27 Déterminer le rayon de convergence d'une série entière

Quand on ne sait pas !

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières à coefficients et de la variable z complexes.

- **(Rayon de convergence)**
On appelle RAYON DE CONVERGENCE de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité R définie par :

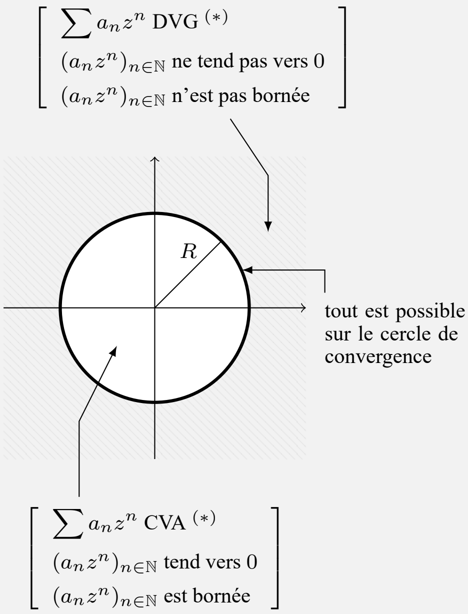
$$R = \sup\left\{r \geq 0,\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\}$$

Le rayon de convergence R est un réel positif, ou bien $+\infty$.

- **(Autres caractérisations du rayon de convergence)**

$$\begin{aligned} R &= \sup\left\{r \geq 0,\ \sum a_n z^n \text{ CVA }^{(*)}\right\} \\ &= \sup\left\{r \geq 0,\ (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0\right\} \end{aligned}$$

$^{(*)}$ *où CVA et DVG signifient respectivement « converge absolument » et « diverge grossièrement ».*



- **(Propriété)** Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- **(Relations de comparaison)**
On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.
  - Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors : $R_a \geq R_b$.
  - Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors : $R_a = R_b$.
  - Si $a_n = \underset{+\infty}{\mathrm{O}}(b_n)$, alors : $R_a \geq R_b$.

- **(Règle de d'Alembert)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On suppose que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
  - Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
  - Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Que faire ?

- Pour déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$, on peut utiliser une ou plusieurs des méthodes suivantes :
  - **Méthode 1 :** on utilise la définition ou une des caractérisations pour encadrer R.
    - on cherche un réel positif r_1 tel que pour tout z vérifiant $|z| < r_1$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument (resp. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ou tend vers 0).
      On obtient alors une minoration de R : $R \geq r_1$.
    - on cherche un réel positif r_2 tel que pour un z de module r_2, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement (resp. la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ou ne tend pas vers 0).
      On obtient alors une majoration de R : $R \leq r_2$.

    EXEMPLE 1 La série entière $\sum z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
    En effet, pour tout z tel que $|z| < 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, d'où $R \geq 1$.
    Et pour $z = 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, d'où $R \leq 1$. Ainsi $R = 1$.
  - **Méthode 2 :** la multiplication du terme général par une puissance de n ne modifie pas le rayon de convergence de la série entière.

    EXEMPLE 2 $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n^2}$, $\sum z^n$ et $\sum n^3 z^n$ ont même rayon de convergence $R = 1$.
  - **Méthode 3 :** on utilise les relations de comparaison.

    EXEMPLE 3 La série entière $\sum n^{(-1)^n} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
    En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement suivant : $1/n \leq n^{(-1)^n} \leq n$.
    Or les séries entières $\sum n z^n$ et $\sum \dfrac{z^n}{n}$ ont pour rayon de convergence 1, ce qui permet d'en déduire respectivement que $R \geq 1$ et $R \leq 1$. Ainsi, $R = 1$.

    EXEMPLE 4 La série entière $\sum (n^3 - 2n^2 + 1) z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.
    En effet, sachant que $|n^3 - 2n^2 + 1| \underset{+\infty}{\sim} n^3$, la série entière $\sum (n^3 - 2n^2 + 1) z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum n^3 z^n$, à savoir $R = 1$.
  - **Méthode 4 :** on applique la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$ pour un z non nul fixé.

    EXEMPLE 5 Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{z^{2n}}{3^n}$ est $R = \sqrt{3}$.

En effet, calculons pour tout $z \neq 0$:

$$\left|\frac{\frac{z^{2(n+1)}}{3^{n+1}}}{\frac{z^{2n}}{3^n}}\right| = \left|\frac{z^2}{3}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|z|^2}{3}$$

- Si $|z| < \sqrt{3}$, alors $\dfrac{|z|^2}{3} < 1$ et $\sum \dfrac{z^{2n}}{3^n}$ converge absolument. Donc $R \geq \sqrt{3}$.
- Si $|z| > \sqrt{3}$, alors $\dfrac{|z|^2}{3} > 1$ et $\sum \dfrac{z^{2n}}{3^n}$ diverge grossièrement. Donc $R \leq \sqrt{3}$.

Ainsi, le rayon de convergence vaut bien $R = \sqrt{3}$.

Conseils

■ Pour déterminer des rayons de convergence avec efficacité, il est utile de connaître ceux des séries entières de référence, rappelés dans la *Fiche 28*.

Exemple traité

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1 $\sum n^3 z^n$ **2** $\sum\limits_{n\geq 1}(\ln n)z^n$ **3** $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\operatorname{Arctan} n}{n^2}z^n$ **4** $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\operatorname{sh} n}{n}z^n$

SOLUTION

1 La série $\sum n^3 z^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

2 Comme $(\ln n)_{n\geq 1}$ ne tend pas vers 0, $\sum \ln n$ diverge grossièrement. Donc $R \leq 1$.
De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la suite $((\ln n)z^n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 par croissances comparées. Donc $R \geq 1$.
Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = 1$.

3 Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan} n = \dfrac{\pi}{2}$, on a l'équivalent suivant :

$$\left|\frac{\operatorname{Arctan} n}{n^2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n^2}$$

Donc la série $\sum \dfrac{\operatorname{Arctan} n}{n^2} z^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$, qui a même rayon de convergence que la série $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

4 On a l'équivalent suivant :

$$\left|\frac{\operatorname{sh} n}{n}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{n}$$

Donc la série $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ a même rayon de convergence que la série $\sum \frac{\mathrm{e}^n}{n} z^n$, que l'on va déterminer grâce à la règle de d'Alembert. Calculons pour $z \neq 0$:

$$\left| \frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{n+1} z^{n+1}}{\frac{\mathrm{e}^n}{n} z^n} \right| = \left| \frac{n\mathrm{e}}{n+1} z \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}|z|$$

- Si $|z| < \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $\mathrm{e}|z| < 1$ et $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ converge absolument. Donc $R \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$.
- Si $|z| > \frac{1}{\mathrm{e}}$, alors $\mathrm{e}|z| > 1$ et $\sum \frac{\operatorname{sh} n}{n} z^n$ diverge grossièrement. Donc $R \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exercices

EXERCICE 27.1

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum\limits_{n \geq 1} n^2 (\ln n) z^n$
2. $\sum n! z^n$
3. $\sum\limits_{n \geq 1} \ln\left(1 + \sin \frac{1}{n}\right) z^n$
4. $\sum (3 + 4ni) z^n$
5. $\sum \left(\prod\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)} \right) z^n$
6. $\sum\limits_{n \geq 1} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) z^n$

EXERCICE 27.2

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n \geq 1} a_n z^n$, où a_n désigne :

1. le nombre de diviseurs de n pour tout entier $n \geq 1$,
2. le terme général d'une suite périodique quelconque.

EXERCICE 27.3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 27.2

1. Tout entier $n \geq 1$ a un nombre de diviseurs compris entre 1 et n.
2. Toute suite périodique est bornée. Il convient cependant de traiter le cas de la suite nulle à part.

EXERCICE 27.3 Considérer un réel $r \in]0, R[$, puis majorer la quantité $|a_n z^n|$ par le terme général d'une série absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Solutions des exercices

EXERCICE 27.1

1 Par la méthode 2, les séries entières $\sum n^2(\ln n)z^n$ et $\sum(\ln n)z^n$ ont même rayon de convergence.
La question **2** de la rubrique *Exemple traité* permet alors de conclure que $R = 1$.

2 Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, la suite $(n!z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Ainsi, $R = 0$.

3 On a les équivalents suivants :

$$\left|\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)\right| \underset{+\infty}{\sim} \sin\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Donc la série entière $\sum \ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right) z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$, qui a même rayon de convergence que la série $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

4 On a l'équivalent suivant :

$$|3+4ni| = \sqrt{3^2+(4n)^2} \underset{+\infty}{\sim} 4n$$

Donc la série entière $\sum(3+4ni)z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum nz^n$, qui a même rayon de convergence que la série entière $\sum z^n$, à savoir $R = 1$.

5 Calculons pour tout $z \neq 0$:

$$\left|\frac{\left(\prod_{k=0}^{n+1}\frac{1}{(2k+1)}\right)z^{n+1}}{\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}\right)z^n}\right| = \frac{|z|}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

Donc, par la règle de d'Alembert, la série entière $\sum\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}\right)z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, le rayon de convergence recherché vaut $R = +\infty$.

6 On a l'équivalent suivant :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n$$

Donc la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)z^n$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum_{n\geq 1}(\ln n)z^n$, à savoir $R=1$ (cf le **2** de la rubrique *Exemple traité*).

EXERCICE 27.2

1 Tout entier $n \geq 1$ a un nombre de diviseurs compris entre 1 et n, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq a_n \leq n$$

Or les séries $\sum z^n$ et $\sum nz^n$ ont pour rayon de convergence 1, ce qui permet d'en déduire respectivement que $R \leq 1$ et $R \geq 1$.
Ainsi, la série $\sum a_n z^n$, où a_n désigne le nombre de diviseurs de n, a pour rayon de convergence $R = 1$.

2 On effectue la disjonction de cas suivante :

- Si la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est nulle, alors $R = +\infty$.
- Sinon, la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ n'est pas nulle, et étant périodique, ne tend pas vers 0.
  Donc la série $\sum a_n$ diverge grossièrement, d'où $R \leq 1$.
  Par ailleurs, étant périodique, $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée par une constante $M > 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n z^n| \leq M|z^n|$$

  Or la série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $R \geq 1$. Finalement, $R = 1$.

Ainsi, la série $\sum a_n z^n$, où a_n est le terme général d'une suite périodique, a pour rayon de convergence $R = +\infty$ si la suite est nulle, ou $R = 1$ sinon.

EXERCICE 27.3

Soit $r \in]0, R[$. Sachant que R désigne le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, il vient alors :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n r^n| \leq M$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. On en déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{a_n}{n!}z^n\right| = |a_n r^n| \times \left|\frac{(z/r)^n}{n!}\right| \leq M \times \left|\frac{(z/r)^n}{n!}\right|$$

Or la série exponentielle $\sum \frac{(z/r)^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc par comparaison par majoration, il vient que la série $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ converge aussi absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi, la série $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.