# TP 10

# Recherche des zéros d'une fonction

✌ **Explication** ✌ On appelle ZÉRO d'une fonction toute valeur qui annule cette fonction.
Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On suppose que la fonction $f$ admet un unique zéro $\alpha$ sur $I$. Ainsi, $f(\alpha) = 0_{\mathbb{R}}$.
Une problématique classique est la suivante :

Comment déterminer une valeur approchée du réel $\alpha$ qui annule la fonction $f$ ?

Ce TP 10 répond à cette problématique en présentant deux méthodes classiques de recherche des zéros d'une fonction.

Voici les objectifs du TP 10 :

↪ Découvrir la méthode de dichotomie.

↪ Découvrir la méthode de Newton-Raphson.

**Vous compléterez le fichier réponse *TP10-Fichier réponse.py***

## I - Méthode de dichotomie

✌ **Explication** ✌ Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- la fonction $f$ est continue et strictement monotone sur $[a, b]$,
- les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé i.e. $f(a)f(b) \leqslant 0$,

Alors, par le théorème de la bijection, la fonction $f$ s'annule une unique fois en un réel $\alpha \in [a, b]$.

**Algorithme de la méthode de dichotomie pour déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à la précision $\varepsilon > 0$ :**

On initialise un intervalle $I \leftarrow [a, b]$.

– *étape 1* : on calcule le milieu $m = \frac{a+b}{2}$.

– *étape 2* : on définit un nouvel intervalle $I'$ comme suit :

$$I' = \begin{cases} [a, m] & \text{si } \alpha \in [a, m] \text{ i.e. } f(a)f(m) \leqslant 0 \\ [m, b] & \text{si } \alpha \in [m, b] \text{ i.e. } f(m)f(b) \leqslant 0 \end{cases}$$

On répète ces deux étapes, en réinitialisant $I \leftarrow I'$, jusqu'à obtenir un intervalle de longueur plus petite que $\varepsilon$.
Au final, le milieu de cet intervalle sera une valeur approchée de $\alpha$ à la précision $\varepsilon$ près.

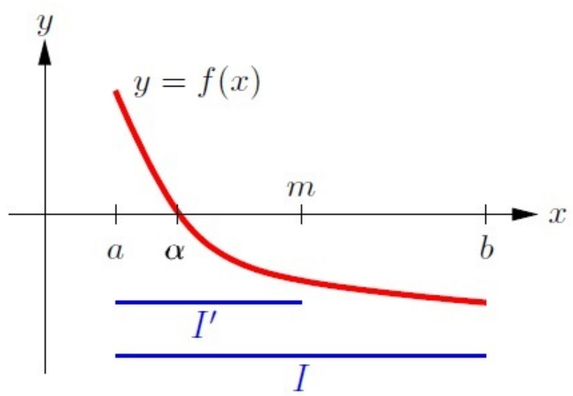


*Figure 1 - Une itération de l'algorithme de la méthode de dichotomie*

☞ *Cliquez ici pour accéder au corrigé*

## 1 **Exercice**

🕒🕒 Dans cet exercice, toute fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que l'on met en paramètre, vérifie les deux conditions suivantes :

- la fonction $f$ est continue et strictement monotone sur le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$,
- les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé i.e. $f(a)f(b) \leqslant 0$,

de sorte que la fonction $f$ ne s'annule qu'une unique fois en un réel $\alpha \in [a, b]$.

**1)** *Méthode de dichotomie*
Écrire une fonction

`dichotomie1_zero(f,a,b,eps),`

qui prend en paramètres une fonction `f`, des réels `a` et `b`, un réel `eps`, et renvoie une valeur approchée à `eps` près du zéro $\alpha$ de la fonction $f$.

**2)** *Exemple d'application 1*
On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2$.

**a)** Préciser les zéros de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$.

**b)** Écrire une fonction

`g(x),`

qui prend en paramètre un réel `x`, et renvoie la valeur de $g(x)$.

**c)** À l'aide de la fonction `dichotomie1_zero(f,a,b,eps)`, en déduire une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-5}$ près. *On pourra choisir* $[a, b] = [0, 2]$.

**3)** *Exemple d'application 2*
Les éventuels extrema (minima ou extrema) d'une fonction dérivable sont atteints en des points où sa dérivée s'annule. Ainsi, il est possible de déterminer ces extrema par dichotomie.

**a)** Étudier mathématiquement les variations de la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x$$

**b)** À l'aide de la fonction `dichotomie1_zero(f,a,b,eps)`, trouver numériquement, à $10^{-3}$ près, le minimum et le maximum de la fonction de $h$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

**c)** Les résultats trouvés sont-ils cohérents ?

**4)** *Nombre d'itérations*

**a)** Écrire une fonction

`dichotomie2_zero(f,a,b,eps),`

qui prend en paramètres une fonction `f`, des réels `a` et `b`, un réel `eps`, et renvoie le tuple constitué :

– d'une valeur approchée à `eps` près du zéro $\alpha$ de la fonction $f$,

– et du nombre d'itérations effectuées lors de la dichotomie.

**b)** En revenant à la question **2)**, déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-5}$ près.

☞ Cliquez ici pour accéder au corrigé

## II - Méthode de Newton-Raphson

✌ **Explication** ✌ Soit $f$ une fonction admettant un zéro $\alpha$ et $x_0$ une abscisse proche de $\alpha$. La méthode de Newton-Raphson consiste à construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha$.

**Algorithme de la méthode de Newton-Raphson permettant de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\alpha$ :**

– on construit la tangente $T_0$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_0$. On définit ensuite $x_1$ par :

$$x_1 = \text{abscisse de } T_0 \cap (Ox),$$

où $(Ox)$ désigne l'axe des abscisses,

– on réitère ce procédé jusqu'à obtenir $x_n$ à partir duquel on définit $x_{n+1}$ par :

$$x_{n+1} = \text{abscisse de } T_n \cap (Ox),$$

où $T_n$ désigne la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_n$.

Sous certaines conditions (vérifiées en pratique), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi définie, converge vers le zéro $\alpha$ de la fonction $f$.

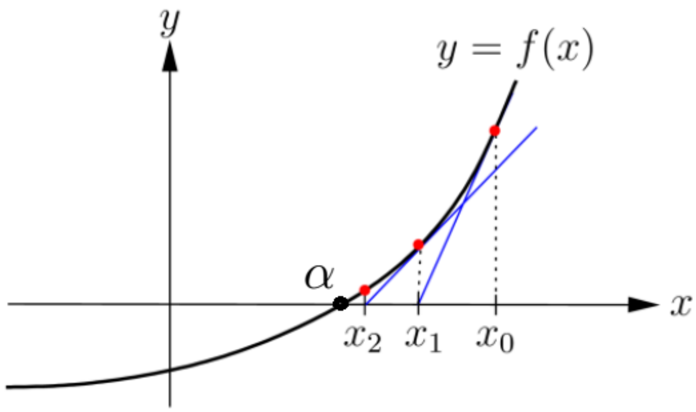


*Figure 2 - Les deux premières itérations de l'algorithme de la méthode de Newton-Raphson*

### 2 — *Exercice*

🕒🕒

**1)** *Détermination de la relation de récurrence qui définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*

**a)** Déterminer l'équation de la tangente $T_n$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x_n$.

**b)** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**2)** *Méthode de Newton-Raphson*

**a)** Écrire une fonction

`df(f,x)`,

qui prend en paramètre une fonction `f` et un réel `x`, et renvoie une valeur approchée de $f'(x)$ obtenue par la formule de Taylor-Young à l'ordre $1$.
*On choisira $h = 10^{-7}$ comme pas.*

**b)** Écrire une fonction

`newt_raph1(f,x0,eps)`,

qui prend en paramètres une fonction `f`, des réels `x0` et `eps`, et renvoie une valeur approchée du zéro $\alpha$ de la fonction $f$ par la méthode de Newton-Raphson, en partant de l'abscisse `x0` et telle que $f($`newt_raph1(f,x0,eps)`$) \leqslant \varepsilon$.
*Ici, la condition d'arrêt de la boucle porte sur la valeur de la fonction $f$.*

**3)** *Exemple d'application*

**a)** Déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ en considérant la fonction $g : x \mapsto x^2 - 2$ en partant de $x_0 = 2$ avec une précision $\varepsilon = 10^{-10}$ près.

**b)** Combien a-t-il fallu d'itérations pour obtenir le résultat précédent ?
*Vous écrirez une fonction* `newt_raph2(f,x0,eps)` *à cet effet.*

☞ *Cliquez ici pour accéder au corrigé*