29 Montrer qu'une fonction est développable en série entière et calculer son développement

Quand on ne sait pas !

- **(Fonction développable en série entière au voisinage de 0)**
Une fonction f est dite DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE AU VOISINAGE DE 0 (en abrégé DSE) s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > r$ tels que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

- **(« DSE implique $\mathscr{C}^\infty$ »)**

$$\text{SI} \left[\begin{array}{c} f \text{ est DSE} \\ \text{au voisinage de } 0 \end{array} \right], \text{ ALORS : } \left[\begin{array}{c} f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ et coïncide avec sa} \\ \text{série de Taylor en } 0 \text{ au voisinage de } 0 \\ \text{i.e. } f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \text{ au voisinage de } 0 \end{array} \right]$$

- **(Unicité du développement en série entière)** Soit $r > 0$, et $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence strictement supérieurs à r.

$$\text{SI} \left[\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right], \text{ ALORS : } \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n \right]$$

- Les développements en série entière de référence sont à consulter à la *fiche 28*.

Que faire ?

- Pour justifier qu'une fonction f est développable en série entière, on peut procéder d'une des manières suivantes :
  - on dit que f s'obtient par opérations usuelles (somme, produit, dérivation, intégration)

de fonctions développables en série entière,

- on calcule directement son développement en série entière,
- on montre que la série de Taylor de f converge simplement vers f avec l'inégalité de Taylor-Lagrange.

- Pour calculer le développement en série entière d'une fonction f, on peut suivre une ou plusieurs des méthodes suivantes :
  - on utilise les développements usuels et les opérations sur les séries entières (somme, produit, dérivation, intégration),
  - si l'expression de f est une fraction rationnelle qui n'a pas 0 pour pôle, alors on la décompose en éléments simples, puis on développe chaque terme en série entière,
  - si f est une fonction définie par une intégrale ou une série, on développe souvent la fonction à l'intérieur de l'intégrale ou de la série en série entière, puis on intervertit les symboles,
  - on utilise la technique de l'équation différentielle (cf *fiches 30 et 31*),
  - on détermine le développement de Taylor de f.

  La rubrique *Exemple traité* illustre et commente certaines de ces méthodes.

Conseils

- Il est important de savoir qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 n'est pas nécessairement développable en série entière au voisinage de 0.

  EXEMPLE 1 On peut montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ prolongée par 0 en 0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, mais que f n'est pas développable en série entière car elle ne coïncide pas avec son polynôme de Taylor en 0 qui est nul.

- Selon la technique employée, on peut aboutir à plusieurs résultats pour le développement en série d'une même fonction, résultats qui sont en fait tous identiques par unicité du développement en série entière. Ce procédé permet ainsi d'établir des formules par identification et est illustré dans l'exercice 1.

Exemple traité

Déterminer le développement en série entière des fonctions définies par les expressions suivantes :

1 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$ **2** $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$ **3** $h(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$

SOLUTION

1 Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et sin sont développables en série entière, donc leur produit f

l'est aussi, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{-x}\sin x = \Im\mathrm{m}[\mathrm{e}^{(-1+i)x}] = \Im\mathrm{m}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1+i)^n}{n!}x^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Im\mathrm{m}[(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{4}}]}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)x^n \end{aligned}$$

2 En tant que fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle, g est développable en série entière et pour tout $x \in]-R, R[$, où R est le minimum des modules des pôles de g :

$$g(x) = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\frac{x}{3}} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$$

Ainsi, $R = 2$ et pour tout $x \in]-2, 2[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$.

3 Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{4n+2}$$

Par théorème d'intégration terme à terme, il vient alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{4n+2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^x t^{4n+2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(4n+3)}x^{4n+3}$$

Exercices

EXERCICE 29.1

Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\operatorname{ch} x)\cos x$$

1 Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0.

2 À l'aide de l'exponentielle imaginaire, calculer le développement en série entière de f.

3 À l'aide d'un produit de Cauchy, calculer le développement en série entière de f.

4 En déduire la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+2}{2k} = 0$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 29.1 **2** S'inspirer du **1** de la rubrique *Exemple traité* pour débuter. Utiliser ensuite la technique de factorisation par angle moitié pour factoriser une somme d'exponentielles imaginaires :

$$\begin{aligned}\forall(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2,\quad e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right)\\ &= 2e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\end{aligned}$$

4 Utiliser l'unicité du développement en série entière, puis $n=2p+1$.

Solutions des exercices

EXERCICE 29.1

1 Les fonctions ch et cos sont développables en série entière au voisinage de 0, donc leur produit f est aussi développable en série entière au voisinage de 0.

2 On calcule pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \Re\mathrm{e}[(\operatorname{ch}x)e^{ix}] = \Re\mathrm{e}\left[\frac{e^x+e^{-x}}{2}\times e^{ix}\right] = \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left[e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}\right]\\
&= \frac{1}{2}\Re\mathrm{e}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1+i)^n}{n!}x^n\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Re\mathrm{e}[(1+i)^n+(-1+i)^n]}{n!}x^n\\
&\qquad 1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\quad -1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\Re\mathrm{e}[(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}}+(\sqrt{2})^n e^{i\frac{3n\pi}{4}}]}{n!}x^n\\
&\qquad \text{« on factorise par l'angle moitié »}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n\Re\mathrm{e}[e^{i\frac{n\pi}{2}}(e^{-i\frac{n\pi}{4}}+e^{i\frac{n\pi}{4}})]}{n!}x^n\\
&\qquad \text{formule d'Euler}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\Re\mathrm{e}(e^{i\frac{n\pi}{2}})x^n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)x^n$.

3 On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\operatorname{ch} x)\cos x \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right) && \text{produit de Cauchy} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \times \frac{(-1)^{n-k}}{(2(n-k))!}\right)x^{2n} && \frac{1}{(2k)!(2n-2k)!} = \frac{1}{(2n)!}\binom{2n}{2k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n)!}\right)x^{2n} && \text{inversion d'indice } j = n-k \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2(n-j)}(-1)^j\right)x^{2n} && \text{formule de symétrie} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j}(-1)^j\right)x^{2n}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n)!}\sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{2j}(-1)^j\right)x^{2n}$.

4 Par unicité du développement en série entière de f, il vient alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

En particulier, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n = 2p+1$, on trouve :

$$\frac{1}{(4p+2)!}\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+2}{2k} = \frac{(\sqrt{2})^{2p+1}}{(2p+1)!}\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{4}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{2}\right)}_{=0}$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p+1}(-1)^k\binom{4p+2}{2k} = 0$.