4 Savoir caractériser un hyperplan en dimension finie

Quand on ne sait pas !

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et H un sous-espace vectoriel de E.

- **(Caractérisations en dimension quelconque)**

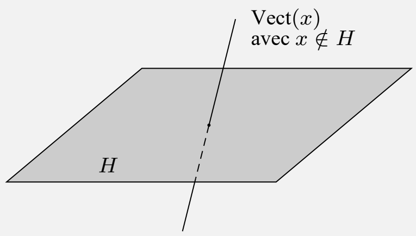
H est un hyperplan de E

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{c} H \text{ est le noyau d'une forme} \\ \text{linéaire non nulle sur } E \end{array}\right]$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{c} H \text{ admet une droite} \\ \text{comme supplémentaire dans } E \end{array}\right]$



Visualisation d'un hyperplan et d'un supplémentaire

- **(Caractérisations en dimension finie)**
  On suppose de plus que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \left[\begin{array}{c} \exists a_1, \cdots, a_n \text{ non tous nuls,} \\ H = \left\{(x_1, \cdots, x_n)_{\mathscr{B}} \in E,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0_{\mathbb{K}}\right\} \end{array}\right]$$
$$\iff \dim H = n - 1$$

Que faire ?

- Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel H est un hyperplan de E, on peut utiliser en pratique une des méthodes suivantes :
  - on montre qu'il existe $\varphi \in E^*$ non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$,
  - si E est de dimension finie, on montre que H est de dimension $\dim E - 1$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

EXEMPLE 1 Bien que $\dim(\mathbb{R}^{n-1}) = \dim(\mathbb{R}^n) - 1$, l'espace $\mathbb{R}^{n-1}$ n'est pas un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, car $\mathbb{R}^{n-1} \not\subset \mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 2 Par contre, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est bien un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$ et $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1$.

- Pour déterminer $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire d'un hyperplan H de E, il suffit de considérer la droite vectorielle engendrée par $\boxed{\text{UN}}$ vecteur de E qui n'est pas dans H.

Conseils

- Il est important de comprendre que, pour un espace vectoriel E, les hyperplans sont les analogues des plans pour l'espace usuel de dimension 3. Cette compréhension intuitive permet de visualiser et de bien comprendre bon nombre de résultats sur les hyperplans.

Exemple traité

Dans $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique, on considère :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E,\ 2x - y + z - 4t = 0\}$$

Justifier que F est un hyperplan de E, en déduire sa dimension et tous ses supplémentaires dans E.

SOLUTION

- F est le noyau de la forme linéaire φ suivante :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & 2x - y + z - 4t \end{array} \right.$$

  qui est non nulle sur E puisque $\varphi(1, 0, 0, 0) = 2 \neq 0$, donc F est un hyperplan de E.
- Comme F est un hyperplan de E qui est de dimension 4, il vient que $\dim F = 4 - 1 = 3$.
- Comme F est un hyperplan de E, les supplémentaires de F dans E sont exactement les droites $\mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (x, y, z, t) \notin F$, c'est-à-dire tel que $2x - y + z - 4t \neq 0$.

Exercices

EXERCICE 4.1

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

1 Discuter de la dimension de l'intersection de deux hyperplans H_1 et H_2 de E.

2 Soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. Montrer que :

$$\text{si } H_1, \cdots, H_k \text{ sont } k \text{ hyperplans de } E, \text{ alors : } \quad \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n - k$$

3 En déduire que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E n'est jamais nulle.

EXERCICE 4.2

Soit $n \geq 2$. Montrer que tout hyperplan H de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.
On pourra effectuer la disjonction de cas suivante :

- *une des matrices E_{ij}, avec $i \neq j$, n'est pas dans H,*
- *toutes les matrices E_{ij}, avec $i \neq j$, sont dans H.*

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 4.1

1 Effectuer une disjonction de cas, suivant que H_1 et H_2 soient distincts ou pas.

2 Faire une récurrence sur l'entier k.

EXERCICE 4.2

Un hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire φ non nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il s'agit ensuite de construire une matrice M inversible telle que $\varphi(M) = 0_{\mathbb{K}}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 4.1

1 Soit H_1 et H_2 deux hyperplans. On a la disjonction de cas suivante :

- *Premier cas :* $H_1 = H_2$.
  Il vient alors que $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 = \dim H_2 = n - 1$.
- *Deuxième cas :* $H_1 \neq H_2$.
  Il vient alors que $H_1 \subsetneq H_1 + H_2 \subset E$, d'où $n - 1 < \dim(H_1 + H_2) \leq n$, et donc $\dim(H_1 + H_2) = n$. La formule de Grassmann permet ensuite d'écrire :

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2$$

Ainsi, l'intersection de deux hyperplans de E est de dimension $n-1$ s'ils sont égaux, ou $n-2$ s'ils sont distincts.

2 Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$,

« l'intersection de k hyperplans de E est de dimension au moins $n - k$ »

- *Initialisation.* D'après la question précédente, l'intersection de deux hyperplans de E est bien de dimension au moins $n-2$.
- *Hérédité.* Soit $k \in [\![2, n-2]\!]$. Supposons que l'intersection de k hyperplans de E est de dimension au moins $n-k$. Soit $H_1, \cdots, H_k, H_{k+1}$ $k+1$ hyperplans de E. Montrons que $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}) \geq n-(k+1)$.
La formule de Grassmann permet d'écrire l'égalité suivante :
$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}) = \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) + \dim H_{k+1} - \dim((H_1 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1})$$
$$\text{Or } \begin{cases} \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n-k \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ \dim H_{k+1} = n-1 \text{ car } H_{k+1} \text{ est un hyperplan de } E, \\ \dim((H_1 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1}) \leq n \text{ car } (H_1 \cap \cdots \cap H_k) + H_{k+1} \\ \qquad\qquad \text{est un sous-espace de } E, \end{cases}$$
D'où la minoration suivante :
$$\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H_{k+1}) \geq (n-k) + (n-1) - n = n-(k+1)$$
Ce qui achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, l'intersection de k hyperplans de E est de dimension au moins $n-k$.

3 On en déduit alors que l'intersection de $n-1$ hyperplans de E est de dimension au moins $n-(n-1)=1$, donc n'est pas nulle.

EXERCICE 4.2

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe alors $\varphi \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$ non nulle telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Montrons que H contient une matrice inversible, c'est-à-dire qu'il existe $M \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(M) = 0_{\mathbb{K}}$.
Sachant que $n \geq 2$, on peut effectuer la disjonction de cas suivante :

- *Premier cas : une des matrices E_{ij}, avec $i \neq j$, n'est pas dans H i.e. vérifie $\varphi(E_{ij}) \neq 0_{\mathbb{K}}$.*
Posons $M = I_n + \alpha E_{ij}$ avec α un scalaire à déterminer.
La matrice M ainsi définie est inversible (car triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls) et vérifie par linéarité de φ :
$$\varphi(M) = \varphi(I_n) + \alpha\varphi(E_{ij})$$
Comme $\varphi(E_{ij}) \neq 0_{\mathbb{K}}$, il suffit de choisir $\alpha = -\dfrac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{ij})}$ pour que $\varphi(M) = 0_{\mathbb{K}}$.
- *Deuxième cas : toutes les matrices E_{ij}, avec $i \neq j$, sont dans H.*
Posons alors $M = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{n,n-1} \in H$.
La matrice M ainsi définie est inversible (car de rang n) et vérifie par linéarité de φ :
$$\varphi(M) = \underbrace{\varphi(E_{1n})}_{=\ 0_{\mathbb{K}}} + \underbrace{\varphi(E_{21})}_{=\ 0_{\mathbb{K}}} + \underbrace{\varphi(E_{32})}_{=\ 0_{\mathbb{K}}} + \cdots + \underbrace{\varphi(E_{n,n-1})}_{=\ 0_{\mathbb{K}}} = 0_{\mathbb{K}}$$

Ainsi, tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.