

Proposition de corrigé : Banque PT – Épreuve C – 2021

Préambule

- Une primitive de $x \mapsto 2x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto x^2$ donc, d'après le théorème de structure des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 1, f est une solution de (\mathcal{E}) si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{-x^2}$. Finalement, l'unique solution de (\mathcal{E}) valant 1 en 0 est $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
- Par composition, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f'(x) = -2xe^{-x^2} \\ f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \\ f'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f''(x) = 4 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) e^{-x^2} \\ f'(x) = -2xe^{-x^2} \end{cases}$$

ce qui donne les signes de f'' et f' sur \mathbb{R} . Par composition, $\lim_{\pm\infty} f = 0$ et, par croissance comparée, $\lim_{\pm\infty} f' = 0$.

On obtient ainsi les tableaux de variations de $f = |f|$, f' et $|f'|$:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$+\infty$
f''		−	0	+	0	−
f'			+	0		−
f'	$\begin{array}{cccccc} & & \nearrow \sqrt{2/e} & \searrow 0 & \nearrow -\sqrt{2/e} & \searrow 0 \\ 0 & & & & & & \end{array}$					
$ f' $	$\begin{array}{cccccc} & & \nearrow \sqrt{2/e} & \searrow 0 & \nearrow \sqrt{2/e} & \searrow 0 \\ 0 & & & & & & \end{array}$					
$f = f $	$\begin{array}{cccccc} & & & \nearrow 1 & \searrow 1/e & \searrow 0 \\ 0 & & & & & & \end{array}$					

D'après le tableau de variations, $|f|$ admet un maximum sur $[0, 1]$, et $|f'|$ admet un maximum sur $[0, 1]$ et sur \mathbb{R} , et on a :

$$\max_{[0,1]} |f| = 1 \quad \text{et} \quad \max_{[0,1]} |f'| = \max_{\mathbb{R}} |f'| = \sqrt{\frac{2}{e}}.$$

- Soit $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.
 - Soit ε un réel strictement positif. Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , avec le théorème des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, il existe c compris entre x et y tel que :

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq \sqrt{\frac{2}{e}} |x - y|$$

où l'inégalité découle de la question 3. Ainsi, en posant $\eta = \sqrt{\frac{2}{e}}\varepsilon$, on obtient bien :

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2 : \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}(n)$: « il existe $H_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = H_n(x)e^{-x^2}$, $\deg(H_n) = n$ et $x \mapsto H_n(x)$ a la même parité que n ».

Initialisation :

On a $f^{(0)} = f$ donc, en posant $H_0 = 1$, on a $f : x \mapsto H_0(x)e^{-x^2}$, $\deg(H_0) = 0$ et $x \mapsto H_0(x)$ est paire (c'est la fonction constante en 1). Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. La fonction f étant de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , $f^{(n)}$ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} \left(H_n(x)e^{-x^2} \right) = (H'_n(x) - 2xH_n(x))e^{-x^2} = H_{n+1}(x)e^{-x^2}$$

où on a posé $H_{n+1} = H'_n - 2XH_n$. En tant que produit et somme de polynômes et dérivée de polynôme (par hypothèse de récurrence), H_{n+1} est un polynôme à coefficients réels. De plus, $\deg(H'_n) < \deg(H_n)$ ce qui donne $\deg(H_{n+1}) = \deg(-2XH_n) = \deg(-2X) + \deg(H_n) = 1 + n$. Déterminons la parité de $g : x \mapsto H_{n+1}(x)$. On traite le cas où n est pair (le cas n impair est analogue). Par hypothèse de récurrence, $x \mapsto H_n(x)$ est paire donc $x \mapsto H'_n(x)$ est impaire ce qui donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(-x) = H_{n+1}(-x) = H'_n(-x) + 2xH_n(-x) = -H'_n(-x) + 2xH_n(x) = -H_{n+1}(x) = -g(x)$$

donc g est impaire qui est bien la même parité que $n + 1$. La propriété $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Ceci achève la récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Compte-tenu de la relation entre H_{n+1} et H_n et puisque $\deg(H'_n) < \deg(H_n)$, on a

$$a(H_{n+1}) = -2a(H_n).$$

Par suite, $(a(H_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison -2 et de premier terme 1 (car $H_0 = 1$). Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(H_n) = (-2)^n$.

Partie I

- Soit g une fonction paire définie et continue sur \mathbb{R} . L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ convergent. Or, la fonction $t \mapsto -t$ est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_- strictement décroissante donc, par changement de variable, $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ et $\int_0^{-\infty} -g(-t) dt = \int_{-\infty}^0 g(t) dt$ sont de même nature. En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} g(t) dt$ sont de même nature.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $\varphi : x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ . De plus, pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$|\varphi(x)| \leq x^n e^{-x} = x^n e^{-x/2} e^{-x/2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-x/2})$$

où la relation de comparaison est donnée par une croissance comparée. Or, $t \mapsto e^{-t/2}$ est continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}_+ (intégrale de référence) donc, par théorème de comparaison, φ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . L'intégrale I_n existe. Le raisonnement est analogue pour J_n en comparant avec $t \mapsto e^{t/2}$ au voisinage de $-\infty$.

- Avec le même changement de variable que dans la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^0 x^n e^{-x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx + \int_{+\infty}^0 (-x)^n e^{-x^2} dx = (1 + (-1)^n) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx = (1 + (-1)^n) I_n. \end{aligned}$$

ce qui donne, lorsque n est impair, $J_n = 0$.

- Une primitive de $x \mapsto x e^{-x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2} e^{-x^2}$. Cette dernière fonction tend vers 0 en $+\infty$ donc

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} e^{-0^2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} e^{-x^2} = \frac{1}{2}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x^2}$. Ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ et, par croissance comparée, uv tend vers 0 en $+\infty$ donc, par intégration par partie pour les intégrales généralisées, $\int_0^{+\infty} uv' = -I_{n+2}$ et $\int_0^{+\infty} u'v$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes puisque I_{n+2} converge et on a l'égalité :

$$-I_{n+2} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}(-xe^{-x^2})dx = \int_0^{+\infty} uv' = \lim_{+\infty} uv - u(0)v(0) - \int_0^{+\infty} u'v = 0 - 0 - \int_0^{+\infty} (n+1)x^n \frac{e^{-x^2}}{2} dx$$

$$\text{donc } I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

6. Soit k un entier naturel. Avec la relation de la question précédente, (I_n) est une suite strictement positive et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2(n+1)} = (2n+1)I_{2n}/2$. On a, par produits télescopiques :

$$\frac{I_{2k}}{I_0} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{I_{2(i+1)}}{I_{2i}} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{2i+1}{2} = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} (2i+1) = \frac{1}{2^k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{(2i+1) \times 2i}{2i} = \frac{1}{2^k} \frac{1}{2^{k-1}} \frac{(2k-1)!}{(k-1)!} = \frac{(2k)!}{2^k \times 2^k k!}$$

donc

$$I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} I_0 = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La relation de la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n+1} = nI_{2n-1}$ donc, par récurrence immédiate :

$$I_{2k+1} = k! I_1 = \frac{k!}{2}.$$

7. (a) Soit P une fonction polynomiale. Cette fonction est une combinaison linéaire finie de la famille $(x \mapsto x^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, comme I_k est convergente pour tout entier naturel k , l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)e^{-x^2} dx$ converge comme combinaison linéaire finie d'intégrales convergentes.

- (b) La fonction $x \mapsto Q(x)^2 e^{-x^2}$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur \mathbb{R} donc cette fonction est nulle sur \mathbb{R} . Comme $x \mapsto e^{-x^2}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} , la fonction Q^2 donc la fonction Q est identiquement nulle sur \mathbb{R} .
- (c) Soit P et Q deux fonctions polynomiales. L'application $P \times Q$ est polynomiale donc, d'après la question précédente, $\langle P, Q \rangle$ est bien défini. L'application considérée est
- symétrique car $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ puisque $P \times Q = Q \times P$;
 - linéaire à gauche par linéarité de l'intégrale ;
 - positive car, comme la fonction $t \mapsto P(t)^2 e^{-t^2}$ est positive sur \mathbb{R} , $\langle P, P \rangle \geq 0$;
 - définie-positive car, par la question précédente, si $\langle P, P \rangle = 0$ alors P est identiquement nulle.

- (d) On a :

$$\langle H_0, H_1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times (-2x)e^{-x^2} dx = -2I_1 = 0.$$

- (e) Comme les degrés de H_0 , H_1 et H_2 sont étagés, ces trois vecteurs sont linéairement indépendants donc l'espace $\text{Vect}(H_0, H_1, H_2)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 2, c'est-à-dire qu'on a l'égalité $\text{Vect}(H_0, H_1, H_2) = \mathbb{R}_2[X]$. On va d'abord construire une base orthogonale $(\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1, \widetilde{P}_2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ puis normer chaque vecteur de cette famille. Comme H_0 et H_1 sont orthogonaux, on pose $\widetilde{P}_0 = H_0$ et $\widetilde{P}_1 = H_1$. On cherche donc deux réels b et c tel que $\widetilde{P}_2 : x \mapsto x^2 + bx + c$ est orthogonale à H_0 et H_1 . On a les équivalences :

$$\begin{cases} \langle H_0, \widetilde{P}_2 \rangle = 0 \\ \langle H_1, \widetilde{P}_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J_2 + bJ_1 + cJ_0 = 0 \\ -2J_3 - 2bJ_2 - 2cJ_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I_2 + cI_0 = 0 \\ 2bI_2 = 0 \end{cases}$$

donc $b = 0$ et $c = -I_2/I_0 = -1/2$ ce qui donne $\widetilde{P}_2 : x \mapsto x^2 - 1/2$. Il reste à calculer les normes des trois fonctions construites. On a :

$$\|H_0\|^2 = \|\widetilde{P}_0\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2I_0}{\sqrt{\pi}} = 1,$$

$$\|H_1\|^2 = \|\widetilde{P}_1\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 4x^2 e^{-x^2} dx = \frac{8I_2}{\sqrt{\pi}} = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 2$$

et

$$\begin{aligned} \|\widetilde{P}_1\|^2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 1/2)^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-x^2} dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(I_4 - I_2 + \frac{I_0}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) I_0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\|\widetilde{P}_0\| = 1$, $\|\widetilde{P}_1\| = 1/\sqrt{2}$ et $\|\widetilde{P}_2\| = 1/\sqrt{2}$. En divisant \widetilde{P}_0 , \widetilde{P}_1 et \widetilde{P}_2 par leur norme, une base orthonormée de $\text{Vect}(H_0, H_1, H_2)$ est $\left(1, x \mapsto -\sqrt{2}x, x \mapsto \sqrt{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Partie II

1. $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-x^2 t^2}$ est continue sur $[1; 2]$, donc la fonction F est bien définie.

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R}, F(-x) = -x \int_1^2 e^{-(-x)^2 t^2} dt = -x \int_1^2 e^{-x^2 t^2} dt = -F(x).$$

La fonction F est donc impaire.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $u = xt$, donc $du = xdt$ (changement de variable dans l'intégrale d'une fonction continue sur un segment), ce qui donne $F(x) = \int_1^2 e^{-(xt)^2} xdt = \int_x^{2x} e^{-u^2} du$.

3. On pose, $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.

D'après le théorème fondamental du calcul intégral, la fonction H est de classe C^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, H'(x) = e^{-x^2}$.

$$\text{Or d'après la relation de Chasles : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{2x} e^{-u^2} du - \int_0^x e^{-u^2} du = H(2x) - H(x).$$

Par composition et différence, on peut donc affirmer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} , et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2H'(2x) - H'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$$

4. On reprend les notations de la question précédente : si $x \in \mathbb{R}, F(x) = H(2x) - H(x)$.

$$\text{Or } H(x) = \int_0^x e^{-u^2} du \text{ tend vers } \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.$$

Par composition de limite, $H(2x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Finalement, $F(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On s'intéresse à la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n F(2^k)$ (définie pour tout entier naturel n)

On a alors, en utilisant l'expression de F obtenue à la question 2. :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \int_{2^k}^{2^{k+1}} e^{-u^2} du = \int_1^{2^{n+1}} e^{-u^2} du \text{ grâce à la relation de Chasles.}$$

$$\text{Or } \int_1^{2^{n+1}} e^{-u^2} du = \int_0^{2^{n+1}} e^{-u^2} du - \int_0^1 e^{-u^2} du \text{ tend vers } \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^1 e^{-u^2} du \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

La somme partielle S_n admet donc une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui signifie que la série de terme général $F(2^n)$ converge.

6. (a) Nous avons déjà montré à la question 3. que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
- (b) On a les équivalences suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2e^{-4x^2} = e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + (-4x^2) = -x^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 = \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{\ln(2)}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \end{aligned}$$

(c) On a les équivalences suivantes, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} F'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2e^{-4x^2} > e^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \ln(2) + (-4x^2) > -x^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 < \ln(2) \\ &\Leftrightarrow x^2 < \frac{\ln(2)}{3} \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} < x < \sqrt{\frac{\ln(2)}{3}} \end{aligned}$$

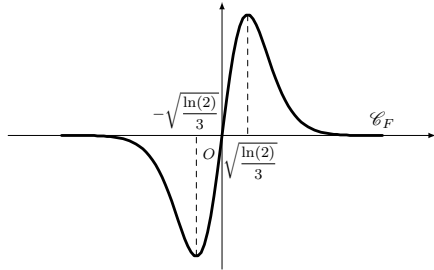
On a donc le tableau de variations suivant : (on a noté $\alpha = F\left(\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}\right)$, et on rappelle que F est impaire)

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$\sqrt{\frac{\ln(2)}{3}}$	$+\infty$			
$F'(x)$		-	0	+	0	-	
$F(x)$	0	\searrow	$-\alpha$	\nearrow	α	\searrow	0

7. Soit un réel x strictement positif fixé. On a les implications suivantes (on utilise entre autres la croissance de la fonction exponentielle et la propriété dite de croissance de l'intégrale) :

$$\begin{aligned} 1 \leq t \leq 2 &\Rightarrow -4 \leq -t^2 \leq -1 \Rightarrow -4x^2 \leq -x^2t^2 \leq -x^2 \Rightarrow e^{-4x^2} \leq e^{-x^2t^2} \leq e^{-x^2} \\ &\Rightarrow \int_1^2 e^{-4x^2} dt \leq \int_1^2 e^{-x^2t^2} dt \leq \int_1^2 e^{-x^2} dt \Rightarrow e^{-4x^2} \leq \int_1^2 e^{-x^2t^2} dt \leq e^{-x^2} \Rightarrow xe^{-4x^2} \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \end{aligned}$$

8. On donne une allure de la courbe représentative de F sans échelle précise :



9. (a) Nous avons vu que la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc en particulier elle est continue sur \mathbb{R} . D'après le théorème fondamental du calcul intégral, elle admet donc des primitives sur \mathbb{R} .

(b) La fonction F est positive sur \mathbb{R}^+ (car $\int_1^2 e^{-x^2t^2} dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale).

La fonction G (qui est telle que $G' = F$ par définition), est donc **croissante** sur \mathbb{R}^+ . On peut donc affirmer que G admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.

(c) On note donc ℓ_G la limite de G en $+\infty$. Il s'agit dans cette question de montrer que ℓ_G est un réel et d'encadrer ce réel.

Remarquons que par définition, G est l'unique primitive de F qui s'annule en 0, ce qui se traduit par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \int_0^x F(t)dt$$

Or d'après la question 7., $\forall t > 0, te^{-4t^2} \leq F(t) \leq te^{-t^2}$

Par croissance de l'intégrale, on a alors : $\forall x > 0, \int_0^x te^{-4t^2} dt \leq G(x) \leq \int_0^x te^{-t^2} dt$

donc : $\left[-\frac{1}{8}e^{-4t^2}\right]_0^x \leq G(x) \leq \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x$, et enfin : $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-4x^2} \leq G(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} \leq \frac{1}{2}$

Dans un premier temps on peut affirmer que $\ell_G \in \mathbb{R}$ car G est majorée par $\frac{1}{2}$ sur $]0; +\infty[$

D'autre part, par passage à la limite dans l'encadrement obtenu, on a donc $\frac{1}{8} \leq \ell_G \leq \frac{1}{2}$.

10. (a) D'après le cours, pour tout réel x on a : $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

(b) Pour cette question on va utiliser l'expression : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_x^{2x} e^{-u^2} du$

$$\text{Or } \forall u \in \mathbb{R}, e^{-u^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{n!}$$

Par intégration terme à terme d'une série entière, on a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_x^{2x} u^{2n} du \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1} \right]_x^{2x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right) \\ \text{donc : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2^{2n+1} - 1)}{n!(2n+1)} x^{2n+1} \end{aligned}$$

Comme cette dernière égalité est valable pour tout réel x , le rayon de convergence de cette série est donc $+\infty$.

Partie III

1. Soit x un réel, soit n un entier naturel, que nous considérerons non nul puisque l'énoncé ne définit $R_{n,k}(x)$ que dans le cas où n est non nul (oubli dans l'énoncé de la question ?). Nous devons calculer $\sum_{k=0}^n kR_{n,k}(x) =$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

— Si $x \in]0; 1[$, on reconnaît qu'il s'agit de l'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres (n, x) , donc d'après le cours $\sum_{k=0}^n kR_{n,k}(x) = nx$.

— Si $x \notin]0; 1[$, nous allons passer par un calcul algébrique (qui est d'ailleurs valable pour tout réel x)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} && \text{car le terme est nul si } k=0 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^{p+1} (1-x)^{n-1-p} && \text{on a posé } p = k-1 \\ &= nx \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p (1-x)^{n-1-p} \\ &= nx(x + (1-x))^{n-1} \\ &= nx \end{aligned}$$

où la dernière ligne vient de la formule du binôme de Newton.
Finalement on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k R_{n,k}(x) = nx.$$

2. D'après le cours, S_n suit une loi binomiale de paramètres (n, p) , et $E(S_n) = np$.

3. (a) D'après la formule du transfert, on peut écrire :

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\text{On a donc bien : } E\left(\frac{S_n}{n}\right) = B_n(f)(p)$$

(b) Loi faible des grands nombres : Soit une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et de même loi.

On note p l'espérance commune à toutes ces variables aléatoires, et pour tout n de \mathbb{N}^* , on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

On a alors :

$$\forall \eta > 0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dans ce problème, nous sommes exactement dans le contexte d'application de ce théorème (la loi commune

aux variables aléatoires X_n étant la loi de Bernoulli de paramètre p).

Fixons $\epsilon > 0$. Pour tout $\eta > 0$, par définition de la limite, à partir d'un certain rang tous les termes de la suite seront inférieurs ou égaux à ϵ . Autrement dit :

$$\forall \eta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \leq \epsilon$$

(c) Soit $\eta > 0$. Pour tout entier naturel k on a $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta$ ou bien $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta$.

$$\text{Autrement dit } \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}, \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta\right\} = \mathbb{N}$$

(d) Soit $\epsilon > 0$. Pour tout entier naturel n , on a alors :

$$\begin{aligned} |f(p) - B_n(f)(p)| &= \left|f(p) - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| && \text{d'après la question 3.a.} \\ &= \left|f(p) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)\right| \\ &= \left|f(p) \sum_{k=0}^n P(S_n = k) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k)\right| && \text{car } \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = 1 \\ &= \left|\sum_{k=0}^n \left(f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) P(S_n = k)\right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k) && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

D'après la question 4.b. du préambule, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [0; 1]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$

On considère donc un tel η et on va couper la somme précédente en deux parties, suivant si $\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta$ ou

bien $\left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta$. On a donc :

$$|f(p) - B_n(f)(p)| \leq \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta}}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k) + \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta}}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k)$$

Majorons chacun des deux termes à part :

— Pour le premier terme :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta}}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k) \leq \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta}}^n \epsilon P(S_n = k) \leq \epsilon \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \eta}}^n P(S_n = k) \leq \epsilon \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \epsilon$$

— Pour le deuxième terme, on utilise tout d'abord l'inégalité triangulaire et le fait que la fonction f soit comprise entre 0 et 1 pour affirmer :

$$\left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq f(p) + f\left(\frac{k}{n}\right) \leq 1 + 1 = 2.$$

On a donc :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta}}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k) \leq 2 \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta}}^n P(S_n = k) = 2P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| > \eta\right) \leq 2P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right)$$

$$\text{Or d'après la question 3.b., } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \eta\right) \leq \epsilon$$

$$\text{Donc } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sum_{\substack{k=0 \\ \left|\frac{k}{n} - p\right| > \eta}}^n \left|f(p) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| P(S_n = k) \leq 2\epsilon$$

Finalement, en rassemblant les majorations des deux termes, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(p) - B_n(f)(p)| \leq 3\epsilon$$

Cette affirmation étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit, par définition de la limite, que

$$B_n(f)(p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(p)$$