

# PROGRAMACIÓN DE ROBOTS

**Robots móviles:  
cinemática**

---

## Robots móviles: cinemática

### 1.- Introducción

### 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

- 2.1.- Modelo de velocidad constante
- 2.2.- Modelo diferencial
- 2.3.- Modelo de la bicicleta

## Robots móviles: cinemática

### 1.- Introducción

### 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

- 2.1.- Modelo de velocidad constante
- 2.2.- Modelo diferencial
- 2.3.- Modelo de la bicicleta

# 1.- Introducción

---

¿Qué vamos a ver en este tema?

- Qué entendemos por modelo cinemático de un robot móvil, y qué problemas se pueden resolver.
- Diferentes tipos de modelos cinemáticos
- Implantación de modelos cinemáticos concretos
- Bibliografía básica: Fernández-Madrigal y Blanco-Claraco, Corke

# 1.- Introducción

---

Antes de continuar, definimos un concepto fundamental al trabajar con robots móviles: la postura, *posture* o *pose*.

- La pose de un robot es un vector que recoge la posición 2D y la orientación del mismo:

$$p_k = [x_k \ y_k \ \theta_k]$$

## 1.- Introducción

---

Ya vimos el concepto de modelo cinemático cuando trabajamos con brazos manipuladores.

¿Qué entendemos por modelo cinemático a la hora de trabajar con robots móviles?

# 1.- Introducción

---

Ya vimos el concepto de modelo cinemático cuando trabajamos con brazos manipuladores.

¿Qué entendemos por modelo cinemático a la hora de trabajar con robots móviles?

1) Igual que en manipuladores, **vamos a estudiar el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo provocan**; si estudiáramos las causas, entraríamos en la dinámica, y es más complicada.

2) El modelo cinemático de un robot móvil es una función que **mapea, lo más ajustadamente posible, la pose previa del robot  $x_{k-1}$  y la entrada o acción asociada  $u_k$  en una nueva pose predicha  $x_k$** .

$$x_k \leftarrow g(x_{k-1}, u_k)$$

3) **El modelo cinemático de un robot dependerá de su configuración física** (fundamentalmente, de dónde están las ruedas actuadas, y de su instrumentación).

---

# 1.- Introducción

---

remember: un modelo es más o menos una  
abstracción de la realidad

Problemas que podemos resolver a partir del modelo cinemático:

- Cinemática directa: conociendo la pose y las velocidades (lineal y angular) actuales, obtenemos la nueva posición que alcanza el robot → útil para simular el robot.
  - Cinemática inversa: podemos obtener las velocidades (lineal y angular) a partir de la pose inicial y la pose final que queremos alcanzar → útil para trabajar con un robot real.
-



# 1.- Introducción

---

La utilización de modelos cinemáticos implica que inevitablemente aparecerán errores en el movimiento del robot respecto al movimiento real:

- Errores debidos al modelo en sí
    - Un modelo es una abstracción de la realidad, lo que significa que la simplificará más o menos, y en esa reducción perdemos información.
    - Por ejemplo, es muy común suponer que el robot se mueve siguiendo un camino con una forma fija (recta o curva) entre intervalos de tiempos consecutivos: cuanto más pequeño sea el tiempo, mayor será la exactitud del modelo, pero nunca casará completamente con la trayectoria real.
-

# 1.- Introducción

---

La utilización de modelos cinemáticos implica que inevitablemente aparecerán errores en el movimiento del robot respecto al movimiento real:

- Errores debidos a que el modelo no puede representar las inexactitudes del mundo real (situatedness)
    - Imprecisión de los parámetros: los modelos cinemáticos se basan en parámetros que representan alguna propiedad física del robot (por ejemplo, el diámetro de una rueda), y que se suponen que son invariables y conocidos. Sin embargo, en el mundo real siempre aparecen errores: si las ruedas son neumáticas, pueden estar más o menos desinfladas, por lo que su diámetro real no coincidirá con el parámetro.
    - Perturbaciones: fuentes de error impredecibles, como perturbaciones en el suelo, que den medidas incorrectas de los encoders.
-

# 1.- Introducción

---

## Vehículos, grados de libertad y actuadores

- Los grados de libertad pueden definirse desde un punto de vista matemático (“definición A”): son el mínimo número de valores independientes que definen completamente la posición y orientación de un objeto en el espacio.
- Los grados de libertad pueden definirse también desde un punto de vista “ingenieril” (“definición B”): número de actuadores independientes del robot.

# 1.- Introducción

---

## Vehículos, grados de libertad y actuadores

- Los grados de libertad pueden definirse desde un punto de vista matemático (“definición A”): son el mínimo número de valores independientes que definen completamente la posición y orientación de un objeto en el espacio.
    - Coche: ¿cuántos grados de libertad A?
    - Cuadricóptero: ¿cuántos grados de libertad A?
  - Los grados de libertad pueden definirse también desde un punto de vista “ingenieril” (“definición B”): número de actuadores independientes del robot.
    - Coche: ¿cuántos grados de libertad B?
    - Cuadricóptero: ¿cuántos grados de libertad B?
-

# 1.- Introducción

---

## Vehículos, grados de libertad y actuadores

- Los grados de libertad pueden definirse desde un punto de vista matemático (“definición A”): son el mínimo número de valores independientes que definen completamente la posición y orientación de un objeto en el espacio.
    - Coche: 3 grados de libertad →  $x, y$ , orientación
    - Cuadricóptero: 6 grados de libertad →  $x, y, z, \text{pitch}, \text{roll}, \text{yaw}$
  - Los grados de libertad pueden definirse también desde un punto de vista “ingenieril” (“definición B”): número de actuadores independientes del robot.
    - Coche: 2 grados de libertad → volante, motor.
    - Cuadricóptero: 4 grados de libertad → cuatro motores.
-

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

Dependiendo de la relación entre los grados de libertad A y los grados de libertad B, podemos establecer estos tres casos:

- $A = B \rightarrow$  vehículo holónimo: las velocidades instantáneas no están restringidas.
- $A > B \rightarrow$  vehículo no holónimo: las velocidades instantáneas están restringidas  $\rightarrow$  un vehículo no holónimo (por ejemplo, un coche) no siempre puede moverse directamente de una pose a otra, es necesaria una maniobra.
- $A < B \rightarrow$  vehículo redundante: una misma pose puede alcanzarse de varias formas.

¿Grados de libertad A de nuestro Lego? ¿Grados de libertad B?  
¿Holónimo o no holónimo?

---

## Robots móviles: cinemática

### 1.- Introducción

### 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

- 2.1.- Modelo de velocidad constante
- 2.2.- Modelo diferencial
- 2.3.- Modelo de la bicicleta

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Características generales:

- Es un modelo muy simple que puede aplicarse incluso si el robot no tiene sensores de odometría (por ejemplo, pequeño vehículo aéreo)
- Se asume que la velocidad no cambia entre instantes de tiempo, y aproxima la trayectoria del robot con segmentos de velocidad lineal y angular constantes.
  - Si el robot estaba quieto, seguirá quieto en el siguiente instante de tiempo.
  - Si el robot se estaba moviendo hacia adelante con una cierta velocidad, su movimiento en el futuro será una línea recta en la misma dirección.



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.1- Modelo de velocidad constante

#### Características generales:

- Por tanto, la acción  $u_k$  corresponde al intervalo de tiempo entre dos instantes de tiempo consecutivos.

$$x_k \leftarrow g(x_{k-1}, u_k)$$

- Si ese intervalo de tiempo es fijo y conocido, algunos autores lo eliminan de la expresión anterior, que pasaría a ser:

$$x_k \leftarrow g(x_{k-1})$$

---

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Características generales:

- Modelo muy simple debido a la ausencia de suposiciones sobre la movilidad del robot, lo que permite que sea aplicable a muchos tipos de robots.
- Esta misma simplicidad puede ser una desventaja para hacer predicciones exactas:
  - Cambios abruptos en el movimiento real tienen un impacto catastrófico en la calidad de la predicción. Cuanto mayor sea el módulo de la aceleración, peor será el resultado del modelo, que supone aceleraciones nulas.
  - Dada una trayectoria fija, la aproximación del modelo mejora si el intervalo entre ejecuciones disminuye. Sin embargo, esto supone una sobrecarga computacional.

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Descripción:

- El vector  $\mathbf{x}_k$  denota la pose del robot (posición 2D y orientación) y su velocidad estimada

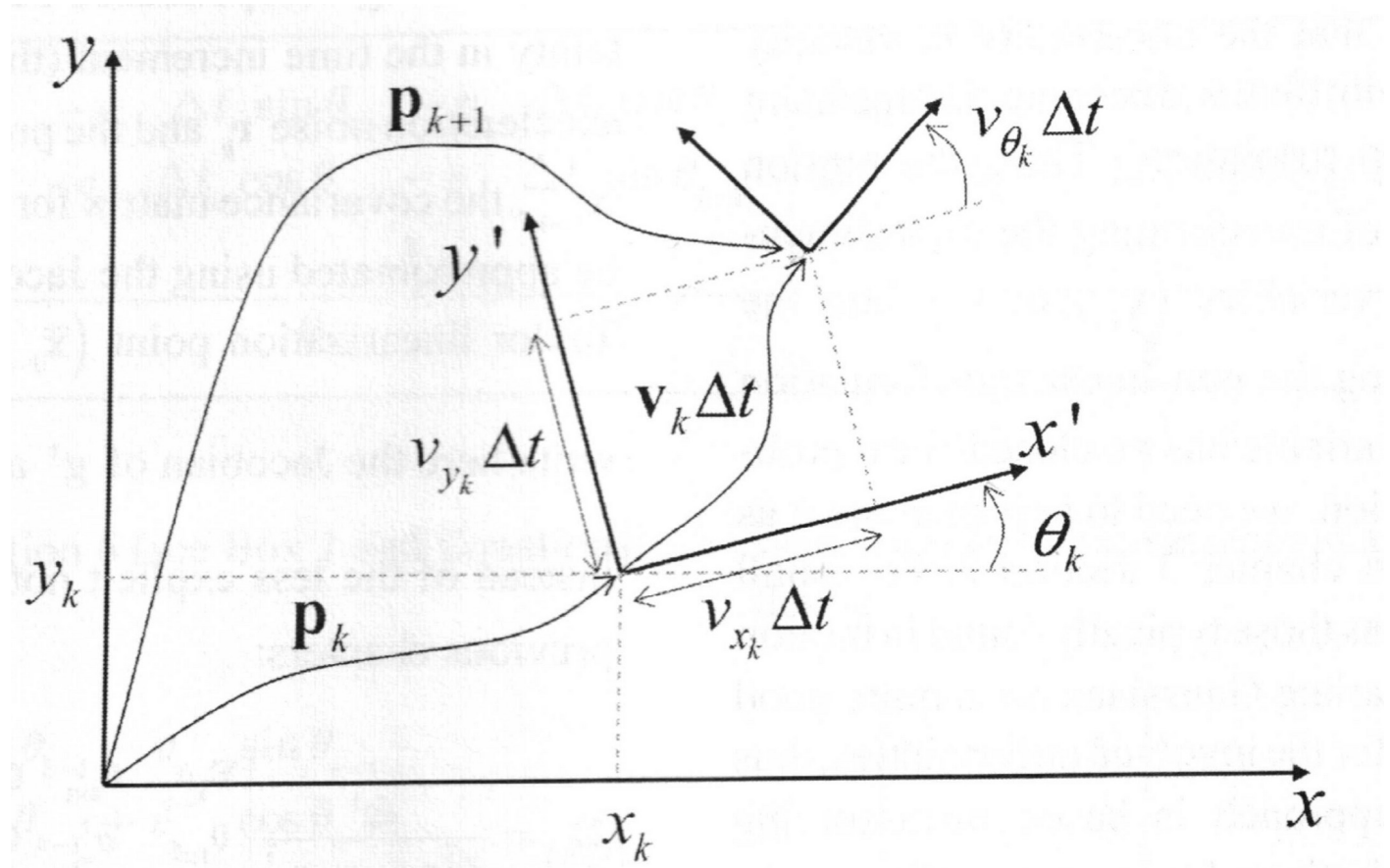
$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \left. \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \\ v_{x_k} \\ v_{y_k} \\ v_{\theta_k} \end{bmatrix} \right\} \begin{array}{l} \text{Robot pose} \\ \text{Velocities} \end{array}$$

- La pose del robot  $\mathbf{p}_k$  se da respecto a un sistema de referencia global.
- El vector de velocidades  $\mathbf{v}_k$  se representa respecto a un sistema de referencia local al robot durante el último paso de tiempo.
- El vector  $\mathbf{u}_k$  únicamente contiene el incremento de tiempo entre los instantes  $k$  y  $k+1$ , notado como  $\Delta t_k$ .

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Descripción:



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Descripción:

- Separando el vector  $x_k$  en sus dos partes, la definición de este modelo cinemático queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \oplus (\mathbf{v}_{k-1} \Delta t_k) \\ \mathbf{v}_{k-1} \end{bmatrix}$$

la pose anterior compuesta por la velocidad recorrida en el tiempo k

- La ecuación claramente muestra la suposición de velocidad constante, puesto que  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1}$ .

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Descripción:

- ¿Qué significa el operador de composición?

$$\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \mathbf{p}_k = \mathbf{p}_{k-1} \oplus (\mathbf{v}_{k-1} \Delta t_k)$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{x_{k-1}}_{\in \mathbf{p}_{k-1}} + v_{x_{k-1}} \Delta t_k \cos \theta_{k-1} - v_{y_{k-1}} \Delta t_k \sin \theta_{k-1} \\ \underbrace{y_{k-1}}_{\in \mathbf{p}_{k-1}} + v_{x_{k-1}} \Delta t_k \sin \theta_{k-1} + v_{y_{k-1}} \Delta t_k \cos \theta_{k-1} \\ \underbrace{\theta_{k-1}}_{\in \mathbf{p}_{k-1}} + v_{\theta_{k-1}} \Delta t_k \end{bmatrix}$$

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Ejercicio:

- Escribir una función Matlab que implante el modelo de velocidad constante y lo integre en el script *matlabPathFollower* disponible en la web de la asignatura.
- El prototipo de la función será el siguiente:  
$$\text{function [newPose] = constantSpeedKinematics}(xinit, v, \text{deltat})$$
  - donde *xinit* es la pose inicial, *v* el vector de velocidades locales del robot, y *deltat* el intervalo de tiempo. La función devuelve un vector *newPose* con la nueva pose calculada.

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.1- Modelo de velocidad constante

#### Ejercicio:

El bucle de simulación se ejecuta hasta que nos acercamos al final del camino

El seguidor toma la pose actual y devuelve la velocidad lineal y angular del robot

El modelo cinemático toma la pose actual (y las velocidades) y calcula la nueva pose

```
% Simulation loop
while (distanceToGoal > goalRadius)
    % Compute the controller outputs, i.e., the inputs to the robot
    [v, w] = controller(robotCurrentPose);

    % kinematic model: computes the new robotCurrentPose from the old robotCurrent Pose (and velocities)
    %robotCurrentPose = kinematicModel(robotCurrentPose, velocities)';

    % Re-compute the distance to the goal
    distanceToGoal = norm(robotCurrentPose(1:2) - robotGoal(:));

    % Update the plot
    hold off

    % Plot path each instance so that it stays persistent while robot mesh
    % moves
    plot(path(:,1), path(:,2), "k--d");
    title("Path Following with Pure Pursuit and Kinematics");
    xlabel("X (m.)"); ylabel("Y (m.)"); hold all

    % Plot the path of the robot as a set of transforms
    plotTrVec = [robotCurrentPose(1:2); 0];
    plotRot = axang2quat([0 0 1 robotCurrentPose(3)]);
    plotTransforms(plotTrVec', plotRot, "MeshFilePath", "groundvehicle.stl", "Parent", gca, "View", "2D", "FrameSize", frameSize);
    light; xlim([0 13]); ylim([0 13]);

    waitFor(vizRate);
end
```



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.1- Modelo de velocidad constante

Ejercicio:

- Tras escribir la función e integrarla en el script, ejecutarlo para que el robot siga la línea horizontal y vertical definidas al inicio del mismo (usa como *deltat* el parámetro *sampleTime*):
    - ¿Qué orientación y velocidades hay que dar al robot para que siga la línea horizontal? ¿Por qué?
    - ¿Qué orientación y velocidades hay que dar al robot para que siga la línea vertical? ¿Por qué?
    - ¿Qué orientación y velocidades hay que dar al robot para que recorra la línea vertical mientras mantiene una orientación de 45°?
    - ¿Qué ocurre si al robot le pasamos el vector de velocidad  $[0 \ 0 \ 1]$ ?
    - Con este modelo cinemático, ¿podría el robot seguir los caminos *segments* definidos en el script? ¿Por qué?
-

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- *Modelo diferencial*

Características generales:

- Es quizás el modelo que más aplicación tiene en robótica móvil
- Puede aplicarse a robots con configuración de triciclo, o con configuración diferencial con dos o cuatro ruedas.
- Explicación basada en <http://planning.cs.uiuc.edu/node659.html>

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.2- Modelo diferencial

Características generales:

- Muy utilizado en plataformas comerciales y de investigación



[www.irobot.es](http://www.irobot.es)



[robots.ros.org/pioneer-3-dx/](http://robots.ros.org/pioneer-3-dx/)



[education.lego.com](http://education.lego.com)



[www.queralto.com](http://www.queralto.com)

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo diferencial

Características generales:

- En este modelo, el estado del robot  $\mathbf{x}_k$  corresponde a su pose (posición 2D y orientación)

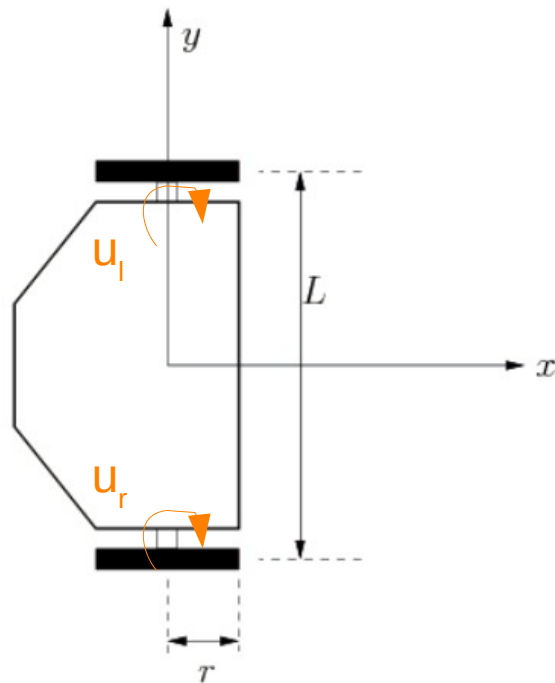
$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ \theta_k \end{bmatrix}$$

- El vector de acción  $\mathbf{u}_k$  consiste en las velocidades angulares de las ruedas:  $\mathbf{u}_k = [u_r \ u_l]$ .
-

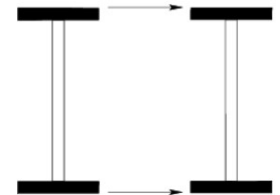
## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.2- Modelo diferencial

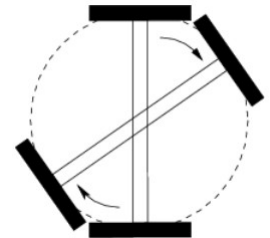
Características generales:



$u_l = u_r > 0 \rightarrow$  línea recta



$u_l = -u_r \rightarrow$  giro sobre sí mismo



$u_l \neq u_r > 0 \rightarrow$  giro alrededor de un punto

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.2- Modelo diferencial

#### Características generales:

- Ecuaciones del modelo:

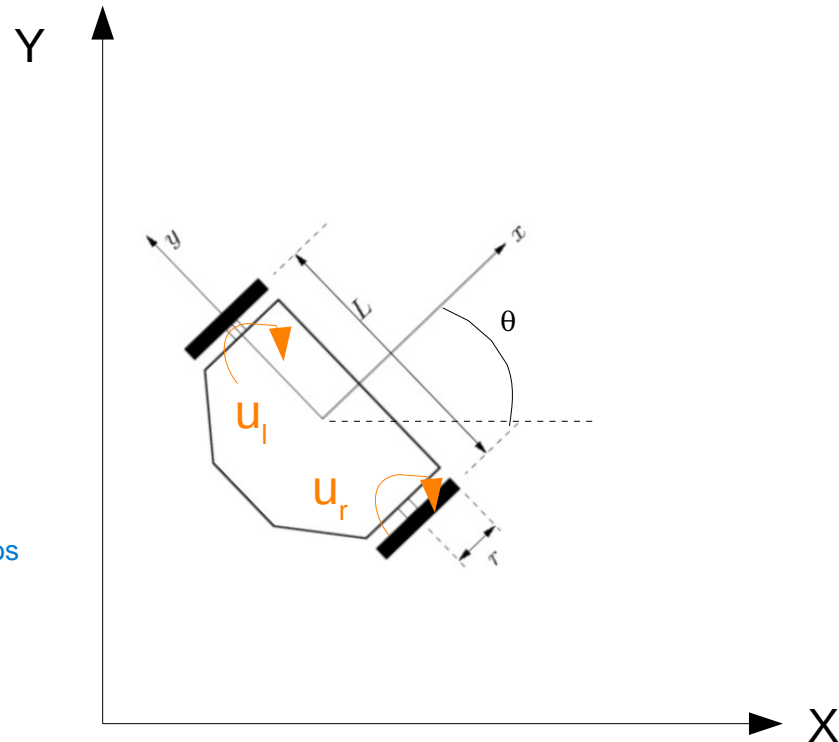
$$\dot{x} = \frac{r}{2} (u_l + u_r) \cos \theta$$

$$\dot{y} = \frac{r}{2} (u_l + u_r) \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{r}{L} (u_r - u_l)$$

El puntito encima de la x y y tita es la derivada

r es el radio de las ruedas, L la distancia entre las dos



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

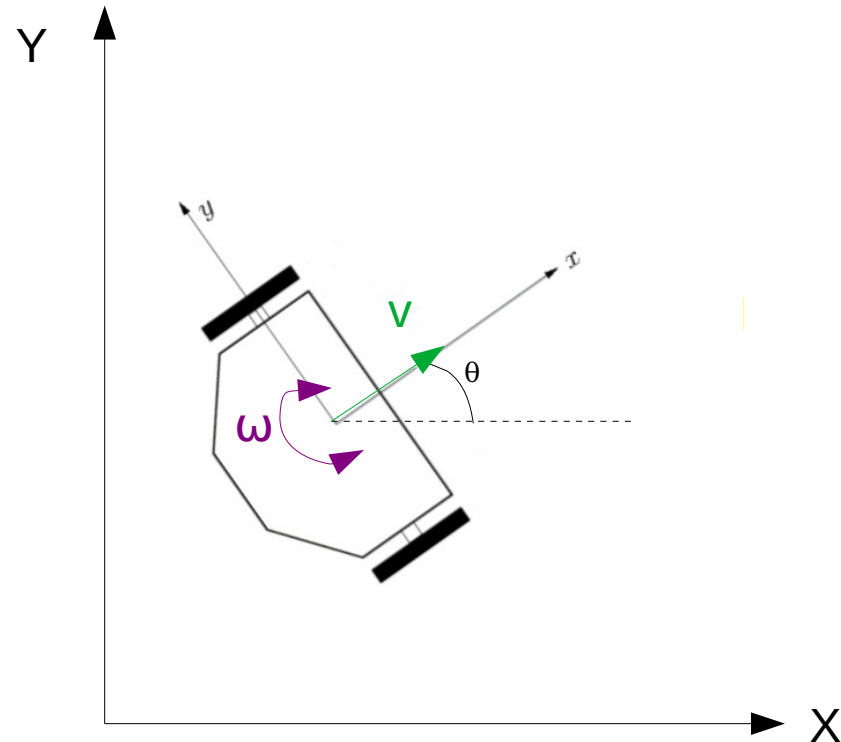
### 2.2- Modelo diferencial

Características generales:

- Por otra parte:

$$v = \frac{r}{2} (u_r + u_l)$$

$$\omega = \frac{r}{L} (u_r - u_l) \text{ (es decir, } \omega = \dot{\theta} \text{)}$$



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo diferencial

Características generales:

- Es un modelo no holónomo: el robot, al igual que un coche, no puede moverse lateralmente.
  - Entradas del modelo:  $\theta, u_l, u_r, r, L$
  - Salidas del modelo:  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$
-



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo diferencial

Ejercicio:

- Escribir una función Matlab que implante el modelo diferencial y lo integre en el script *matlabPathFollower* disponible en la web de la asignatura.
- El prototipo de la función será el siguiente:  
$$\text{function } [dervel] = \text{diffDriveKinematics}(tita, ur, ul, L, r)$$
  - donde *tita* es la orientación del robot, *ur* y *ul* las velocidades angulares de cada rueda, *L* la distancia entre ruedas (1 m), y *r* el radio de la rueda (0.05 m). La función devuelve un vector *dervel* con las derivadas de las nuevas *x*, *y*, *tita*, es decir, las velocidades en *x*, *y*, giro.

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo diferencial

Ejercicio:

- Tras escribir la función e integrarla en el script, ejecutarlo para que el robot siga los diferentes caminos del script. Es necesario tener en cuenta lo siguiente:
  - Las entradas del modelo se obtienen a partir de la  $v$  y  $\omega$  que devuelve el seguidor de caminos (puedes crear una función para calcular dichas entradas).
  - El modelo devuelve un vector de velocidades. La nueva pose se calcula como la suma de la pose previa +  $\text{velocidades} * \text{sampleTime}$ .
  - ¿Qué ocurre en los giros bruscos cuando el robot sigue el camino *sharp segments*?

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.3- Modelo de la *bicicleta*

Características generales:

- Es un modelo muy usado para un vehículo de cuatro ruedas como un coche.
- El coche tiene 3 grados de libertad (posición y orientación en el plano) y 2 actuadores (movimiento adelante/atrás, giro), por lo que está subactuado y no puede alcanzar todas las configuraciones de su espacio de trabajo, salvo maniobrando:
  - Aparcamiento en paralelo
  - Cambiar de dirección sobre sí mismo

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.3- Modelo de la bicicleta

#### Simplificaciones:

- Ruedas rígidas con un único punto de contacto.
  - Superficie horizontal plana.
  - Vehículo siempre vertical.
  - Rozamiento suficiente para evitar deslizamientos.
  - Velocidades y aceleraciones moderadas.
-

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.3- Modelo de la bicicleta

Descripción:

- Una rueda trasera fija, una rueda delantera cuyo plano gira alrededor del eje de giro para que así el vehículo pueda girar.
- Configuración del vehículo  $q = (x, y, \theta)$
- Las ruedas no deslizan lateralmente, por lo que  ${}^v\dot{x} = v, {}^v\dot{y} = 0$
- ICR = Instantaneous Centre of Rotation = intersección de las líneas de dirección a lo largo de las cuales las ruedas no se mueven.
- $\dot{\theta} = \frac{v}{R_1}, R_1 = \frac{L}{\tan \gamma}$
- Por tanto, máximo  $\gamma \rightarrow$  mínimo  $R_1$ , a mayor L mayor  $R_1$

Corke, "Robotics, Vision and Control. Fundamental Algorithms in Matlab"

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

### 2.3.- Modelo de la bicicleta

Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x} = v \cos \theta$$

$$\dot{y} = v \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{L} \tan \gamma$$

Por otra parte, al igual que en el modelo diferencial:  $\omega = \dot{\theta}$

Por tanto:  $\omega = \frac{v}{L} \tan(\gamma) \Rightarrow \gamma = \arctan\left(\frac{L \omega}{v}\right)$

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.3.- Modelo de la bicicleta

Características generales:

- $v=0 \rightarrow \dot{\theta}=0$ 
    - O sea, no hay cambio de orientación si no nos movemos
  - $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 
    - Es decir, si la rueda delantera está cruzada respecto a la trasera, no nos movemos hacia adelante y el modelo llega a una región indefinida.
  - Entradas del modelo:  $\theta, v, L, \gamma$
  - Salidas del modelo:  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$
-



## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo de la bicicleta

Ejercicio:

- Escribir una función Matlab que implante el modelo de la bicicleta y lo integre en el script *matlabPathFollower* disponible en la web de la asignatura.
- El prototipo de la función será el siguiente:  
$$\text{function } [dervel] = \text{bikeKinematics}(tita, v, L, gamma)$$
  - donde *tita* es la orientación del robot, *v* la velocidad lineal del robot, *L* la distancia entre ruedas (1 m), y *gamma* el ángulo de guiado de la bici. La función devuelve un vector *dervel* con las derivadas de las nuevas *x*, *y*, *tita*, es decir, las velocidades en *x*, *y*, giro.

## 2.- Modelos cinemáticos para robots móviles

---

### 2.2- Modelo diferencial

Ejercicio:

- Tras escribir la función e integrarla en el script, ejecutarlo para que el robot siga los diferentes caminos del script. Es necesario tener en cuenta lo siguiente:
  - Las entradas del modelo se obtienen a partir de la  $v$  y  $\omega$  que devuelve el seguidor de caminos (puedes crear una función para calcular dichas entradas).
  - El modelo devuelve un vector de velocidades. La nueva pose se calcula como la suma de la pose previa +  $velocidades * sampleTime$ .
  - Prueba el modelo con diferentes limitando el valor máximo de  $gamma$  ( $\pi/3, \pi/4, \pi/6$ ) ¿Qué ocurre en cada caso? ¿Por qué?