Concours Banque PT 2017
Mathématiques C

Préambule

1. Soient a et b deux réels distincts. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)}$

2. Supposons l'intervalle I non réduit à un point. Pour tout réel x distinct de x_0, f étant dérivable donc continue sur $[x,x_0]$, il existe un réel c_{x,x_0} compris entre x et x_0 tel que $\boxed{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_{x,x_0})}$

3. Plaçons-nous dans le cas où $x<x_0$. Comme f' est supposée strictement croissante, $f'(x)<f'(c_{x,x_0})<f'(x_0)$. Ceci nous permet d'écrire que :
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c_{x,x_0})<f'(x_0)\quad\text{c'est-à-dire}\quad f(x)-f(x_0)>f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
car $x-x_0<0$. On a donc bien $\boxed{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)>0}$

4. Un raisonnement analogue nous permet d'obtenir le même résultat pour $x>x_0$.

5. La fonction f étant dérivable en x_0, sa courbe représentative admet une tangente au point d'abscisse x_0 d'équation $\boxed{y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

6. Un point de coordonnées (x,y) appartenant à cette tangente vérifiera, d'après les inégalités précédentes, $y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)<f(x)$. Cela signifie que la tangente est située en dessous de la courbe. Le raisonnement étant valable quel que soit $x_0\in I$, la courbe représentative de f est située au-dessus de toutes ses tangentes. La fonction f est alors qualifiée de *convexe*.

Partie I

1. Soit $x\geqslant 0$.
   - La fonction $t\mapsto e^{-t}t^x$ est continue sur $]0,+\infty[$; l'intégrale est doublement impropre.
   - Problème de convergence en 0.
     $e^{-t}t^x=e^{-t}e^{x\ln(t)}$ admet une limite finie en 0 puisque $x\geqslant 0$, l'intégrale est donc faussement impropre en 0.
   - Problème de convergence en $+\infty$.
     Par croissance comparée, $e^{-t}t^{x+2}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ car $x+2>0$ donc
     $$e^{-t}t^x\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
     Ceci suffit à justifier $\boxed{\text{la convergence de }\int_0^{+\infty}e^{-t}t^x\,dt\text{ pour tout }x\geqslant 0}$

2. $\boxed{G(0)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=1}$

3. On a $G(1/2)=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}\,dt$. Soient a et b deux réels strictement positifs. Commençons par effectuer une intégration par parties, les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$.
$$\int_a^b\sqrt{t}e^{-t}\,dt=\left[-\sqrt{t}e^{-t}\right]_{t=a}^{t=b}+\int_a^b\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt$$
Un bref passage à la limite nous permet d'écrire, par croissance comparée, que :
$$G(1/2)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{2\sqrt{t}}\,dt$$
Il ne reste plus qu'à effectuer le changement de variable $u=\sqrt{t}$, de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif sur $]0,+\infty[$, pour obtenir
$$\boxed{G(1/2)=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

4. Soit A un réel strictement positif.
   a) Soient $t>0$ et $x\in[0,A]$. Par définition, $t^x=e^{x\ln(t)}$. On a donc :
   $$t^x\leqslant\begin{cases}1 & \text{si } t\leqslant 1\\ t^A & \text{si } t>1\end{cases}$$
   Ainsi, $t^x\leqslant\max(1,t^A)\leqslant 1+t^A$. Comme $e^t>0$, $\boxed{|e^{-t}t^x|\leqslant(1+t^A)e^{-t}}$

b) Appliquons le théorème de continuité sous le signe $\int$.
Posons pour cela $f(x,t)=t^x\mathrm{e}^t$.

- Pour tout $t\in]0,+\infty]$, $x\longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,A]$.
- Pour tout $x\in[0,A]$, $t\longmapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Hypothèse de domination
  D'après la question précédente,

$$\forall (x,t)\in[0,A]\times\mathbb{R}_+^*,\quad |f(x,t)|\leqslant(1+t^A)\mathrm{e}^{-t}=\varphi(t)$$

Observons que la fonction φ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ puisque $A\geqslant 0$ et $\varphi(t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

On a bien justifié $\boxed{\text{la continuité de } f \text{ sur } [0,A]\text{, et par extension, sur } [0,+\infty[}$

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, G est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,A]$ et que :

$$\forall x\in[0,A]\quad G^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}\ln^k(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\quad(*)$$

- **Initialisation –** C'était l'objet de la question précédente, G est bien de classe $\mathscr{C}^0$ sur l'intervalle $[0,A]$.
- **Hérédité –** Supposons maintenant que G est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[0,A]$ et que l'égalité $(*)$ est vérifiée. Montrons que $G^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, en appliquant le théorème de Leibniz.
  - Pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$, $x\longmapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,A]$ et,

$$\forall (x,t)\in[0,A]\times\mathbb{R}_+^*,\quad \frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(x,t)=\ln^{n+1}(t)t^x\mathrm{e}^{-t}$$

  - Pour tout $x\in[0,A]$, $t\longmapsto\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ et $t\longmapsto\dfrac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(x,t)$ sont continues et $t\longmapsto\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque par croissance comparée :

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)=\ln^n(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

  - Hypothèse de domination

$$\forall (x,t)\in[0,A]\times\mathbb{R}_+^*,\quad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leqslant(1+t^A)\ln^k(t)\mathrm{e}^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Ceci montre que G est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[0,A]$ et l'égalité $(*)$ est vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève notre raisonnement par récurrence.

On a bien démontré que G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,A]$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall x\in[0,A]\quad G^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}\ln^n(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

d) La propriété précédente étant vraie quel que soit $A\geqslant 0$, G est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et on peut même écrire que :

$$\boxed{\forall x\geqslant 0\quad G^{(n)}(x)=\int_0^{+\infty}\ln^k(t)t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

5. Soit $x\geqslant 0$. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[a,b]$ avec $a,b>0$, les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$. On a :

$$\int_a^b t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\Big]_{t=a}^{t=b}+(x+1)\int_a^b t^x\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Toujours par croissance comparée, en passant à la limite, on obtient directement l'égalité $\boxed{G(x+1)=(x+1)G(x)}$

6. En appliquant cette identité à un entier naturel n, on obtient $G(n+1)=(n+1)G(n)$, ce qui conduit, par récurrence, à :

$$G(n)=nG(n-1)=n(n-1)G(n-2)=\cdots=n(n-1)\cdots 1\cdot G(0)=n!$$

On a donc $\boxed{G(n)=n!}$

7. Posons $\tilde{G}(x)=\dfrac{G(x+1)}{x+1}$ pour tout $x>-1$. D'après la question **5**, $\tilde{G}(x)=G(x)$ pour tout $x\geqslant 0$. $\tilde{G}$ étant le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, $\boxed{\tilde{G}\text{ est donc bien elle-même de classe }\mathscr{C}^\infty\text{ sur }]-1,+\infty[}$

8. G étant continue en 0, $G(x+1)\xrightarrow[x\to-1^+]{}G(0)=1$ donc $\boxed{\tilde{G}(x)=\dfrac{G(x+1)}{x+1}\underset{x\to-1^+}{\sim}\dfrac{1}{x+1}}$

9. On obtient en dérivant successivement,

$$\forall x>-1,\quad (x+1)^3\tilde{G}''(x)=(x+1)^2G''(x+1)-2(x+1)G'(x+1)+2G(x+1)$$

La question **4.d)** nous permet alors d'écrire :

$$\boxed{(x+1)^3\tilde{G}''(x)=\int_0^{+\infty}\left[(x+1)^2\ln^2(t)-2(x+1)\ln(t)+2\right]t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}$$

10. Cette dernière intégrale peut se réécrire sous la forme :

$$\int_0^{+\infty}\left[X^2-2X+2\right]t^{x+1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{en posant} \quad X=(x+1)\ln(t)$$

Le discriminant de X^2-2X+2 étant strictement négatif, ce trinôme est de signe constant. Il suffit d'évaluer en $X=0$ pour voir que le signe est positif. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\tilde{G}''$ est positive. Elle est même strictement positive du fait que si f est continue et positive sur I,

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t=0 \iff \forall t\in I \quad f(t)=0$$

Ainsi, $\boxed{\tilde{G}''(x)>0 \text{ pour tout } x>-1}$

11. $\tilde{G}'$ étant ainsi strictement croissante, les résultats du préambule nous permette de justifier que le graphe de $\tilde{G}$ est au-dessus de chacune de ses tangentes

12. Comme $G(n)=n!$ pour tout entier naturel n, $\tilde{G}(0)=\tilde{G}(1)=1$. Ce qui nous permet d'appliquer le théorème de Rolle (la dérivabilité étant assurée sur $]-1,+\infty[$) ! On justifie ainsi l'existence d'une tangente horizontale en un point d'abscisse c compris entre 0 et 1.

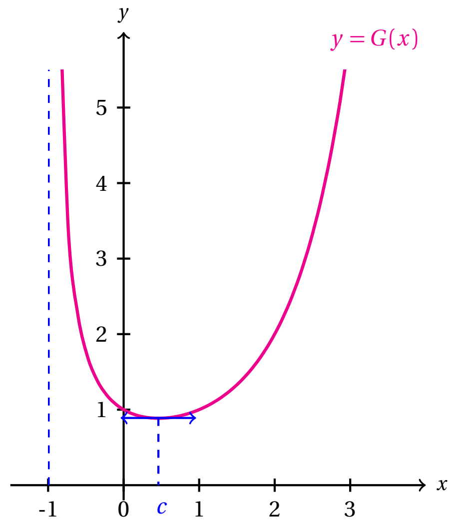
13. $\tilde{G}'$ étant strictement croissante et s'annulant en c, les variations de $\tilde{G}$ sont immédiates :

x	-1		c		$+\infty$
$\tilde{G}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\tilde{G}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\tilde{G}(c)\approx 0{,}89$	$\nearrow$	$+\infty$

Précisons le calcul des limites :

- $\tilde{G}(x)\underset{x\to-1^+}{\sim}\dfrac{1}{x+1}\xrightarrow[x\to-1^+]{}+\infty$.
- Par croissance de G, en posant $n=\lfloor x\rfloor$, on a $G(x)\geqslant G(n)=n!$.
  Donc $\dfrac{G(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, ce qui nous assure que $\tilde{G}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

14. Il ne reste plus qu'à tracer le graphe de $\tilde{G}$, sachant que $\tilde{G}(0)=\tilde{G}(1)=1$.



Représentation de $\Gamma_{\tilde{G}}$

Notons que $\Gamma_{\tilde{G}}$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$ puisque $\tilde{G}(x)\xrightarrow[x\to-1^+]{}+\infty$.

On pourrait par ailleurs vérifier que :

$$\frac{\tilde{G}(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$$

ce qui permettrait de justifier l'existence d'une branche parabolique de direction l'axe (Oy). Il suffit pour cela d'employer le même argument qu'à la question **13.**

Partie II

On pose, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. La fonction $x\mapsto\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de $x\mapsto\mathrm{e}^{t^2}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Dès lors, F l'est également comme produit de fonctions dérivables.
   On a donc :

$$\boxed{\forall x\geqslant 0,\quad F'(x)=1-2x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}$$

2. F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions développables en série entière, via un produit de Cauchy de séries absolument conver-

gentes. En effet, pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\ ;\qquad \int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t=0+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

par intégration terme à terme.

3. F est bien solution de l'équation différentielle $y'=1-2xy$ d'après la question **1**.

4. Posons $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$. Par dérivation terme à terme,

$$\begin{aligned}F'(x)+2xF(x)=1 \quad&\iff\quad \sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=1\\ &\iff\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n=1\\ &\iff\quad a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}[(n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}]x^n=1\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière,

$$\boxed{a_1=1\ ;\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\quad (n+1)a_{n+1}+2a_{n-1}=0}$$

5. La relation précédente nous permet d'écrire, en distinguant les cas pairs et impairs :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad a_{2p}=-\frac{2}{2p}a_{2p-2}\ ;\quad a_{2p+1}=-\frac{2}{2p+1}a_{2p-1}}$$

6. Remarquons que $F(0)=a_0=0$. Donc, par récurrence, pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_{2p}=0$. Il ne reste plus qu'à déterminer les termes d'indices impairs. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$a_{2p+1}=-\frac{2}{2p-1}a_{2p-1}=\frac{4}{(2p+1)(2p-1)}a_{2p-3}=\cdots=\frac{(-1)^p2^p}{(2p+1)(2p-1)\cdots1}a_1$$

Ainsi, $\boxed{a_{2p+1}=\frac{(-1)^p2^p}{(2p+1)(2p-1)\cdots1}=\frac{(-1)^p4^pp!}{(2p+1)!}}$ On a dès lors :

$$\boxed{\forall x\geqslant0,\quad F(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p4^pp!}{(2p+1)!}x^{2p+1}}$$

7. Posons $u_n=\frac{(-1)^n4^nn!}{(2n+1)!}$. Montrons que la série $\sum u_n$ converge absolument à l'aide de la règle de d'Alembert.

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{4^{n+1}(n+1)!}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{4^nn!}=\frac{4(n+1)}{(2n+3)(2n+2)}=\frac{2}{2n+3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0<1$$

Ce qui permet de conclure.

8. Revenons au produit de Cauchy effectué dans la question **2.** On a, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F(x)=\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t&=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!(2k+1)}x^{2(n-k)}x^{2k+1}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\right]x^{2n+1}\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, grâce au résultat de la question **6.**,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \frac{(-1)^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\right]=\frac{(-1)^n4^nn!}{(2n+1)!}$$

Autrement dit, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}=\frac{4^nn!^2}{(2n+1)!}=\frac{4^nn!^2}{(2n+1)(2n)!}=\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE