基于 Intel Xeon/Xeon Phi 平台的关于离散时间对冲误差的并行化研究

叶帆[1,2]　陈浪石[1,3]　潘慈辉[1,4]

[1]Maison de la Simulation

[2]Atomic Energy and Alternative Energies Commission (C.E.A)

[3]French National Centre for Scientific Research (C.N.R.S)

[4]Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines University

November 27, 2014

内容提要

内容提要

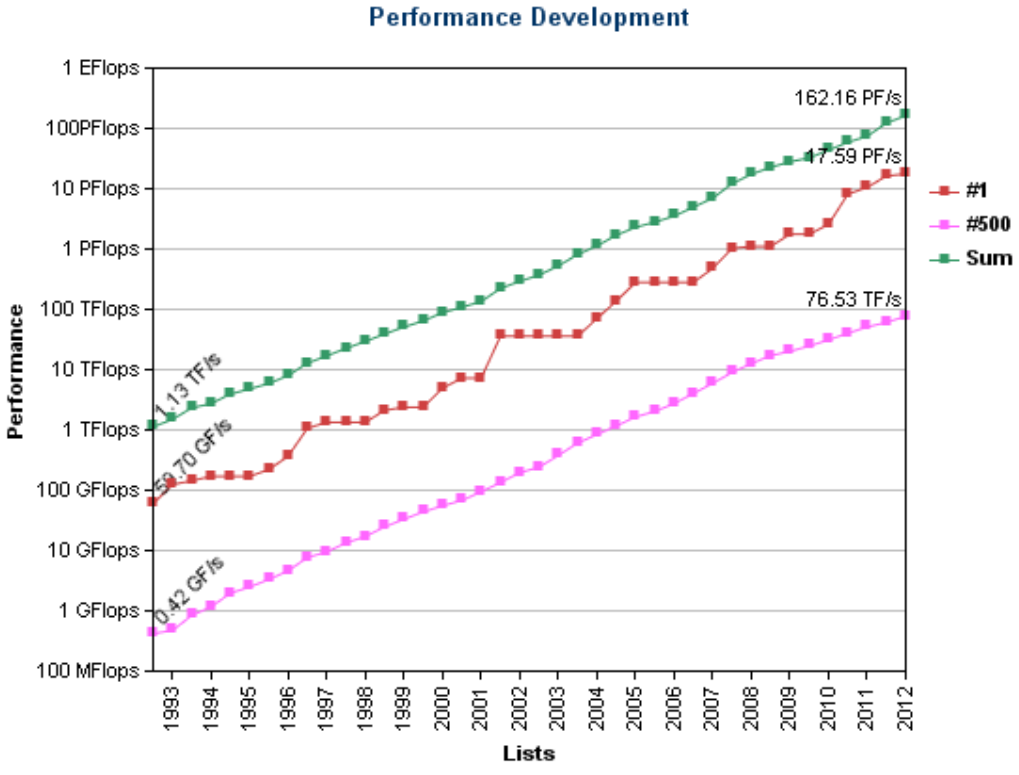
超算发展及 Xeon Phi

高性能计算已经进入后 Petaflop(10^{15})时代。但是能优化到 Petaflop 级别的实际应用却很少，面临问题如下

- 算法的内在并行性不足
- 并行算法的通信受制于内存和网络连接
- 并行编程的难度

超级计算机本身还面临

- 能耗过大



超算 Top500 发展趋势

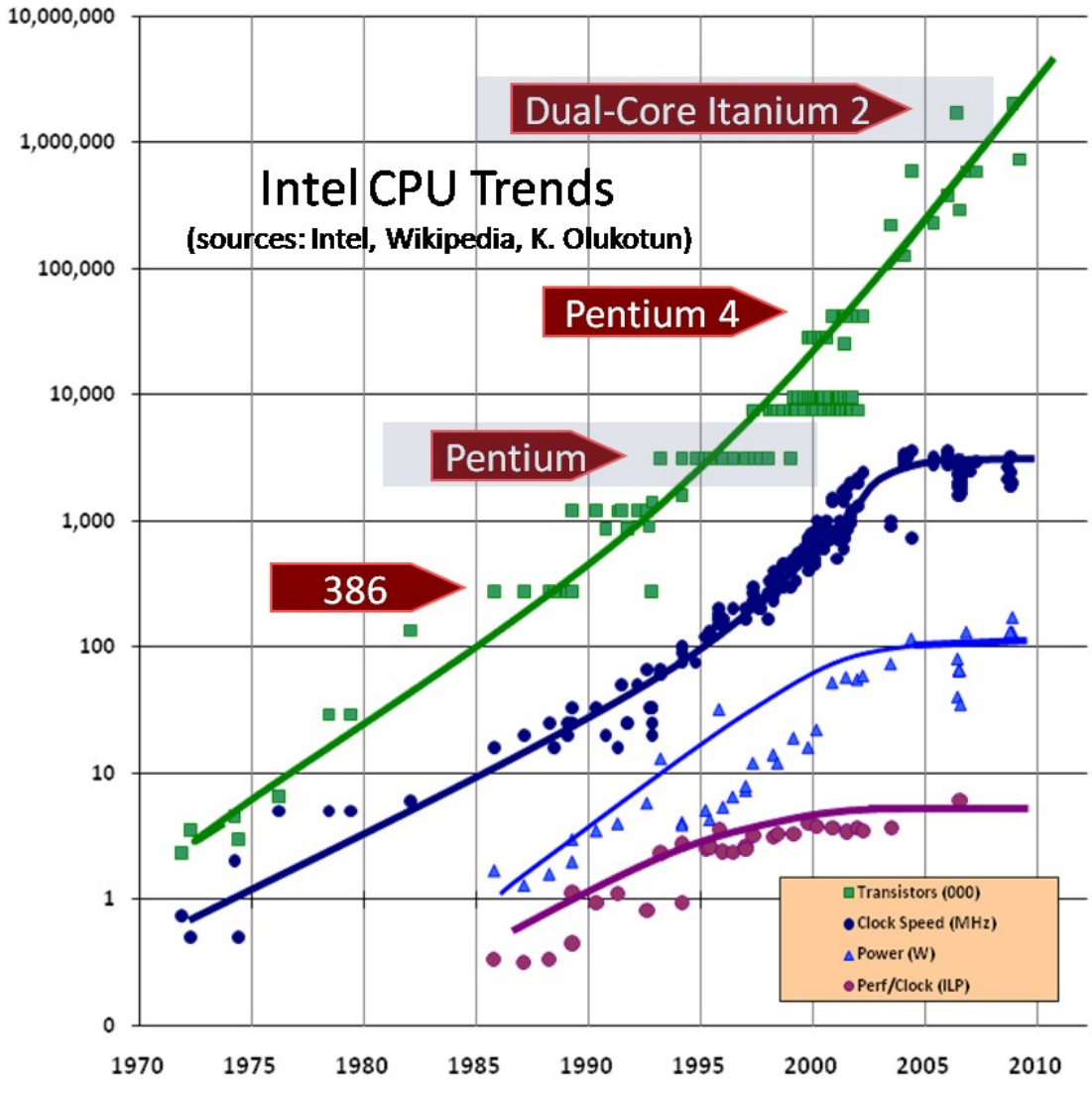
超算发展及 Xeon Phi

单个 CPU 的发展已经达到性能和功耗的瓶颈，超算转向众核架构(Manycore), 其具有如下优势

- 高带宽(bandwidth)带来的高通量(high data throughput)
- 高能耗效率(flops/watt)
- 适合大规模的数据并行性应用(data parallel)

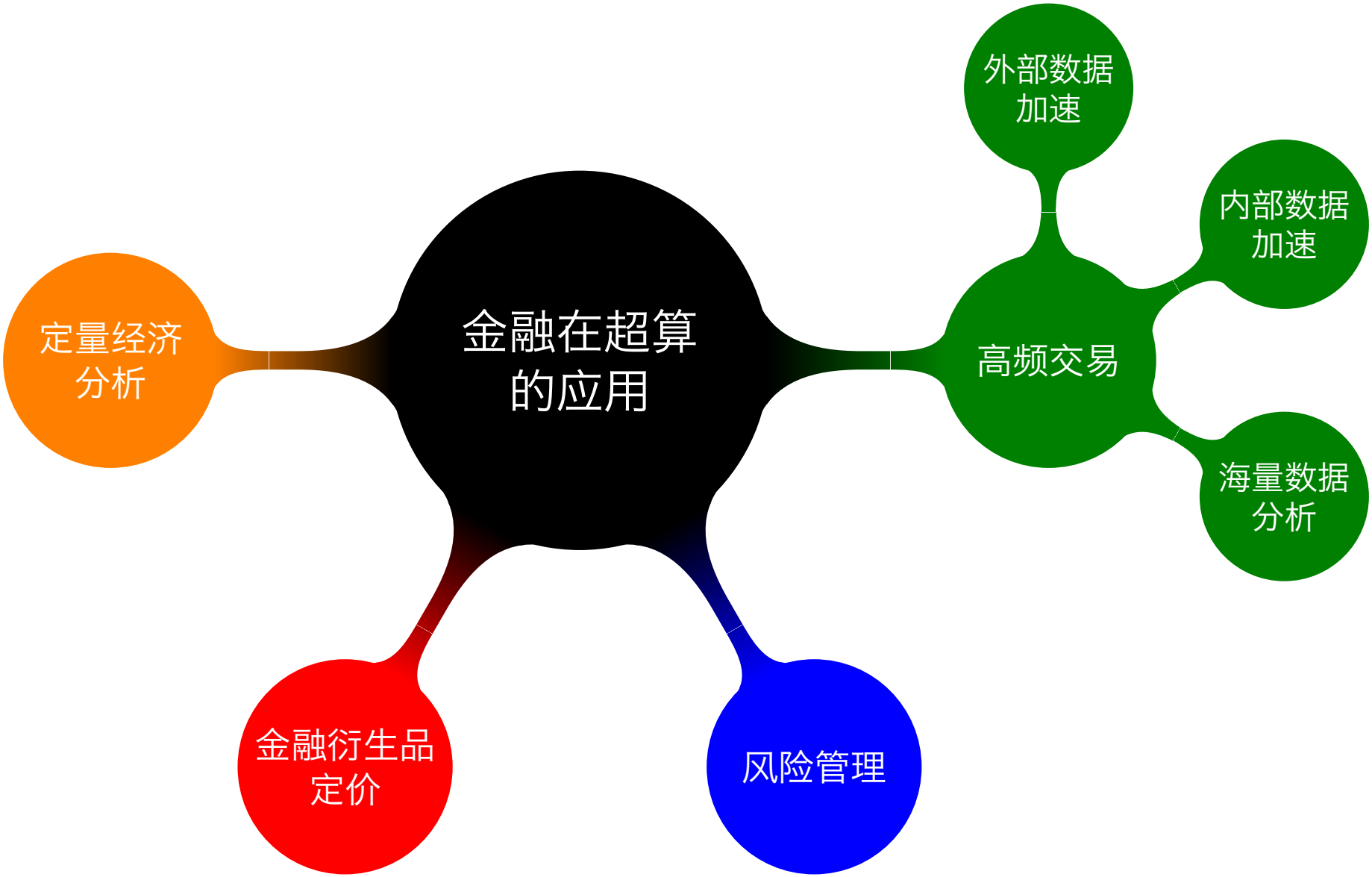
目前众核结构处理器的代表

- Nvidia 的 GPU 加速器
- Intel 的 Xeon Phi 协处理器



单个 CPU 发展遇到的各种瓶颈问题

金融领域的超算



金融在高性能计算上的几大应用

金融领域的超算

高频交易

从那些人们无法利用的极为短暂的市场变化中寻求获利的计算机化交易

1. 数据在交易所和计算机之间加速(co-location)
2. 数据在计算机内部加速(网卡+CPU 或者 FPGA
3. 海量数据的分析工作

金融衍生品定价

衍生品的复制与对冲策略，以减少最终收益的不确定性

- 模型的复杂度带来了密集的计算量
- 对冲的时效性需要计算的高速性

金融交易越来越依赖计算机程序和高性能计算集群

内容提要

Black-Scholes 模型

经济金融中的离散时间模型和连续时间模型之间的关系被广泛的研究。在不完备的市场中，经费自给的交易策略是不可能完美的复制连续时间模型中的金融衍生证券。我们希望研究离散化的交易策略和连续时间的交易策略的误差。我们的研究基于 Black-Scholes 模型。

广义 Black-Scholes 模型:

- 风险资产: $dX_t = \mu(X_t)X_t dt + \sigma(X_t)X_t dB_t$, $X_0 > 0$
- 无风险资产: $dS_t^0 = rS_t^0 dt$
- 中性风险概率: $W_t = B_t + \int_0^t \frac{\mu(X_s)-r}{\sigma(X_s)} ds$ 为布朗运动.
- 回报函数: $f \in L^2(X_t)$.

简单起见，我们假设 $r = 0, \sigma(X_t) = \sigma, f(x) = (x - K)^+$

交易误差

另 $u(t,x)=\mathbb{E}(e^{-r(T-t)}f(X_{T-t}^{x}))$, 期权定价公式为:

$$e^{-rT}f(X_T)=h(f)+\int_0^T \xi_t d\widetilde{X}_t$$

- 期权价格: $h(f)=u(0,x)$
- delta 对冲策略: $\xi_t=\frac{\partial u}{\partial x}$

连续时间的 delta 对冲策略和离散时间的 delta 对冲策略所产生的差:

$$\begin{aligned} M_T^N &= e^{-rT}f(X_T)-(u(0,x)+\int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t),X_{\varphi_t}))d\widetilde{X}_t \\ &= \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(t,X_t)d\widetilde{X}_t-\int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t),X_{\varphi(t)})d\widetilde{X}_t \end{aligned}$$

交易误差

$$M_T^N = (X_T - K)^+ - \mathbb{E}[(X_T - K)^+] - \int_0^T \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(t), X_{\varphi(t)})dX_t$$

$$= -\frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv + \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{x_0}{K}) - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$+ (X_T - K)^+ - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log(\frac{X_{t_i}}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 (T - t_i)}{\sigma\sqrt{T - t_i}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

这里 $t_k = kT/N, k \in \{0, ..., N\}$ 以及 $\varphi(t) = sup\{t_i | t_i \leq t\}$.

串行算法

Step1: 给定 M (蒙特卡洛模拟的次数) 和 N (离散时间点的数目), 生成矩阵 $M \times N$ 的 $NRV[M][N]$. 该矩阵由 $M \times N$ 个独立标准正态分布的随机变量组成。

Step2: 生成布朗运动矩阵 $BM[M][N]$: $BM[i][j] = BM[i][j-1] + \sqrt{\frac{T}{N}} NRV[i][j]$ 初始条件为 $BM[i][1] = \sqrt{\frac{T}{N}} NRV[i][1], 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$.

Step3: 生成价格矩阵 $PX[M][N]$: $PX[i][j] = x_0 exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 j\frac{T}{N} + \sigma BM[i][j])$, $1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N$.

Step4: 对每个 $1 \leq i \leq M$, 计算 $M_T^N[i]$。计算 $M_T^N[i]$ 小于 ϵ 的次数 s, 计算模拟仿真的概率 $P = \frac{s}{M}$.

Step5: 如果 P 大于阈值概率 $Prob$, 则我们降低 N, 反之增加 N.

Step6: 由新给出的 N 重复上述过程.

内容提要

参数选择

对于参数 M, N:

- 给定 N, 计算 M_T^N
- 给定 M, 计算 $M_T^N \leq \epsilon$ 的概率，ϵ 为我们可以接受的最大误差
- 由计算出的概率更新 M, N 重复前两步，直到 $M_T^N \leq \epsilon$ 的概率刚好超过某一特定值：$Prob = 95\%$

如何选择 M, N 的初始值以及如何迭代更新?

- 较大的 M 会增大模特卡罗方法计算出来的概率的可信度
- 较大的 M 将不可避免的造成更高的资源和硬件的要求
- 过小的 M 可能给出错误的 N 的更新方向，导致不收敛

解决方案：我们在这里给出一种不依赖于 M 的 N 的初始值选定方法。

参数选择

我们需要一个尽可能小的 N，使得存在某个关于 N 的函数 $P(N)$，如下不等式成立：

$$Probability(M_T^N \geq \epsilon) = \mathbb{P}(M_T^N \geq \epsilon) < P(N) \tag{1}$$

若我们能发现这样的函数 $P(N)$，则所有满足不等式：

$$P(N) \leq 1 - Prob = 5\% \tag{2}$$

的正整数 N，都满足 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon) > Prob = 95\%$。我们只需要取满足不等式的最小的正整数 N 即可。此时 N 的选取独立于 M，也即无论我们选取怎样的 M，理论上都会有 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon) > Prob$ 成立。

参数选择

我们的研究推导给出了一个适宜的 $P(N)$ 的表达式:

Theorem

假设如上文，我们有:

$$\mathbb{P}(M_T^n \geq \gamma) \leq \begin{cases} \frac{128\sigma^{\frac{1}{2}} x_0^2 T^{\frac{5}{4}} e^{\sigma^2}}{e^{\frac{1}{4}} \gamma^2 \pi (\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{n}, & \log(C_1 n) < 3\log(2) + 3 \\ T^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\sigma}{(\log(\frac{x_0}{K}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T)\sqrt{2\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{3\gamma^{\frac{2}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}}{2e x_0^{\frac{2}{3}} T^{\frac{1}{3}} 16^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\sigma^2}{3}}} n^{\frac{1}{3}}}, & otherwise \end{cases} \tag{3}$$

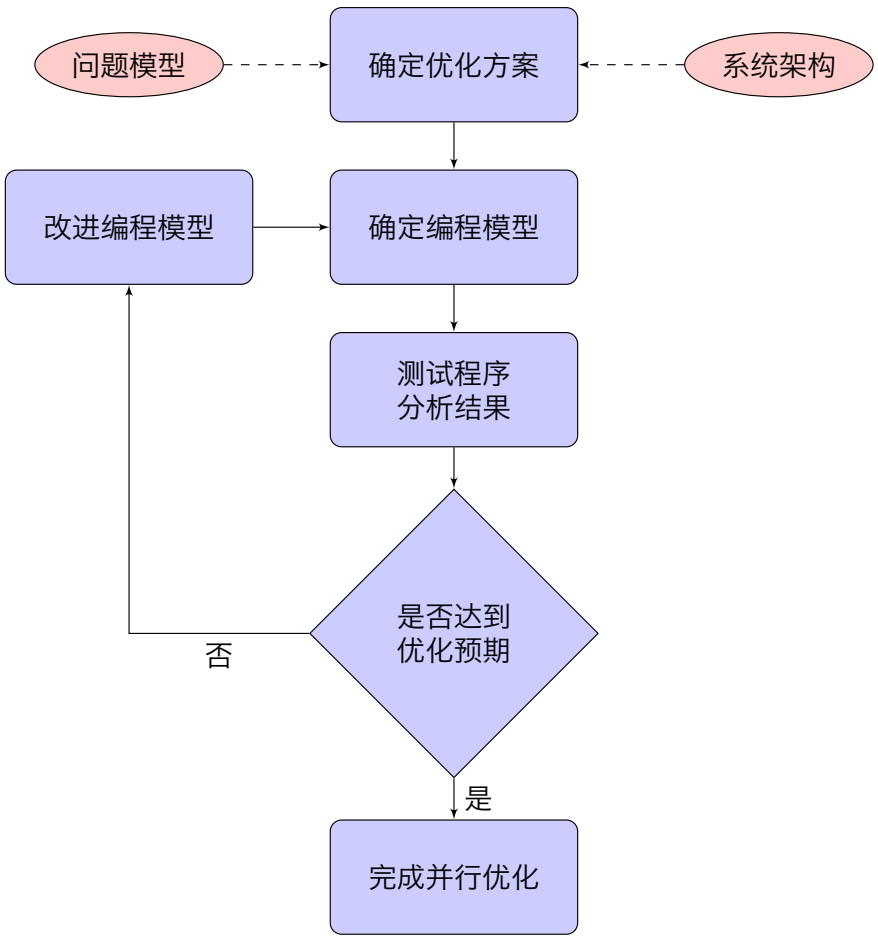
参数迭代

我们给出参数迭代的算法:

Step1:由上面定理确定了 N 的迭代初始值之后 N_0
Step2:固定该 N_0, 选取尽可能小的 M 的值 M_0,使得模特卡罗模拟出的概率 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$ 收敛稳定
Step3:固定 M_0, 使用二分法在 $[0, N_0]$ 区间内寻找最优的 N。首先我们令 $N_1 = N_0/2$，在此参数下模拟相应的 $\mathbb{P}(M_T^N < \epsilon)$，若此模拟概率大于 $Prob$，则令 $N_2 = N_1/2$，反之，则令 $N_2 = \frac{N_0+N_1}{2}$。

内容提要

常用的并行化策略



针对内存使用的优化

- 对齐数据(data alignment)
- 数据块(cache blocking)
- 预读取(prefetching)
- 流式存储技术(streaming store)

针对 for 循环的改进

- 循环展开(loop unrolling)
- 分块循环(loop tiling)
- 循环互换(loop interchange)
- 循环合并(loop fusion)
- 循环偏移(loop skewing)
- 循环剥离(loop peeling)

算法并行性分析

procedure BSERROR(M, N)
  $error \leftarrow 0$
  $NRV[N]$
  $BM[N]$
  $PX[N+1]$
  $\delta t \leftarrow T/N$
  $count \leftarrow 0$
  for $m = 1 : M$ **do**
    $error \leftarrow 0$
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussianNumGenerator()$
    end for
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
  end for
end procedure

算法并行性分析

procedure BSERROR(M, N)
  $error \leftarrow 0$
  $NRV[N]$
  $BM[N]$
  $PX[N+1]$
  $\delta t \leftarrow T/N$
  $count \leftarrow 0$
  for $m = 1 : M$ **do**
    $error \leftarrow 0$
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussianNumGenerator()$
    end for
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
  end for
end procedure

算法并行性分析

procedure BSERROR(M, N)
  $error \leftarrow 0$
  $NRV[N]$
  $BM[N]$
  $PX[N+1]$
  $\delta t \leftarrow T/N$
  $count \leftarrow 0$
  for $m = 1 : M$ **do**
    $error \leftarrow 0$
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussianNumGenerator()$
    end for
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
  end for
end procedure

算法并行性分析

procedure BSERROR(M, N)
  $error \leftarrow 0$
  $NRV[N]$
  $BM[N]$
  $PX[N+1]$
  $\delta t \leftarrow T/N$
  $count \leftarrow 0$
  for $m = 1 : M$ **do**
    $error \leftarrow 0$
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussianNumGenerator()$
    end for
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
  end for
end procedure

蓝色的外层循环为相互独立的蒙特卡洛模拟次数并行度高，可并行在单个 MIC 的不同线程上也可以并行在多个 MIC 处理器上

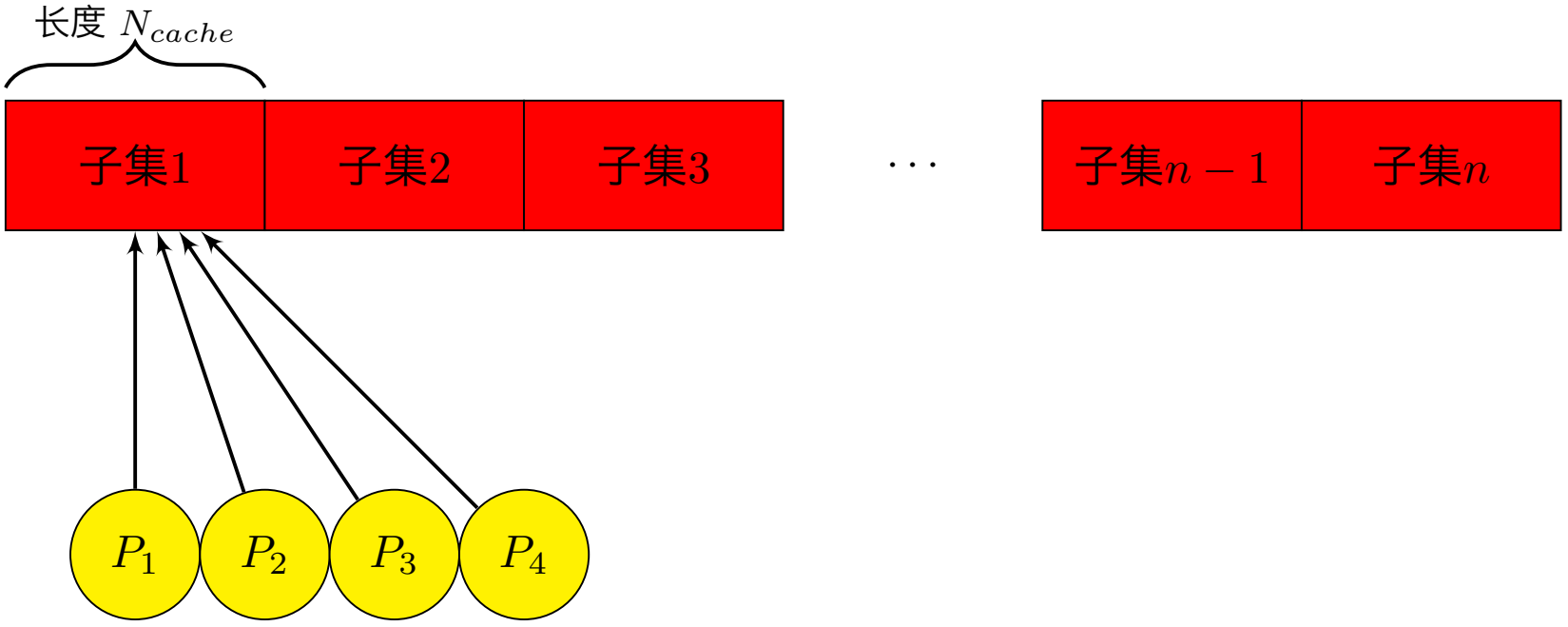
算法并行性分析

procedure BSERROR(M, N)
  $error \leftarrow 0$
  $NRV[N]$
  $BM[N]$
  $PX[N+1]$
  $\delta t \leftarrow T/N$
  $count \leftarrow 0$
  for $m = 1 : M$ **do**
    $error \leftarrow 0$
    for all $NRV[j]$ **do** $NRV[j] \leftarrow GaussianNumGenerator()$
    end for
    $BM[0] \leftarrow NRV[0] \cdot \sqrt{\delta t}$
    for all $BM[j]$ **do** $BM[j] \leftarrow BM[j-1] + NRV[j] \cdot \sqrt{\delta t}$
    end for
    $PX[0] \leftarrow X0$
    for all $j = 1 : N+1$ **do**
      $PX[j] \leftarrow X0 \cdot exp(-0.5 \cdot \sigma^2 \cdot j \cdot \delta t + \sigma \cdot BM[j-1])$
    end for
    for all $j = 0 : N-1$ **do**
      $Upper \leftarrow (\log(PX[j]/K) + 0.5 \cdot \sigma^2 \cdot (T - T_j))/(\sigma \cdot \sqrt{T - T_j})$
      $error \leftarrow error - 1/(\sqrt{2\pi}) \cdot (PX[j+1] - PX[j]) \cdot \int_{-\infty}^{Upper} e^{-t^2/2} dt$
    end for
  end for
end procedure

蓝色的外层循环为相互独立的蒙特卡洛模拟次数并行度高，可并行在单个 MIC 的不同线程上也可以并行在多个 MIC 处理器上

红色循环为离线状态数组，数组前后状态有依赖关系，需要进行并行优化

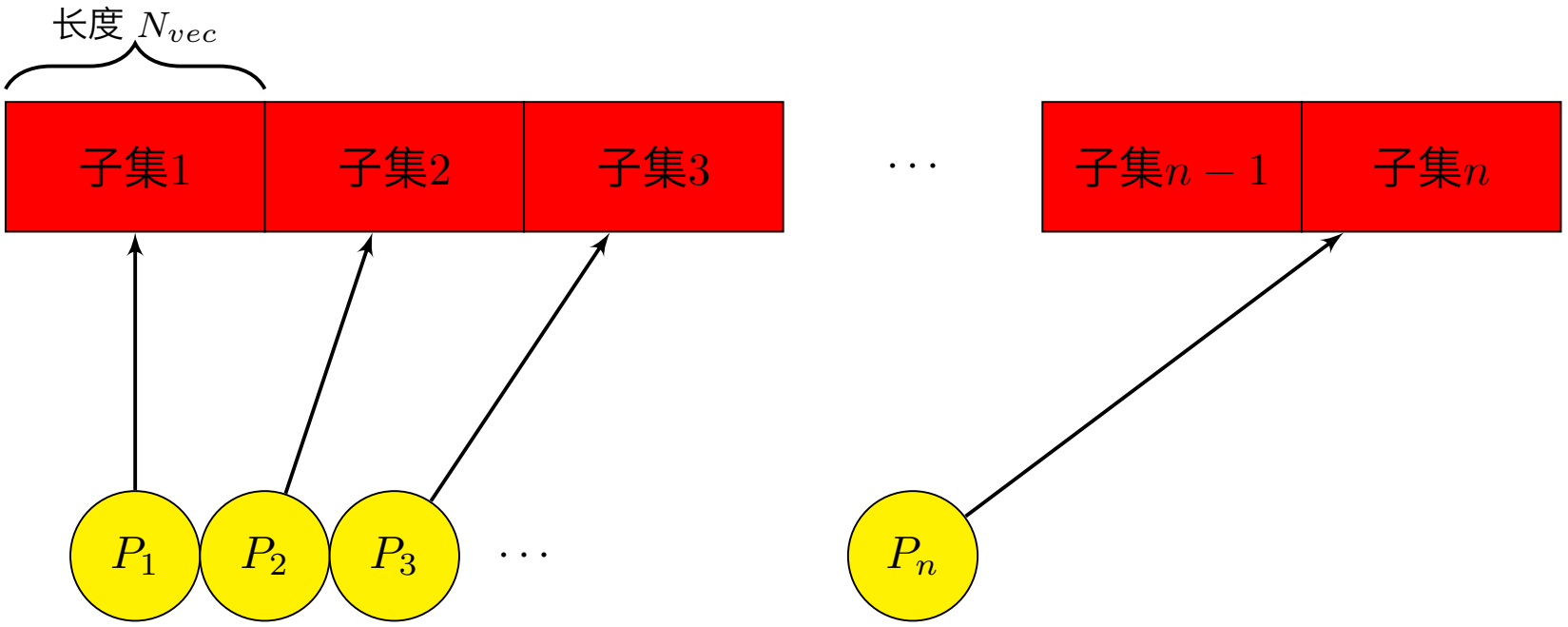
单片 MIC 单次蒙特卡洛并行优化



方案一

离线状态的数组总长度 N 分为 n 个子集，每个的长度为 N_{cache}，单片 MIC 上的所有线程依次同时并行工作于子集 1, 子集 2，直至最后一个子集。N_{cache} 的大小要和缓存大小匹配，使数据可以在缓存内被所有线程所共享($512K \times 61 = 31M$, 所有线程共享一个随机数发生流)

单片 MIC 单次蒙特卡洛并行优化



方案二

离线状态的数组总长度 N 分为 n 个子集，每个的长度为 N_{vec}，每个子集由一个线程负责，所有线程同时并行工作，每个线程拥有自己的随机数发生流，N_{vec} 要和单个核心的 $L2$ 缓存相符合(512K)，以达到最大的数据重用。

基于汇编的矢量化积分运算

并行算法中大量使用了如下形式的积分运算

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{4}$$

利用辛普森积分法(Simpson's rule)可以对高斯积分进行矢量化(vectorized)计算

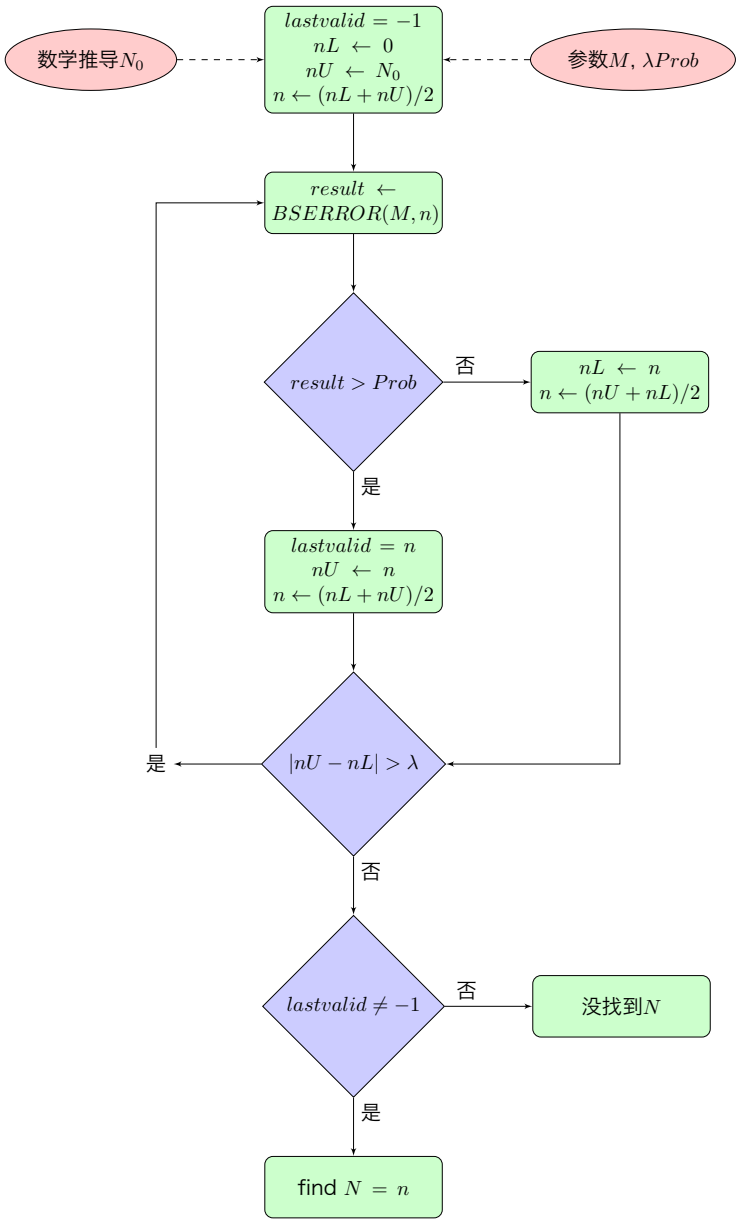
转化为高斯积分

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0.5 \times \sqrt{2\pi} + \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{5}$$

Simpson's rule

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(x_n)\right] \tag{6}$$

基于二分法的 N 值最优化搜索



初始值 N_0

本文通过数学推导给出了一个 N 值的上界 N_0, 从而使我们的二分法有了初始的搜索上界

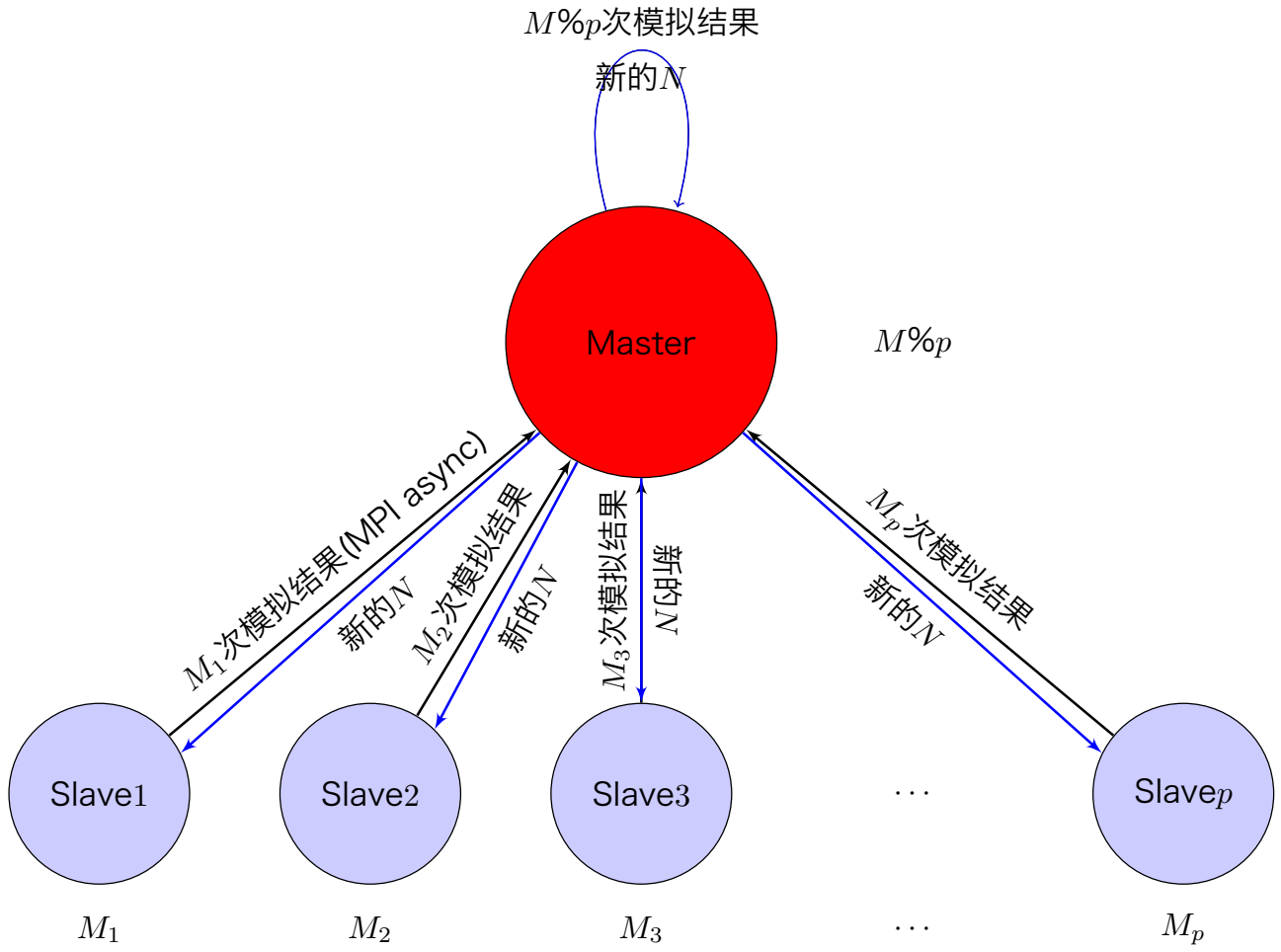
参数 λ, $Prob$, M

λ 是设置的最小区间，当上下界之差小于 λ 时，认为二分法结束 $Prob$ 则为置信概率，值越高表明最后搜索到得 N 值可信度越高。M 为蒙特卡洛模拟的次数，越大的 M 也说明搜索到的结果越可靠。

多 MIC 并行优化

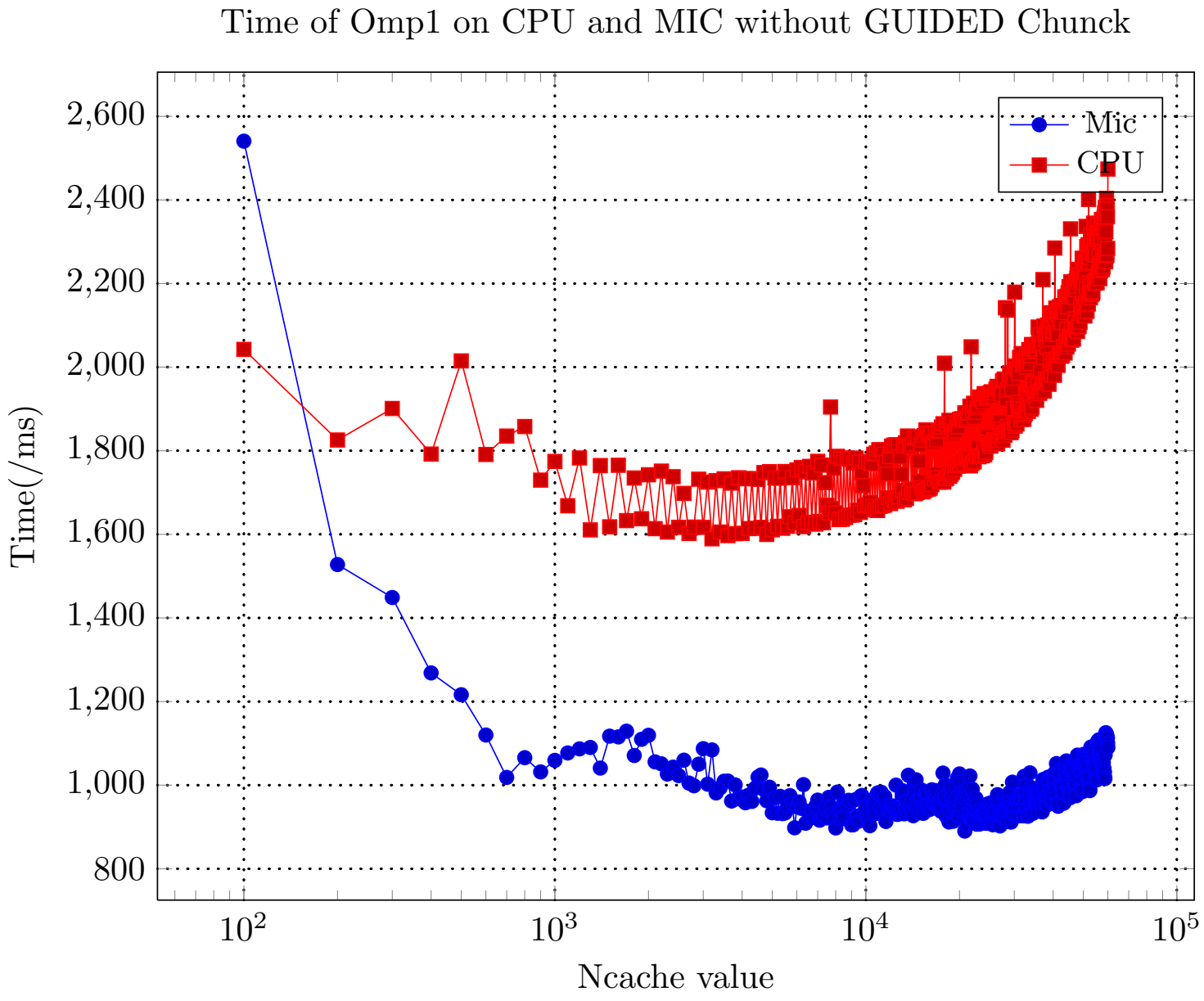
Maser-Slave 模式

一个节点被选为 Master，其余节点为 Slave 节点在 M 的维度上进行并行优化。



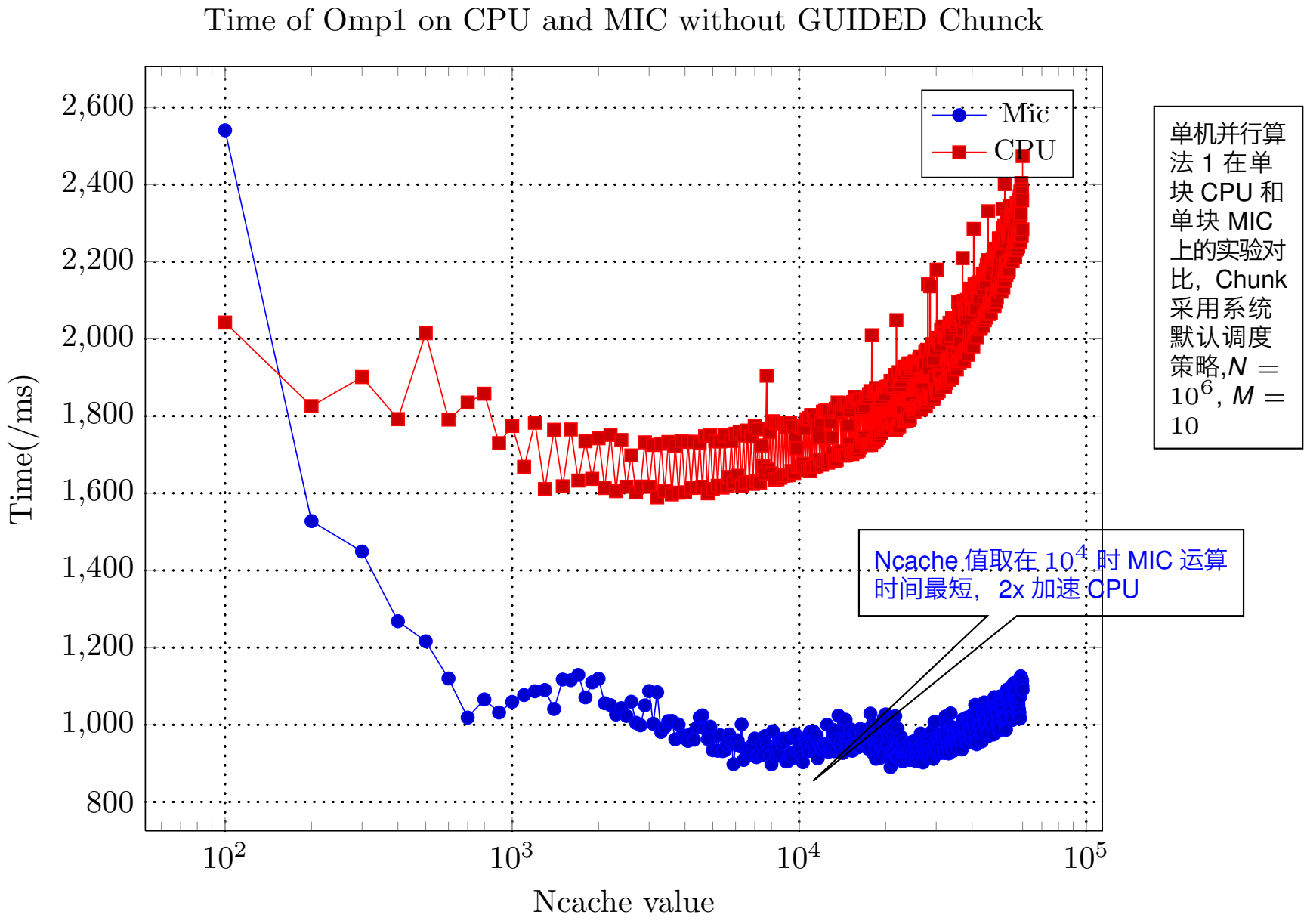
内容提要

单 MIC 及 CPU 版本的实验对比(1/2)



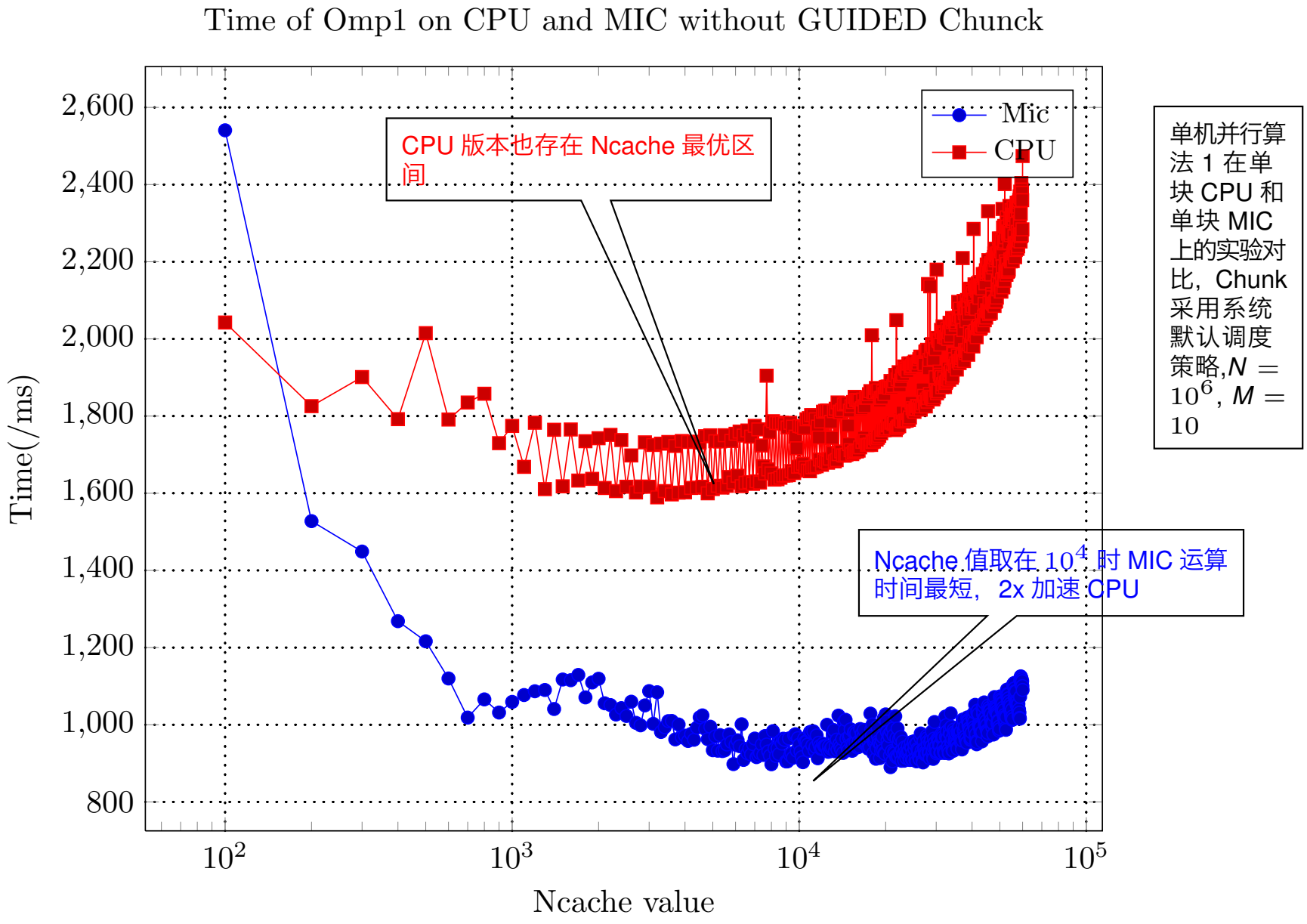
单机并行算法 1 在单块 CPU 和单块 MIC 上的实验对比，Chunk 采用系统默认调度策略,$N = 10^6$, $M = 10$

单 MIC 及 CPU 版本的实验对比(1/2)



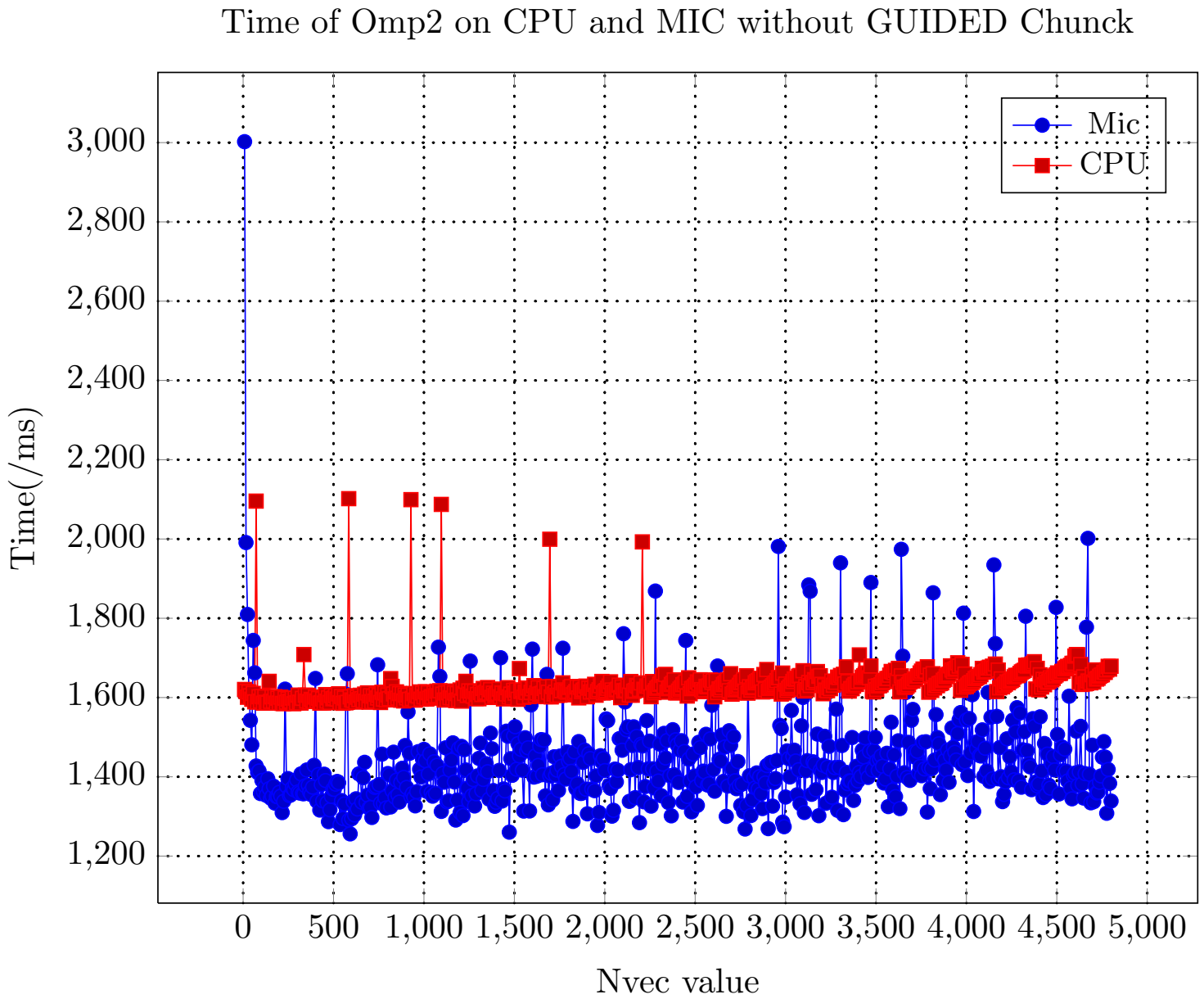
单机并行算法 1 在单块 CPU 和单块 MIC 上的实验对比，Chunk 采用系统默认调度策略,$N = 10^6$, $M = 10$

单 MIC 及 CPU 版本的实验对比(1/2)



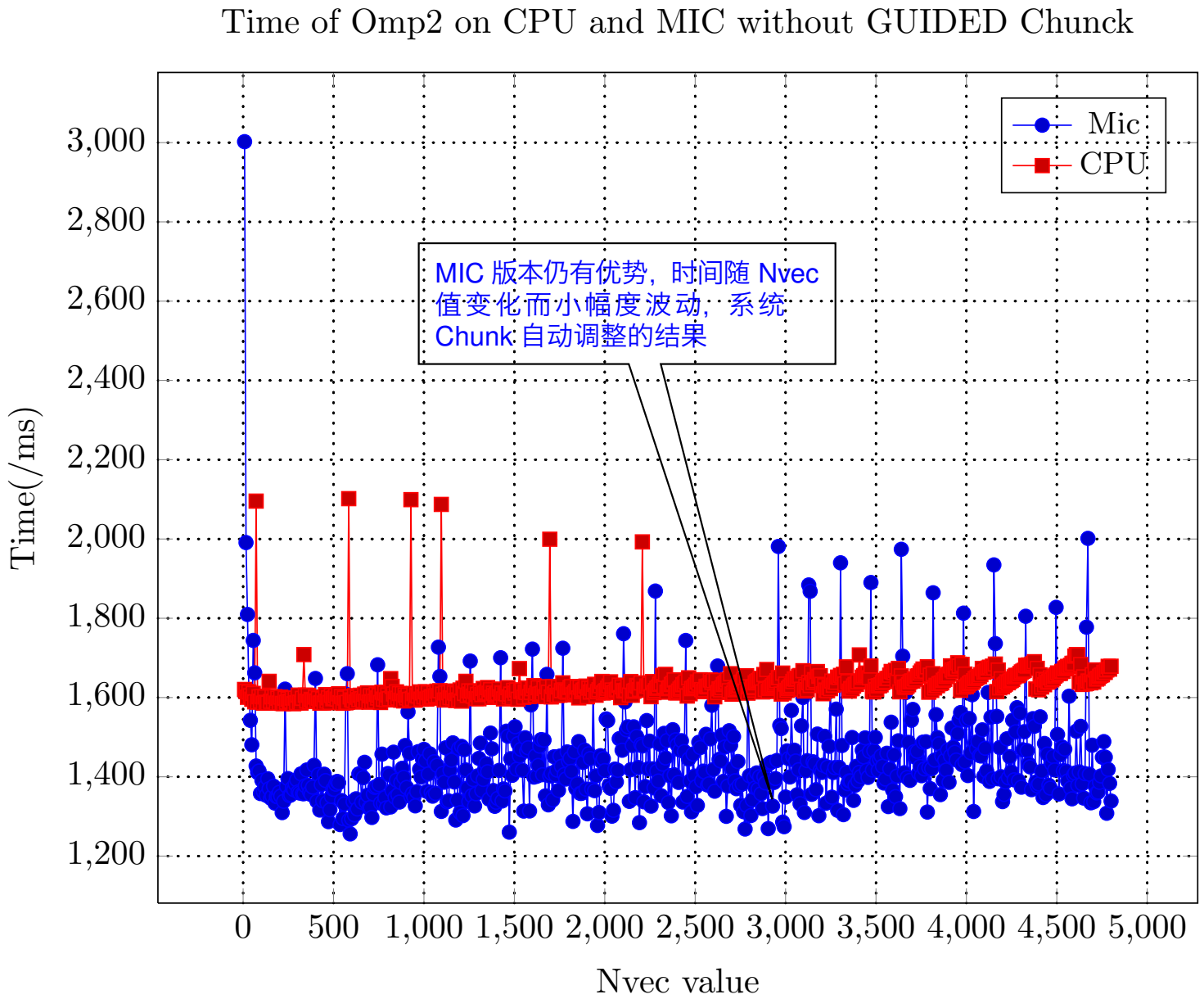
单机并行算法 1 在单块 CPU 和单块 MIC 上的实验对比，Chunk 采用系统默认调度策略,$N = 10^6$, $M = 10$

单 MIC 及 CPU 版本的实验对比(2/2)



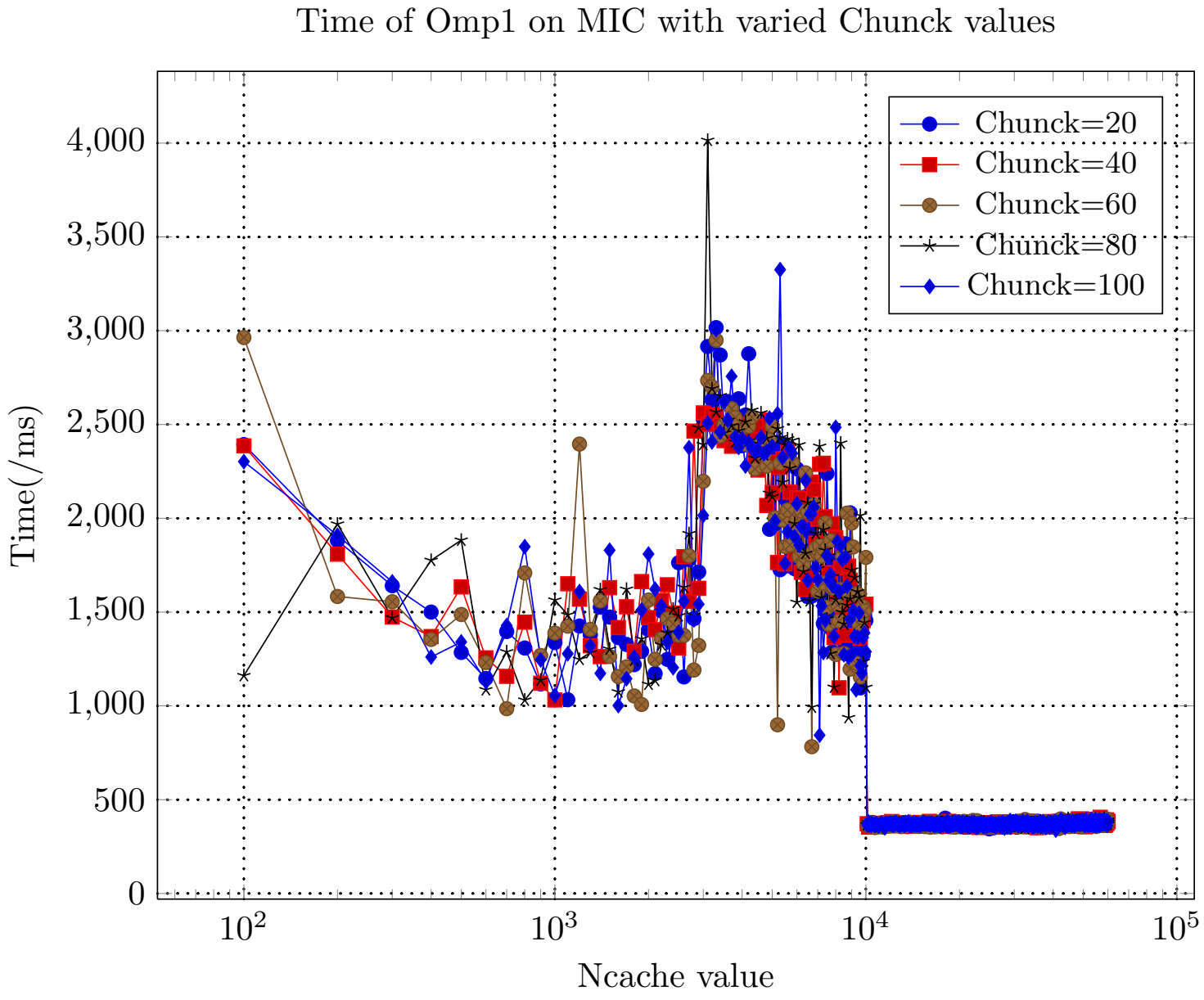
单机并行算法 2 在单块 CPU 和单块 MIC 上的实验对比，Chunk 采用系统默认调度策略,$N = 10^6$, $M = 10$

单 MIC 及 CPU 版本的实验对比(2/2)



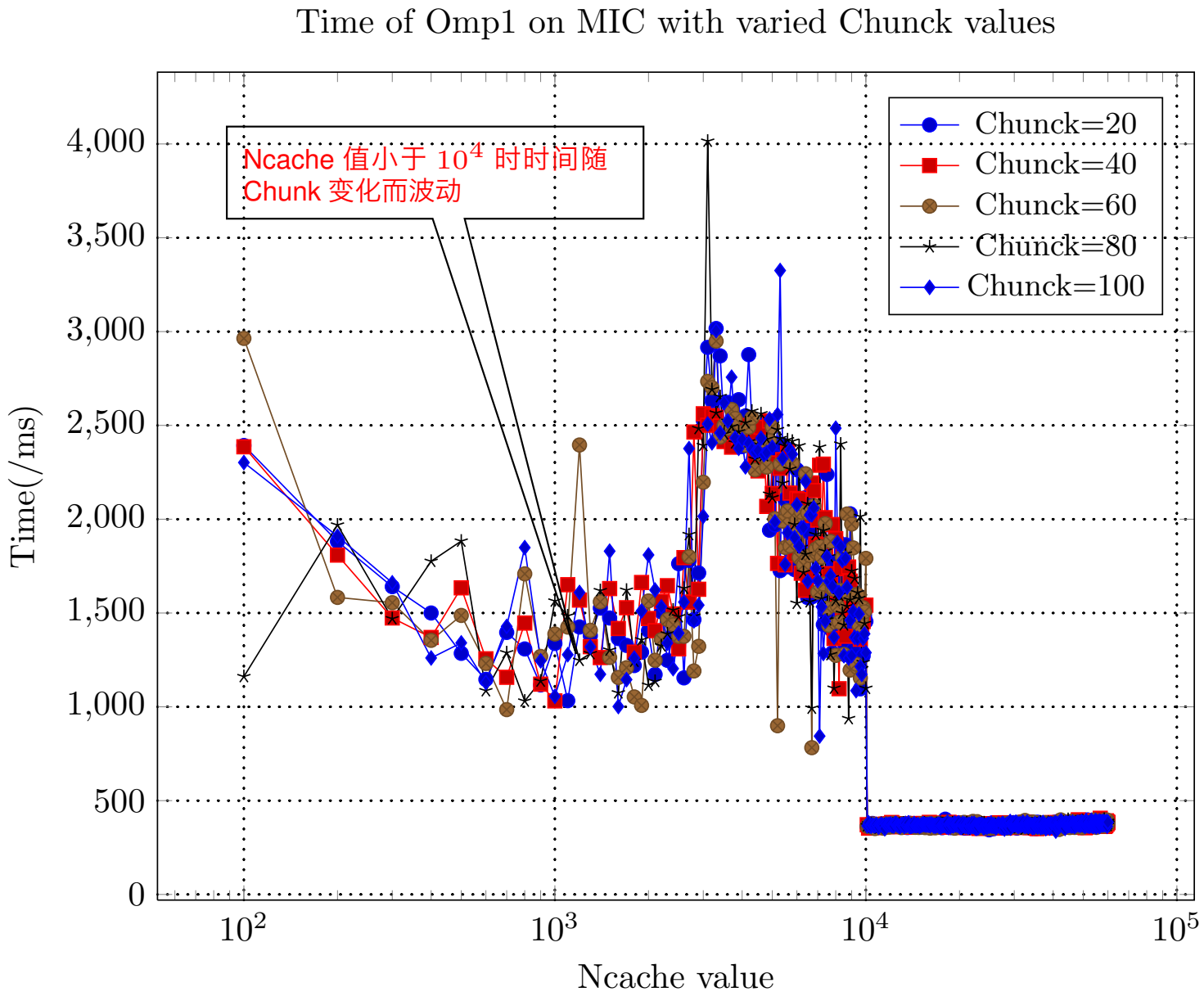
单机并行算法 2 在单块 CPU 和单块 MIC 上的实验对比，Chunk 采用系统默认调度策略,$N = 10^6$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 1 的影响



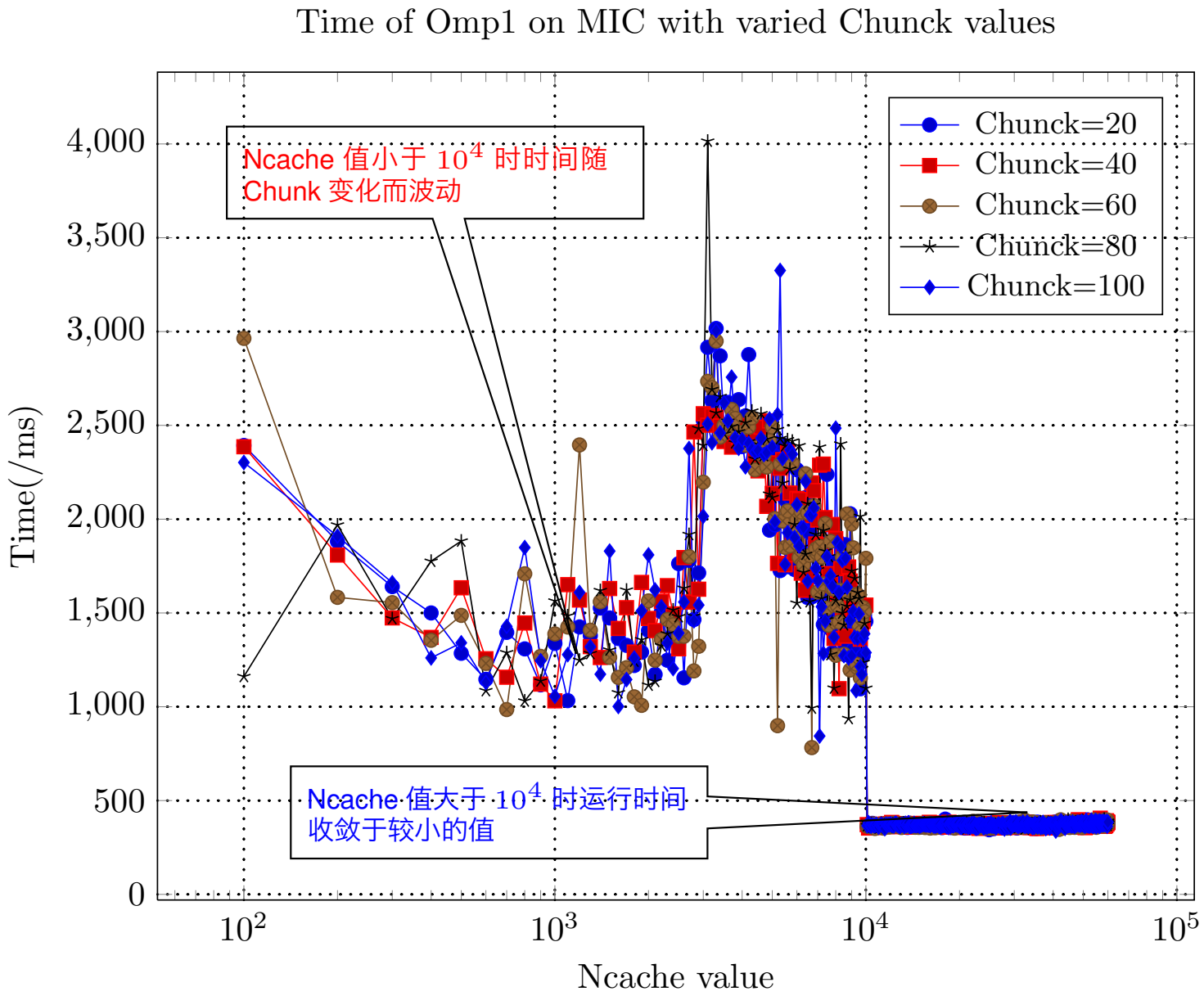
Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 1 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 1 的影响



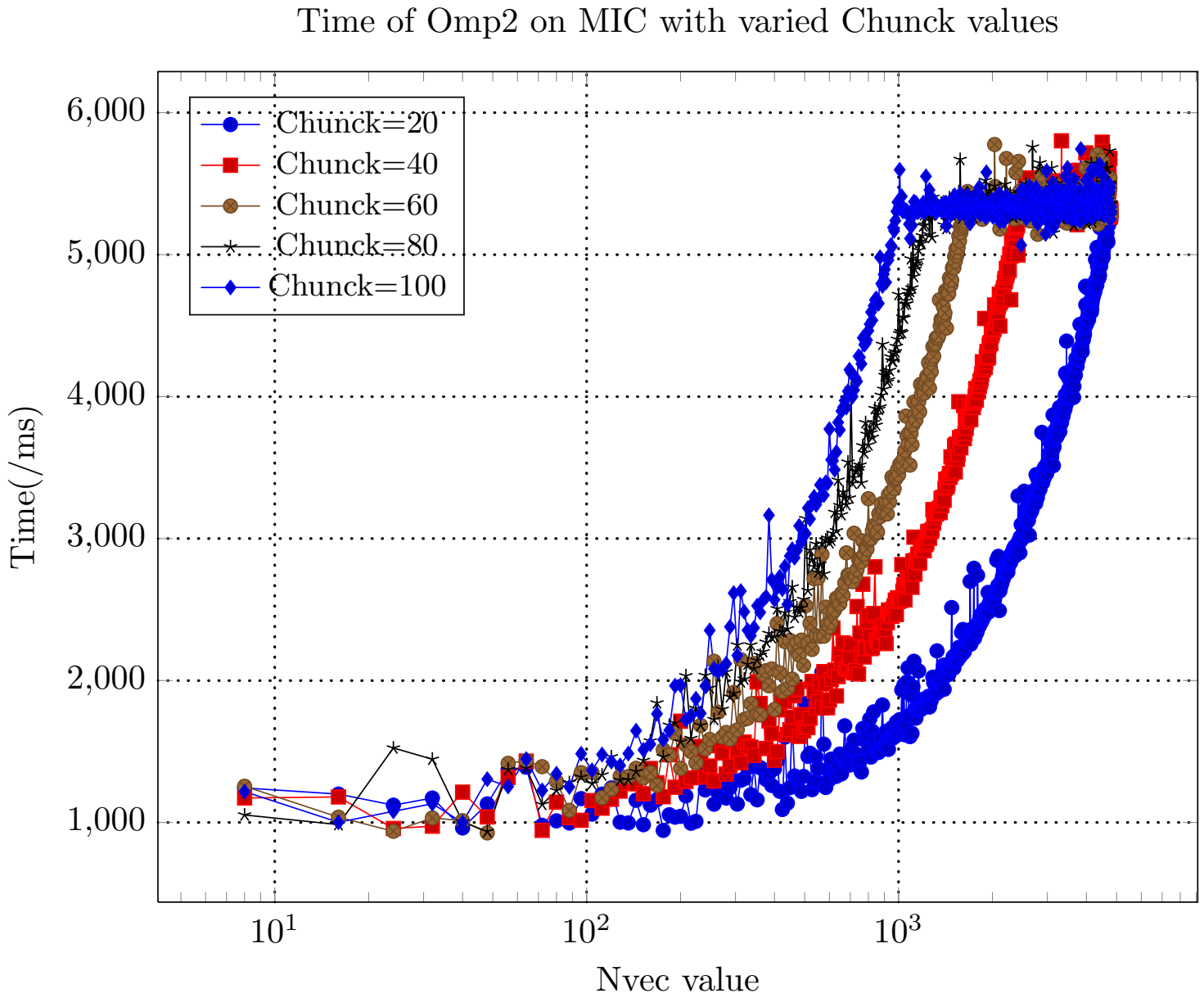
Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 1 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 1 的影响



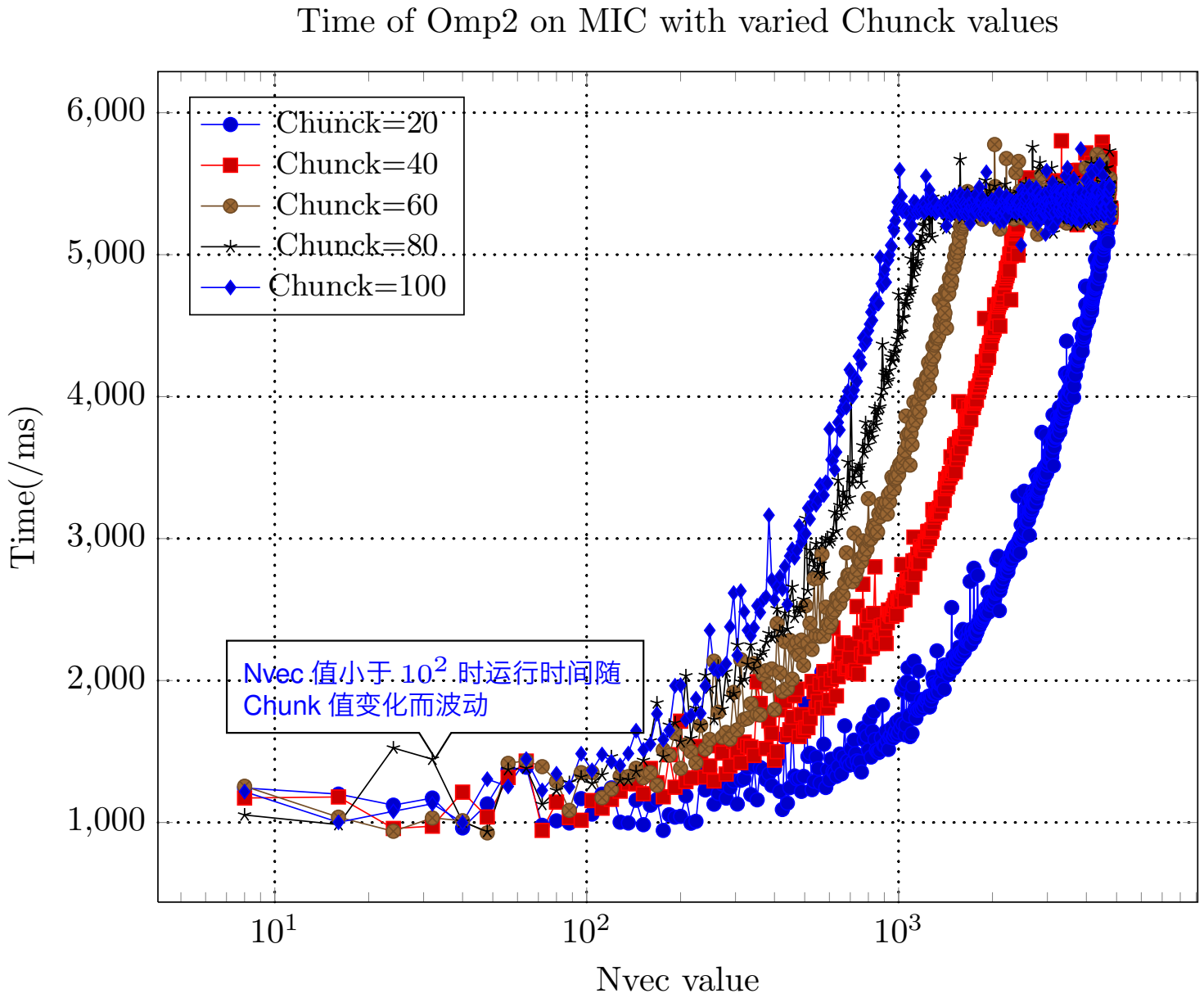
Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 1 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 2 的影响



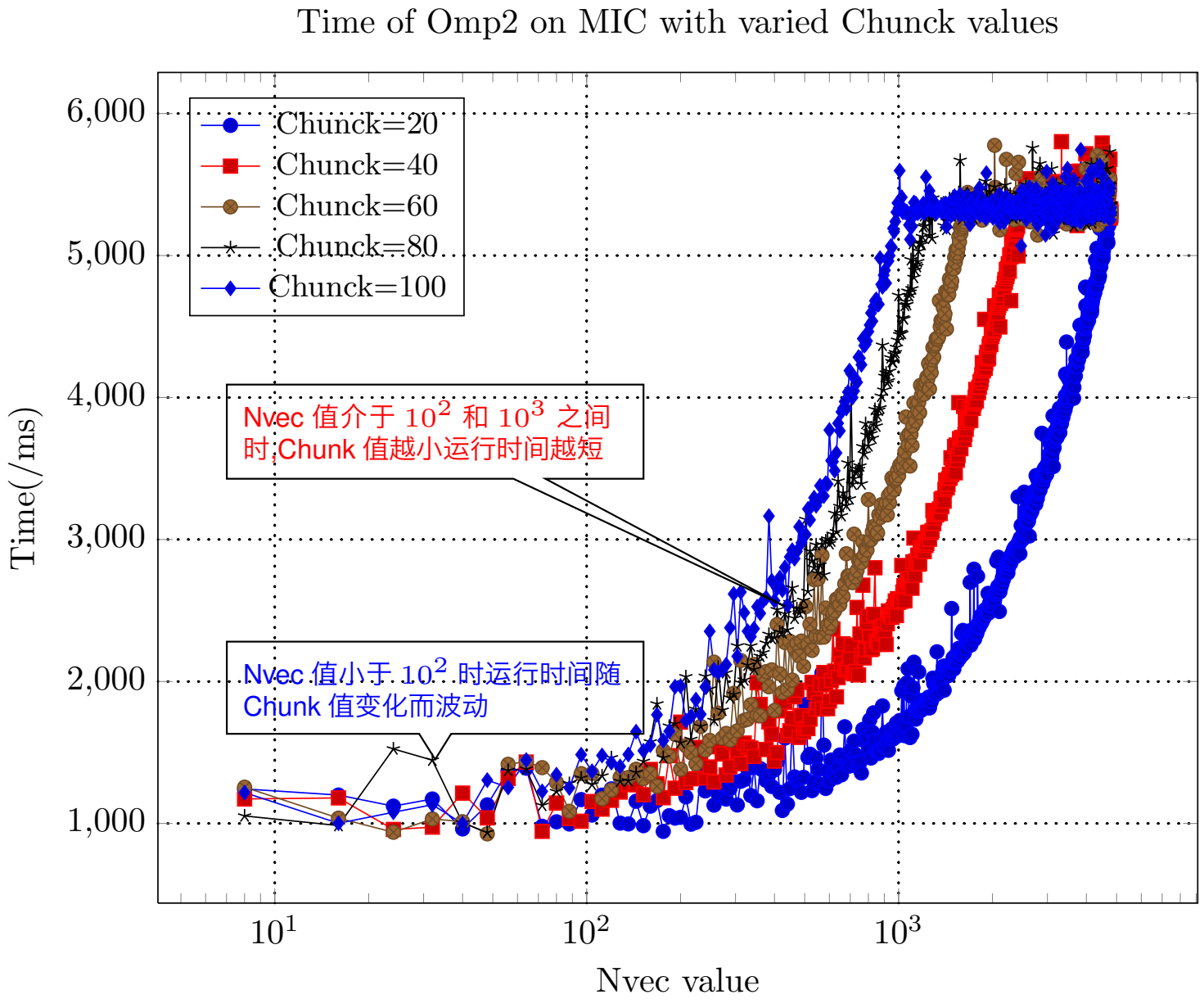
Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 2 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 2 的影响



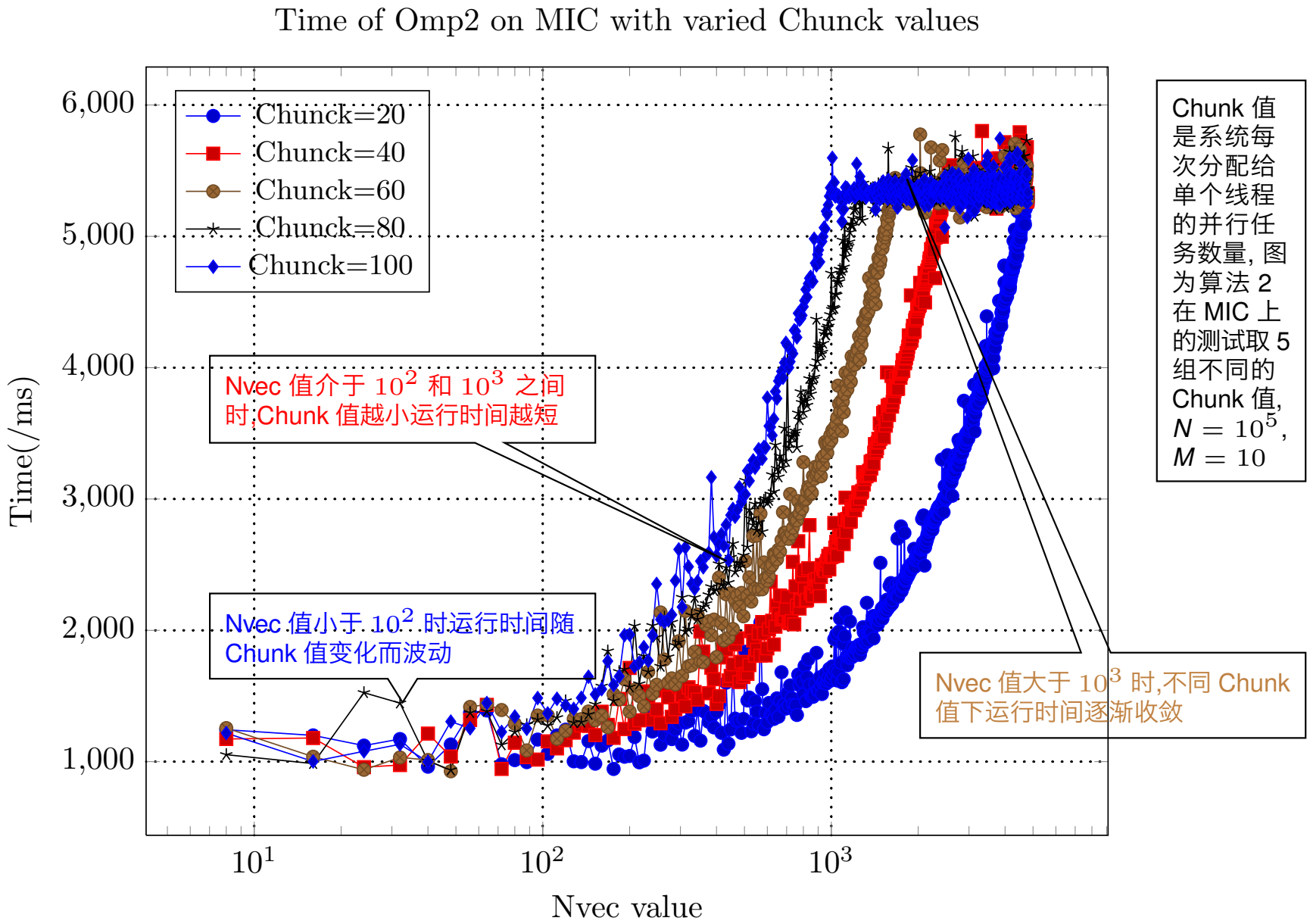
Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 2 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 2 的影响

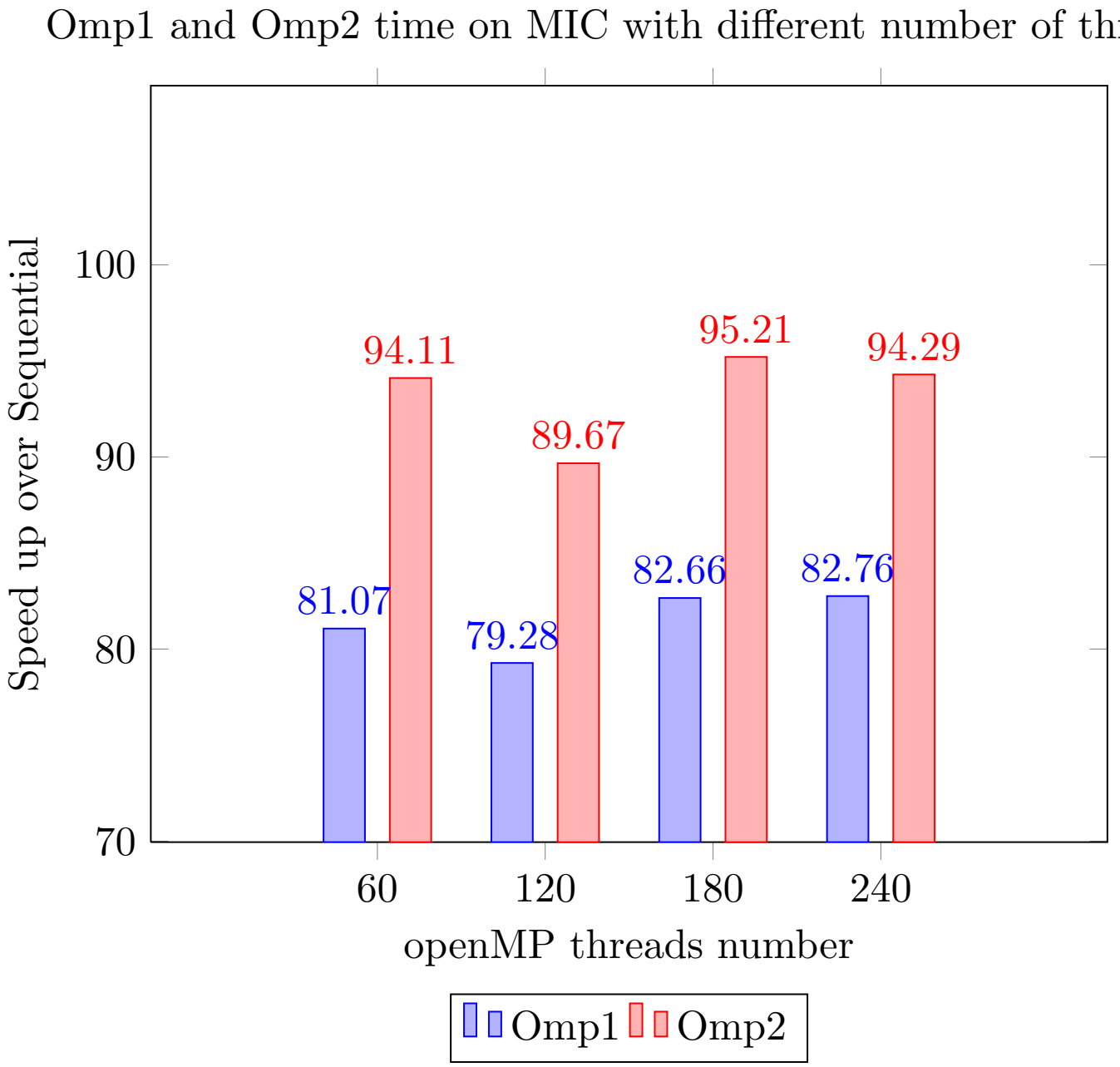


Chunk 值是系统每次分配给单个线程的并行任务数量, 图为算法 2 在 MIC 上的测试取 5 组不同的 Chunk 值, $N = 10^5$, $M = 10$

Chunk 取值对算法 2 的影响

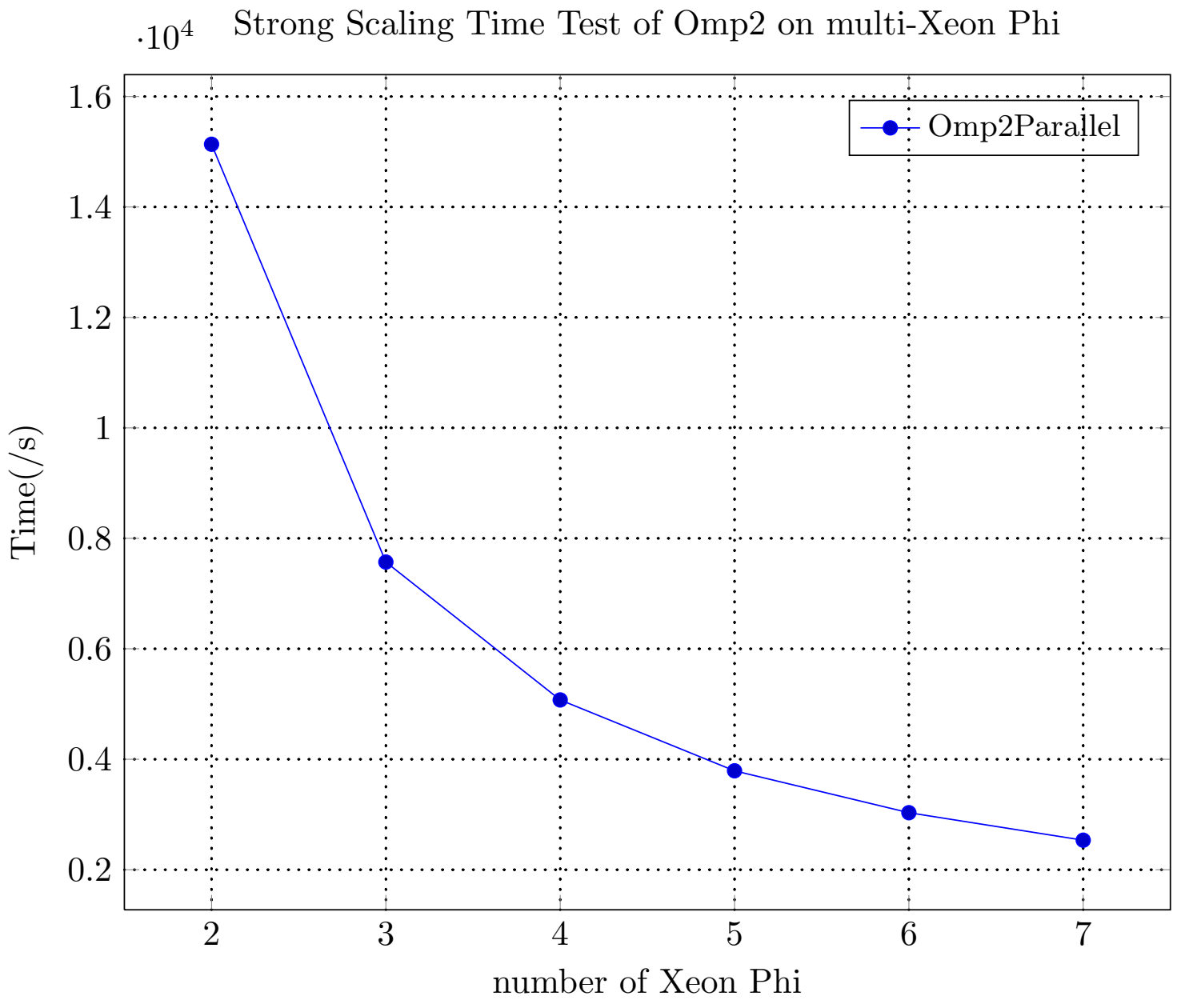


Omp1 与 Omp2 两种算法的加速对比



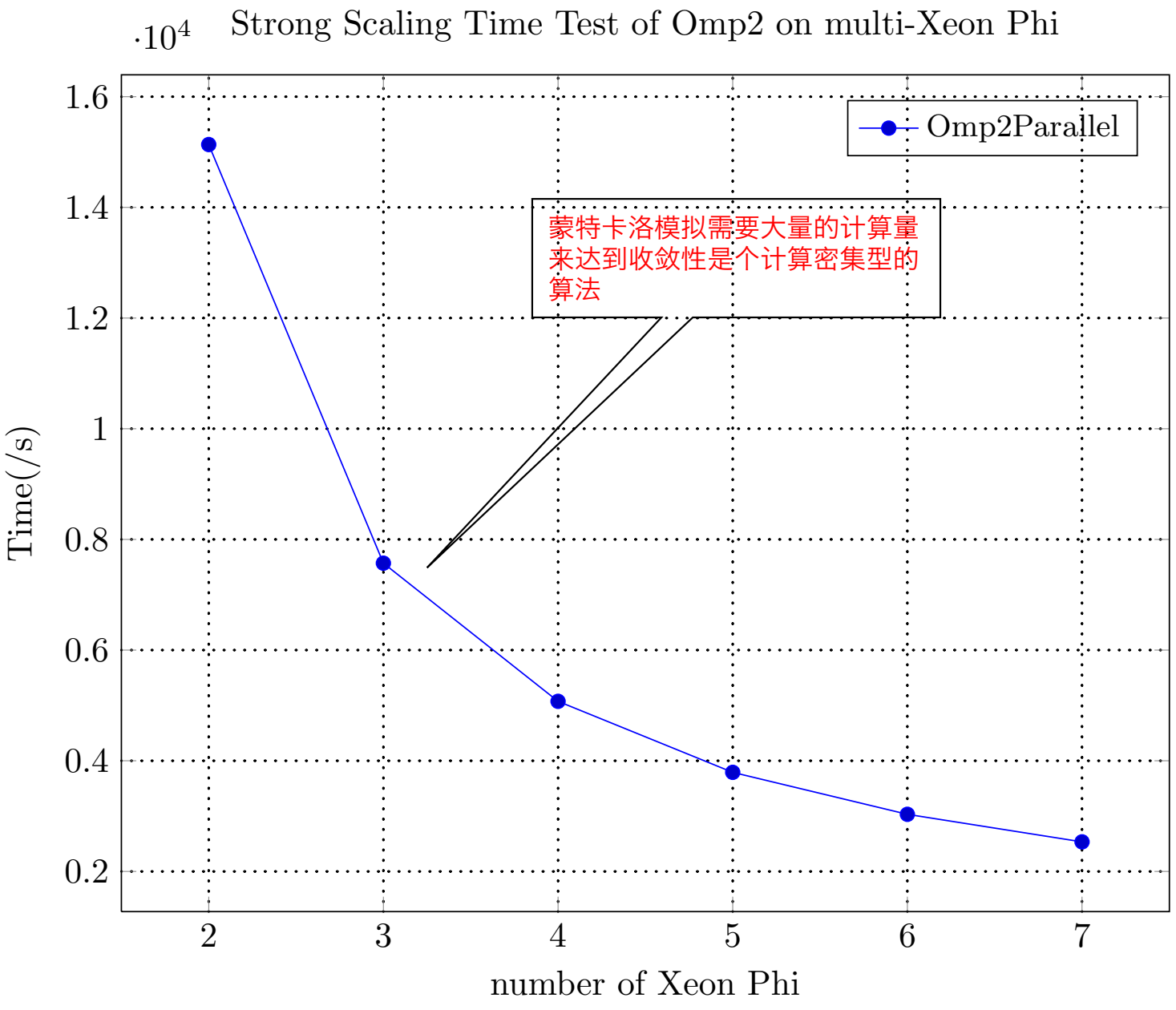
OpenMP 线程数目选取 4 组值测试相对串行算法的加速比，算法 2 比算法 1 有更高的加速比。两种算法在不同的线程数下加速比变化不大。Chunk 采用系统默认模式，$N = 251988$, $M = 100$, $Ncache = 2000$, $Nvec = 376$

多 MIC 优化可扩展性



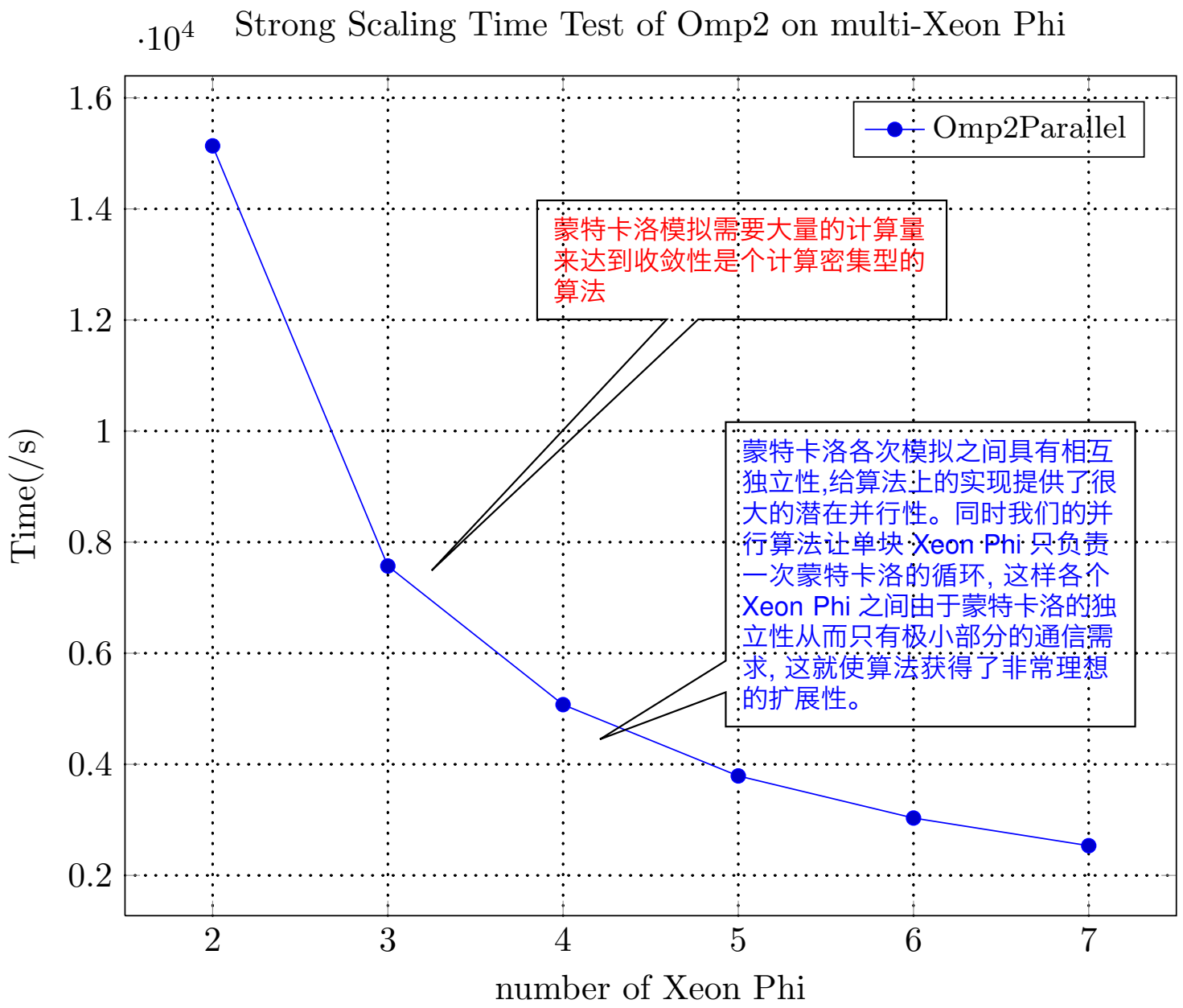
N = 251988, M = 10000, $Ncache$ = 2000, $Nvec$ = 192。图中显示我们的算法获得了超线性的扩展性能

多 MIC 优化可扩展性



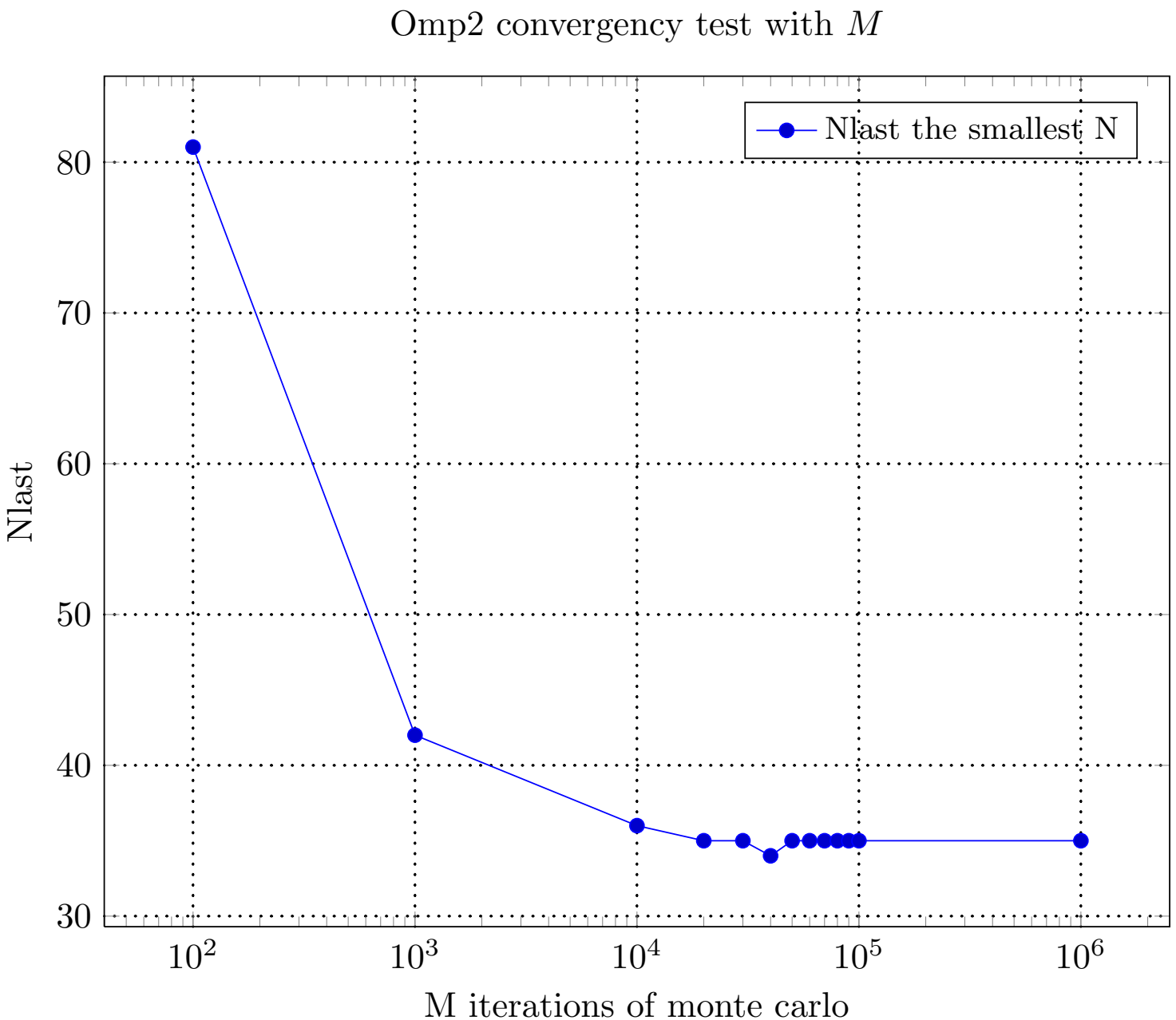
N = 251988, M = 10000, $Ncache$ = 2000, $Nvec$ = 192。图中显示我们的算法获得了超线性的扩展性能

多 MIC 优化可扩展性



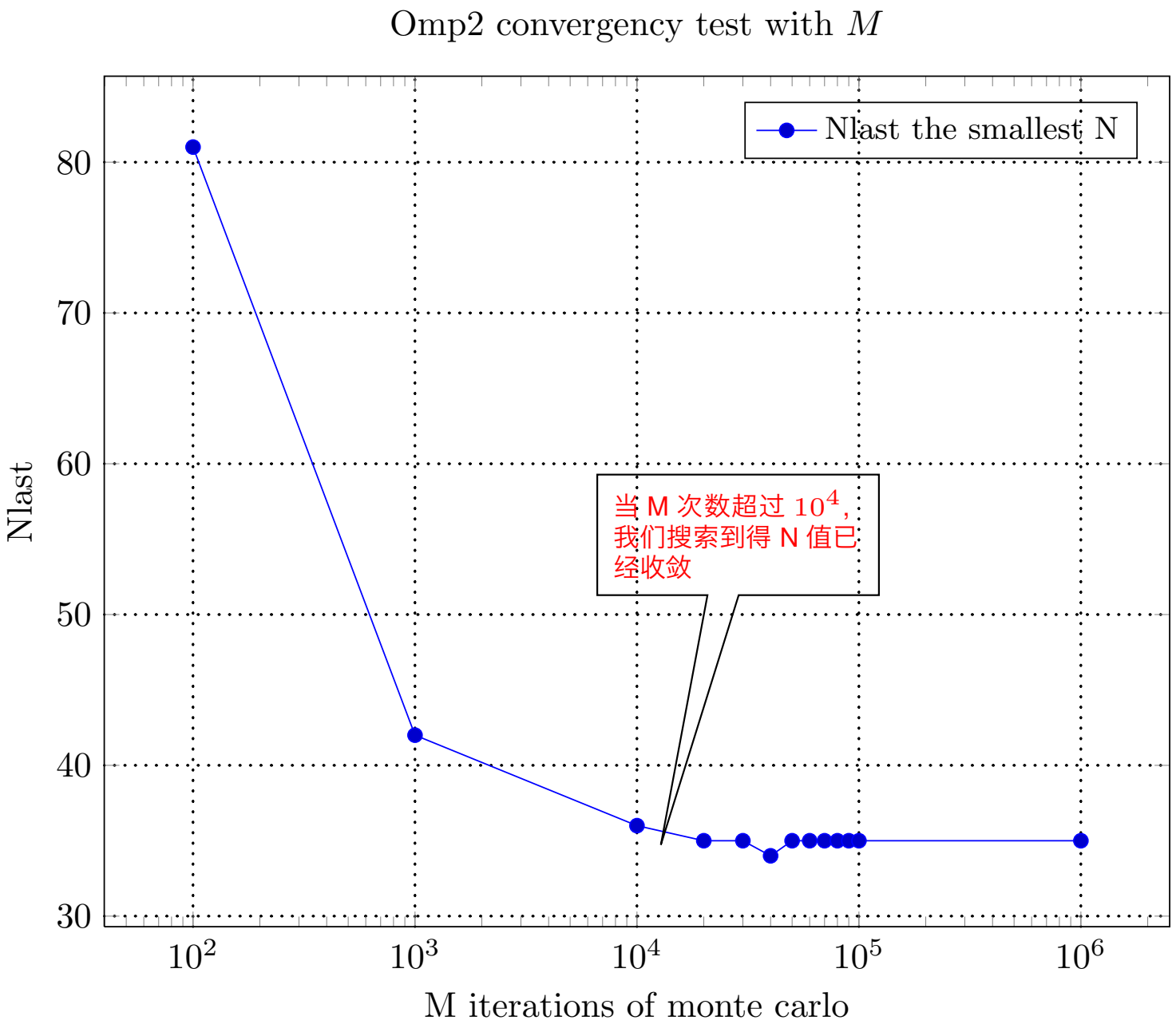
$N = 251988$, $M = 10000$, $Ncache = 2000$, $Nvec = 192$。图中显示我们的算法获得了超线性的扩展性能

算法的收敛性研究



算法 2 在多 CPU 上的收敛性, N = 251988, Nvec = 192

算法的收敛性研究



算法 2 在多 CPU 上的收敛性, N = 251988, Nvec = 192

结论

- 我们研究了基于 Black-Scholes 模型的离散时间版本的 Delta 对冲策略与理论上的 Delta 对冲策略之间的误差。
- 我们利用高性能计算的相关技术针对 Intel 平台实现了该应用的并行化。
- 我们首先针对单机利用多线程和矢量化提出了两种并行方案，然后使用 Master-Slave 模型利用消息传递模式通过 MPI 实现了多机上运行的并行版本。
- 我们开创性地通过理论给出最优抽样次数的数学上界,然后通过二分法在由该上界给出的闭区间内搜索最优解。
- 测试表明并行程序相对于串行版本获得了极大的性能提升。并行程序在 MIC 集群上也获得了良好的扩展性。