2 Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires en dimension quelconque

Quand on ne sait pas !

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

■ **(Définition de la supplémentarité)**

$\big[$ F et G sont supplémentaires dans E $\big]$

$\Updownarrow$

$\Big[$ $E = F \oplus G$, c'est-à-dire tout vecteur $u \in E$ se décompose de manière unique comme la somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G $\Big]$

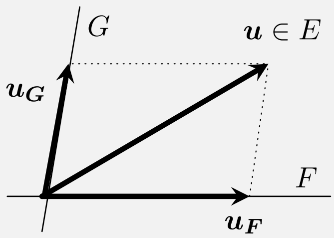

Figure illustrative

On dit aussi que F est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de G dans E ou que G est $\boxed{\text{UN}}$ supplémentaire de F dans E.

■ **(Caractérisation de la supplémentarité)**

$$E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G & \leftarrow \textit{garantit l'existence d'une décomposition} \\ F \cap G = \{0_E\} & \leftarrow \textit{garantit son unicité sous réserve d'existence} \end{cases}$$

■ **(Supplémentarité des éléments caractéristiques d'un projecteur/d'une symétrie)** Soit p et s des endomorphismes de E.

- SI p est un projecteur de E, ALORS : $E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$.
- SI s est une symétrie de E, ALORS : $E = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}_E)$.

Que faire ?

- Pour montrer que $E = F \oplus G$ en dimension quelconque, on peut suivre une des méthodes suivantes énoncées par ordre de praticité :
  - **Méthode 1 (en utilisant la définition)**
    on procède par analyse-synthèse dont on rappelle le principe et la rédaction :
    - *Analyse (on suppose l'existence d'une décomposition et on montre l'unicité).*
      Soit $u \in E$. On suppose que $u = u_F + u_G$ avec $u_F \in F$ et $u_G \in G$.

      $$\left[\begin{array}{c} \textit{Raisonnement qui aboutit} \\ \textit{à un unique couple } (u_F, u_G) \end{array} \right]$$

      À l'issue de l'analyse, on trouve un unique couple (u_F, u_G) qui est CANDIDAT SOLUTION pour une telle décomposition.
    - *Synthèse (on montre l'existence d'une décomposition).*
      On vérifie que l'unique couple candidat solution trouvé est bien solution, c'est-à-dire $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
  - **Méthode 2 (en utilisant la caractérisation)**
    on intuite l'existence d'une décomposition de $u \in E$ comme somme d'un vecteur u_F de F et d'un vecteur u_G de G, puis on montre l'unicité de cette décomposition en montrant que $F \cap G = \{0_E\}$, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition de cette décomposition.
  - **Méthode 3 (en utilisant les propriétés des projecteurs et symétries)**
    on montre que F et G sont les éléments caractéristiques d'un certain projecteur p ou d'une certaine symétrie s à intuiter, toute la difficulté résidant alors dans l'intuition du projecteur ou de la symétrie.

EXEMPLE 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

SOLUTION

Posons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
On considère l'application $s : E \longrightarrow E$ définie par :

$$\forall M \in E,\ s(M) = M^t$$

On montre aisément que s est un endomorphisme de E et $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donc s est une symétrie de E, et on déduit alors que :

$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$$

Or on a les égalités ensemblistes suivantes :

$$\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s - \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = M\} = F$$

$$\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{M \in E,\ (s + \mathrm{Id}_E)(M) = 0_E\} = \{M \in E,\ M^t = -M\} = G$$

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

Conseils

- Ne pas hésiter à identifier les espaces E, F et G qui entrent en jeu et à préciser la nature des objets manipulés (uplets, polynômes, matrices, etc . . .).
- Les méthodes présentées dans cette fiche sont valables en dimension quelconque, a fortiori en dimension finie.

Exemple traité

On note respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ les sous-espaces vectoriels des fonctions paires et impaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

SOLUTION

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrons que f se décompose de manière unique sous la forme :

$$f = g + h \qquad \text{avec } g \text{ paire et } h \text{ impaire}$$

- *Analyse.* Supposons qu'il existe un couple (g, h) solution, c'est-à-dire vérifiant :

$$\begin{cases} g \text{ est paire} \\ h \text{ est impaire} \\ f = g + h \end{cases}, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & g(-x) = g(x) & (i) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & h(-x) = -h(x) & (ii) \\ \forall x \in \mathbb{R}, & f(x) = g(x) + h(x) & (iii) \end{cases}$$

Cherchons des conditions nécessaires sur le couple (g, h).
Soit $x \in \mathbb{R}$. Cherchons des conditions nécessaires sur le couple $\big(g(x), h(x)\big)$.
On a en particulier le système suivant :

$$\underbrace{\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \end{cases}}_{\textit{par } (iii)} \underset{\text{par } (i) \text{ et} (ii)}{\iff} \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(x) + f(-x) = 2g(x) \end{cases}$$

Après calculs, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{cases} h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \\ g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{cases}\right\}$ *ces expressions déterminent un unique couple (g, h)*

$\boxed{\text{SI}}$ il existe un couple (g, h) solution du problème, $\boxed{\text{ALORS}}$ nécessairement il est unique et est composé des fonctions g et h définies par :

$$g : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h : \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{array} \right.$$

■ *Synthèse.* Vérifions que le couple (g, h) obtenu à l'issue de l'analyse est bien solution du problème, c'est-à-dire vérifie : $\begin{cases} g \text{ est paire} & (i') \\ h \text{ est impaire} & (ii') \\ f = g + h & (iii') \end{cases}$

▶ La condition (i') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

▶ La condition (ii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -h(x)$$

▶ La condition (iii') est bien vérifiée, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x)$$

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$.

Exercices

EXERCICE 2.1

On considère les sous-espaces vectoriels suivants de $E = \mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + 2z = 0\right\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((-1, -2, 1)).$$

1 Montrer que $E = F \oplus G$.

2 En déduire l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.

EXERCICE 2.2

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \dfrac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right)$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Vect}(I_n) \oplus \text{Ker}(\text{Tr})$.

Pour vous aider à démarrer

EXERCICE 2.1

1 Faire un raisonnement par analyse-synthèse.

2 On rappelle que p est défini par :

$$\forall u = u_F + u_G \in E,\ p(u) = u_F$$

EXERCICE 2.2

1 Trivial.

2 Après avoir remarqué que :

$$\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n) \quad \text{et} \quad A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$$

quelle égalité ensembliste peut-on en déduire ?

Solutions des exercices

EXERCICE 2.1

1 ■ *Analyse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Supposons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$. Montrons que cette décomposition est unique.
Comme $u_F \in F$, il existe des réels x', y' et z' tels que $u_F = (x', y', z')$ et vérifiant $x' + y' + 2z' = 0$.
Comme $u_G \in G$, il existe un réel λ tel que $u_G = (-\lambda, -2\lambda, \lambda)$.
Pour montrer l'unicité de cette décomposition, il suffit de montrer que u_F et u_G s'expriment de manière unique en fonction de u, ce qui revient à montrer que x', y', z' et λ s'expriment de manière unique en fonction de x, y et z.
Or l'égalité $u = u_F + u_G$ permet d'écrire les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x = x' - \lambda \\ y = y' - 2\lambda \\ z = z' + \lambda \\ x' + y' + 2z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = x + \lambda \\ y' = y + 2\lambda \\ z' = z - \lambda \\ (x + \lambda) + (y + 2\lambda) + 2(z - \lambda) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x' = -y - 2z \\ y' = -2x - y - 4z \\ z' = x + y + 3z \\ \lambda = -x - y - 2z \end{cases}$$

Donc x', y', z' et λ s'expriment bien de manière unique en fonction de x, y et z.
Sous réserve d'existence d'une décomposition de u comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, on a montré que la décomposition est unique.

■ *Synthèse.* Soit $u = (x, y, z) \in E$. Montrons qu'il existe $(u_F, u_G) \in F \times G$ tel que $u = u_F + u_G$.
En considérant les résultats trouvés lors de l'analyse, posons :

$$u_F = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z) \quad \text{et} \quad u_G = (x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -x - y - 2z)$$

Il reste alors à vérifier que $u_F \in F$, $u_G \in G$ et $u_F + u_G = u$.
Ces trois vérifications sont aisées et laissées au lecteur.

Ainsi, on a bien montré que $E = F \oplus G$.

2 Le projecteur sur F parallèlement à G est défini par :

$$\forall (x, y, z) \in E,\ p(x, y, z) = (-y - 2z, -2x - y - 4z, x + y + 3z)$$

EXERCICE 2.2

1 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculons :

$$\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n + \left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = A$$

2 Il suffit de montrer que $\begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) + \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) & (i) \\ \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{\mathcal{O}_n\} & (ii) \end{cases}$

- Pour montrer la première égalité ensembliste (i), on montre la double inclusion :

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une somme de sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{\subset}$ Cette inclusion est une conséquence immédiate de la question 1.
En effet, on y a montré que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A = \underbrace{\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n}_{\in \mathrm{Vect}(I_n)} + \underbrace{\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right)}_{\in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})\ (*)}$$

Sachant que la trace est linéaire, justifions $^{(*)}$:

$$\mathrm{Tr}\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = \mathrm{Tr}(A) - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} \underbrace{\mathrm{Tr}(I_n)}_{=n} = 0_{\mathbb{R}}$$

- Pour montrer la seconde égalité ensembliste (ii), on montre la double inclusion :

$\boxed{\supset}$ Cette inclusion est toujours vraie car une intersection d'espaces vectoriels est un espace vectoriel, donc contient l'élément neutre $\mathcal{O}_n$.

$\boxed{\subset}$ Soit $A \in \mathrm{Vect}(I_n) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ i.e. $\begin{cases} A \in \mathrm{Vect}(I_n) \\ A \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R},\ A = \lambda I_n \\ \mathrm{Tr}(A) = 0_{\mathbb{R}} \end{cases}$

Montrons que $A = \mathcal{O}_n$.
On a les déductions suivantes :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathrm{Tr}(A) & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \mathrm{Tr}(\lambda I_n) & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \lambda \times n & = & 0_{\mathbb{R}} \\ \text{d'où :} & \lambda & = & 0_{\mathbb{R}} \end{array}$$

car $A = \lambda I_n$

car la trace est linéaire et $\mathrm{Tr}(I_n) = n$

car $n \neq 0$

On en déduit alors que $A = \lambda I_n = 0_{\mathbb{R}} \times I_n = \mathcal{O}_n$.

Ainsi, on a bien montré que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.