Questions de cours

1. On a d'après la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\mathscr{B}_{k,n}(X) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\\ &= (X+(1-X))^n\\ &= \boxed{1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n}\mathscr{B}_{k,n}(X) = 1$$

2. (a) D'après le cours cette loi s'appelle

loi binomiale et ses paramètres sont n et t.

(b) Toujours d'après le cours, on a

$$\begin{aligned}E(X_n) &= nt\\ V(X_n) &= nt(1-t)\end{aligned}$$

(c) On peut prendre par exemple la variable aléatoire comptant le nombre de pile d'une suite de n lancers d'une pièce éventuellement truquée dont la probabilité de tomber sur pile serait t.

3. La famille $(1, X, \cdots, X^n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, sa dimension est bien $n+1$.

4. On dit que deux sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F d'un espace préhilbertien sont orthogonaux pour le produit scalaire φ si

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \varphi(x,y) = 0.$$

5. Par définition il s'agit d'un ensemble de points de l'espace qui sont invariants par toutes les rotations de $\mathbb{R}^3$ d'axe Δ.

Préliminaires

1. On a par un calcul immédiat

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_{0,2}(X) &= (1-X)^2 = X^2-2X+1\\ \mathscr{B}_{1,2}(X) &= 2X(1-X) = -2X^2+2X\\ \mathscr{B}_{2,2}(X) &= X^2\end{aligned}$$

et

$$\boxed{\begin{aligned}\mathscr{B}_{0,3}(X) &= (1-X)^3 = -X^3+3X^2-3X+1\\ \mathscr{B}_{1,3}(X) &= 3X(1-X)^2 = 3X^3-6X^2+3X\\ \mathscr{B}_{2,3}(X) &= 3X^2(1-X) = -3X^3+3X^2\\ \mathscr{B}_{3,3}(X) &= X^3\end{aligned}}$$

2. Les calculs précédents montrent que la matrice de la famille $\left\{\mathscr{B}_{0,2},\mathscr{B}_{1,2},\mathscr{B}_{2,2}\right\}$ dans la base $\left\{1,X,X^2\right\}$ est

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice vaut donc 2 car elle est triangulaire inférieure et ce déterminant est donc non nul. Donc cette matrice est une matrice de passage et on obtient bien :

$$\boxed{\text{la famille } \left\{\mathscr{B}_{0,2},\mathscr{B}_{1,2},\mathscr{B}_{2,2}\right\} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

3. La question précédente invite à employer le même raisonnement. En effet pour $0 \le k \le n$ le degré du plus petit monome non nul de $\mathscr{B}_{k,n}(X)$ est k et son coefficient est $\binom{n}{k}$. Ainsi si l'on considère la matrice de la famille $\left\{\mathscr{B}_{k,n}\right\}_{0\le k\le n}$ dans la base $\left\{1,\cdots,X^n\right\}$, elle sera toujours triangulaire inférieure avec tout ses coefficients non nuls sur la diagonale et donc de déterminant non nul (ce déterminant vaut en fait $\prod_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$). Donc le même raisonnement que dans la question précédente montre que

$$\boxed{\text{la famille } \left\{\mathscr{B}_{k,n}\right\}_{0\le k\le n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Partie I : Produit scalaire

1. (a) La fonction φ est évidemment $\boxed{\text{symétrique}}$. Elle est de plus linéaire en sa première variable car l'évaluation en un point et linéaire et donc l'application $\varphi(-,Q)$ (où Q est fixé) est une combinaison linéaire d'applications linéaires. Ainsi par symétrie l'application φ est $\boxed{\text{bilinéaire}}$. De plus si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors $\varphi(P,P)$ est une somme de carré donc est positif. Ainsi φ est $\boxed{\text{positive}}$.Enfin supposons que $\varphi(P,P) = 0$ pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, alors, une somme de terme positifs étant nulle si et seulement si chacun des termes est nul, il vient

$$\begin{cases}P(0)^2 = 0\\ P(1)^2 = 0\\ \frac{1}{4}\left(P\left(\frac{1}{2}\right) - P(1) - P(0)\right)^2 = 0\end{cases}$$

On en déduit que $P(0) = P(1) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Or P est un polynôme de degré 2, et ayant 3 racines c'est donc nécessairement le polynôme nul.

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi \text{ est bien un produit scalaire sur } \mathbb{R}_2[X].}$$

(b) On utilise le procédé de Gram-Schmidt. On remarque que

$$\varphi(X^2, X^2) = 0 + 1 + \frac{1}{4}\left(4\frac{1}{4} - 1 - 0\right)^2 = 1$$

et donc $\mathscr{B}_{2,2}(X) = X^2$ est de norme 1. On calcule ensuite

$$X - \varphi(X, X^2)X^2$$

Or $\varphi(X, X^2) = 1$, et finalement

$$X - \varphi(X, X^2)X^2 = X - X^2$$

De plus

$$\varphi(X - X^2, X - X^2) = 0 + 0 + \frac{1}{4}\left(4\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

donc le vecteur $X - X^2$ est de norme $\frac{1}{2}$ et le deuxième vecteur de la base orthonormale obtenue est donc $2(X - X^2) = \mathscr{B}_{1,2}(X)$. Enfin pour obtenir le dernier vecteur on calcule

$$1 - \varphi(1, \mathscr{B}_{1,2}(X))\mathscr{B}_{1,2}(X) - \varphi(1, X^2)X^2 = 1 - 4\varphi(1, X - X^2)(X - X^2) - \varphi(1, X^2)X^2$$

or

$$\varphi(1, X^2) = 1$$
$$\varphi(1, X - X^2) = \frac{1}{2}$$

On en déduit que le vecteur $1 - 4\frac{1}{2}(X - X^2) - X^2 = 1 - 2X + X^2 = \mathscr{B}_{0,2}(X)$ est orthogonal à $\mathscr{B}_{1,2}(X)$ et $\mathscr{B}_{2,2}(X)$. De plus

$$\varphi(\mathscr{B}_{0,2}(X), \mathscr{B}_{0,2}(X)) = 1$$

> Ainsi le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt partant de la famille $\{X^2, X, 1\}$ donne la famille orthonormale $\{\mathscr{B}_{2,2}(X), \mathscr{B}_{1,2}(X), \mathscr{B}_{0,2}(X)\}$.

2. (a) La matrice M est à coefficients réels et symétrique, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable et ceci dans une base orthonormale.

   (b) On trouve le polynôme caractéristique de M en utilisant les règles de calcul du déterminant, on obtient $\chi_M(X) = (X - 4)(X + 2)^2$. De plus la méthode du pivot de Gauss nous permet de trouver

$$\ker(M + 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$\ker(M - 4\,\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

forment une base orthonormale de vecteurs propres de M. On a donc en posant

$$Q = \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

que Q est une matrice de passage d'une base orthonormée (la base canonique de $\mathbb{R}^3$) à une autre. C'est donc une matrice orthogonale et son inverse est sa transposée. On a donc

$$\begin{aligned}Q^{-1} &= {}^tQ\\ &= \begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

et

$$D = Q^{-1}MQ$$

(c) Les valeurs propres ainsi que les espaces propres de f sont ceux que l'on a trouvé pour la matrice M, on en déduit que f admet les valeurs propres -2 de multiplicité deux et 4 de multiplicité un, et que en posant

$$\begin{aligned}e_1(X) &= -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{1,2}(X) - \mathcal{B}_{2,2}(X)\\ e_2(X) &= -\mathcal{B}_{2,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X)\\ e_3(X) &= \mathcal{B}_{2,2}(X) + 2\mathcal{B}_{1,2}(X) + \mathcal{B}_{0,2}(X)\end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned}\ker(f + 2\,\mathrm{id}) &= \mathrm{Vect}\,(e_1(X), e_2(X))\\ \ker(f - 4\,\mathrm{id}) &= \mathrm{Vect}\,(e_3(X))\end{aligned}$$

(d) Les coordonnées des vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ dans la base orthonormale

$$\{\mathscr{B}_{2,0}(X), \mathscr{B}_{1,2}(X), \mathscr{B}_{2,2}(X)\}$$

sont données respectivement par les vecteurs

$$g_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or un produit scalaire se calcule comme s'il s'agissait du produit scalaire canonique dès lors que l'on dispose des coordonnées dans une base orthonormale. Ainsi les vecteurs g_1, g_2, g_3 étant orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, les vecteurs $e_1(X), e_2(X), e_3(X)$ sont orthogonaux pour le produit scalaire φ, on en déduit que

les espaces propres de f sont orthogonaux pour φ.

(e) On considère l'application suivante

$$\varphi_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k \end{array}$$

où $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \mathscr{B}_{k,n}(X)$ et $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \beta_k \mathscr{B}_{k,n}(X)$ (ces coefficients existent et sont uniques puisque la famille $\{\mathscr{B}_{k,n}(X)\}_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question Préliminaire 3). Alors cette application est évidemment symétrique, bilinéaire et positive. Si $\varphi_n(P,P) = 0$ pour un polynôme P, alors ceci nous donne que tous les coefficients α_k sont nuls puisque la famille $\{\mathscr{B}_{k,n}(X)\}_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question Préliminaire 3, et donc P est nécessairement le polynôme nul. Ainsi φ_n est un produit scalaire. De plus il est construit de telle façon que pour tout $i, k \in \{0, \cdots, n\}$ on ait $\varphi_n(\mathscr{B}_{i,n}(X), \mathscr{B}_{k,n}(X)) = \delta_{i,n}$.

Il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour lequel la famille $\{\mathscr{B}_{k,n}\}_{0\le k\le n}$ est orthonormale.

Partie II : Une première courbe de Bézier dans le plan.

1. (a) On utilise la définition d'une courbe de Bézier et le résultat de la question 1 des préliminaires. On a pour tout $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} \Gamma_1(t) &= \mathscr{B}_{0,3}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathscr{B}_{1,3}(t)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathscr{B}_{2,3}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathscr{B}_{3,3}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t^3 - 12t^2 + 6t \\ 6t^3 - 12t^2 + 6t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3t^3 + 3t^2 \\ -9t^3 + 9t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc on a

$$\forall t \in [0,1], \quad \Gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 6t - 9t^2 + 4t^3 \\ 6t - 3t^2 - 4t^3 \end{pmatrix}$$

(b) On peut donc faire la remarque que la courbe Γ_1 n'est autre que la portion de la courbe Γ_2 lorsque le paramètre parcourt uniquement l'intervalle $[0,1]$.

2. (a) Les fonctions x_2 et y_2 étant des polynômes, elles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pourront au cours de l'étude être dérivées autant de fois que nécessaire. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} x_2'(t) &= 6 - 18t + 12t^2 \\ y_2'(t) &= 6 - 6t - 12t^2 \end{aligned}$$

L'étude des deux trinômes du second degré montre que

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= 12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-1) \\ y_2'(t) &= -12\left(t - \frac{1}{2}\right)(t+1) \end{aligned}$$

Donc leur signe est connu et on obtient les tableaux de variations suivants

t	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x_2'(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	
x_2	$-\infty$	$\nearrow$	-19	$\nearrow$	$\frac{5}{4}\simeq 1.25$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y_2'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y_2	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$\frac{7}{4}\simeq 1.75$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

(b) D'après les tableaux de variations obtenus à la question précédente,

la courbe Γ_2 admet en le point de paramètre $t=1$ une tangente verticale et admet en le point de paramètre $t=-1$ une tangente horizontale. Il n'y a pas d'autre point de ce type.

(c) La tangente à Γ_2 en $t=0$ est la droite dirigée par $\Gamma_2'(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et passant par $\Gamma_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$: il s'agit donc de la première bissectrice.

Une équation cartésienne de la tangente à Γ_2 en $t=0$ est $y=x$.

(d) D'après les tableaux de variation obtenus à la question $2.a$, le point singulier est le point de paramètre $t=\frac{1}{2}$. On a

$$x_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -6, \quad y_2''\left(\frac{1}{2}\right) = -18, \quad x_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = 24, \quad y_2'''\left(\frac{1}{2}\right) = -24$$

Les vecteurs $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma_2'''\left(\frac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires, ainsi d'après le cours

il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

De plus toujours d'après le cours la tangente est la droite passant par $\Gamma_2\left(\frac{1}{2}\right)$ et dirigée par $\Gamma_2''\left(\frac{1}{2}\right)$. Son équation est donnée par

$$\begin{vmatrix} -6 & \frac{5}{4}-x \\ -18 & \frac{7}{4}-y \end{vmatrix} = 0$$

soit :

$$\boxed{y-3x=-2}$$

(e) La courbe admet des branches infinies lorsque le paramètre tend vers $\pm\infty$ d'après le tableau de variation obtenu en $2.b$. Or

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{x_2(t)}{y_2(t)} = -1$$

et

$$\lim_{t\to\pm\infty} x_2(t)+y_2(t) = -\infty$$

$\boxed{\text{La courbe admet des branches paraboliques de direction asymptotique } y=-x.}$

3. La courbe a été représentée sur la figure 1.

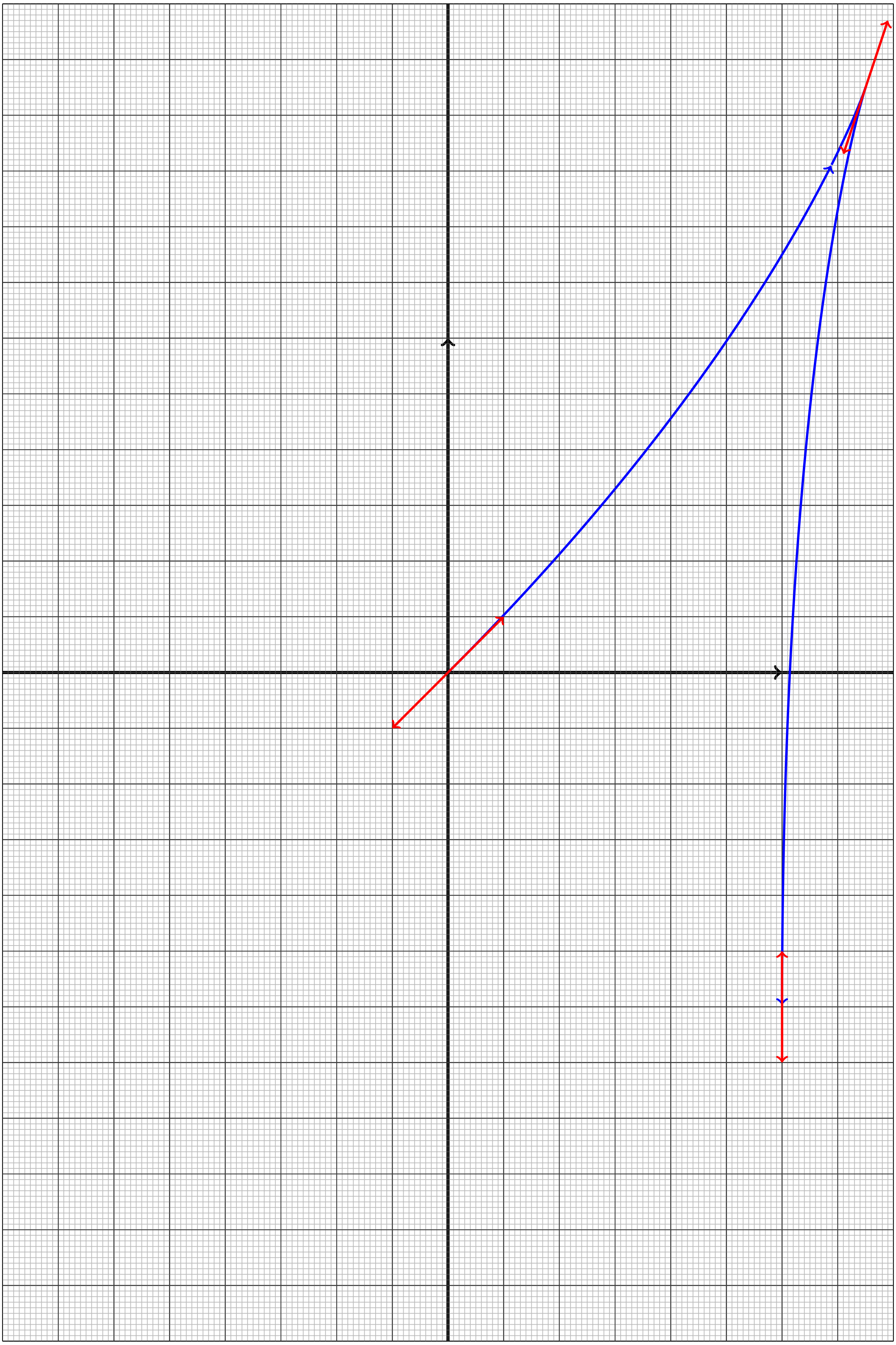

Figure 1: Courbe Γ_2

Partie III : Un détour par le cas général

1. On a d'après la définition de la courbe de Bézier que

$$\boxed{\Gamma(0) = A_0, \quad \Gamma(1) = A_n.}$$

2. La fonction Γ étant polynomiale elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de définition. Or

$$\begin{aligned}\Gamma'(0) &= \sum_{k=0}^{n} \mathscr{B}'_{k,n}(0)\overrightarrow{OA_k} \\ &= -n\overrightarrow{OA_0} + n\overrightarrow{OA_1} \\ &= n\overrightarrow{A_0A_1}.\end{aligned}$$

Ce vecteur étant non nul, c'est le vecteur directeur de la tangente en A_0 et la tangente à Γ en A_0 étant la droite passant par A_0 et dirigée par $n\overrightarrow{A_1A_0}$, on a bien

$$\boxed{\text{la tangente à } \Gamma \text{ en } A_0 \text{ est la droite } (A_0A_1).}$$

3. D'après la question Préliminaire 3, il existe $(p_0, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} p_i \mathscr{B}_{k,n}(X)$ et de même il existe $(q_0, \cdots, q_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} q_i \mathscr{B}_{k,n}(X)$. En posant $A_i = \begin{pmatrix} p_i \\ q_i \end{pmatrix}$, on a bien que la courbe Λ est la courbe de Bézier associée aux points de contrôle $A_0, \cdots, A_n$.

Il est donc possible de trouver $A_0, \cdots, A_n$ tel que la courbe Λ soit la courbe de Bézier associée à ces points.

Partie IV : Une deuxième courbe de Bézier

1. (a) On sait d'après la partie III que le point C_1 est à l'intersection des tangentes à Γ_1 en A_0 et en A_3. Or ces droites ont pour équation $x = y$ et $x = 1$ (d'après les questions II.2.b et II.2.c).

$$\boxed{\text{Ainsi le point } C_1 \text{ a pour coordonnées } (1, 1).}$$

(b) Par définition d'une courbe de Bézier on a pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\Gamma_3(t) &= \mathscr{B}_{0,2}(t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathscr{B}_{1,2}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathscr{B}_{2,2}(t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t(1-t) \\ 2t(1-t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad \Gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t - 3t^2 \end{pmatrix}}$$

2. Nous étudions la courbe donnée par

$$\begin{cases} x_3(t) & = -t^2 + 2t \\ y_3(t) & = -3t^2 + 2t \end{cases}$$

Les fonctions de coordonnées sont dérivables et données par

$$\begin{cases} x_3'(t) & = 2 - 2t \\ y_3'(t) & = 2 - 6t \end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$x'(t)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
x	0	$\nearrow$	$\frac{5}{9} \simeq 0.56$	$\nearrow$	1
$y'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{3} \simeq 0.33$	$\searrow$	-1

De ce tableau de variations on déduit les informations suivantes

- il y a une tangente horizontale au point de paramètre $\frac{1}{3}$
- il y a une tangente verticale au point de paramètre 1

3. Le graphique complété est présentée en figure 2.

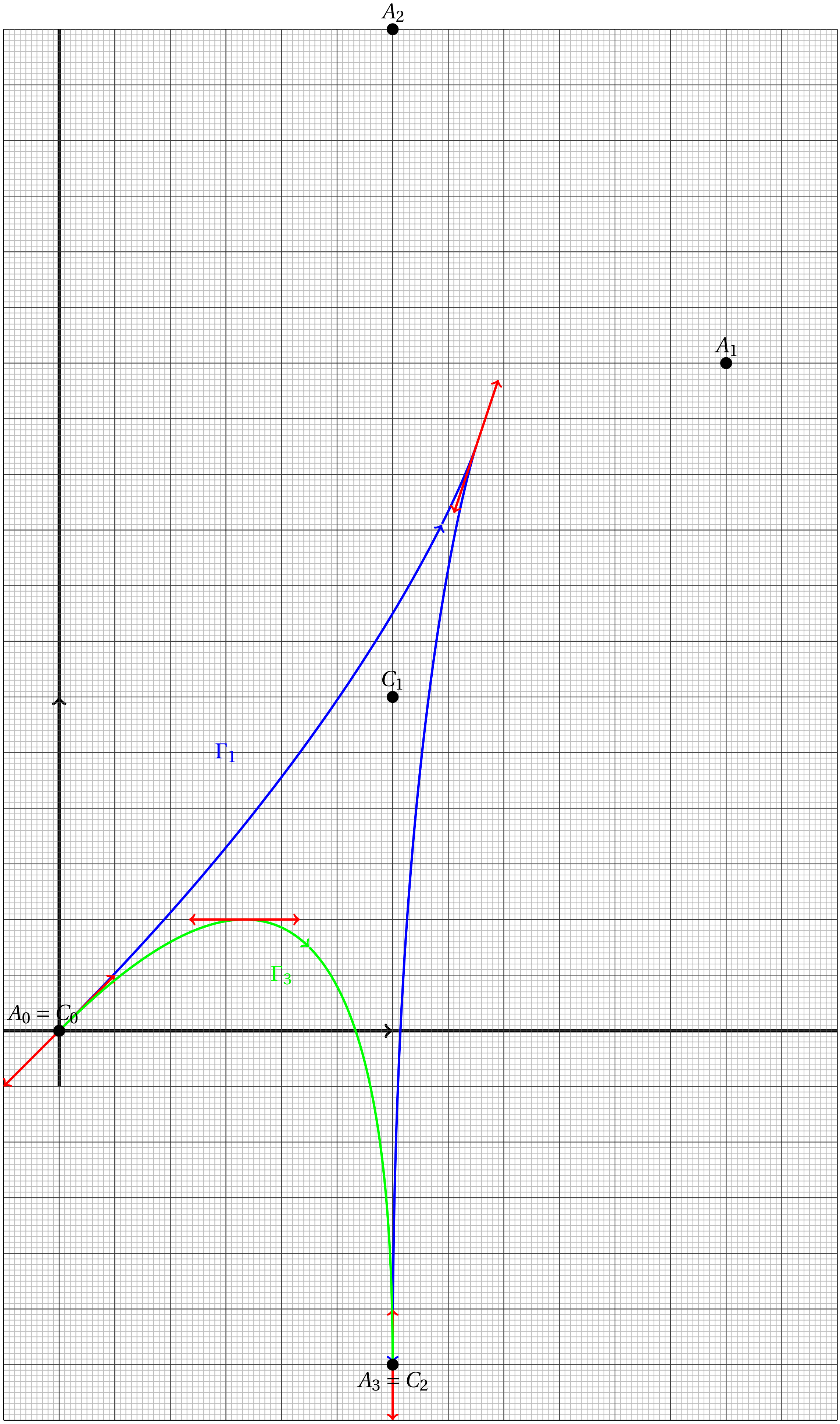

Figure 2: Les courbes Γ_1 et Γ_3

Partie IV : Une surface de révolution

1. Encore une fois, il s'agit d'appliquer la définition. On a pour $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\Gamma_4(t) &= \mathscr{B}_{0,3}(t)\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix} + \mathscr{B}_{1,3}(t)\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathscr{B}_{2,3}(t)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mathscr{B}_{3,3}(t)\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3t^3-9t^2+9t-3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3t^3+6t^2-3t\\3t^3-6t^2+3t\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3t^3+3t^2\\-3t^3+3t^2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3t^3\\0\\0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6t-3\\3(t-t^2)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

d'où

$$\forall t \in [0,1]\,, \quad \Gamma_4(t) = \begin{pmatrix}6t-3\\3(t-t^2)\end{pmatrix}$$

2. La fonction Γ_4 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son intervalle de définition et on a $\boxed{\Gamma_4'\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix}6\\1\\0\end{pmatrix}}$. Ce vecteur étant non nul c'est lui qui dirige la tangente au point $t = \frac{1}{3}$. De plus la courbe est située dans le plan $z = 0$ donc la tangente à Γ_4 en $t = \frac{1}{3}$ sera contenue dans ce plan, passera par le point $\Gamma_4(1) = \begin{pmatrix}-1\\\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$ et sera aussi contenue dans un plan orthogonal à $\Gamma_4'\left(\frac{1}{3}\right)$, par exemple le plan contenant $\Gamma_4\left(\frac{1}{3}\right)$ et orthogonal au vecteur $\begin{pmatrix}1\\-6\\0\end{pmatrix}$. Ainsi un système d'équation de cette tangente est donné par

$$\begin{cases} z &= 0\\ (x-(-1)) - 6(y-\frac{2}{3}) &= 0\end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z &= 0\\ x-6y &= -5\end{cases}$$

3. Soit $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et notons S la surface en question. Alors, en traduisant le fait que ce point est sur la surface si et seulement si il existe un point sur A l'axe des abscisses et un point B sur la méridienne Γ_4 tels que $\overrightarrow{MA}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{BA}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et que $||MA||^2 = ||BA||^2$

on a :

$$(x,y,z)\in S \Leftrightarrow \exists t,\lambda \quad \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} x-\lambda \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 6t-3-\lambda \\ 3(t-t^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & = 0 \\ (x-\lambda)^2+y^2+z^2 & = (6t-3-\lambda)^2+(3(t-t^2))^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t,\lambda \quad \begin{cases} x & = \lambda \\ t & = \frac{3+\lambda}{6} \\ y^2+z^2 & = 9(t-t^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists t, \quad \begin{cases} t & = \frac{3+x}{6} \\ y^2+z^2 & = 9(t-t^2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2 = 9\left(\frac{3+x}{6}-\left(\frac{3+x}{6}\right)^2\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2+z^2 = \frac{1}{4}(x^2-9)^2$$

Ainsi une équation cartésienne de cette surface de révolution est $y^2+z^2=\frac{1}{4}(x^2-9)^2$