Ariane Germa et Céline Michel

Banque PT Maths B 2020 : un corrigé

Les quatre parties de ce sujet sont indépendantes.

Notations.

Dans tout le sujet, l'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. L'enoncé ne le précisait pas, mais $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est manifestement la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
$E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

$$\forall f \in E, \varphi(f) = \nabla f.$$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^3$, on définit la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ par

$$\forall f \in E, \varphi_{\vec{u}}(f) = \vec{u}.\varphi(f) \text{ (produit scalaire de } \vec{u} \text{ et } \varphi(f)).$$

Partie I

1. Soit $f \in E$. Notons $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ ses dérivées partielles respectives par rapport aux première, deuxième et troisième place.
   f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ y sont continues.
   φ est l'application $f \mapsto \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$. Elle est donc bien à valeurs dans F.
   Par linéarité de la dérivation sur l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, les applications $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont linéaires.
   Ainsi, $\forall f,g \in E, \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \left(\dfrac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x}, \dfrac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial y}, \dfrac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial z}\right)$.
   $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) + \mu \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, \dfrac{\partial g}{\partial z}\right) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$.
   Donc φ est bien une application linéaire à valeurs dans F.
2. Soit $f \in E$, $\varphi(f) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$ sont des fonctions nulles sur $\mathbb{R}$, donc f ne dépend ni de x, ni de y, ni de z.
   f est donc constante sur $\mathbb{R}^3$.
   Réciproquement, si f est constante sur $\mathbb{R}^3$, sont gradient est nul.
   On en déduit que le noyau de φ est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas réduit à la fonction nulle, donc φ est non injectif.
3. (a) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, ouvert de $\mathbb{R}^3$. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ la dérivée par rapport à la i^e place.
   Alors $\forall i,j \in \{1,2,3\}, \forall a \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

   (b) Soit $V : (x,y,z) \mapsto (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ appartenant à l'image de φ.
   $\exists f \in E$, telle que $V = \varphi(f)$. On a alors $P = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $R = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.
   V étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, P,Q et R le sont aussi. Les dérivées partielles de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.

On déduit du théorème de Schwarz :
$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$
$\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$
$\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$.

4. On pose, pour tout (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = (1 + y^2 + y^2z^2, xy(1 + z^2), xy^2z)$.
   (a) V est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$, ses composantes étant des fonctions polynômes en x, y, z.
   Si par l'absurde, il existait une fonction f telle que $\nabla f = V$, on aurait $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.
   Or $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = 2y(1 + z^2)$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) = y(1 + z^2)$, donc $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, ce qui est contradictoire.
   Donc il n'existe pas de fonction f telle que $\nabla f = V$.
   On en déduit que la fonction φ n'est pas surjective.
   (b) La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2)$ est une primitive de $x \mapsto x(1 + y^2 + y^2z^2)$.
   On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2)$. Les fonctions coordonnées de h sont des polynômes en x, y et z donc sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
   $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = x(1 + y^2 + y^2z^2)$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = x^2y(1 + z^2)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = x^2y^2z$.
   On a donc bien $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla h(x, y, z) = xV(x, y, z)$.
   Soit $f \in E$.f vérifie « $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$ »si et seulement si $\varphi(f) = \varphi(h)$, c'est-à-dire, par linéarité de φ, $f - h \in \ker \varphi$.
   D'après la question 2., l'ensemble des fonctions f telles que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \nabla f(x, y, z) = xV(x, y, z)$ est
   $\left\{ \begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2}{2}(1 + y^2 + y^2z^2) + k \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$.

Partie II

Soient f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 les fonctions de E définies par :

$$\begin{array}{lll} \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, & f_1(x, y, z) = \cos(x), & f_2(x, y, z) = \sin(x), \\ & f_3(x, y, z) = y\cos(x), & f_4(x, y, z) = y\sin(x), \\ & f_5(x, y, z) = z\cos(x), & f_6(x, y, z) = z\sin(x). \end{array}$$

On considère G =Vect$\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$. Dans cette partie, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et ϕ_1 est la restriction de la fonction $\varphi_{\vec{u}}$ à G.

1. $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$ est une famille génératrice de G.
   Donc pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer que c'est une famille libre.
   Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_6) \in \mathbb{R}^6$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i = 0$. Ainsi, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut écrire :

$$\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 y \cos(x) + \lambda_4 y \sin(x) + \lambda_5 z \cos(x) + \lambda_6 z \sin(x).$$

   Pour $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on obtient : $\lambda_1 = 0$.
   Pour $(x, y, z) = (\pi/2, 0, 0)$, on obtient : $\lambda_2 = 0$.
   Ainsi : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda_3 y \cos(x) + \lambda_4 y \sin(x) + \lambda_5 z \cos(x) + \lambda_6 z \sin(x)$.
   Pour $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, on obtient : $\lambda_3 = 0$.
   Pour $(x, y, z) = (\pi/2, 1, 0)$, on obtient : $\lambda_4 = 0$.
   Pour $(x, y, z) = (0, 0, 1)$, on obtient : $\lambda_5 = 0$.
   Pour $(x, y, z) = (\pi/2, 0, 1)$, on obtient : $\lambda_6 = 0$.

Ainsi : $\sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \cdots, \lambda_6) = (0, \cdots, 0)$.

$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{B} \text{ est libre, donc c'est une base de } G.}$

2. Montrons que ϕ_1 est un endomorphisme de G.
   - La linéarité de ϕ_1 découle de celle du gradient et de la bilinéarité du produit scalaire. Plus précisément, si $(f, g) \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\phi_1(f + \lambda g) &= \phi_{\overrightarrow{u}}(f + \lambda g) = \overrightarrow{u} \cdot \nabla(f + \lambda g) \\
&= \overrightarrow{u} \cdot (\nabla(f) + \lambda \nabla(g)) \text{ car le gradient est linéaire} \\
&= \overrightarrow{u} \cdot \nabla(f) + \lambda \overrightarrow{u} \nabla(g) \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\
&= \phi_{\overrightarrow{u}}(f) + \lambda \phi_{\overrightarrow{u}}(g) \\
&\boxed{\phi_1(f + \lambda g) = \phi_1(f) + \lambda \phi_1(g).}
\end{aligned}$$

   - Comme G =Vect$\{\mathcal{B}\}$, pour justifier que $\phi_1 \in \mathcal{L}(G)$, il suffit que montrer que : $\forall i \in [\![1\,;\,6]\!]$, $\phi_1(f_i) \in G$.
     Remarquons que : $\forall f \in G$, $\phi_1(f) = \overrightarrow{u} \cdot \nabla(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\phi_1(f_1) = -f_2\,; \quad \phi_1(f_2) = f_1 \\
\phi_1(f_3) = f_1 - f_4\,; \quad \phi_1(f_4) = f_2 + f_3 \\
\phi_1(f_5) = f_1 - f_6\,; \quad \phi_1(f_6) = f_2 + f_5
\end{aligned}$$

$\boxed{\phi_1 \text{ est linéaire et } \phi_1(\mathcal{B}) \subset G \text{ donc } \phi_1 \in \mathcal{L}(G).}$

3. (a) D'après les calculs de la questions précédente, la matrice A de ϕ_1 dans la base $\mathcal{B}$ vaut :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour calculer A^2 on peut soit faire soigneusement le calcul matriciel, soit calculer $\phi_1^2(f_i)$ pour $i = 1, ..6$.
$\phi_1^2(f_1) = \phi_1(-f_2) = -f_1$
$\phi_1^2(f_2) = \phi_1(f_1) = -f_2$
$\phi_1^2(f_3) = \phi_1(f_1 - f_4) = -f_2 - (f_2 + f_3) = -2f_2 - f_3$
$\phi_1^2(f_4) = \phi_1(f_2 + f_3) = f_1 + f_1 - f_4 = 2f_1 - f_4$
$\phi_1^2(f_5) = \phi_1(f_1 - f_6) = -f_2 - (f_2 + f_5) = -2f_2 - f_5$
$\phi_1^2(f_6) = \phi_1(f_2 + f_5) = 2f_1 - f_6$

On en déduit : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) La matrice A^2 est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi Sp$(A^2) = \{-1\}$.
Raisonnons par l'absurde. Si A^2 était diagonalisable, il existerait donc une matrice P inversible telle que $P^{-1}A^2P = D$ où D est une matrice diagonale contenant les valeurs propres sur la diagonale ; ainsi on aurait $P^{-1}A^2P = (-1)I_6$. Donc on pourrait écrire $A^2 = P(-1)I_6P^{-1} = -I_6$ et donc A^2 serait diagonale, ce qui n'est pas le cas. $\boxed{\text{Ainsi } A^2 \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$
Si A était diagonalisable, il existerait une matrice Q inversible et une matrice Δ diagonale telles que $Q^{-1}AQ = \Delta$ et l'on pourrait écrire $A^2 = Q\Delta Q^{-1}Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta^2Q^{-1}$ avec Δ^2 digonale. Donc A^2 serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas. $\boxed{\text{Ainsi } A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathbb{R}.}$

(c) Soit f un vecteur propre de ϕ_1. Comme la seule valeur propre de ϕ_1 est -1, f vérifie : $\phi_1^2(f) = -f$.

$$\begin{aligned}
\text{Or } \phi_1^2(f) &= \phi_1\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

Or f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc d'après le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$\text{Donc : } \phi_1^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right).$$

Ainsi l'équation aux dérivées partielles vérifiée par les vecteurs propres de ϕ_1 est :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right) + f = 0.}$$

(d) Chercher les solutions dans G de « $\phi_1^2(f) + f = 0$ »revient à chercher les vecteurs propres de A^2, c'est à dire les éléments de $\operatorname{Ker}(A^2 + I_6)$. Posons $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}$. Alors

$$\begin{aligned}
U \in \operatorname{Ker}(A^2 + I_6) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff d + f = 0 \text{ et } c + e = 0 \\
&\iff U = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(A^2 + I_6) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Cette famille est libre de manière évidente, donc c'est une base de l'espace propre. En revenant à l'application linéaire ϕ_1^2 associée à la matrice A^2 dans la base $\mathcal{B}$, on obtient : $\boxed{\phi_1^2(f) + f = 0 \iff f \in \operatorname{Vect}\{f_1; f_2; f_3 - f_5; f_4 - f_6\}.}$

Partie III

Dans cette partie, $\vec{u}$ désigne toujours le vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.
Soit f une fonction non nulle de E. On note S la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$. On suppose que les fonctions f choisies dans la suite sont telles que la surface S est non vide et qu'au moins un point de S est régulier.

1. (a) On dit que M_0 est régulier lorsque $\nabla(f)(M_0) \neq 0$.
Lorsque M_0 est régulier, $\nabla(f)(M_0)$ est un vecteur normal au plan tangent, que l'on notera π_{M_0}. Ainsi

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in \pi_{M_0} &\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \nabla(f)(M_0) \iff \overrightarrow{M_0M} \cdot \nabla(f)(M_0) = 0 \\ &\iff (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) + (z-z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 0. \end{aligned}$$

ce qui est une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0.

(b) On suppose que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 2$ et M_0 est le point de coordonnées $(1,-1,1)$.
Alors $\nabla(f)(x,y,z) = (2x, 4y, -2z)$ et donc $\nabla(f)(M_0) = (2,-4,-2)$; M_0 est régulier.
Une équation cartésienne du plan tangent à S en M_0 est $2(x-1) - 4(y+1) - 2(z-1) = 0$ c'est à dire $\boxed{2x - 4y - 2z - 4 = 0.}$
Enfin $\nabla(f)(M_0) \cdot \overrightarrow{u} = -4 \neq 0$ donc cette fonction f ne répond pas au problème.

2. (a) On suppose que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = F_1(x,y,z) = (y-z)^2 - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
Alors $\nabla(f)(x,y,z) = (0, 2(y-z), -2(y-z)) = 2(y-z) \cdot (0,1,-1)$.
Tous les points $M_0(x_0,y_0,z_0)$ tels que $y_0 \neq z_0$ sont donc réguliers. En chacun de ces points, la normale au plan tangent est de plus dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(0,1,-1)$. Ce vecteur étant orthogonal à $\overrightarrow{u}$, $\boxed{\text{la fonction } f = F_1 \text{ répond au problème.}}$

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in S &\iff (y-z)^2 = \alpha \iff |y-z| = \alpha \text{ avec } \alpha > 0 \\ &\iff y - z = \sqrt{\alpha} \text{ ou bien } y - z = -\sqrt{\alpha} \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on peut dire que $\sqrt{\alpha} \neq -\sqrt{\alpha}$ et donc

$$\boxed{S \text{ est la réunion des deux plans (distincts) d'équations respectives } y - z = \sqrt{\alpha} \text{ et } y - z = -\sqrt{\alpha}.}$$

N.B. : ce sont des plans parallèles.

(b) Soit g une fonction non nulle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit f définie par : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = g(x-y, x-z)$.
f est de classe $\mathcal{C}^1$ (composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$) et de plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \partial_1 g(x-y, x-z) + \partial_2 g(x-y, x-z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -\partial_1 g(x-y, x-z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= -\partial_2 g(x-y, x-z) \end{aligned}$$

Donc $\nabla(f)(x,y,z) \cdot (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = 0$.
Ainsi, en tout point régulier M_0 de S , le vecteur $\nabla(f)(M_0)$ est normal au plan tangent et est orthogonal à $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. $\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ répond au problème.}}$

(c) Si on pose $g(u,v) = (v-u)^2 - \alpha$, alors $g(x-y, x-z) = (x-z-(x-y))^2 - \alpha = (y-z)^2 - \alpha = F_1(x,y,z)$.
$\boxed{\text{La fonction } F_1 \text{ est bien de la forme précédente.}}$

3. Soit S la surface réglée engendrée par les droites dirigées par le vecteur $\vec{u}$ et passant par un point du cercle Γ, inclus dans le plan d'équation $z = 0$, de centre O et de rayon 1.

(a) S est par définition une surface réglée. Or on sait qu'en tout point régulier d'une surface réglée, la génératrice passant par ce point est incluse dans le plan tangent.
Ainsi, si M_0 est un point de S, la droite passant par M_0, dirigée par $\overrightarrow{u}$ est dans le plan tangent. Donc la normale au plan tangent en M_0 est orthogonale à $\overrightarrow{u}$.
Il aurait été plus correct de dire que : tout vecteur normal au plan tangent est orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

(b) Soit M un point de l'espace de coordonnée $(x,y,z) =$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ est dans Γ si et seulement si $z_0 = 0$ et $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
M \in S &\iff \exists M_0 \in \Gamma,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \text{tels que } \overrightarrow{M_0M} = \lambda \overrightarrow{u} \\
&\iff \exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 \\ z_0 = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{ll} \lambda = z & \textit{ceci est toujours possible...} \\ x_0 = x - \lambda & \\ y_0 = y - \lambda & \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 & \end{array} \right. \\
&\iff \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tels que } \left\{ \begin{array}{ll} x_0 = x - z & \textit{ceci est toujours possible...} \\ y_0 = y - z & \textit{ceci est toujours possible...} \\ x_0^2 + y_0^2 = 1 & \end{array} \right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{M \in S \iff (x - z)^2 + (y - z)^2 = 1}$$

(c) $M(x, y, z) \in S \cap \Pi_a \iff z = a$ et $(x - a)^2 + (y - a)^2 = 1$.

$\boxed{\text{Ainsi } S \cap \Pi_a \text{ est le cercle de centre } \Omega_a = (a, a, a) \text{ et de rayon 1 dans le plan } \Pi_a.}$

(d) La réponse à la question précédente permet d'affirmer que S est l'union de cercles dont les centres sont situés sur al droite passant par O et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Pour affirmer que S est une surface de révolution il faudrait avoir montré que S est l'union de cercles ayant tous le même axe (l'axe de révolution de la surface).

Or l'axe du cercle $\Pi_a \cap S$ est orthogonal à Π_a, donc c'est la droite Δ_a passant par $\Omega_a = (a, a, a)$ et dirigée par $\overrightarrow{k}$. C'est aussi la droite passant par le point de coordonnée $(a, a, 0)$ et dirigée par $\overrightarrow{k}$.

Ces droites Δ_a sont toutes distinctes, donc la réponse à la question précédente ne permet pas d'affirmer que S est une surface de révolution.

(e) Soit $\Gamma_1 = S \cap \Pi$ où Π est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

On considère les vecteurs $\vec{e_3} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{k} - \vec{i})$, et $\vec{e_2} = \vec{e_3} \wedge \vec{e_1}$. On note P la matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

i. Les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_3}$ sont de norme 1 et de plus $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_3}$.
Comme $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3} \wedge \overrightarrow{e_1}$, on en déduit que $(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$; puis, par permutation circulaire : $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est aussi une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
P étant la matrice de passage d'une base orthonormée directe à une autre, $\boxed{P \text{ une matrice de rotation.}}$

ii. Un calcul rapide donne $\overrightarrow{e_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ et donc $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Soit M un point de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\ \overrightarrow{k})$ et de coordonnées (X, Y, Z) dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et P étant orthogonale : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ainsi $Z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$ donc la condition « $x + y + z = 0$ »s'écrit « $Z = 0$ ».

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
(x - z)^2 + (y - z)^2 &= \left(\frac{-X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 + \left(\frac{-2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} - \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \right) \right)^2 \\
&= \left(-\sqrt{2}X \right)^2 + \left(\frac{-X}{\sqrt{2}} - \frac{3Y}{\sqrt{6}} \right)^2 \\
&= 2X^2 + X^2/2 + 3Y^2/2 + \sqrt{3}XY
\end{aligned}$$

Ainsi : $(x-z)^2+(y-z)^2=1 \iff 2X^2+X^2/2+3Y^2/2+\sqrt{3}XY=1 \iff 5X^2+3Y^2+2\sqrt{3}XY=2.$

$$\boxed{\text{Ainsi : } M\in S\cap\Pi \iff \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ (x-z)^2+(y-z)^2=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} Z=0 \\ 5X^2+3Y^2+2\sqrt{3}XY=2 \end{array}\right.}$$

iii. On reconnaît l'équation d'une conique dans le plan d'équation $Z=0$.

On pose $U=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$.

L'équation « $5X^2+3Y^2+2\sqrt{3}XY=2$ »s'écrit alors ${}^tUMU=2$ avec $M=\begin{pmatrix}5 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3\end{pmatrix}$.

$\mathrm{Det}(M)=12>0$ donc c'est une conique de type ellipse.
$\chi_M(x)=(x-5)(x-3)-3=x^2-8x+12$ donc les valeurs propres de M sont (après calcul au brouillon) : $\lambda_1=6$ et $\lambda_2=2$. Les deux valeurs propres sont simples, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1, et ils sont orthogonaux, car M est symétrique réelle.

$M-6I_2=\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -3\end{pmatrix}$. On remarque que $\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(M-6I_2)$ ainsi que $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}$.

Comme les sous-espaces propres sont orthogonaux, l'espace propre associé à la valeur propre 2 est engendré par $\begin{pmatrix}-1/2\\ \sqrt{3}/2\end{pmatrix}$.

Ainsi on peut choisir $P=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ 1/2 & \sqrt{32}\end{pmatrix}$ pour diagonaliser M : $P^{-1}MP={}^tPMP=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ (car P est orthogonale).

On travaille dans le plan d'équation $Z=0$ dont $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base.

Les vecteurs $\overrightarrow{I}=(\sqrt{3}/2)\overrightarrow{e_1}+(1/2)\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{J}=(-1/2)\overrightarrow{e_1}+(\sqrt{3}/2)\overrightarrow{e_2}$ forment une base de ce plan.

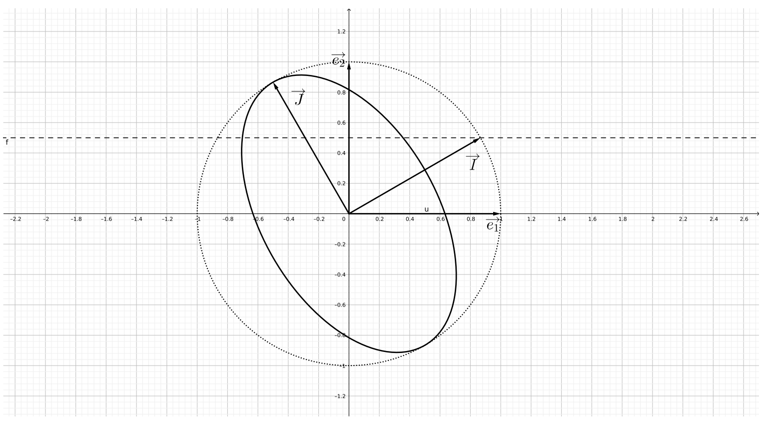
Si on nomme (X',Y') les coordonnées de M dans le repère $(O,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$, alors $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$, ce que l'on peut aussi écrire $U=PU'$ en notant $U=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ et $U'=\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$..

L'équation de l'ellipse se transforme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
{}^tUMU=2 &\iff {}^t(PU')M(PU')=2\\
&\iff {}^tU'\,{}^tPMPU'=2\\
&\iff (X'\,Y')\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}=2\\
&\iff 6X'^2+2Y'^2=2 \iff 3X'^2+Y'^2=1
\end{aligned}$$

Sous cette forme le tracé de l'ellipse dans le nouveau repère ne pose aucun problème.

iv. Ellipse de centre O, d'axes dirigés par les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ introduits précédemment.



Partie IV

Dans cette partie, $\vec{u}$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^3$ égal à $2\vec{i}+\vec{j}$.

1. Soit P un plan de l'espace. Il admet une équation de la forme $ax+by+cz=d$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. Le vecteur $\vec{n}$ de cordonnées (a,b,c) en est donc un vecteur normal.

   Il dirige toutes les normales au plan P. Toute normale au plan P est « orthogonale au vecteur »$\vec{u}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{n}=0$, ce qui équivaut à $2a+b=0$.

   Les plans solutions admettent donc une équation de la forme $a(x-2y)+cz=d$, avec $(a,c)\neq(0,0)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=g(x,y)-z$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et S est la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$.

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $z=g(x,y)$. $\nabla(f)(x,y,z)$ est le vecteur de coordonnées dans la base canonique $\left(\dfrac{\partial g}{\partial x},\dfrac{\partial g}{\partial y},-1\right)$.

   Il est donc non nul et tous les points de S sont réguliers.

3. Soit h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, g(x,y)=h(x-2y)$.

   On définit f de manière analogue à la question précédente.

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $z=g(x,y)$. $\nabla(f)(x,y,z)$ est le vecteur de coordonnées dans la base canonique $(h'(x-2y),-2h'(x-2y),-1)$.

   Ce vecteur est un vecteur directeur de la normale en $M(x,y,z)$ à S. $\nabla(f)(x,y,z).\vec{u}=0$, d'où l'orthogonalité de la direction de la normale en S à M et de Vect($\vec{u}$).

   g est bien solution du problème.

4. (a) On suppose que g répond au problème et on définit f comme précédemment.

   Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $z=g(x,y)$. On a alors $\nabla(f)(x,y,z).\vec{u}=0$, soit $2\dfrac{\partial g}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial y}=0$.

   Ainsi, si une fonction g répond au problème alors g est solution bien de l'équation aux dérivées partielles :

   $$(Eq_1): 2\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0.$$

   (b) On considère la fonction δ définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ par :

   $$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \delta(x,y)=(x_1,y_1)=(x-2y,y).$$

   δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

   (on a bien $\forall(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2,\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\delta(\lambda(x,y)+\mu(x',y'))=\lambda\delta(x,y)+\mu\delta(x',y')$).

   Elle est bijective si et seulement si son déterminant est non nul. Son déterminant vaut $\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

   δ est donc bien une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et, δ étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, sa bijection réciproque est aussi un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

   δ et δ^{-1} sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$, leur fonctions coordonnées sont des polynômes en x et en y, elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

   (c) Soit g une solution au problème posé. On définit la fonction g_1 sur $\mathbb{R}^2$ par $g_1=g\circ\delta^{-1}$. Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et en composant à droite par δ, on obtient bien $g=g_1\circ\delta$.

   (d) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. De la règle de la chaîne, on déduit :

   $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=<\overrightarrow{\nabla g_1}(\delta(x,y))|\overrightarrow{\dfrac{\partial\delta}{\partial x}(x,y)}>=\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\delta(x,y))$.

   De même $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-2\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\delta(x,y))+\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\delta(x,y))$.

   (e) g est solution de $(Eq_1)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, 2\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\delta(x,y))-2\dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\delta(x,y))+\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\delta(x,y))=0$

   g est solution de $(Eq_1)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(\delta(x,y))=0$.

   δ réalisant une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, g est solution de $(Eq_1)\Leftrightarrow\forall(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2, \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}(x_1,y_1)=0$.

   Ainsi, g est solution de (Eq_1) si et seulement si g_1 est solution l'équation aux dérivées partielles (Eq_2) : $\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1}=0$.

(f) g_1 est solution de (Eq_2) : $\dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} = 0$ si et seulement si $\exists h$, fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, g_1(x_1, y_1) = h(x_1)$.

(g) g est solution de (Eq_1) si et seulement si il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2, g \circ \delta^{-1}(x_1, y_1) = h(x_1)$

En composant par δ, bijective, on obtient, g est solution de (Eq_1) si et seulement si il existe h de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = h(x - 2y)$

5. Dans cette question, g est la fonction définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = (x - 2y)^3 - 3(x^2 + 4y^2 - 4xy) + 2.$$

(a) Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) = h(x - 2y)$. Donc g est bien solution de (Eq_1) et répond donc au problème proposé dans cette partie.

(b) $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow z = h(x - 2y) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, x - 2y = t$ et $z = h(t)$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. $x - 2y = t$ et $z = h(t)$ sont des équations cartésiennes de deux plan non parallèles.

Ainsi, l'ensemble $D_t \left\{ \begin{array}{l} x - 2y = t \\ z = h(t) \end{array} \right.$ est une droite de vecteur directeur $\vec{k} \wedge (\vec{i} - 2\vec{j}) = \vec{u}$.

$S = \displaystyle\bigcup_{t \in \mathbb{R}} D_t$ est donc une surface réglée et les génératrices obtenues sont toutes dirigées par $\vec{u}$, donc parallèles.

Réciproquement, cherchons les droites contenues dans la surface S.

Soit D une droite de l'espace.$\exists a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $D : \left\{ \begin{array}{l} x = at + \alpha \\ y = bt + \beta \\ z = ct + \gamma \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}$.

D est incluse dans S si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, ct + \gamma = (a - 2b)^3 t^3 + Q(t)$, avec Q polynôme de degré inférieur où égal à 2.

Or si deux polynômes sont égaux, ils ont les mêmes coefficients, donc $a - 2b = 0$

On en déduit que D est incluse dans S si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, ct + \gamma = (\alpha - 2\beta)^3 - 3(\alpha - 2\beta)^2 + 2$.

Donc $c = 0$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

Toutes les droites incluses dans S sont donc parallèles.

(c) Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le plan tangent à S à M admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(h'(x - 2y), -2h'(x - 2y), -1)$, il est horizontal si et seulement si $h'(x - 2y) = 0$.

Or $\forall t \in \mathbb{R}, h'(t) = 3(t^2 - 2t) = 3t(t - 2)$.

Donc le plan tangent à S en $M(x, y, g(x, y))$ est horizontal si et seulement $x = 2y$ ou $x - 2y = 2$.

Les points M de S en lesquels le plan tangent à S est horizontal ont donc pour coordonnées $(2a, a, 2), a \in \mathbb{R}$ ou $(2a + 2, a, -2)$, $a \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $a \in \mathbb{R}$ et M le point de S de coordonnées $(2a + 2, a, -2)$. D'après la question précédente, le plan tangent à S en M est horizontal.

Considérons la fonction h définie à la question précédente : h' est strictement positive sur $]-\infty, 0[$ et $]2, +\infty[$, strictement négative sur $]0, 2[$.

Ainsi, -2 est le minimum de h sur $]0, +\infty[$. La fonction $(x, y) \mapsto x - 2y$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle vaut 2 en $(2a + 2, a)$.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \delta_a > 0, \|(x, y) - (2 + 2a, a)\| < \delta_a \Rightarrow x - 2y > 0$.

On en déduit que si $\|(x, y) - (2 + 2a, a)\| < \delta_a$, alors $g(x, y) \geqslant -2$, ce qui signifie que le point de coordonnées $(x, y, g(x, y))$ est au dessus du plan d'équation $z = -2$.

La surface S est donc au-dessus du plan tangent à S en M au voisinage de M.