Banque PT - Corrigé Epreuve C 2015

Fabien Evrard
fabien.evrard@prepas.org

18 mai 2015

Résumé

Ce sujet traite de divers aspects de l'intégrale de Gauss $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$: la première partie présente une étude de la convergence, la seconde une méthode de calcul via les intégrales à paramètres et une équation différentielle. La troisième partie, largement indépendante, se penche sur l'intégrale entre 0 et 1 de e^{-x^2}, c'est un prétexte pour parler de séries entières et d'un semblant d'approximation. Ce sujet, de facture très classique, sera de nature à récompenser les élèves studieux.
Chapitres abordés : études de fonction, intégrales généralisées, séries, série entières, intégrales à paramètres, équations différentielles.

PartieI

Q.I.1 : Notons $\varphi : u \in \mathbb{R} \mapsto e^u - u - 1$ et $\psi_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{x^2}{n}$. ψ_n est clairement paire et on constate que $f_n = \varphi \circ \psi_n$ et $g_n = \varphi \circ (-\psi_n)$. $\boxed{f_n \text{ et } g_n \text{ sont donc paires, on peut réduire le domaine d'étude à } \mathbb{R}_+.}$

Q.I.2.(a) : $\boxed{\text{Pour } x \in \mathbb{R},\ f_1(x) - g_1(x) = 2(\mathrm{sh}(x^2) - x^2)}$

Q.I.2.(b) : D'après le développement en série entière usuel de la fonction sh, on a pour tout réel t : $\mathrm{sh}(t) - t = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Ainsi pour t réel positif cette quantité est la somme d'une série à termes positifs convergente, donc elle est positive. On a donc $\boxed{\forall t \geq 0, \mathrm{sh}(t) \geq t}$ En appliquant ceci avec $t = x^2 \geq 0$ pour $x \geq 0$, on a bien $\boxed{\forall x \geq 0, f_1(x) \geq g_1(x)}$
Autre méthode : Posons $u(t) = \mathrm{sh}(t) - t$. Alors $u'(t) = \mathrm{ch}(t) - 1 \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc u est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et même sur $\mathbb{R}$). Comme $u(0) = 0$, on en déduit que $\forall t \geq 0,\ u(t) \geq 0$ et donc que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sh}^2(x) - x^2 \geq 0$, d'où le résultat.

Q.I.2.(c) :

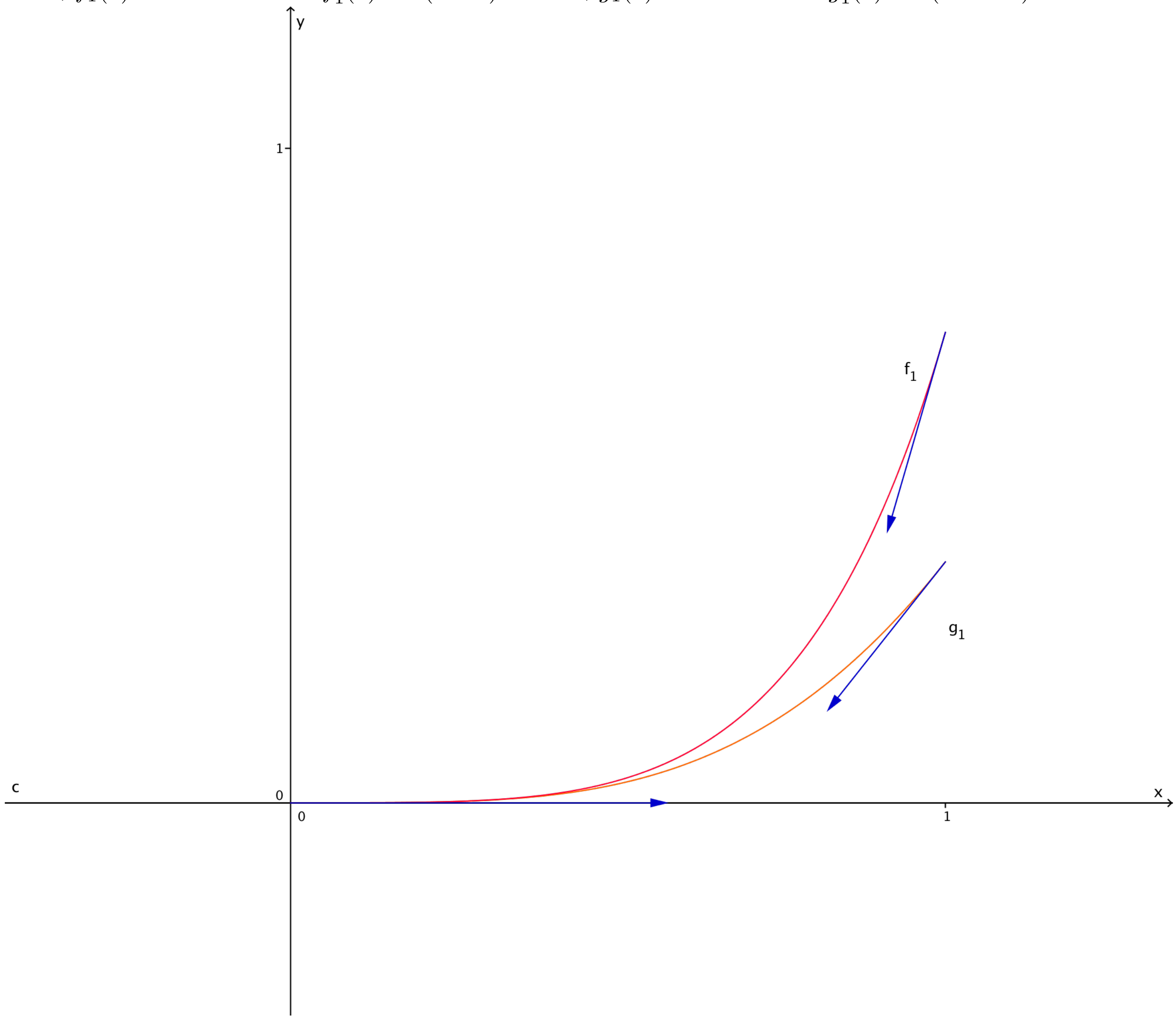
Avant de proposer un tracé, terminons l'étude de ces fonctions. Les fonctions f_1 et g_1 sont clairement dérivables (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout réel positif x on a :
$f_1'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$ et $g_1'(x) = -2x(e^{-x^2} - 1)$.
On sait que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $e^0 = 1$, ainsi pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{x^2} > 1$

et f_1' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-x^2} - 1 < 0$, en multipliant par $-2x$ qui est strictement négatif aussi, on obtient que g_1' est aussi strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f_1 et g_1 sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $f_1(0) = f_1'(0) = g_1(0) = g_1'(0) = 0$ les deux courbes représentatives présentent une tangente horizontale à l'origine du repère.

Enfin, $f_1(1) = e - 2 \simeq 0.7$ et $f_1'(1) = 2(e-1) \simeq= 3.4$, $g_1(1) = e^{-1} \simeq 0.4$ et $g_1'(1) = 2(1 - e^{-1}) \simeq 1.2$.



Q.I.3.(a) : $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_n'(x) = \dfrac{2x}{n}\left(e^{\frac{x^2}{n}} - 1\right) \\ g_n'(x) = \dfrac{2x}{n}\left(1 - e^{-\frac{x^2}{n}}\right) \end{cases}$

Q.I.3.(b) :

La même argumentation qu'en Q.I.2.(c) permet d'affirmer que les fonctions f_n' et g_n' sont positives sur $\mathbb{R}_+$, elles ne sont nulles qu'en 0. Donc les fonctions f_n et g_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+$

Q.I.3.(c) : $f_n(0) = g_n(0) = 0$, et les fonctions sont croissantes.
Donc, $\boxed{\text{les fonctions } f_n \text{ et } g_n \text{ sont positives sur } \mathbb{R}_+}$

Q.I.3.(d) :
Pour x réel positif,

$$\begin{array}{rcl} f_n(x) \geq 0 & \Rightarrow & 0 < 1 + \dfrac{x^2}{n} \leq e^{\frac{x^2}{n}} \\ & & \qquad\qquad \hookleftarrow \quad \text{en élevant à la puissance } n \\ & \Rightarrow & 0 < \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{x^2} \\ & & \qquad\qquad \hookleftarrow \quad \text{en considérant les inverses} \\ & \Rightarrow & 0 < e^{-x^2} \leq \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} \end{array}$$

Et pour $x \in [0, \sqrt{n}]$: on alors $1 - \dfrac{x^2}{n} \geq 0$, donc on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} g_n(x) \geq 0 & \Rightarrow & 0 \leq 1 - \dfrac{x^2}{n} \leq e^{-\frac{x^2}{n}} \\ & & \qquad\qquad \hookleftarrow \quad \text{en élevant à la puissance } n \\ & \Rightarrow & 0 \leq \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \end{array}$$

d'où :

$$\boxed{\forall x \in [0, \sqrt{n}], 0 \leq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}}$$

$\boxed{\text{L'inégalité de droite a été prouvée pour } x \text{ dans } \mathbb{R}_+}$

Q.I.3.(e) : Pour x fixé, et pour n assez grand, on a $x \in [0, \sqrt{n}[$, d'où $\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right) > 0$, ce qui permet d'écrire $\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right)$. Puis :

$$\begin{array}{rcl} \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & = & \exp\left(n\ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)\right) \\ & = & \exp\left(n\left(-\dfrac{x^2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \\ & = & \exp(-x^2 + o(1)) \end{array}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}}$

Par ailleurs, $\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right) > 0$ pour tout x et pour tout n, d'où :

$$\begin{array}{rcl} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} & = & \exp\left(-n\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)\right) \\ & = & \exp\left(-n\left(\dfrac{x^2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \\ & = & \exp(-x^2 + o(1)) \end{array}$$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n} = e^{-x^2}}$

Q.I.4.(a) :

Pour x réel et n entier naturel non-nul la formule du binôme de Newton donne :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x^2}{n}\right)^k \\ &= 1+n\times\frac{x^2}{n}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x^2}{n}\right)^k\end{aligned}$$

x^2 étant positif, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x^2}{n}\right)^k \geq 0$

Et il vient : $\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^n \geq 1+x^2>0$

En inversant on obtient bien le résultat souhaité. D'où :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+, \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}}$$

Q.I.4.(b) :

La fonction $x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et admet comme primitive la fonction arctangente. Ainsi, pour X réel positif, $\displaystyle\int_0^X \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan(X)-\arctan(0)=\arctan(X)$, il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. De plus $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$

Finalement : $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ est convergente et vaut } \frac{\pi}{2}}$

Q.I.4.(c) :

En combinant les résultats de Q.I.3.(d) et Q.I.4.(a) on obtient l'inégalité $0<e^{-x^2}\leq \dfrac{1}{1+x^2}$ valable pour tout réel x positif. Ceci permet d'appliquer le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ étant convergente, $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x$ est aussi convergente et l'on a :

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

D'où le résultat : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x\leq\frac{\pi}{2}}$

PartieII

Q.II.1 : Il s'agit d'appliquer le théorème de continuité sous l'intégrale.

Notons $\alpha : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & \dfrac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\end{array}$ l'intégrande.

Le numérateur est la composée de la fonction exponentielle réelle et d'une fonction polynômiale, c'est donc une fonction continue des deux variables (t, x) ; le dénominateur est polynomial et ne s'annule pas. Donc α est une fonction continue des deux variables. Ses applications partielles seront donc continues aussi.

On peut donc affirmer que :

(i) pour tout t dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \alpha(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

(ii) pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \alpha(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

Par ailleurs : $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |\alpha(t, x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$

D'après Q.I.4.(b), la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

Donc :

(iii) il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que : $\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, |\alpha(t, x)| \leq \phi(x)$

Nous avons donc rassemblé les hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale. On en conclut bien que :

$\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

Q.II.2 : $\boxed{h(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$ d'après Q.I.4.(b)

Q.II.3.(a) : Il faut cette fois-ci utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale.

De même que pour la continuité en Q.II.1 on peut justifier que α est de classe $\mathcal{C}^1$ des deux variables (t, x) (car une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$).

On applique le théorème sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}^+$, où a est un réel strictement positif fixé. Ainsi on peut affirmer que :

(i) pour tout t dans $[a, +\infty[$, $x \mapsto \alpha(t, x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (intégrabilité prouvée par la domination établie en Q.II.1)

(ii) pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \alpha(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$

(iii) pour tout t dans $[a, +\infty[$, $x \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(t, x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car α est de classe $\mathcal{C}^1$.

De plus, pour $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$: $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(t, x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2}$

Donc pour $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$: $\left|\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(t, x)\right| \leq e^{-ax^2}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x$ est impropre seulement en $+\infty$, l'intégrande étant continu sur $\mathbb{R}_+$.

Or $\forall x \geq 1, e^{-ax^2} \leq e^{-ax}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-ax} \mathrm{d}x$ est une intégrale de référence convergente. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x$ est convergente par comparaison d'intégrales de fonctions positives. Et par relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \mathrm{d}x$ est convergente.

L'intégrande étant positif, on peut affirmer que $x \mapsto e^{-ax^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

On vient d'établir l'hypothèse de domination :

(iv) il existe une fonction ϕ_1 intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall (t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}(t, x)\right| \leq \phi_1(x)$

Ainsi d'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, $\boxed{\text{la fonction } h \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, +\infty[}$ et de plus : $\forall t \in [a, +\infty[, h'(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} \mathrm{d}x$

$\boxed{\textbf{Q.II.3.(b)} \ :}$ h est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour n'importe quel a strictement positif.
Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Alors en prenant $a = \dfrac{x}{2} < x$, on peut dire que h est dérivable sur $\left]\dfrac{x}{2}, +\infty\right[$ donc en particulier en x.
Donc $\boxed{h \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[}$

$\boxed{\textbf{Q.II.4} \ :}$ L'expression obtenue en Q.II.3.(a) pour h' est toujours strictement négative : intégrale convergente d'une fonction continue négative et non-identiquement nulle. $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$
De plus l'expression de h est une intégrale d'une fonction continue positive et non-identiquement nulle : h est strictement positive. D'où : $\forall t \geq 0, h(0) \geq h(t) > 0$

C'est-à-dire : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq h(t) \leq \dfrac{\pi}{2}}$

$\boxed{\textbf{Q.II.5} \ :}$ D'après l'expression trouvée en Q.II.3.(a) et par linéarité de l'intégrale, pour $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} h't) - h(t) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{-x^2}{1+x^2} e^{-tx^2} - \frac{1}{1+x^2} e^{-tx^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Posons alors $u : x \mapsto \sqrt{t}x$, c'est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$, et $u' : x \mapsto \sqrt{t}$.

Le théorème de changement de variable pour les intégrales impropres permet d'affirmer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{t}}$ sont de même nature et égales en cas de convergence. Comme elles sont convergente on aura :

$$\forall t > 0, h'(t) - h(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{t}}$$

d'où :

$$\boxed{\forall t > 0, h'(t) - h(t) = -\frac{I}{\sqrt{t}}}$$

$\boxed{\textbf{Q.II.6.(a)} \ :}$ D'après le cours de première année la solution générale de cette équation différentielle est $\boxed{\text{de la forme } t \mapsto Ke^t \text{ où } K \text{ est une constante réelle.}}$

$\boxed{\textbf{Q.II.6.(b)} \ :}$ $\boxed{\text{Il s'agit de } u \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u}$

$\boxed{\textbf{Q.II.6.(c)} \ :}$ Notons $\lambda : t \mapsto e^{-t}h(t)$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \ \lambda'(t) &= e^{-t}(h'(t) - h(t)) \\ &= e^{-t} \times -\frac{I}{\sqrt{t}} \\ &= -I \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Ainsi en intégrant entre t_0 et t : $\forall t > 0, \ \lambda(t) - \lambda(t_0) \ = \ -I \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$

Il vient bien :

$$\boxed{\forall t > 0, h(t) = \left(k - I \int_{t_0}^{t} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u \right) e^t \text{ avec } k \text{ constante réelle.}} \ (k = \lambda(t_0))$$

Q.II.7.(a) : L'intégrande $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continu sur $]0,t]$, l'intégrale est impropre en zéro.

Or au voisinage de 0, $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}$ est une intégrale de référence convergente (intégrale de Riemann avec "$\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$"), donc par comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\boxed{\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \text{ est convergente}}$.

Appliquons le changement de variables $v = \sqrt{u}$:

Posons $\beta : \begin{array}{ccc}]0,t] & \longrightarrow &]0,\sqrt{t}] \\ u & \longmapsto & \sqrt{u} \end{array}$, c'est une fonction $\mathcal{C}^1$ et bijective

(sa bijection réciproque est $\gamma : \begin{array}{ccc}]0,\sqrt{t}] & \longrightarrow &]0,t] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$)

Et posons $\ell : \begin{array}{ccc}]0,\sqrt{t}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2e^{-x^2} \end{array}$, qui est continue.

Le théorème de changement de variables généralisé nous permet d'affirmer que les intégrales $\displaystyle\int_0^t \ell(\beta(u))\beta'(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} \ell(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Or : $\forall u \in]0,t]$,
$$\begin{aligned} l(\beta(u))\beta'(u) &= 2e^{-(\sqrt{u})^2} \times \frac{1}{2\sqrt{u}} \\ &= \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ est convergente, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} 2e^{-x^2}\mathrm{d}x$ l'est aussi et que :

$$\boxed{\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x}$$

Q.II.7.(b) : En faisant tendre t vers 0 par valeurs positives dans $(\star)$ comme suggéré on obtient :

$$\lim_{t\to 0} h(t) = k + I\int_0^{t_0} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Par ailleurs, on a vu que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et donc en particulier en 0, donc $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = h(0)$ d'où

$$h(0) = k + I\int_0^{t_0} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Donc $k = \dfrac{\pi}{2} - I\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

En injectant à nouveau dans $(\star)$ et en utilisant la relation de Chasles, on trouve :

$\forall t \geq 0, h(t) = \left(\dfrac{\pi}{2} - I\displaystyle\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\right)e^t$

et en combinant avec le résultat de Q.II.7.(a) :

$$\boxed{\forall t \geq 0, h(t) = \left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)e^t}$$

Q.II.8 : En remplaçant $h(t)$ par l'expression précédente dans le résultat de Q.II.4 on obtient :

$$0 \le \left(\frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right) e^t \le \frac{\pi}{2}$$

et en multipliant par e^{-t} qui est positif :

$$\boxed{0 \le \frac{\pi}{2} - 2I\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}e^{-t}}$$

Q.II.9 :

En faisant tendre t vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ tend vers I et $\dfrac{\pi}{2}e^{-t}$ tend vers zéro. Le théorème de la limite par encadrement donne : $\dfrac{\pi}{2} - 2I^2 = 0$. Par ailleurs $I \ge 0$, car c'est l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ d'une fonction positive. D'où : $\boxed{I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

PartieIII

Q.III.1 :

Précisons le Développement en série entière usuel de l'exponentielle : $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ de rayon de convergence infini.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\right| \le \dfrac{1}{n!}$, or la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{1}{n!}$ est une série convergente (série entière exponentielle pour $x = 1$). Donc par comparaison de séries positives on peut affirmer que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\left|\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\right|$ est convergente, et donc $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \text{ est absolument convergente, donc convergente}}$

Q.III.2. :

D'après le DSE de l'exponentielle en prenant $x = -t^2$ on aura pour tout t réel : $\boxed{e^{-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}}$.

Le rayon de convergence sera donc infini, et $\boxed{\mathcal{D} = \mathbb{R}}$

Q.III.3. : Comme le segment d'intégration est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de la série entière, on peut intégrer terme à terme et donc : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t$

Or pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^{2n}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$ d'où : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}}$

Q.III.4.(a) : On a : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(2k+1)} + R_n$

Ainsi $\displaystyle\left|\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(2k+1)}\right| \le |R_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)}$

La somme partielle $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!(2k+1)}$ est donc une approximation de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t$ lorsque n est assez grand pour que $\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)} \leq \varepsilon$ ...

Cette question est très vague... Ce qui précède est-il suffisant ? Faut-il donner un algorithme pour expliquer le calcul de la somme partielle ? Faut-il exprimer n en fonction de ε ?

Q.III.4.(b) :

Pour $n = 3$, $(n+1)! = 24$ et $2n+3 = 9$, donc $(n+1)!(2n+3) \leq 1000$ et on ne peut pas assurer $|R_n| \leq 10^{-3}$...

Pour $n = 4$, $(n+1)! = 120$ et $2n+3 = 11$, donc $(n+1)!(2n+3) \geq 1000$ et on a alors $|R_n| \leq 10^{-3}$, on peut donc considérer que $r = \displaystyle\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\frac{1}{k!(2k+1)}$ est donc une approximation de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t$ à 10^{-3}.

Détaillons un peu le calcul de r :

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{k=0}^{4}(-1)^k\frac{1}{k!(2k+1)}\\
&= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 5}-\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{24\times 9}\\
&= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 5}-\frac{1}{2\times 3\times 7}+\frac{1}{2^3\times 3^3}
\end{aligned}$$

L'énoncé laisse penser que cette expression suffit. On peut néanmoins aller pllus loin :

$$\begin{aligned}
r &= \frac{2^3\times 3^3\times 5\times 7-2^3\times 3^2\times 5\times 7+2^2\times 3^3\times 7-2^2\times 3^2\times 5+5\times 7}{2^3\times 3^3\times 5\times 7} && = \frac{36\times(161-5)+35}{2^3\times 3^3\times 5\times 7}\\
&= \frac{2^2\times 3^2(6\times 35-2\times 35+3\times 7-5)+5\times 7}{2^3\times 3^3\times 5\times 7} && = \frac{36\times(156)+35}{2^3\times 3^3\times 5\times 7}\\
&= \frac{2^2\times 3^2(4\times 35+21-5)+5\times 7}{2^3\times 3^3\times 5\times 7} && = \frac{36\times(156)+35}{2^3\times 3^3\times 5\times 7}\\
& && = \frac{5651}{7560}
\end{aligned}$$

Cette dernière fraction obtenue à la calculatrice est irréductible...

♠♡♢♣