3 Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension finie

Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- **(Caractérisation de la supplémentarité 1)**

$$E = F \oplus G \underset{\uparrow \atop \textit{la plus utile}}{\iff} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} \underset{\uparrow \atop \textit{rarement utilisée}}{\iff} \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ F + G = E \end{cases}$$

- **(Caractérisation de la supplémentarité 2)**

$$E = F \oplus G \iff \left[\begin{array}{c} \text{la famille } \mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G) \text{ est une base de } E, \\ \text{où } \mathscr{B}_F \text{ et } \mathscr{B}_G \text{ désignent des bases respectives} \\ \text{quelconques de } F \text{ et de } G \end{array}\right]$$

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension finie, on peut suivre une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1) :**
    on montre une égalité de dimensions, à savoir $\dim E = \dim F + \dim G$, et une inclusion ensembliste, à savoir $F \cap G \subset \{0_E\}$ (l'autre inclusion étant toujours vraie).
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2) :**
    on détermine une base $\mathscr{B}_F$ de F et une base $\mathscr{B}_G$ de G, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.
    En fait, cette méthode n'est pas spécifique à la dimension finie, cependant elle est souvent utilisée dans ce contexte-là.

  Ces deux méthodes sont comparativement illustrées à travers l'exercice 1 de cette fiche.

Conseils

- En incluant les méthodes de la fiche précédente, l'abondance des méthodes pour montrer la supplémentarité peut dérouter. Il est bon de privilégier la méthode 1 de la présente fiche.
- Lorsque F et G sont des images ou des noyaux d'application linéaire, il peut-être utile de penser au théorème du rang pour établir une égalité de dimensions.

Exemple traité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = f$.
Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

SOLUTION

Montrons que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} E = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) & (i) \\ \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- L'égalité des dimensions (i) est assurée par le théorème du rang appliqué à f dont l'espace de départ E est de dimension finie.
- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ i.e. $\begin{cases} u \in \text{Im}(f) \\ u \in \text{Ker}(f) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists u' \in E,\ u = f(u') \\ f(u) = 0_E \end{cases}$

Montrons que $u = 0_E$.
On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcll} & u & = & f(u') & \\ \text{d'où :} & f^2(u) & = & f^3(u') & \text{en composant par } f^2 \\ \text{d'où :} & 0_E & = & f(u') & \text{car } u \in \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f)^2 \text{ et } f^3 = f \\ \text{d'où :} & 0_E & = & u & \text{car } u = f(u') \end{array}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Exercices

EXERCICE 3.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1 Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 1.

2 Montrer que $E = F \oplus G$ à l'aide de la méthode 2.

3 Comparer au raisonnement par analyse-synthèse effectué dans l'exercice 1 de la fiche 2. Quels sont les avantage(s) et inconvénient(s) du raisonnement par analyse-synthèse ?

EXERCICE 3.2

Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 3.2 Si besoin, commencer par déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ dans le cas où $n = 2$.

Solutions des exercices

EXERCICE 3.1

1 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G & (i) \\ F \cap G = \{0_E\} & (ii) \end{cases}$

- $\mathscr{B}_G = ((-1,-2,1))$ est génératrice de G et est libre (car constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de G. Ainsi, $\dim G = \text{Card}(\mathscr{B}_G) = 1$.
  Par ailleurs, on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x = -y - 2z\right\} = \text{Vect}((-1,1,0),(-2,0,1))$$

  $\mathscr{B}_F = ((-1,1,0),(-2,0,1))$ est génératrice de F et est libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires), donc est une base de F. Ainsi, $\dim F = \text{Card}(\mathscr{B}_F) = 2$.
  Sachant que $\dim E = 3$, l'égalité des dimensions (i) est bien vérifiée.

- Pour montrer l'égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

  $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection de sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

  $\boxed{\subset}$ Soit $u = (x,y,z) \in F \cap G$ i.e. $\begin{cases} u \in F \\ u \in G \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ u \underset{(\star)}{=} (-\lambda, -2\lambda, \lambda) \end{cases}$.

  Montrons que $u = 0_E$.
  On a les déductions suivantes :

$$x + y + 2z = 0_{\mathbb{R}} \underset{\text{par } (\star)}{\Longrightarrow} (-\lambda) + (-2\lambda) + 2(\lambda) = 0_{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{R}}$$

  On en déduit alors que $u = 0_E$.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Montrons que $E = F \oplus G$ i.e. $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G)$ est une base de E.

Il suffit alors de montrer que $\begin{cases} \text{Card}(\mathscr{B}) = \dim E & (i) \\ \mathscr{B} \text{ est libre} & (ii) \end{cases}$

- Les bases $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ sont celles déterminées à la question précédente, et la condition (i) est bien vérifiée.
- Il reste à vérifier la condition (ii).
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1(-1,1,0)+\lambda_2(-2,0,1)+\lambda_3(-1,-2,1) = 0_E$ $(\star)$.
  Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
  On a les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ - 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ - \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

3 Le raisonnement par analyse-synthèse est nettement plus long à rédiger en règle générale. Cependant, il permet d'en déduire aisément l'expression des projecteurs et symétries d'éléments caractéristiques F et G.

EXERCICE 3.2

Montrons que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\begin{cases} \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) & (i) \\ \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- La famille $(E_{ij} + E_{ji})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.
  La famille $(E_{ij} - E_{ji})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, d'où $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.
  On en déduit alors :

$$\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{K})) + \dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$$

- $\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.
  $\boxed{\subset}$ Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $M = \mathcal{O}_n$.
  On a les équivalences suivantes :

$$M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) \iff \left[M^T = M \quad \text{ET} \quad M^T = -M \right] \iff M = \mathcal{O}_n$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.