章节 1

背景综述

章节 2

课题陈述

本文所要研究的金融问题是基于欧洲式期权的离散时间对冲策略的风险控制。欧式期权(European Option) 是期权的一种类型。另外两种期权类型是美式期权 (American Option)和亚洲期权(Asian Option)。期权本质上是一种金融合约，它授予期权的拥有者（买方）一种在某一特定时间点或之前，以某一个在合约中给出的价格 (strike price) 购买或者出售某一种金融产品(underlying asset) 的权利。买家在执行自己的权利时，卖家必须按照合约规定的价格进行交易， 但买家同时需要付给买家一定的额外交易手续费(premium)。期权的研究主要集中在对其价值的评估。期权的价值一般可以分为两个部分。一是期权的内部价值 (intrinsic value)，主要由该期权基于的金融产品在交易时的市场价格和合约定价的差值决定。二十期权的时间价值(Time Value)，这一部分取决于交易前的其他因素如 利息，增值等。期权的研究从19世纪就开始了，但目前的研究一般都是基于1973年提出的Black-Scholes模型。我们的课题也是基于Black-Scholes模型，并对欧式期权 对冲策略的风险控制进行研究。

2.1 欧式期权

欧式期权的特点在于买方必须在合约规定的时间到期时才能行使权力。通常将欧式期权的合理价格价定为其期望价值。 相比与美式期权，二者在执行时间上有所不同。 美式期权合同在到期日前的任何时候或在到期日都可以执行合同，结算日则是在履约日之后的一天或两天， 大多数的美式期权合同允许持有者在交易日到履约日之间随时履约，但也有一些合同规定一段比较短的时间可以履约，如“到期日前两周”。 欧式期权合同要求其持有者只能在到期日履行合同，结算日是履约后的一天或两天。目前国内的外汇期权交易都是采用的欧式期权合同方式。 通过比较，结论是：欧式期权本少利大，但在获利的时间上不具灵活性；美式期权虽然灵活，但付费十分昂贵。因此，国际上大部分的期权交易都是欧式期权。 中国国内银行设立的外汇期权业务都是采用的欧式期权交易。

2.2 Black-Scholes模型

Black-Scholes 是一个70年代由Fischer Black和Myron Scholes 提出的用于金融衍生品交易的数学模型。这个模型可以推出Black-Scholes公式， 并用于预测欧式期权定价的理论值。70年代至今在众多的实际交易中，该公式的预测估值被认为是非常接近实际观测到的价值。 这个模型的成功也直接导致了期权交易市场的繁荣，并能使芝加哥期权交易市场等大的期权交易场所得到科学的有效的监管。 Black-Scholes 公式是一个偏微分方程，用于预测期权价格随时间的变化。而该模型背后的策略则是通过合理地买卖期权来对冲风险，这种对冲策略被 成为"Delta Hedging"，这也是许多更复杂的对冲机构策略的基础。此后Robert C. Merton 进一步发展了该模型，并和Schole分享了1997年的诺贝尔经济学奖。

2.3 课题表述

本课题研究的对象就是欧式期权利用对冲策略来降低交易的风险。 我们考虑基于Black-Scholes 模型的Delta 对冲策略，该策略为一个连续时间策略，也即策略所要求的交易行为发生在每时每刻，关于时间轴连续。 我们知道现实生活中，交易只能发生在一些离散的时间点上，即交易员只能在一系列相继的时刻点上交易。 一个总所周知的事实是，实际中想要完美的复制实现一个给定的连续时间策略是不可能的。 本课题研究的就是离散时间版本的Delta 对冲策略与理论上的Delta 对冲策略之间的误差及风险控制。

在一般化的 Black-Scholes 模型中， 假设在时刻t, 期权所基于的风险资产价格为 X_t， 另外有一无风险资产价格为 S_t^0。 X_t 满足如下的一维随机偏微分方程:

$$dX_t = \mu(X_t)X_t dt + \sigma(X_t)X_t dB_t, \tag{2.1}$$

$X_0 = x_0 > 0, \sigma(x) > 0, \forall x > 0$, 而无风险资产价格满足一个常微分方程:

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \tag{2.2}$$

。 我们引进一个新的随机过程W_t:

$$W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu(X_s) - r}{\sigma(X_s)} ds \tag{2.3}$$

， 在中性风险的概率空间下，这个随机过程是一个标准的布朗运动。 我们在此中性风险概率空间下考虑问题。 现在风险资产所满足的随机微分方程变为如下形式:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma(X_t)X_t dW_t \tag{2.4}$$

我们假设考虑的问题满足如下两个条件:

($\mathcal{H}_1$) μ 和 σ 有限的, 两次连续可微且二次偏微分满足 H☒lder 条件. 更准确的来说, 令 $\hat{\mu}(x) = \mu(exp(x))$， $\hat{\sigma}(x) = \sigma(exp(x))$, 且 $\delta \in (0, 1)$， $K > 0$, 对任意 $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, 我们有:

$$|\hat{\mu}'(x)| + |\hat{\mu}''(x)| + \frac{|\hat{\mu}''(x) - \hat{\mu}''(x')|}{|x - x'|^\delta} + |\hat{\sigma}'(x)| + |\hat{\sigma}''(x)| + \frac{|\hat{\sigma}''(x) - \widehat{\sigma''}(x')|}{|x - x'|^\delta} < K.$$

($\mathcal{H}_2$) 存在$\sigma_0 > 0$ 使得对任意 $x > 0$ 有$|\sigma(x)| \geq \sigma_0$。

在这两个条件下 若欧洲期权的回报函数为 $f \in L^2(X_t)$, 则该期权在0 时刻的价格由下面公式给出:

$$h(f)(x_0) = \mathbb{E}(exp(-rT)f(X_T)|X_0 = x_0). \tag{2.5}$$

令

$$u(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}f(X_{T-t}^x)), \tag{2.6}$$

则u 是如下方程的解:

$$-\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t, x) + rx\frac{\partial}{\partial x}u(t, x) - ru(t, x) \tag{2.7}$$

这里 $(t, x) \in [0, T) \times (0, \infty)$ 且 $u(0, x) = h(f)$， $u(T, x) = f(x)$。

一个广为人知的期权定价公式如下:

$$e^{-rT}f(X_T) = h(f) + \int_0^T \xi_t d\widetilde{X}_t \tag{2.8}$$

这里 $\widetilde{X}_t = e^{-rT}X_t$ 是风险资产的折旧贴现价格。 Ito's 公式给出了Delta 对冲策略ξ:

$$\xi_t = \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) \tag{2.9}$$

换句话说，为了达到完美对冲，交易员需要在 $t \in [0, T]$ 的时间内无时不刻的交易， 并且使自己在时刻 t 持有恰好 ξ_t 单位的风险资产。 这在现实中是不可能达到的。

一个替代的解决方案是用在离散的时刻点交易的方法来逼近原先的对冲策略。假设交易员在$t \in [0,T)$ 时间内交易N 次，交易时间被定义为$t_k = kT/N$, $(k \in \{0,...,N\})$, 在 $t \in [t_k, t_{k+1})$时间内， 交易员使自己持有ξ_{t_k}单位的风险资产X_t。在此离散化策略的逼近下，在期权到期时刻T, 完美对冲和离散化对冲的差值为：

$$\begin{aligned} M_T^N &= e^{-rT} f(X_T) - (u(0,x) + \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi_t})) d\widetilde{X}_t \\ &= \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t) d\widetilde{X}_t - \int_0^T \frac{partialu}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi(t)}) d\widetilde{X}_t \\ &= (X_T - K)^+ - \mathbb{E}[(X_T - K)^+] - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi(t)}) dX_t \\ &= (X_T - K)^+ - x_0 N(d_1(0)) + KN(d_2(0)) - \sum_{i=0}^{n-1} N(d_1(t_i))(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &= (X_T - K)^+ - \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{x_0}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\ &- \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{X_{t_i}}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

这里 $\varphi(t) = sup\{t_i | t_i \le t\}$.

对于该误差M_T^N，我们已知它有如下的渐进性质： M_T^N 在概率上趋向于0:

$$M_T^N \xrightarrow[N \to +\infty]{\mathbb{P}} 0 \tag{2.11}$$

See XXXXXX

令 X_t 随机偏微分方程 $dX_t = \sigma(X_t) X_t dW_t$ 的解所对应的随机过程, u 如前文定义, 则我们有

$$\sqrt{n} M_T^N \xrightarrow[N \to +\infty]{d} \hat{W}_\tau \tag{2.12}$$

这里 $\tau = \frac{1}{2}\int_0^T (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t))^2 \sigma^4(X_t) X_t^4 dt$, 且 $\hat{W}$ 是一个独立于 τ另一个布朗运动.

See XXXXXX

上面的两条渐进性质不仅告诉我们随着 N的增大，离散对冲策略的逼近将越来越成功，两者相差的误差将在概率意义下趋于零，而且还告诉我们此误差的渐进表现 类似于一个系数逐渐变小的布朗运动。特别的，我们从中可知，通过增大 N, 在概率意义下，离散化的Delta 对冲策略可以任意程度的逼近完美Delta 对冲策略。

由于实际交易中交易成本一类的问题，所以在一定的交易风险范围内，我们希望能够用最少的交易次数来完成既定的交易策略。 也即我们希望找到一个最小的交易次数N来最优化交易成本。 假设在$t = T$时，交易的误差可表示为$|P(X) - P_{T_N}(X)|$, 而可接受的最大误差为ϵ，我们将采用蒙特卡洛模拟算法，通过M次模拟，计算出 $|P(X) - P_{T_N}(X)| < \epsilon$的概率$Prob(M,N)$, 当$Prob(M,N)$的值大于一个预先设定的概率值时，我们认为$N$是一个可接受的抽样次数。 算法1 给出了我们计算验证一个N值的串行算法伪代码。

在获得一个可接受的N值后，我们可以继续寻找满足条件的更小的N值，一般初始的N值取的较大，所以这种最优化的寻找可以通过一个二分法的搜寻算法来实现。 在算法 2 中我们设置的收敛条件为$|nU - nL| \le \lambda$ 这是因为蒙特卡洛模拟本身具有一定的随机性。在N的收敛过程中会出现波动，导致无法 收敛到一个单一的值上，在$BSERROR$中给定了置信概率$Prob$的情况下，我们很自然地就能利用置信区间这一概念来表述我们取到的最优值 N。在实际应用中， N的初始值通常需要取得很大，然后通过二分法来逐步缩小范围取得最优值。此外蒙特卡洛模拟得次数 M也需要取一个很大的值来保证其精确性。如果N和M的取值 都较大，就会极大地增加计算时间和内存空间需求。这时串行程序在普通的计算机上就难以满足问题的需求，我们将需要转而开发并行程序并使其运行在超级计算机上。

2.4 BSERROR算法的并行化

Algorithm 1 欧式期权对冲策略误差控制的串行算法

参数 $X0$ ▷ 金融产品在$t=0$时的初始价格
参数 σ ▷ 市场波动性
参数 K ▷ 期权合约价格
参数 T ▷ 期权到期时间
参数 ϵ ▷ 可接受的误差上限
参数 $Prob$ ▷ 离散策略误差可接受概率下限
procedure BSERROR(M,N) ▷ M 是蒙特卡洛模拟次数，N是离散抽样次数
  $\delta t \leftarrow T/N$ ▷ 时间间隔
  $count \leftarrow 0$ ▷ 在M次模拟中N被接受的次数
  for all $m = 1 : M$ **do** ▷ 外部循环实现多次蒙特卡洛模拟
    $NRV[N]$ ▷ 一组高斯分布的随机数
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussienNumGenerator()$
    end for
    $BM[N]$ ▷ 一个数组模拟布朗随机过程
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[N+1]$ ▷ 离散化的期权估价
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    $error \leftarrow 0$ ▷ 离散估价和连续估价的误差
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$ ▷ 积分上界
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
    if $PX[N] > K$ **then** ▷ 只考虑在合约到期时间买入的情况
      $error \leftarrow error + (PX[N] - K)$
    end if
    $Upper1 \leftarrow (log(X0/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot T)/(\sigma\sqrt{T})$
    $Upper2 \leftarrow (log(X0/K) - 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot T)/(\sigma\sqrt{T})$
    $error = error + K/(\sqrt{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{Upper2} e^{-t^2/2} dt - X0/(\sqrt{2\pi}) \cdot \int_{-\infty}^{Upper1} e^{-t^2/2} dt$
    if $error < \epsilon$ **then**
      $count \leftarrow count + 1$
    end if
  end for
  $prob \leftarrow count/M$
  if $prob < Prob$ **then**
    $N \leftarrow N + 1$
  else
    $N \leftarrow N - 1$
  end if
  return N
end procedure

Algorithm 2 最优N值的搜索算法

参数 $M0$ ▷ 蒙特卡洛模拟的次数，$M0$越大模拟结果可信度越高
procedure NBSECT($N0$, λ) ▷ $N0$是初始化抽样次数，λ是最优解的置信区间
  $nL \leftarrow 1$ ▷ 设置n值的初始下界
  $nU \leftarrow N0$ ▷ 设置n值的初始上界
  $n \leftarrow 0.5 \cdot (nL + nU)$
  while $|nU - nL| > \lambda$ **do**
    if $BSERROR(M0, n) < n$ **then** ▷ 缩小搜索范围
      $nU \leftarrow n$
      $n \leftarrow 0.5 \cdot (nL + nU)$
    else ▷ 扩大搜索范围
      $nL \leftarrow n$
      $n \leftarrow 0.5 \cdot (nL + nU)$
    end if
  end while
  return n, nU, nL
end procedure

章节 3

参数选择及收敛条件

我们进行 M 次模特卡罗模拟实验，对于每一次模拟，选取某个 N, 计算相应的误差M_T^N, 我们希望该误差小于可接受的最大误差 $\epsilon = X0 * 10^{-3}$。 我们用蒙特卡洛的方法计算 $M_T^N \leq \epsilon$ 的概率，并希望该概率能超过某一个特定值: $Prob = 95\%$。 在这个问题中 M 和 N 的初始值以及其更新方法至关重要。 对M 而言， 一方面较大的 M 会增大模特卡罗方法以及通过此方法计算出来的概率的可信度，另一方面 M 过大，将不可避免的造成更高的资源和硬件的要求，如何在保持一定可行度的条件下选择一个较小的 M 需要一个精巧的方法。 对 N 而言，较大的 N 会使得逼近更准确，从而误差 M_T^N 较小，但也会造成资源的浪费和迭代收敛的过程冗长。 较大或者较小的 M 和 N 的初始值将导致收敛缓慢甚至不收敛。 如何选择合适的 M 和 N 的初始值， 如何让它们互相迭代更新， 以及怎样判断收敛与否是本章所需要解决的问题。

3.1 参数 N

关于 N 的初始值的选取，一个首要的问题是，数值模拟中， M 会影响我们对 N 的判断，甚至一个选取不好的 M 会给出错误的 N 的更新方向，从而导致问题 得不到收敛。为了避免这种问题，我们在这里给出一种不依赖于 M 的 N 的初始值选定方法。

我们需要一个尽可能小的 N, 使得存在某个关于 N 的函数 $P(N)$，如下不等式成立:

$$Probability(M_T^N \geq \epsilon) = \mathbb{P}(M_T^N \geq \epsilon) < P(N)。\tag{3.1}$$

若我们能发现这样的函数$P(N)$，则所有满足不等式:

$$P(N) \leq 1 - Prob = 5\% \tag{3.2}$$

的正整数 N, 都满足 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon) > Prob = 95\%$。 我们只需要取满足不等式的最小的正整数 N 即可。此时 N 的选取独立于 M, 也即无论我们选取怎样的M, 理论上都会有 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon) > Prob$ 成立。

为了寻找函数 $P(N)$, 我们先引入两个引理,

(Burkholder-Davis-Gundy inequality) 令 $T > 0$，$(M_t)_{0\leq t\leq T}$ 为一个局部的鞅，且 $M_0 = 0$. 则对于所有的 $0 < p < +\infty$, 存在独立于 T 和 $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ 的常数 c_p，C_p, 使得

$$c_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq \mathbb{E}[(sup_{0\leq t\leq T}|M_t|)^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \tag{3.3}$$

See XXXXXX.

In paper XXXXXX, 作者证明了 $C_p \leq (2\sqrt{p})^p$.

(Generalized Minkowski inequality) 设 (S_1, μ_1) 和 (S_2, μ_2) 是两个可测空间，且 $F : S_1 \times S_2 \to R$ 为可测映射. 则广义的Minkowski 积分不等式是:

$$(\int_{S_2} |\int_{S_1} F(x,y)d\mu_1(x)|^p d\mu_2(y))^{\frac{1}{p}} \leq \int_{S_1}(\int_{S_2} |F(x,y)|^p d\mu_2(y))^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x), \forall p \geq 1 \tag{3.4}$$

See XXXXXX for a proof

不失一般性, 在以下的计算中我们设 $r = 0$, $\sigma(X_t) = constant = \sigma > 0$ 回报函数 $f(x) = (x-K)^+, K > 0$.

由 Chebyshev 不等式, 我们有

$$\mathbb{P}(M_T^n \geq \gamma) \leq \frac{E[(M_T^n)^p]}{\gamma^p}, \forall p > 0$$

再由 Burkholder-Davis-Gundy 不等式有:

$$\mathbb{E}[(M_T^n)^p] \leq C(p)\mathbb{E}[\langle M^n\rangle_T^{\frac{p}{2}}]$$

这里我们用已知最优的结果 $C(p) = (2\sqrt{p})^p$.

对方程XXXXXXX, 关于 x 微分，我们有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,x) = -\sigma^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) \tag{3.5}$$

对 $\frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi(t)})$ ，从 $\varphi(t)$ 到 t 使用 Itô 公式。 结合方程 XXXXXX, 我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t) - \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi(t)}) \\
&= \int_{\varphi(t)}^t (\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}(\theta, X_\theta) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\theta, X_\theta)\sigma^2 X_\theta^2)d\theta + \int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta dW_\theta \\
&= \int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta (dW_\theta - \sigma d\theta)
\end{aligned}$$

所以

$$M_T^n = \int_0^T \int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta (dW_\theta - \sigma d\theta)\sigma X_t dW_t$$

$$\langle M^n\rangle_T = \int_0^T (\int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta (dW_\theta - \sigma d\theta))^2 \sigma^2 X_t^2 dt$$

我们假设 $p \geq 2$. 由广义 Minkowshi 不等式， 我们有:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle M^n\rangle_T^{\frac{p}{2}}] &= \mathbb{E}[(\int_0^T (\int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta (dW_\theta - \sigma d\theta))^2 \sigma^2 X_t^2 dt)^{\frac{p}{2}}] \\
&\leq (\int_0^T (\mathbb{E}[(\int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta (dW_\theta - \sigma d\theta))^p \sigma^p X_t^p])^{\frac{2}{p}} dt)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

考虑一个满足下面条件的新的概率$\widetilde{\mathbb{Q}}$:

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}} = \frac{X_t}{X_0}$$

则在此新的概率$\widetilde{\mathbb{Q}}$ 下，$\widetilde{W_t} = W_t - \sigma t$ 是一个布朗运动。

由Cauchy 不等式，在概率 $\widetilde{\mathbb{Q}}$ 下, 我们有:

$$\mathbb{E}[\langle M^n\rangle_T^{\frac{p}{2}}] \leq x_0(\int_0^T (\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\int_{\varphi(t)}^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta d\widetilde{W}_\theta)^{2p}])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[\sigma^{2p} X_t^{2p-2}])^{\frac{1}{p}} dt)^{\frac{p}{2}}$$

再次使用Burkholder-Davis-Gundy 不等式和广义 Minkowski 不等式，我们有:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle M^n\rangle_T^{\frac{p}{2}}] &\leq x_0(\int_0^T (C(2p)\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\int_{\varphi(t)}^t (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta)^2 d\theta)^p])^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}[\sigma^{2p} X_t^{2p-2}])^{\frac{1}{p}} dt)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq x_0 C(2p)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T (\int_{\varphi(t)}^t (\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta, X_\theta)\sigma X_\theta)^{2p}])^{\frac{1}{p}} d\theta)(\mathbb{E}[\sigma^{2p} X_t^{2p-2}])^{\frac{1}{p}} dt)^{\frac{p}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t^{2p-2}] &= X_0^{2p-2}\mathbb{E}[e^{(2\sigma W_t-\sigma^2 t)(p-1)}]\\ &= X_0^{2p-2}e^{2t(p-1)^2\sigma^2-p(t-1)\sigma^2}\\ &\le X_0^{2p-2}e^{\sigma^2 p}, \forall p\in[2,+\infty)\end{aligned}$$

定义$\widetilde{C}(p)$ 如下

$$\widetilde{C}(p) = X_0^{2p-2}e^{\sigma^2 p}, \forall p\in[2,+\infty)$$

另一方面我们有:

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta,X_\theta)\sigma X_\theta)^{2p}] = \frac{1}{(T-\theta)^p}\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[N(d_1(\theta))^{2p}]$$

这里

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}, d_1(\theta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-\theta}}(log(\frac{X_\theta}{K})+\frac{1}{2}(T-\theta))$$

记 $d_2(\theta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-\theta}}(log(\frac{X_\theta}{K})-\frac{1}{2}(T-\theta))$, 此定义将在后面用到. **注** For more details, see [**?**]

由$X_t = x_0 exp(\sigma\widetilde{W}_t+\frac{1}{2}\sigma^2 t)$, 我们有:

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta,X_\theta)\sigma X_\theta)^{2p}] = (\frac{1}{2\pi(T-\theta)})^p\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[exp(-p(\frac{log(\frac{x_0}{K})+\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma\widetilde{W}_\theta}{\sigma\sqrt{T-\theta}})^2)]$$

定义常数λ 如下: $\lambda = log(\frac{x_0}{K})+\frac{1}{2}\sigma^2 T$, 则不等式为:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{Q}}}[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\theta,X_\theta)\sigma X_\theta)^{2p}] &= (\frac{1}{2\pi(T-\theta)})^p\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{z^2}{2\theta}}e^{-\frac{p}{T-\theta}(z+\frac{\lambda}{\sigma})^2}dz\\ &= (\frac{1}{2\pi(T-\theta)})^p\sqrt{\frac{T-\theta}{T-\theta+2p\theta}}e^{-\frac{p}{T-\theta+2p\theta}\frac{\lambda^2}{\sigma^2}}\\ &\le \frac{\sqrt{T-\theta}}{(2\pi(T-\theta))^p}\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2p}}e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle M^n\rangle_T^{\frac{p}{2}}] &\le x_0 C(2p)^{\frac{1}{2}}(\int_0^T(\int_{\varphi(t)}^t(T-\theta)^{\frac{1}{2p}-1}d\theta)\frac{1}{2\pi}(\frac{\sigma}{\sqrt{2p}\lambda}e^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}}x_0^{2-\frac{2}{p}}e^{\sigma^2}dt)^{\frac{p}{2}}\\ &= x_0^p C(2p)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2\pi})^{\frac{p}{2}}(\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2\pi}})^{\frac{1}{2}}e^{\frac{2\sigma^2 p-1}{4}}(\int_0^T\int_{\varphi(t)}^t(T-\theta)^{\frac{1}{2p}-1}d\theta dt)^{\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\int_0^T\int_{\varphi(t)}^t(T-\theta)^{\frac{1}{2p}-1}d\theta dt)^{\frac{p}{2}} &= (2p\int_0^T((T-\varphi(t))^{\frac{1}{2p}}-(T-t)^{\frac{1}{2p}})dt)^{\frac{p}{2}}\\ &= (2p\frac{T}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(T-t_i)^{\frac{1}{2p}}-\int_0^T(T-t)^{\frac{1}{2p}}dt)^{\frac{p}{2}}\\ &= (2p)^{\frac{p}{2}}(\frac{T}{n})^{\frac{2p+1}{4}}(\sum_{i=1}^n i^{\frac{1}{2p}}-\int_0^n(n-v)^{\frac{1}{2p}}dv)^{\frac{p}{2}}\\ &= (2p)^{\frac{p}{2}}(\frac{T}{n})^{\frac{2p+1}{4}}(\sum_{i=1}^n i^{\frac{1}{2p}}-\frac{2p}{2p+1}n^{\frac{2p+1}{2p}})^{\frac{p}{2}}\end{aligned}$$

由于$0<\frac{1}{2p}=q<1$, 我们知道函数 $g(x)=x^q$ 是凹函数(concave). 由$g(x)$的凹性质, 我们有:

$$\sum_{i=1}^{n-1}i^q+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(i+1)^q-i^q}{2}<\int_1^n x^q dx$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^q < \frac{1}{q+1}(n^{q+1}-1) - \frac{1}{2}(n^q - 1)$$
$$< \frac{n^{q+1}}{q+1} - \frac{n^q}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^q = \sum_{i=1}^{n-1} i^q + n^q < \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{2p}} - \frac{2p}{2p+1} n^{\frac{2p+1}{2p}} < \frac{n^{\frac{1}{2p}}}{2}$$

因此:

$$\mathbb{E}[\langle M^n \rangle_T^{\frac{p}{2}}] \le x_0^p C(2p)^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2\pi})^{\frac{p}{2}} (\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2\pi}})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\sigma^2 p-1}{4}} (2p)^{\frac{p}{2}} (\frac{T}{n})^{\frac{2p+1}{4}} (\frac{1}{2})^{\frac{p}{2}} n^{\frac{1}{4}}$$

故而对于 $p \ge 2$,

$$\mathbb{P}(M_T^n \ge \gamma) \le L(p) = C_0 \frac{1}{\gamma^p} C(p) x_0^p C(2p)^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2\pi})^{\frac{p}{2}} e^{\frac{\sigma^2 p}{2}} p^{\frac{p}{2}} (\frac{T}{n})^{\frac{p}{2}}$$

这里 $C_0 = T^{\frac{1}{4}}(\frac{\sigma}{\lambda\sqrt{2\pi}})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}}$ 是一个与p, n 无关的常数。 通过令等式 $\frac{\partial \log(L(p))}{\partial p} = 0$ 成立。 我们找到最优的 p。

$$\log(L(p)) = \frac{3}{2} p \log(p) + \log(C_0) - \frac{p}{2}\log(C_1 n)$$

这里 $C_1 = \frac{\gamma^2 \pi e^{-\sigma^2}}{16 x_0^2 T}$ 是与 p, n 无关的常数。

$$0 = \frac{\partial \log(L(p))}{\partial p} = \frac{1}{2}(3 + 3\log(p) - \log(C_1 n))$$

$$p = \frac{(C_1 n)^{\frac{1}{3}}}{e}$$

最优的p 是 $p*$:

$$p* = \begin{cases} 2, & \log(C_1 n) < 3\log(2) + 3 \\ \frac{(C_1 n)^{\frac{1}{3}}}{e}, & \log(C_1 n) \ge 3\log(2) + 3 \end{cases}$$

因此 $L(p)$ 的最小值是:

$$L(p*) = \begin{cases} \frac{8C_0}{C_1 n}, & \log(C_1 n) < 3\log(2) + 3 \\ C_0 e^{-\frac{3(C_1 n)^{\frac{1}{3}}}{2e}}, & \log(C_1 n) \ge 3\log(2) + 3 \end{cases}$$

现在我们得到了一个 N 的估界: **Proposition**

$$\mathbb{P}(M_T^n \ge \gamma) \le \begin{cases} \frac{128\sigma^{\frac{1}{2}} x_0^2 T^{\frac{5}{4}} e^{\sigma^2}}{e^{\frac{1}{4}} \gamma^2 \pi (\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{n}, & \log(C_1 n) < 3\log(2) + 3 \\ T^{\frac{1}{4}} (\frac{\sigma}{(\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T)\sqrt{2\pi}})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{3\gamma^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}}{2e x_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} 16^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\sigma^2}{3}}} n^{\frac{1}{3}}}, & \log(C_1 n) \ge 3\log(2) + 3 \end{cases}$$

3.2 参数M

在确定了 N 的迭代初始值之后 N_0，我们可以使用该值来确定一个合适大小的 M 的迭代初始值。一个合适的 M 的初始值应该满足如下条件：在 N 为其初始迭代值时， M 的值应该使得模特卡罗模拟出的概率 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$ 收敛稳定。 也即，固定N 为其初始值不变，当 M 在其迭代初始值附近扰动时，相应的 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$ 也只是微小扰动。动态调优的技术可以被应用在这里。

在我们的问题背景下，通过动态调优和经验发现，一个较为恰当的 M 初始值可以为 $M = 10^6$, 我们通过比较 $M = 10^6 + i * 100,\ i = 0, ..., 10$ 所对应的 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$来调整 M, 若对应的概率在 10^{-3}范围内，则将M 减小为原先的一半，否则增大 M 为原先的两倍。 重复此过程，知道发现满足条件的最小的 M。 我们然后固定这个最优的 M， 然后尝试找出最优的 N。

根据前面的理论，最优的 N 存在于 $[0, N_0]$ 区间内。我们仍然使用二分法寻找最优的N, 首先我们令 $N_1 = N_0/2$, 在此参数下模拟相应的 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$, 若此模拟概率大于 $Prob$, 则令 $N_2 = N_1/2$, 反之，则令 $N_2 = \frac{N_0+N_1}{2}$。 重复此过程直至找到最优的N。