28 Calculer la somme d'une série entière

Quand on ne sait pas !

Dans un premier temps, on considère des séries entières $\sum a_n x^n$ à coefficients quelconques (réels ou complexes) et de la variable x RÉELLE.

- **(Sommes des séries entières réelles de référence)**

Fonction	*Développement en série entière*	*Intervalle de validité*
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{ch} x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \operatorname{sh} x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{1-x}$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$]-1,1[$
$x \mapsto \arctan x$	$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$]-1,1[$
$x \mapsto \ln(1+x)$	$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$]-1,1[$
$x \mapsto (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$	$]-1,1[$

- **(Dérivation et intégration terme à terme)**
  La somme d'une série entière réelle est dérivable et intégrable terme à terme sur son intervalle ouvert de convergence.

On considère désormais des séries entières $\sum a_n z^n$ à coefficients quelconques et de la variable z RÉELLE OU COMPLEXE.

- **(Sommes des séries entières complexes de référence)**

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \forall |z| < 1,\ \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

- **(Produit de Cauchy)** Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Alors pour tout $|z| < \min(R_a, R_b)$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

Que faire ?

- Pour calculer la somme d'une série entière, on se ramène si possible aux sommes de séries entières de référence en utilisant une ou plusieurs des méthodes suivantes :
  - s'il y a des multiples de n ou $\frac{1}{n+1}$ par rapport aux séries de référence, alors on peut dériver ou intégrer les sommes terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence,
  - si la série entière est du type $\sum Q(n) z^n$ où Q est une fraction rationnelle, alors on peut décomposer Q en éléments simples,
  - si la série entière est du type $\sum a_n z^n$ où on peut exprimer a_n sous la forme d'une somme, alors on peut faire apparaître un produit de Cauchy.

  Souvent, il est en outre nécessaire d'utiliser des relations de Chasles et/ou des décalages d'indices pour forcer l'apparition exacte des sommes de séries de référence.
  Ces différentes méthodes sont illustrées et commentées dans la rubrique *Exemple traité*.

- Pour calculer une somme numérique, on peut essayer de l'interpréter comme la partie réelle ou imaginaire de la somme d'une certaine série entière, que l'on peut calculer par l'une des méthodes précédentes.

EXEMPLE 1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Après avoir justifié la convergence, calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!}$.

On a la majoration suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!} \right| \leq \frac{1}{3^n n!}$$

Or $\displaystyle\sum \frac{(\frac{1}{3})^n}{n!}$ est une série exponentielle, donc convergente. Par comparaison, il vient alors que $\displaystyle\sum \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!}$ est une série absolument convergente, a fortiori convergente.

Sachant que $e^z = e^{\Re e(z)}\big[\cos(\Im m\, z) + i\sin(\Im m\, z)\big]$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, on calcule alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{3^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Im m(e^{in\theta})}{3^n n!} = \Im m\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\frac{e^{i\theta}}{3})^n}{n!}\right) = \Im m\big(e^{\frac{e^{i\theta}}{3}}\big) = e^{\frac{\cos\theta}{3}} \sin\left(\frac{\sin\theta}{3}\right)$$

Conseils

- Il est aussi possible de calculer la somme d'une série entière à l'aide d'une équation différentielle. Cette technique classique est traitée dans la *Fiche 31*.

Exemple traité

Déterminer le rayon de convergence, puis la somme des séries entières suivantes :

1 $\sum n^2 x^n$

2 $\sum \frac{3n}{n+2} x^n$

3 $\sum a_n x^n$ où $a_n = \text{Card}\,\{(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p + 5q = n\}$

SOLUTION

1
- La série $\sum n^2 x^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum x^n$, à savoir 1.
- La présence de n^2 par rapport à la série de référence $\sum x^n$ incite à dériver deux fois la somme de cette série de référence. On calcule alors pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\
\text{d'où : } \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n &= \frac{x}{(1-x)^2} \\
\text{d'où : } \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n &= \frac{(1-x)^2 \times 1 - (-2(1-x))x}{(1-x)^4} \times x
\end{aligned}$$

on dérive,
puis on multiplie par x

on dérive,
puis on multiplie par x

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2 ■ La règle de d'Alembert permet de trouver que le rayon de convergence est 1.

■ La série entière est du type $\sum Q(n)x^n$, où Q est une fraction rationnelle, on peut décomposer Q en éléments simples et on calcule alors pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3n}{n+2}x^n &= 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)x^n = 3\sum_{n=0}^{+\infty}x^n - \frac{6}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}\\ &\underset{\text{décalage d'indice}}{=} \frac{3}{1-x}-\frac{6}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \underset{\ln(1-x)=-x-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n}}{=} \frac{3}{1-x}+\frac{6}{x}+\frac{6\ln(1-x)}{x^2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n}{n+2}x^n = \begin{cases}\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{6}{x}+\dfrac{6\ln(1-x)}{x^2} & \text{si } x\in]-1,1[\setminus\{0\}\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$

3 ■ Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $A_n = \{(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ p+5q=n\}$ de sorte que $a_n = \operatorname{Card} A_n$, et R le rayon de convergence de la série étudiée.
D'une part, le couple $(n,0)\in A_n$, d'où $a_n \geq 1$ et R est alors majoré par le rayon de convergence de la série $\sum x^n$, à savoir 1.
D'autre part, $A_n \subset [\![0,n]\!]^2$, d'où $a_n \leq (n+1)^2$ et R est alors minoré par le rayon de convergence de la série $\sum (n+1)^2x^n$, à savoir 1 (obtenu par la règle de d'Alembert).
Ainsi, le rayon de convergence de la série étudiée vaut $R=1$.

■ On considère les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ c_n = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N},\ d_n = \begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est un multiple de } 5\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On calcule alors pour tout $x\in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\ k+5\ell=n}}1\Bigg)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\Bigg(\sum_{\substack{(k,\ell)\in[\![0,n]\!]^2\\ 5\ell=n-k}}c_kd_{5\ell}\Bigg)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}c_kd_{n-k}\right)x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}d_nx^n\right)\\ &\underset{\text{par définition de } c_n \text{ et } d_n}{=} \left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{5n}\right) \underset{\text{sommes de référence}}{=} \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}\end{aligned}$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^5)}$ pour tout $x\in]-1,1[$.

Exercices

EXERCICE 28.1

Le but de cet exercice est de justifier l'existence et calculer la valeur de la somme :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$$

1 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.

2 Calculer la somme de cette série entière sur son intervalle ouvert de convergence.

3 En déduire l'existence et la valeur de A.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 28.1 **2** Commencer par déterminer une expression simple de la dérivée de la somme, puis intégrer.

Solutions des exercices

EXERCICE 28.1

1 La série $\sum \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ a même rayon de convergence R que $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$.
D'une part, on a la majoration suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \left|\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right| \leq 1$$

Or la série $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1, d'où la minoration $R \geq 1$.
D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\cos(2n\pi/3))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, car sa suite extraite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1, d'où la série numérique $\sum u_n$ est grossièrement divergente. D'où la majoration $R \leq 1$.
Ainsi, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^n$ est $R = 1$.

2 On note S la somme de la série entière (au moins) définie sur $]-1, 1[$.

■ Par dérivation terme à terme, on calcule d'abord $S'(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) x^{n-1} \underset{}{\overset{j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}}{=}} \Re\mathrm{e}\left[j \sum_{n=1}^{+\infty} (jx)^{n-1}\right] = \Re\mathrm{e}\left[j \sum_{n=0}^{+\infty} (jx)^{n}\right] \\
&= \Re\mathrm{e}\left(\frac{j}{1-jx}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{j(1-\overline{j}x)}{(1-jx)(1-\overline{j}x)}\right) \underset{j+\overline{j}=-1}{=} \Re\mathrm{e}\left(\frac{j-x}{1+x+x^2}\right) \\
&\underset{\Re\mathrm{e}(j) = -\frac{1}{2}}{=} -\frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

■ Il suffit alors d'intégrer pour en déduire que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$S(x) = \underbrace{S(0)}_{=0} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}dt = -\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$$

3 On remarque que $A = S(1/2)$ avec $1/2 \in]-1,1[$, donc A existe et vaut :

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = S\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{7}{4}\right)$$