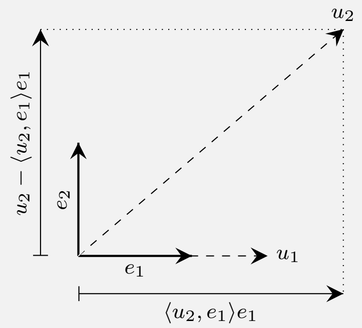
15 Mettre en place le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Quand on ne sait pas !

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- **(Orthonormalisation de Gram-Schmidt – Cas particulier de 2 vecteurs)**
  Soit (u_1, u_2) une famille libre de E.
  Alors on peut transformer (u_1, u_2) en une famille orthonormale (e_1, e_2) de E en procédant de la manière suivante :
  $\hookrightarrow$ on normalise u_1 en posant $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$,
  $\hookrightarrow$ on « orthogonalise » u_2 en lui ôtant sa composante selon e_1, qui vaut $\langle u_2, e_1 \rangle e_1$. Le vecteur ainsi obtenu est orthogonal à e_1, il reste à le normaliser. C'est pourquoi on pose :

$$e_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1\|}$$



Visualisation graphique

- **(Orthonormalisation de Gram-Schmidt - Cas général)**
  Soit n un entier naturel non nul et $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille libre de E.
  Alors il existe une unique famille orthonormale $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ telle que :

$$\begin{array}{llrcl} (i) & \forall i \in [\![1,n]\!], & \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_i) & = & \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_i) \\ (ii) & \forall i \in [\![1,n]\!], & (e_i, u_i) & \geq & 0 \end{array}$$

(pour l'unicité)

La famille $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ se construit de proche en proche grâce aux formules suivantes :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \quad \text{et} \quad \underset{(\text{si } n \geq 2)}{\forall i \in [\![2,n]\!]}, \; e_i = \frac{u_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, e_k \rangle e_k}{\left\| u_i - \displaystyle\sum_{k=1}^{i-1} \langle u_i, e_k \rangle e_k \right\|}$$

Que faire ?

Soit n un entier naturel non nul.

- Il faut bien comprendre géométriquement le cas particulier de $n = 2$ vecteurs.
  Après quoi, il sera plus facile de comprendre et d'assimiler le cas général d'un nombre n quelconque de vecteurs.
- Il faut s'entraîner à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans des espaces vectoriels de référence divers et variés, parmi lesquels :

$$\mathbb{R}^n \quad , \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad , \quad \mathbb{R}_n[X] \quad , \quad \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \quad , \quad \text{etc}\ldots$$

Conseils

- En cas de difficulté à comprendre le cas de deux vecteurs, il convient de revoir l'interprétation géométrique du produit scalaire en terme de projection.
- Il est conseillé de $\boxed{\text{TOUJOURS}}$ faire une figure pour développer l'intuition géométrique.

Exemple traité

On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \sum_{j=0}^{2} P(j)Q(j)$$

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

SOLUTION

On considère la base canonique $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
On applique à cette famille libre le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) :

$\hookrightarrow$ *Construction de e_1 :*

On normalise $u_1 = 1$ en posant :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|1\|} \underset{\|1\| = \sqrt{3}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

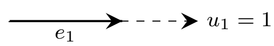


Fig. 1 : Construction de e_1

↪ *Construction de e_2 :*

On « orthogonalise » $u_2 = X$ en lui ôtant sa composante suivant le vecteur e_1 précédemment construit, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
e_2 &= \frac{u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1\|} \\
&= \frac{X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}}{\|X - \langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\|} \\
&= \frac{X-1}{\|X-1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

$\langle X, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\|X-1\| = \sqrt{2}$

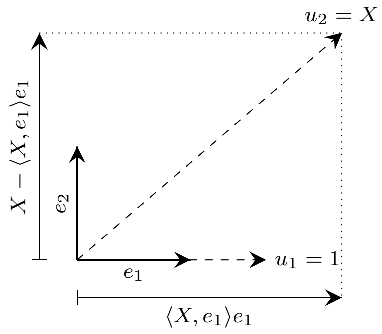


Fig. 2 : Construction de e_2

↪ *Construction de e_3 :*

On « orthogonalise » $u_3 = X^2$ en lui ôtant ses composantes suivant les vecteurs e_1 et e_2 précédemment construits, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
e_3 &= \frac{u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2}{\|u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2\|} \\
&= \frac{X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{X-1}{\sqrt{2}}}{\|X^2 - \langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} - \langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle \frac{X-1}{\sqrt{2}}\|} \\
&= \frac{X^2 - 2X + \frac{1}{3}}{\|X^2 - 2X + \frac{1}{3}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 6X + 1\right)
\end{aligned}
$$

$\langle X^2, \frac{1}{\sqrt{3}}\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\|X^2 - 2X + \frac{1}{3}\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\langle X^2, \frac{X-1}{\sqrt{2}}\rangle = 2\sqrt{2}$

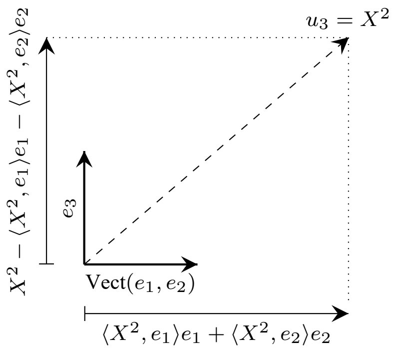


Fig. 3 : Construction de e_3

Ainsi, $\boxed{\text{LA}}$ base orthonormalisée de Gram-Schmidt obtenue à partir de la base canonique est la famille suivante :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 6X + 1\right)\right)$$

Exercices

EXERCICE 15.1

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Orthonormaliser la base constituée des vecteurs suivants :

$$u_1 = (1, 0, 1) \qquad u_2 = (1, 1, 1) \qquad u_3 = (-1, -1, 0)$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 15.1 Reprendre pas à pas le raisonnement mené dans *Exemple traité*.
Faire des figures !

Solutions des exercices

EXERCICE 15.1

On applique à la famille libre (u_1, u_2, u_3) le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) :

↪ *Construction de e_1 :*
On normalise $u_1 = (1, 0, 1)$ et on pose alors :

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$$

$\|(1,0,1)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

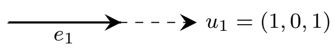


Fig. 1 : Construction de e_1

↪ *Construction de e_2 :*
On « orthogonalise » $u_2 = (1, 1, 1)$ en lui ôtant sa composante suivant le vecteur e_1 précédemment construit, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1}{\|u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1\|} \\ &\underset{\uparrow}{=} \frac{(0, 1, 0)}{\|(0, 1, 0)\|} \underset{\uparrow}{=} (0, 1, 0) \end{aligned}$$

$\langle u_2, e_1 \rangle = \sqrt{2}$ $\qquad$ $\|(0,1,0)\| = 1$

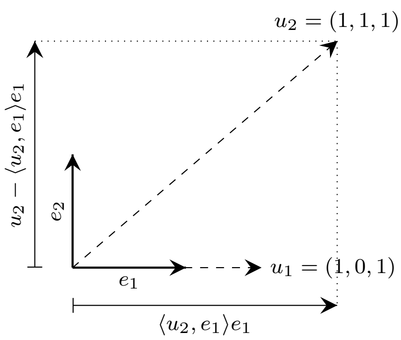


Fig. 2 : Construction de e_2

$\hookrightarrow$ *Construction de e_3 :*

On « orthogonalise » $u_3 = (-1,-1,0)$ en lui ôtant ses composantes suivant les vecteurs e_1 et e_2 précédemment construits, puis on normalise le tout. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_3 &= \frac{u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2}{\|u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2\|} \\ &\underset{\uparrow}{=} \frac{\frac{1}{2}(-1,0,1)}{\|\frac{1}{2}(-1,0,1)\|} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \end{aligned}$$

$\langle u_3, e_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad \|\frac{1}{2}(-1,0,1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\langle u_3, e_2\rangle = -1$

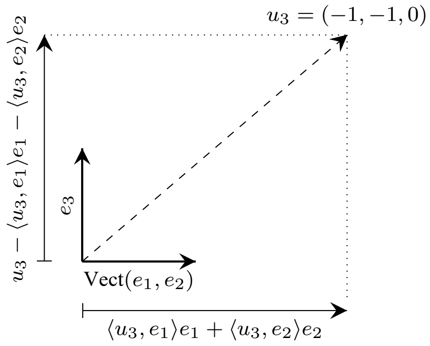


Fig. 3 : Construction de e_3

Ainsi, la base orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base (u_1, u_2, u_3) est la famille suivante :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), (0,1,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)\right)$$