1 Montrer qu'une somme est directe

Quand on ne sait pas !

Soit $p \geq 2$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

- **(Définition d'une somme directe)**

$$\left[\begin{array}{c}\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \\ \text{et l'on note } \bigoplus_{k=1}^{p} F_k\end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{c}\text{La décomposition de tout vecteur de } \sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{sous la forme } \sum_{k=1}^{p} u_k, \text{ avec } u_k \in F_k, \text{ est unique}\end{array}\right]$$

On dit alors que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

- **(Caractérisation 1)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c}\text{SI } 0_E = \sum_{k=1}^{p} u_k \text{ avec } u_k \in F_k, \\ \text{ALORS tous les } u_k \text{ sont nuls}\end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 2)**

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \left[\begin{array}{c}\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p) \text{ est une base de } \sum_{k=1}^{p} F_k \\ \text{où les } \mathscr{B}_k \text{ sont des bases de } F_k\end{array}\right]$$

- **(Caractérisation 3 - en dimension finie)**
  On suppose de plus que $F_1, \cdots, F_p$ sont de dimension finie.

$$\text{La somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \iff \dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

- **(Cas particulier important : $p = 2$)**

$$\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$$

Que faire ?

- Pour montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe, on peut utiliser une des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
    on suppose que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$ avec $u_k \in F_k$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, puis on exploite les propriétés des F_k pour montrer que tous les u_k sont nuls.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
    on commence par déterminer une base $\mathscr{B}_k$ de F_k pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, puis on montre que la famille concaténée $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \cdots, \mathscr{B}_p)$ est une base de la somme $F_1 + \cdots + F_p$.
  - **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
    on montre que la dimension de la somme des F_k est égale à la somme des dimensions des F_k.
  - **Méthode 4 (uniquement si $p = 2$)**
    on montre que l'intersection $F_1 \cap F_2$ est nulle.
    Dans le cas où $p \geq 3$, ce résultat ne se généralise pas aisément (cf exercice 1).

Conseils

- En pratique, on privilégie les méthodes 1 et 4 pour montrer qu'une somme est directe.
  La méthode 4 est illustrée dans la fiche 3 sur les sous-espaces supplémentaires.
  Les méthodes 1 à 3 sont comparativement illustrées dans la rubrique *Exemple traité*.

Exemple traité

Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul et $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $F_k = \text{Vect}(X^k Q)$.
Montrer que les sous-espaces $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe.

SOLUTION

- **Méthode 1 (en utilisant la caractérisation 1)**
  Soit $(R_1, \cdots, R_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $R_1 + \cdots + R_p = 0_{\mathbb{K}[X]} \quad (\star)$.
  Montrons que $R_1 = \cdots = R_p = 0_{\mathbb{K}[X]}$.
  Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, comme $R_k \in F_k$, il existe un scalaire λ_k tel que $R_k = \lambda_k (X^k Q)$.
  On en déduit alors les équivalences suivantes :

$$(\star) \iff \lambda_1 XQ + \lambda_2 X^2 Q + \cdots + \lambda_p X^p Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \underset{Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}}{\iff} \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_p X^p = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

  Or la famille $(X^k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ est libre, donc tous les λ_k sont nuls, a fortiori les R_k aussi.

- **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation 2)**
  Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, la famille $\mathscr{B}_k = (X^k Q)$ est génératrice de F_k et est libre (car

constituée d'un seul vecteur non nul), donc est une base de F_k. Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

La famille concaténée $\mathscr{B} = (X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est génératrice de $F_1 + \cdots + F_p$ et est libre (car constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés), donc est bien une base de $F_1 + \cdots + F_p$.

- **Méthode 3 (en utilisant la caractérisation 3 - valable en dimension finie)**
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $\dim F_k = \mathrm{rg}(X^k Q) = 1$ (car Q est non nul). Par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Vect}(X^k Q) = \mathrm{Vect}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}), \text{ d'où : } \dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]})$$

Or la famille $(X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}$ est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés donc est libre, d'où :

$$\dim(\sum_{k=1}^{p} F_k) = \mathrm{rg}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = \mathrm{Card}((X^k Q)_{k\in[\![1,p]\!]}) = p = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k$$

Exercices

EXERCICE 1.1

Soit $p \geq 3$ et $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

1 On suppose que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$.
Les sous-espaces F_1, F_2 et F_3 sont-ils nécessairement en somme directe ?

2 Montrer l'équivalence suivante :

$$\text{la somme } \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ est directe} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall k \in [\![1,p-1]\!],\ \big(\sum_{i=1}^{k} F_i\big) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$$

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 1.1

1 Considérer trois droites judicieusement choisies de $E = \mathbb{R}^3$.

2 Utiliser la méthode 2 pour l'implication $\Leftarrow$.

Solutions des exercices

EXERCICE 1.1

1 Considérons trois droites coplanaires et deux à deux distinctes de $E = \mathbb{R}^3$.

$$F_1 = \text{Vect}((1,0,0)) \quad \text{et} \quad F_2 = \text{Vect}((0,1,0)) \quad \text{et} \quad F_3 = \text{Vect}((1,1,0))$$

Ces trois espaces sont bien deux à deux en somme directe (car d'intersection deux à deux nulle). Par contre, ils ne sont pas en somme directe. En effet :

$$0_{\mathbb{R}^3} = \underbrace{(-1,0,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,-1,0)}_{\in F_2} + \underbrace{(1,1,0)}_{\in F_3}$$

Ainsi, des sous-espaces qui sont deux à deux d'intersection nulle ne sont pas nécessairement en somme directe.

2 Montrons la double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrons l'égalité ensembliste demandée.

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre 0_E.

$\boxed{\subset}$ Soit $u \in \left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1}$ i.e. $\begin{cases} \exists (u_1, \cdots, u_k) \in F_1 \times \cdots \times F_k,\ u = u_1 + \cdots + u_k \\ u \in F_{k+1} \end{cases}$

On en déduit l'égalité vectorielle suivante :

$$\underbrace{u_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{u_k}_{\in F_k} + \underbrace{(-u)}_{\in F_{k+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{k+2}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E$$

Or la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, d'où $u_1 = \cdots = u_k = -u = 0_E$.
En particulier, $u = 0_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\left(\sum_{i=1}^{k} F_i\right) \cap F_{k+1} = \{0_E\}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$.
Montrons que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.
Soit $(u_1, \cdots, u_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $u_1 + \cdots + u_p = 0_E$.
On a alors l'équivalence suivante :

$$u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff \underbrace{u_1 + \cdots + u_{p-1}}_{\in F_1 + \cdots + F_{p-1}} = \underbrace{-\,u_p}_{\in F_p}$$

D'où $u_1 + \cdots + u_{p-1} = -u_p \in (F_1 + \cdots + F_{p-1}) \cap F_p = \{0_E\}$, et on en déduit alors que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = u_p = 0_E$.
Sachant que $u_1 + \cdots + u_{p-1} = 0_E$ et $(F_1 + \cdots + F_{p-2}) \cap F_{p-1} = \{0_E\}$, on montre par un raisonnement analogue au précédent que $u_{p-1} = 0_E$.
De proche en proche, on montre que tous les u_k sont nuls.

Ainsi, on a bien montré l'équivalence souhaitée.

ezeaeae