31 Déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle

Quand on ne sait pas !

Pour déterminer un développement en série entière en utilisant une équation différentielle, sont nécessaires les résultats du cours suivants (détaillés aux *fiches 28* et *30*) :

- l'unicité au problème de Cauchy,
- l'unicité du développement en série entière,
- les développements en série entière de référence.

Que faire ?

Soit f une fonction dont on souhaite déterminer le développement en série entière.

- **Méthode 1 :** si ON NE SAIT PAS au préalable que f est développable en série entière, alors :
  - on commence par justifier ou établir que la fonction f est solution d'un certain problème de Cauchy,
  - ensuite, à l'aide d'un raisonnement par analyse ET synthèse (cf *fiche 30*), on montre (en la déterminant) que ce même problème de Cauchy admet une unique solution g développable en série entière,
  - enfin, par unicité au problème de Cauchy, on peut conclure que $f = g$.
- **Méthode 2 :** si ON SAIT déjà que f est développable en série entière, alors :
  - on commence par justifier ou établir que la fonction f est solution d'un certain problème de Cauchy,
  - ensuite, à l'aide d'un raisonnement par analyse SANS synthèse (cf *fiche 30*), on cherche la fonction f sous la forme d'une série entière.

Conseils

- Il y a de nombreuses similitudes avec la *fiche 30* qu'il est conseillé de faire en amont. Les justifications théoriques et les techniques calculatoires utilisées sont identiques.

Exemple traité

On considère la fonction f définie sur $I =]-1, 1[$ par :

$$f(x) = (\text{Arcsin}\, x)^2$$

et on pose $g = f'$.

1 Montrer que g est solution sur I de l'équation différentielle (E) suivante :

$$(1 - x^2)y' - xy = 2$$

2 Déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0.

3 En déduire que g est développable en série entière, puis donner son développement.

4 Justifier que f est développable en série entière, puis donner son développement.

SOLUTION

1 Montrons que g est solution de (E) i.e. $\begin{cases} g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I & (i) \\ \forall x \in I,\ (1 - x^2)g'(x) - xg(x) = 2 & (ii) \end{cases}$

- La fonction Arcsin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, donc la fonction g l'est aussi par produit.
- Calculons pour tout $x \in I$:

$$\left| \begin{array}{lcl} g(x) & = & f'(x) \quad = \quad \dfrac{2\text{Arcsin}\, x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ g'(x) & = & \dfrac{2}{1 - x^2} + \dfrac{2x\text{Arcsin}\, x}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} \end{array} \right.$$

Un simple calcul permet alors de vérifier que : $\forall x \in I,\ (1-x^2)g'(x)-xg(x) = 2.$

Ainsi, la fonction g est bien solution de l'équation différentielle (E) sur $]-1, 1[$.

2 Cherchons les éventuelles solutions développables en série entière et s'annulant en 0 de l'équation différentielle (E).

- *Analyse.* Supposons que l'équation (E) admette une solution h développable en série entière sur un certain intervalle, c'est-à-dire qu'il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que la fonction h définie sur $]-R, R[$ par :

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

soit solution de l'équation différentielle (E).
Cherchons alors des conditions nécessaires sur la suite des coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Sachant que h est solution de (E) sur $]-R, R[$, on peut écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lrcl}
& \forall x \in]-R,R[, \quad (1-x^2)h'(x) - xh(x) & = & 2 \\
\iff & \forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} & = & 2 \\
\iff & \forall x \in]-R,R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n & = & 2 \\
\iff & \forall x \in]-R,R[, \quad \underbrace{a_1}_{n=0} + \underbrace{(2a_2 - a_0)x}_{n=1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \big[(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big] x^n & = & 2 \\
\iff & \forall x \in]-R,R[, \quad a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n+1)a_{n+1} - n a_{n-1}\big] x^n & = & 2
\end{array}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction constante égale à 2, on en déduit alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & = & 2 \\ \forall n \geq 1, \ (n+1)a_{n+1} - n a_{n-1} & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_1 & \underset{(\star)}{=} & 2 \\ \forall n \geq 1, \ a_{n+1} & \underset{(\star\star)}{=} & \dfrac{n}{n+1} \times a_{n-1} \end{array} \right.$$

Or la fonction h doit vérifier la condition initiale $h(0) = 0$ i.e. $a_0 = 0$, donc par applications itérées de $(\star\star)$, il vient que : $\forall p \geq 0, \ a_{2p} = 0$.
Toujours par applications itérées de $(\star\star)$, on en déduit que pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} \times a_{2p-1} = \frac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} \times a_{2p-3} \\ &= \cdots = \frac{2p(2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1)(2p-1) \times \cdots \times 3} \times a_1 \underset{(\star)}{=} \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

La formule établie ci-dessus reste encore vraie pour $p = 0$.
Si l'équation (E) admet une solution h développable en série entière sur un certain intervalle et s'annulant en 0, alors elle est unique et il existe $R \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in]-R,R[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- *Synthèse.* Vérifions que la fonction h précédemment trouvée est bien une solution de (E) développable en série entière et s'annulant en 0 :
  - la fonction h est développable en série entière, vérifie bien l'équation (E) et s'annule en 0 : on a tout fait pour !
  - l'application de la règle de d'Alembert permet de trouver que le rayon de convergence R vaut 1. En effet, calculons pour tout $x \neq 0$:

$$\left| \frac{\dfrac{2^{2n+3}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} x^{2n+3}}{\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}} \right| = \frac{2^2(n+1)^2}{(2n+3)(2n+2)} \times |x|^2 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |x|^2$$

- Si $|x| < 1$, alors $|x|^2 < 1$ et $\sum \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge absolument.
  Donc $R \geq 1$.
- Si $|x| > 1$, alors $|x|^2 > 1$ et $\sum \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ diverge grossièrement.
  Donc $R \leq 1$.

Ainsi, le rayon de convergence vaut bien $R = 1$, et il est strictement positif.

- *Conclusion.* L'équation différentielle (E) admet une unique solution h développable en série entière et s'annulant en 0, et elle est donnée par :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

3 Considérons le problème de Cauchy suivant sur I :

$$\begin{cases} y' - \dfrac{x}{1-x^2} y & = & \dfrac{2}{1-x^2} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

Les questions **1** et **2** permettent d'établir que les fonctions g et h sont toutes deux solutions de ce même problème de Cauchy.
Ainsi, par unicité au problème de Cauchy, il vient que $g = h$, ce qui permet de conclure que la fonction g est développable en série entière, et :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

4 Sachant que $f' = g$ et $f(0) = 0$, il vient par théorème d'intégration terme à terme que la fonction f est aussi développable en série entière, et pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} t^{2n+1}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n+1}\mathrm{d}t$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\text{Arcsin}\, x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

Exercices

EXERCICE 31.1

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \, \mathrm{d}t$$

1 **a.** Justifier que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer son développement en série entière.

2 **a.** Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) suivante :

$$y'(x) = -2xy(x) + 1$$

b. À l'aide de l'équation (E), déterminer le développement en série entière de F.

3 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

➲ Source : d'après écrit Banque PT 2017

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 31.1 **1** **b.** Reconnaître un produit de Cauchy.

3 Invoquer l'unicité du développement en série entière de F.

Solutions des exercices

EXERCICE 31.1

1 **a.** Sachant que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il vient que les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ le sont aussi.
Ensuite, par théorème d'intégration terme à terme, la fonction $x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en tant que produit de fonctions qui le sont.

b. Calculons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \right) \times \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} \right) && \text{intégration terme à terme} \\
&= x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{b_n} (x^2)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{n!(2n+1)}}_{a_n} (x^2)^n \right) \\
&= x \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{k!(2k+1)}}_{a_k} \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}}_{b_{n-k}} \right) (x^2)^n && \text{produit de Cauchy} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) x^{2n+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi, le développement en série entière de F est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!} \binom{n}{k} \right) x^{2n+1}$$

2 **a.** La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} \mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{e}^{x^2} = -2xF(x) + 1$$

Ainsi, la fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

b. Comme F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Sachant que F est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{llrcl} & \forall x \in \mathbb{R}, & F'(x) & = & -2xF(x)+1 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} & = & -2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 1 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n & = & -2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n + 1 \\ \iff & \forall x \in \mathbb{R}, & \underbrace{a_1}_{n=0} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n & = & 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-2a_{n-1})x^n \end{array}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 & = & 1 \\ \forall n \geq 1,\ (n+1)a_{n+1} & = & -2a_{n-1} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_1 & \underset{(\star)}{=} & 1 \\ \forall n \geq 2,\ a_n & \underset{(\star\star)}{=} & -\dfrac{2}{n} \times a_{n-2} \end{array}\right.$$

Or la fonction F vérifie la condition initiale $F(0) = 0$ i.e. $a_0 = 0$, donc par applications itérées de $(\star\star)$, il vient que : $\forall p \geq 0,\ a_{2p} = 0$.
Toujours par applications itérées de $(\star\star)$, on en déduit que pour tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{(-2)^1}{2p+1} \times a_{2p-1} = \frac{(-2)^2}{(2p+1)(2p-1)} \times a_{2p-3} \\ &= \cdots = \frac{(-2)^p}{(2p+1)(2p-1)\times\cdots\times 3} \times a_1 \underset{(\star)}{=} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

La formule établie ci-dessus reste encore vraie pour $p = 0$.
Ainsi, le développement en série entière de F est donné par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

3 Par unicité du développement en série entière de la fonction F, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(2k+1)n!} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n 4^n n!}{(2n+1)!}$$

Sachant que $(-1)^{-k} = (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n}{2n+1} \times \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$