 0$ et le temps suivant $t_1 = 1$, calculer une valeur approchée $y_1$ de $y(t_1)$. *Vous détaillerez les étapes sur votre compte-rendu.*

ii. En appliquant $(\bigstar)$ avec le temps précédent $t_1 = 1$ et le temps suivant $t_2 = 2$, calculer une valeur approchée $y_2$ de $y(t_2)$. *Vous détaillerez les étapes sur votre compte-rendu.*

iii. En réitérant ce raisonnement de proche en proche, recopier et compléter le tableau suivant :

| Abscisse $t_i$ | $t_0 = 0$ | $t_1 = 1$ | $t_2 = 2$ | $t_3 = 3$ | $t_4 = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ordonnée $y_i \approx y(t_i)$ | | | | | |

iv. Tracer en bleu la courbe approchée de $\mathscr{C}_y$ en reliant les cinq points dont les ordonnées ont été calculées ci-dessus. *On fera ce tracé sur le même graphique que précédemment.*

**b)** *Résolution numérique avec $n = 8$ points approchés*

i. Recopier et compléter le tableau suivant :

| Abscisse $t_i$ | $t_0 = 0$ | $t_1 = 0.5$ | $t_2 = 1$ | $t_3 = 1.5$ | $t_4 = 2$ | $t_5 = 2.5$ | $t_6 = 3$ | $t_7 = 3.5$ | $t_8 = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ordonnée $y_i \approx y(t_i)$ | | | | | | | | | |

*Vous détaillerez les calculs pour $y_1$ et $y_2$ sur votre compte-rendu.*

ii. Tracer en vert, sur le même graphique, la courbe approchée de $\mathscr{C}_y$ en reliant les neufs points.

iii. À votre avis, que va-t-il se passer si l'on augmente le nombre $n$ de points approchés en diminuant le pas $h = t_{\text{suivant}} - t_{\text{précédent}} = \dfrac{b-a}{n}$ ?

**3)** *Résolution numérique avec Python de ce problème de Cauchy*

**a)** Écrire une fonction

```
euler1(a,b,y0,n),
```

qui prend en paramètres :

*Cliquez ici pour accéder au corrigé*

- les réels `a` et `b` représentant les bornes de l'intervalle de résolution du problème de Cauchy,
- le réel `y0` permettant de définir la condition initiale $y(t_0) = y_0$,
- l'entier naturel `n` représentant le nombre de points approchés,

et renvoie le tuple formé de la liste des temps $[t_0, \cdots, t_n]$ et des approximations $[y_0, \cdots, y_n]$.

**b)** Vérifier les tableaux précédemment complétés à l'aide de la fonction `euler1(a,b,y0,n)`.

**c)** Tracer en jaune, sur le même graphique, la courbe approchée de $\mathscr{C}_y$ dans le cas $n = 1000$.

## 2 — ***Exercice***

Considérons le problème de Cauchy suivant sur $[0, 4]$ d'inconnue la fonction $y : t \mapsto y(t)$ :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,4], & y'(t) = t^2 + y(t) \quad (E) \\ & y(0) = 1 \end{cases}$$

**1)** *Résolution à la main de ce problème de Cauchy*

**a)** En s'inspirant du raisonnement fait à l'exercice précédent, recopier et compléter le tableau suivant :

| Abscisse $t_i$ | $t_0 = 0$ | $t_1 = 1$ | $t_2 = 2$ | $t_3 = 3$ | $t_4 = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Ordonnée $y_i \approx y(t_i)$ | | | | | |

**b)** Tracer en bleu la ligne brisée reliant les points de coordonnées :

$$(t_0, y_0) \quad , \quad (t_1, y_1) \quad , \quad (t_2, y_2) \quad , \quad (t_3, y_3) \quad , \quad (t_4, y_4)$$

**2)** *Résolution exacte de ce problème de Cauchy*

Montrer que l'unique fonction solution de ce problème de Cauchy est la fonction suivante :

$$y : t \mapsto 3e^t - (t^2 + 2t + 2)$$

Tracer en rouge la courbe $\mathscr{C}_y$ de la fonction $y$ sur le même graphique que précédemment.

**3)** *Résolution numérique avec Python de ce problème de Cauchy*

**a)** Écrire une fonction

`euler2(a,b,y0,n),`

qui prend en paramètres :

- les réels `a` et `b` représentant les bornes de l'intervalle de résolution du problème de Cauchy,
- le réel `y0` permettant de définir la condition initiale $y(t_0) = y_0$,
- l'entier naturel `n` représentant le nombre de points approchés,

et renvoie le tuple formé de la liste des temps $[t_0, \cdots, t_n]$ et des approximations $[y_0, \cdots, y_n]$.

**b)** Vérifier les tableaux précédemment complétés à l'aide de la fonction `euler2(a,b,y0,n)`.

**c)** Tracer en jaune, sur le même graphique, la courbe approchée de $\mathscr{C}_y$ dans le cas $n = 100$.

**d)** En faisant de la manipulation de fichiers, créer un fichier nommé `résultats.txt` dans lequel figurent les résultats pour le cas $n = 100$.
*Chaque ligne du fichier doit comporter les coordonnées $(t_k, y_k)$ d'un point pour $k \in [\![0, 100]\!]$.*

*Cliquez ici pour accéder au corrigé*

## II - Méthode d'Euler pour les équations différentielles du premier ordre

✌ **Explication** ✌ **(Cas général)** Considérons le problème de Cauchy suivant d'inconnue la fonction $y : t \mapsto y(t)$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in [a,b], \quad y'(t) & = & F(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

Commençons par comprendre les notations d'un tel problème avant de poursuivre :

– la fonction $y : t \mapsto y(t)$ désigne la fonction inconnue de l'équation et $t$ la variable réelle de la fonction inconnue,
– les réels $a$ et $b$ représentent les bornes de l'intervalle de résolution,
– $y(t_0) = y_0$ désigne la condition initiale,
– dans l'exercice 1, $F(t,y) = 2y$ et dans l'exercice 2, $F(t,y) = t^2 + y$.

**Résoudre exactement** ce problème de Cauchy consiste à déterminer l'unique fonction $y : t \mapsto y(t)$ solution de ce problème, pour ensuite tracer la courbe $\mathscr{C}_y$ en calculant les coordonnées exactes d'un certain nombre de points par lesquels passe la courbe $\mathscr{C}_y$ :

$$(t_0, y(t_0)) \quad , \quad (t_1, y(t_1)) \quad , \quad \cdots \quad , \quad (t_n, y(t_n))$$

où $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ forment une subdivision du segment $[a,b]$.
L'écart constant $h = t_{\text{suivant}} - t_{\text{précédent}}$, appelé pas, est alors donné par :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

**Résoudre numériquement** ce problème de Cauchy consiste à déterminer des valeurs approchées $y_k$ des ordonnées $y(t_k)$. La méthode d'Euler est une méthode numérique permettant alors de calculer des valeurs approchées $y_k$ de $y(t_k)$ à l'aide de la relation de récurrence suivante, appelée SCHÉMA D'EULER EXPLICITE :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} y_0 & = & y(t_0) \\ \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y_{k+1} & = & y_k + hF(t_k, y_k) \end{array}\right.}$$

**3** ***Exercice***

🕒🕒 Considérons le problème de Cauchy suivant d'inconnue la fonction $y : t \mapsto y(t)$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \forall t \in [a,b], \quad y'(t) & = & F(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

**1)** Écrire une fonction

`euler(F,a,b,y0,n),`

qui prend en paramètres :

- la fonction `F` permettant de définir l'équation différentielle,
- les réels `a` et `b` représentant les bornes de l'intervalle de résolution du problème de Cauchy,
- le réel `y0` permettant de définir la condition initiale $y(t_0) = y_0$,
- l'entier naturel `n` représentant le nombre de points approchés,

et renvoie le tuple formé de la liste des temps $[t_0, \cdots, t_n]$ et des approximations $[y_0, \cdots, y_n]$.

**2)** Tester cette fonction par rapport aux fonctions `euler1(a,b,y0,n)` et `euler2(a,b,y0,n)`.

*☞ Cliquez ici pour accéder au corrigé*

# Annexe - Tracés graphiques

✌ **Explication** ✌ Il suffit d'importer le module suivant pour tracer des graphiques sous Python :

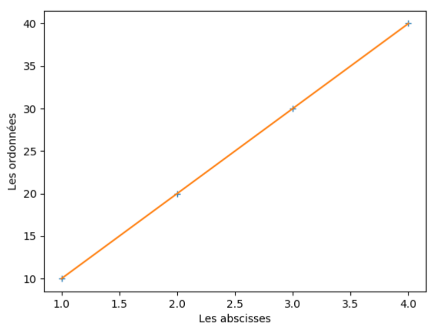
```
import matplotlib.pyplot as plt
```

## Comment placer des points et les relier ?

**Exemple** Le code suivant en illustre le fonctionnement de base :

```
import matplotlib.pyplot as plt

#permet de placer les points de coord.
    (1,10), (2,20), (3,30) et (4,40)
plt.plot([1,2,3,4],[10,20,30,40],'+')

#permet de relier les points de coord.
    (1,10), (2,20), (3,30) et (4,40)
plt.plot([1,2,3,4],[10,20,30,40])

#permet de mettre des légendes
plt.xlabel('Les abscisses')
plt.ylabel('Les ordonnées')

#permet d'afficher le graphique
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :



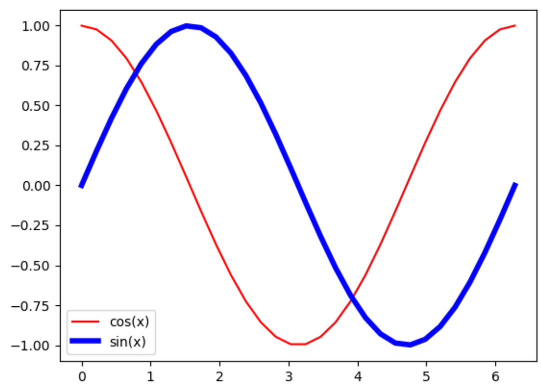

De nombreuses autres fonctionnalités existent (couleur, légende, etc . . .).
Pour les découvrir, il suffit d'utiliser l'aide ou Google.

## Comment tracer le graphe d'une fonction ?

**Exemple** Le code suivant en illustre le fonctionnement de base :

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

#permet de créer la liste des abscisses
    sous forme de array
X = linspace(0, 2*np.pi, 30)

#permet de créer la liste des ordonnées
    correspondantes sous forme de array
Y1 = cos(X)
Y2 = sin(X)

#permet de tracer et relier les points
#'r' pour afficher en rouge
#'b' pour afficher en bleu
plt.plot(X, Y1,'r', label="cos(x)")
plt.plot(X, Y2,'b', label="sin(x)",
    linewidth=4)

#permet d'afficher les légendes
plt.legend()
#permet d'afficher le graphique
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :




☞ Cliquez ici pour accéder au corrigé