Universidad De Málaga

E.T.S Ingeniería Infórmatica

Ingeniería de Computadores, 3A

TRANSFORMADA Z, TRANSFORMADA DE FOURIER. FILTROS DIGITALES FIR E IIR

Circuitos Electrónicos y Señales

Francisco Javier Cano Moreno

14 de Noviembre de 2022

Índice

1.1 Calcula la ecuación de recurrencia asociada a la función de transferencia dada.

Tenemos la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = (1 - 0.5z^{-1}) * (1 + 0.5z^{-1})$$

Para obtener la ecuación de recurrencia debemos obtener el valor de Y(z) y aplicar la transformada inversa para obtener y[n]. Por tanto, tenemos que:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = (1 - 0.5z^{-1}) * (1 + 0.5z^{-1})$$

Hacemos la multiplicación de la derecha:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \frac{1}{4}z^{-2}$$

Pasamos X(z) multiplicando a la derecha:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{4}X(z)z^{-2}$$

Aplicamos la transformada Z inversa y obtenemos la ecuación de recurrencia de la función de transferencia.

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-2]$$

1.2 Dibuja el diagrama de ceros y polos de la función H(z).

Para poder dibujar el diagrama de ceros y polos, debemos calcular los ceros y los polos de la función de transferencia. Para ello, vamos a igualar el numerador a 0 para los ceros, y el denominador a 0 para los polos.
En primer lugar, multiplicamos arriba y abajo por z^2.

$$H(z) = \frac{(z - 0.5) * (z + 0.5)}{z^2}$$

A simple vista podemos ver que tenemos dos polos en 0, un cero en 0.5 y otro cero en -0.5. Por lo tanto, el diagrama de ceros y polos quedaría de la siguiente forma:

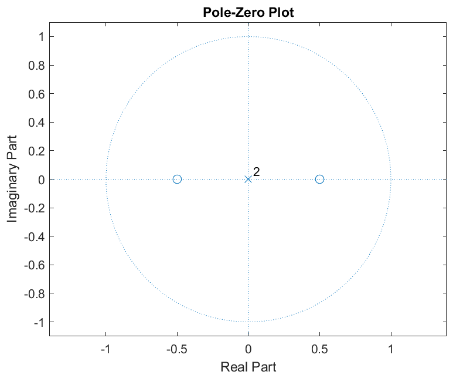

Figure 1: Diagrama de ceros y polos de la función de transferencia

1.3 Representa en frecuencia la respuesta del filtro, haciendo $z = e^{jw}$ a ello, calcula el valor de la función de transferencia en diversos puntos de frecuencia, haciendo que sea 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ y radianes, y dibuja la gráfica aproximada de la magnitud del filtro siguiendo los módulos de los valores calculados para dichos puntos. Nota: recuerda que $e^{jw} = cos(w) + jsen(w)$ el módulo de un número complejo $a + jb$ lo calculamos como $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Para representar el filtro en frecuencia, vamos a calcular el módulo de la función para cada valor dado. Sustituimos el valor nuevo de z en la función de transferencia:

$$H(z) = 1 - \frac{1}{4z^2}$$

- $\mathbf{w = 0} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^0 = 1$

$$H(w = 0) = 1 - \frac{1}{4 * 0} = 0$$
$$|H(w = 0)| = 0$$

- $\mathbf{w} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi/4} = cos(\frac{\pi}{4}) + jsen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(w = \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{4 * (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1 + \frac{1}{4}j$$
$$|H(w = \frac{\pi}{4})| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

- $\mathbf{w} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi/2} = cos(\frac{\pi}{2}) + jsen(\frac{\pi}{2}) = j$

$$H(w = \frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{1}{4j^2} = \frac{5}{4}$$
$$|H(w = \frac{\pi}{2})| = \frac{5}{4}$$

- $\mathbf{w} = \frac{3\pi}{4} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j3\pi/4} = cos(\frac{3\pi}{4}) + jsen(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(w = \frac{3\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{4 * (-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1 - \frac{1}{4}j$$
$$|H(w = \frac{3\pi}{4})| = \sqrt{1^2 + (-\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

- $\mathbf{w} = \pi \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi} = cos(\pi) + jsen(\pi) = -1$

$$H(w = \pi) = 1 - \frac{1}{4 * (-1)^2} = \frac{3}{4}$$
$$|H(w = \pi)| = \frac{3}{4}$$

Una vez obtenidos estos valores, podemos hacer una representación del filtro en frecuencia, donde el eje X es la frecuencia en radianes y, el eje Y, los valores de la magnitud. Por lo que quedaría la siguiente representación:

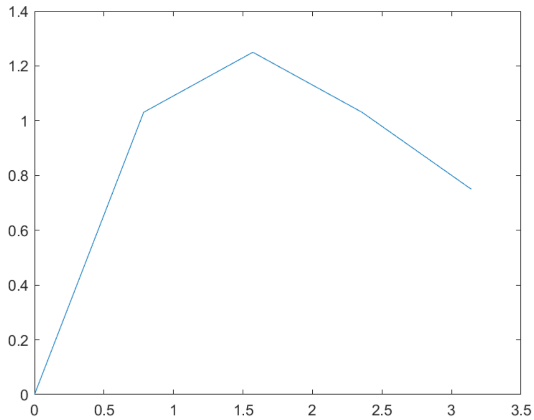

Figure 2: Representación en frecuencia del filtro con los módulos obtenidos

1.4 Si aplicamos como entrada del sistema una señal senoidal de 100 Hz de frecuencia, muestreada a 800 Hz, y con una amplitud máxima de 4, calcula cuál será la amplitud máxima de la señal de salida una vez aplicado el filtro definido anteriormente. Nota: No hay que normalizar el filtro para este primer apartado.

En este apartado, tenemos que ver a qué frecuencia en radianes equivalen los 100Hz, por tanto, sabiendo que 800Hz son 2π radianes, podemos aplicar lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 800 & \longrightarrow & 2\pi \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array}$$
$$x = \frac{100 * 2\pi}{800} = \frac{\pi}{4}$$

Una vez obtenido este resultado, debemos calcular el módulo de la función de transferencia evaluada en dicha frecuencia:

$$\mathbf{w} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi/4} = cos(\frac{\pi}{4}) + jsen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$H(w = \frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{1}{4 * (\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = 1 + \frac{1}{4}j$$
$$|H(w = \frac{\pi}{4})| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{4})^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

Por lo tanto, la amplitud máxima es de $\frac{\sqrt{17}}{4} * 4 = \sqrt{17}$.

2.1 ¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal de 100 Hz filtrada, representada tanto en el tiempo como en la frecuencia? Modifica la frecuencia del seno de entrada y ponla a 50 Hz en vez de 100 Hz, y aplica el filtro nuevamente. ¿Qué cambios aprecias ahora? ¿Qué está haciendo el filtro sobre las señales de 100 Hz y de 50 Hz a la vista de estos resultados?

Para este ejercicio, hemos creado una señal senoidal que tiene una frecuencia de 100 Hz y una amplitud máxima de 4, la cual representada en función del tiempo y en frecuencia queda de la siguiente manera:

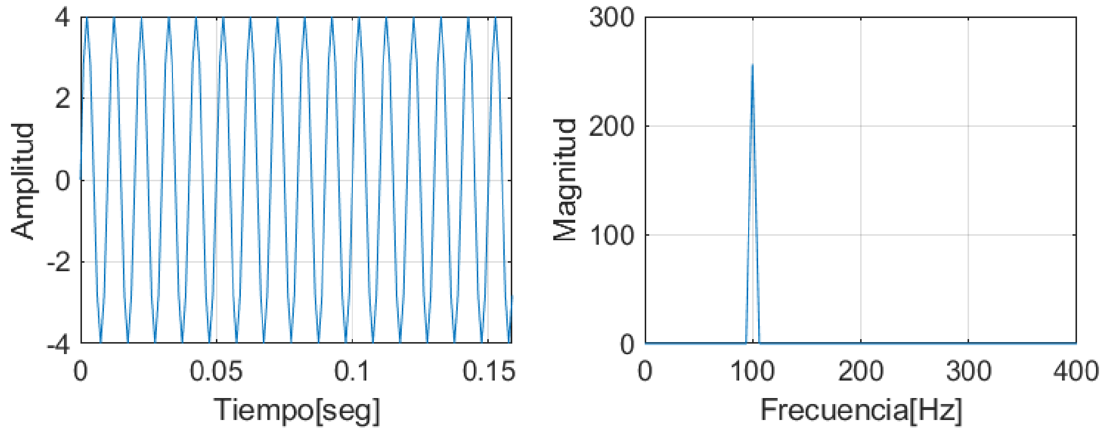

Figure 3: Representación de la señal de 100 Hz en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

A continuación, vamos a aplicar el filtro que hemos definido en el apartado anterior para ver cómo afecta a la señal:

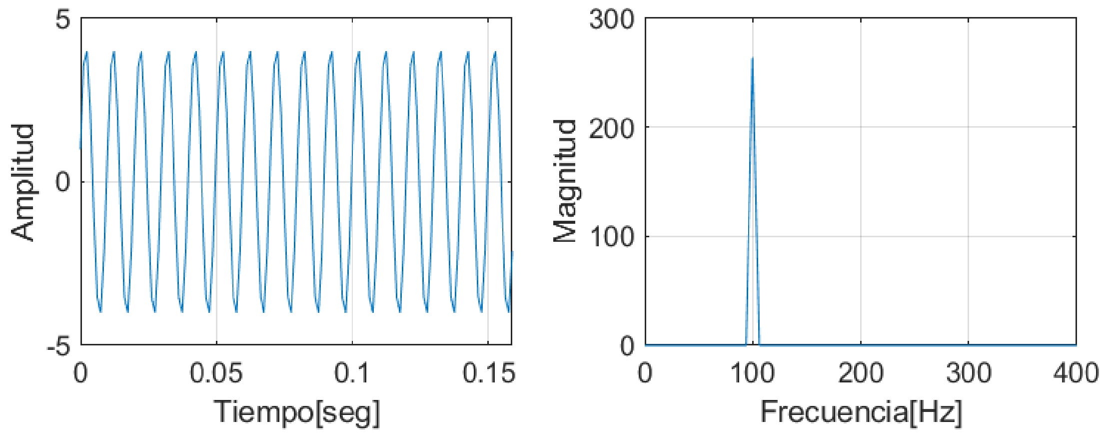

Figure 4: Representación de la señal de 100 Hz filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

Si nos centramos en la gráfica en frecuencia, puede parecer a simple vista que no ha pasado nada, pero si vemos cuanto vale la magnitud en 100 Hz, se puede ver que sin filtrar tiene un valor de 250 y filtrada 263,879, por lo que el filtro ha amplificado esta frecuencia.

Por otro lado, si hacemos zoom en las gráficas de tiempo y nos centramos en amplitud 0, podemos ver que sin filtrar, la primera vez que vuelve a amplitud 0, es decir, la mitad del primer periodo, tiene un tiempo de 0,005 segundos, mientras que la duración de la mitad del periodo en la señal filtrada, tiene una duración de 0,0046 segundos.

Ahora, vamos a cambiar la frecuencia de la señal a 50 Hz y le vamos a aplicar el filtro nuevamente para ver como cambia. La representación de la señal en 50 Hz sería la siguiente:

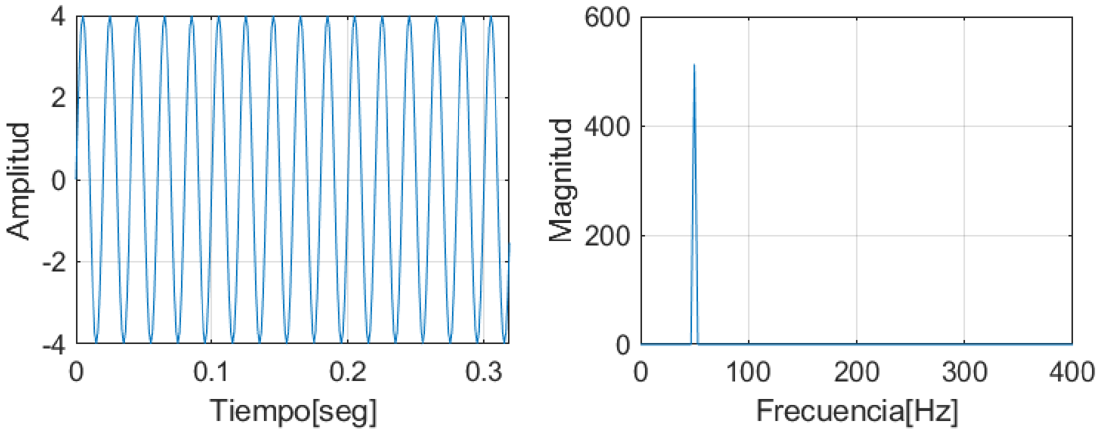

Figure 5: Representación de la señal de 50 Hz en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

Le aplicamos el filtro anterior y la señal queda tal que:

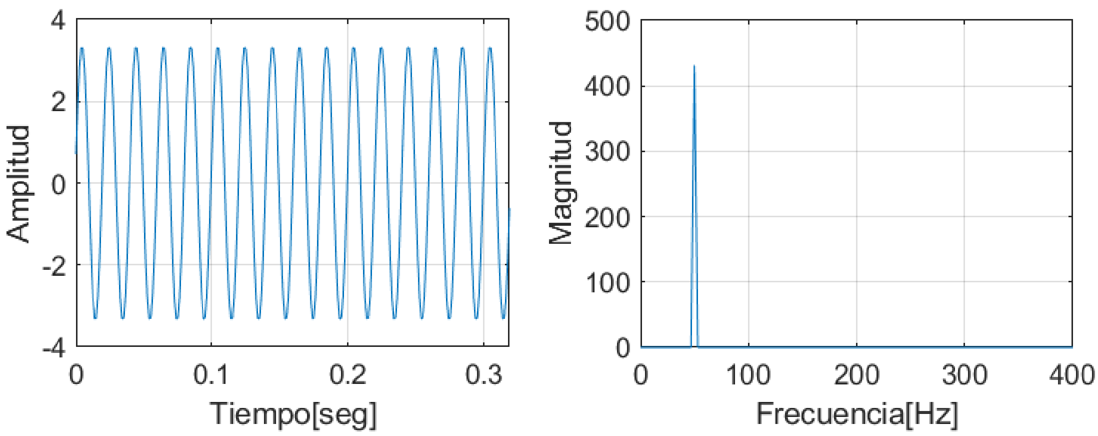

Figure 6: Representación de la señal de 50 Hz filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

En este caso, podemos ver que el efecto que provoca el filtro en esta frecuencia es diferente, ya que lo que está haciendo es atenuar la disminuir la frecuencia. En la gráfica de frecuencia podemos ver que en 50 Hz, sin filtro, la magnitud tiene un valor de 512, mientras que con el filtro, tiene un valor de 431.

Esta diferencia también se aprecia en la señal en el tiempo, ya que la amplitud máxima que alcanza la señal es de 4 mientras que con el filtro aplicado es de 3,3.

2.2 ¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal compuesta de dos senos sumados? Explica con tus palabras el efecto del filtro sobre ella, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

En este ejercicio, hemos definido dos señales de 30 y 220 Hz respectivamente y de amplitud máxima 4. Después, hemos sumado ambas señales y hemos obtenido la siguiente señal:

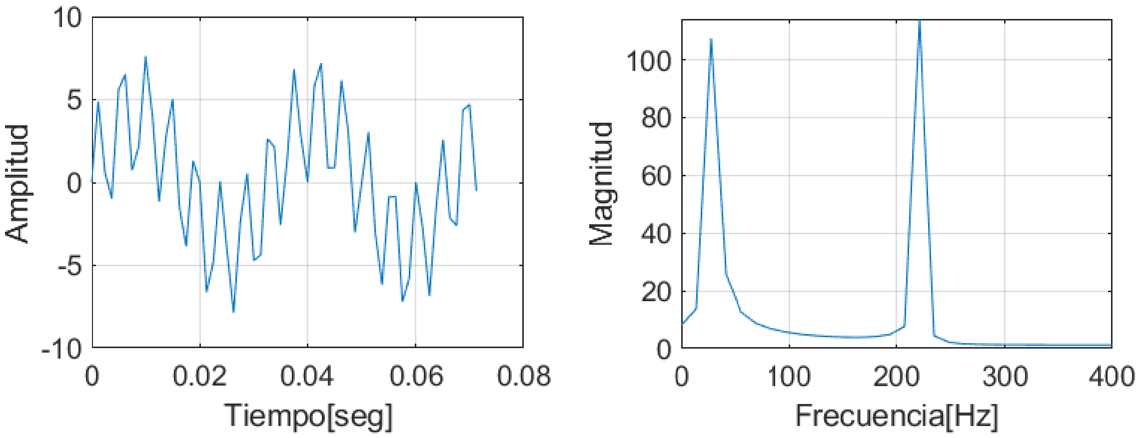

Figure 7: Representación de la señal compuesta en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

A continuación, aplicamos el filtro a la señal y queda la siguiente señal:

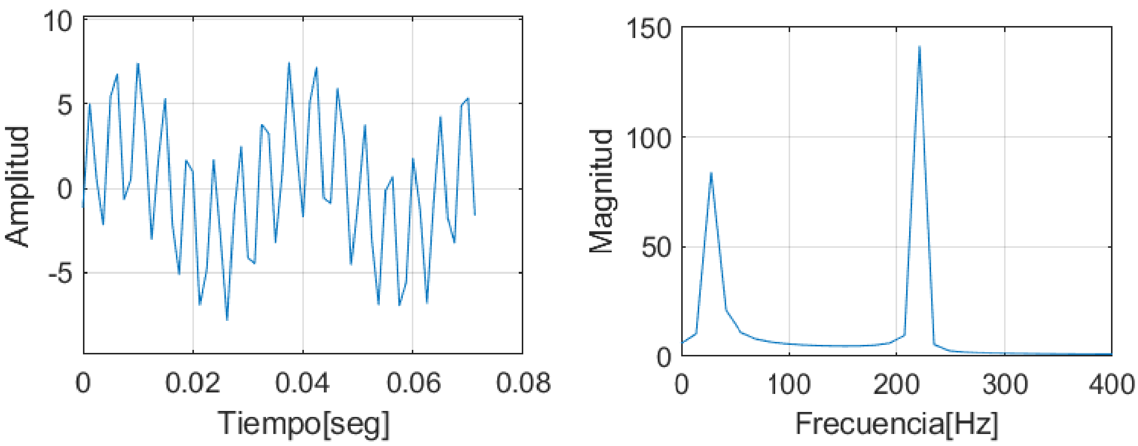

Figure 8: Representación de la señal compuesta filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

Si nos centramos en la gráfica de la frecuencia, podemos observar como el filtro afecta a la señal. Primero, observando la zona de 30 Hz, se aprecia a simple vista que el filtro ha atenuado esa frecuencia bastante. Por otro lado, si nos centramos en la zona de 220 Hz, el filtro ha aumentado esa frecuencia pasando de tener un valor de magnitud de 114 a 141.

3.1 Calcula la ecuación de recurrencia asociada a la función de transferencia dada.

Tenemos la siguiente función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(1 - 0.5z^{-1})}{(1 + 0.5z^{-1})}$$

Para obtener la ecuación de recurrencia vamos a pasar a un lado el denominador y a pasar lo X(z) multiplicando:

$$Y(z)(1 + 0.5z^{-1}) = X(z)(1 - 0.5z^{-1})$$
$$Y(z) + Y(z)0.5z^{-1} = X(z) - X(z)0.5z^{-1}$$

Aplicamos la transformada Z inversa y obtenemos la ecuación de recurrencia y[n]:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1]$$

3.2 Dibuja el diagrama de ceros y polos de la función H(z).

Para poder dibujar el diagrama de ceros y polos, debemos calcular los ceros y los polos de la función de transferencia. Para ello, vamos a igualar el numerador a 0 para los ceros, y el denominador a 0 para los polos.
Si multiplicamos por $\frac{z}{z}$, nos queda lo siguiente:

$$H(z) = \frac{(z - 0.5)}{(z + 0.5)}$$

De este resultado podemos ver que tenemos un cero en 0.5 y un polo en -0.5. Así que, el diagrama de ceros y polos nos queda de la siguiente manera:

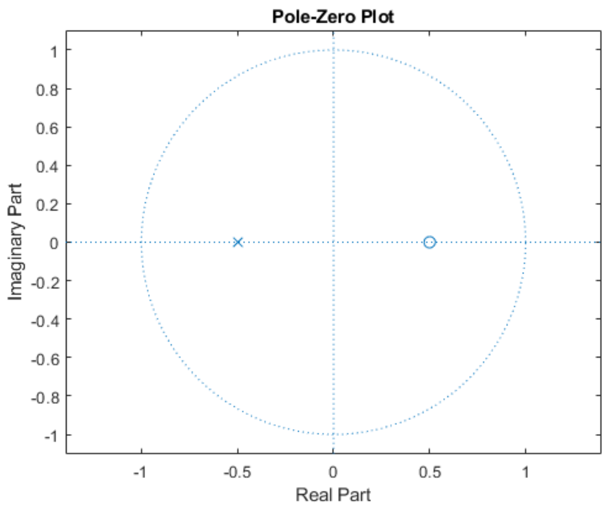

Figure 9: Diagrama de ceros y polos de la función de transferencia

3.3 Representa en frecuencia la respuesta del filtro, haciendo $z = e^{jw}$ a ello, calcula el valor de la función de transferencia en diversos puntos de frecuencia, haciendo que sea 0, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ y radianes, y dibuja la gráfica aproximada de la magnitud del filtro siguiendo los módulos de los valores calculados para dichos puntos. Nota: recuerda que $e^{jw} = cos(w) + jsen(w)$ el módulo de un número complejo $a + jb$ lo calculamos como $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Para representar el filtro en frecuencia, vamos a calcular el módulo de la función para cada valor dado. Sustituimos el valor nuevo de z en la función de transferencia:

$$H(z) = \frac{(z - 0.5)}{(z + 0.5)}$$

- **w = 0** $\longrightarrow$ z = $e^{jw} = e^0 = 1$

$$H(w = 0) = \frac{(0 - 0.5)}{(0 + 0.5)} = -1$$
$$|H(w = 0)| = \sqrt{(-1)^2} = 1$$

- **w =** $\frac{\pi}{4} \longrightarrow$ z = $e^{jw} = e^{j\pi/4} = cos(\frac{\pi}{4}) + jsen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(w = \frac{\pi}{4}) = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.5)}{(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5)} = \frac{15 - 6\sqrt{2}}{17} + \frac{-8 + 10\sqrt{2}}{17}j$$
$$|H(w = \frac{\pi}{4})| = \sqrt{(\frac{15 - 6\sqrt{2}}{17})^2 + (\frac{-8 + 10\sqrt{2}}{17})^2} = 0.5267$$

- **w =** $\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ z = $e^{jw} = e^{j\pi/2} = cos(\frac{\pi}{2}) + jsen(\frac{\pi}{2}) = j$

$$H(w = \frac{\pi}{2}) = \frac{(j - 0.5)}{(j + 0.5)} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}j$$
$$|H(w = \frac{\pi}{2})| = \sqrt{(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2} = 1$$

- **w =** $\frac{3\pi}{4} \longrightarrow$ z = $e^{jw} = e^{j3\pi/4} = cos(\frac{3\pi}{4}) + jsen(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$H(w = \frac{3\pi}{4}) = \frac{(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.5)}{(-\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5)} = \frac{15 + 6\sqrt{2}}{17} + \frac{8 + 10\sqrt{2}}{17}j$$
$$|H(w = \frac{3\pi}{4})| = \sqrt{(\frac{15 + 6\sqrt{2}}{17})^2 + (\frac{8 + 10\sqrt{2}}{17})^2} = 1.8987$$

- $\mathbf{w} = \pi \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi} = cos(\pi) + jsen(\pi) = -1$

$$H(w = \pi) = \frac{(-1 - 0.5)}{(-1 + 0.5)} = 3$$
$$|H(w = \pi)| = 3$$

Una vez obtenidos estos valores, podemos hacer una representación del filtro en frecuencia, donde el eje X es la frecuencia en radianes y, el eje Y, los valores de la magnitud. Por lo que quedaría la siguiente representación:

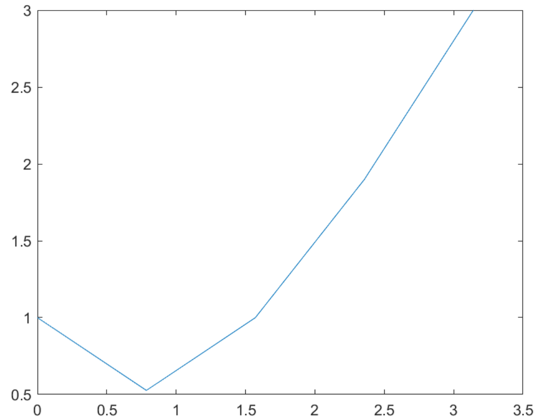

Figure 10: Representación en frecuencia del filtro con los módulos obtenidos

3.4 Si aplicamos como entrada del sistema una señal senoidal de 100 Hz de frecuencia, muestreada a 800 Hz, y con una amplitud máxima de 4, calcula cuál será la amplitud máxima de la señal de salida una vez aplicado el filtro definido anteriormente. Nota: No hay que normalizar el filtro para este primer apartado.

En primer lugar, calculamos cuántos radianes equivalen los 100 Hz:

$$\begin{array}{ccc} 800 & \longrightarrow & 2\pi \\ 100 & \longrightarrow & x \end{array}$$

$$x = \frac{100 * 2\pi}{800} = \frac{\pi}{4}$$

Una vez obtenido este resultado, debemos calcular el módulo de la función de transferencia evaluada en dicha frecuencia, obteniendo así la amplitud máxima de la señal:

$$\mathbf{w} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \mathrm{z} = \mathrm{e}^{jw} = e^{j\pi/4} = cos(\frac{\pi}{4}) + jsen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$H(w = \frac{\pi}{4}) = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} - 0.5)}{(\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.5)} = \frac{15 - 6\sqrt{2}}{17} + \frac{-8 + 10\sqrt{2}}{17}j$$

$$|H(w = \frac{\pi}{4})| = \sqrt{(\frac{15 - 6\sqrt{2}}{17})^2 + (\frac{-8 + 10\sqrt{2}}{17})^2} = 0.5267$$

Por lo tanto, la amplitud máxima es de $0.5267 * 4 = 2.107$.

4.1 ¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal de 100 Hz filtrada, representada tanto en el tiempo como en la frecuencia? Modifica la frecuencia del seno de entrada y ponla a 50 Hz en vez de 100 Hz, y aplica el filtro nuevamente. ¿Qué cambios aprecias ahora? ¿Qué está haciendo el filtro sobre las señales de 100 Hz y de 50 Hz a la vista de estos resultados?

En este ejercicio vamos a repetir el proceso realizado en el ejercicio 2 porque tenemos que usar la misma señal, la cual está representada en la primera figura del ejercicio 2.1.

A continuación, vamos a aplicar el filtro que hemos definido en el ejercicio 3 para ver cómo afecta a dicha señal:

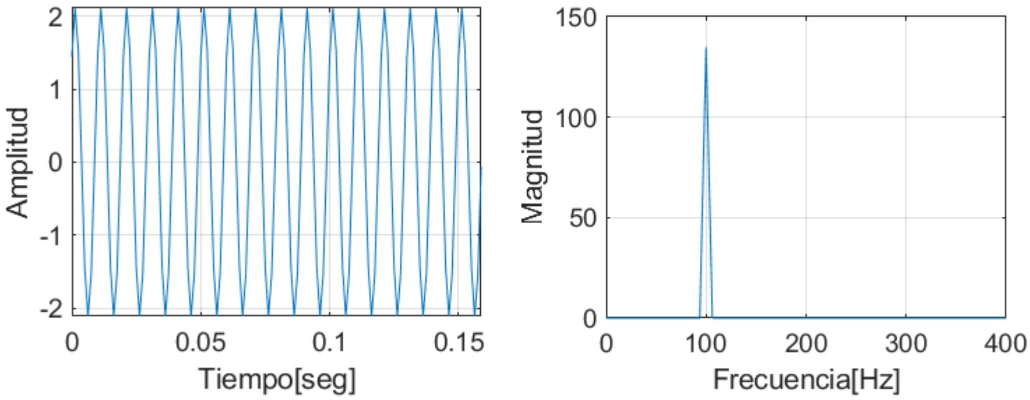

Figure 11: Representación de la señal de 100 Hz filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

A diferencia del caso anterior, podemos ver a simple vista que el filtro, en esta frecuencia, está atenuando la señal, ya que el valor que obtenemos para la magnitud en 100 Hz es de 132.831, a diferencia de los 256 que obteníamos sin aplicar el filtro.

Por otro lado, observando la gráfica en función del tiempo, podemos ver que la amplitud máxima que tiene la señal se ha reducido, llegando a un valor máximo de 2.10, mientras que sin el filtro alcanzaba un valor máximo de 4.

Ahora, vamos a cambiar la frecuencia de la señal a 50 Hz y le vamos a aplicar el filtro nuevamente para ver como cambia. La representación de la señal de 50 Hz es la que tenemos en la figura 3 del ejercicio 2.1. Si le aplicamos el filtro anterior y la señal queda tal que:

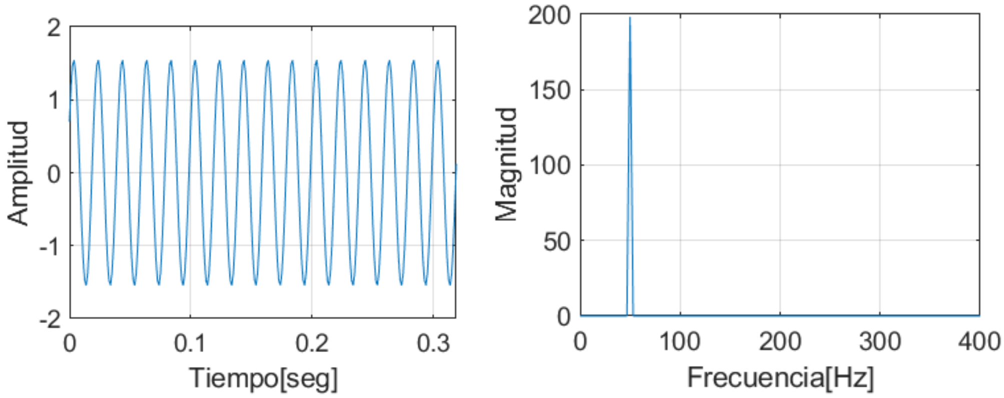

Figure 12: Representación de la señal de 50 Hz filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

A diferencia del primer filtro, cuando aplicamos el filtro a la señal de 50 Hz obtenemos el mismo resultado, la atenuación de la señal. Ello lo podemos identificar observando el valor de la magnitud en 50 Hz, el cual es de 198, mientras que sin el filtro toma un valor de 512.

Por otro lado, podemos ver que la amplitud en la gráfica en función del tiempo también se reduce, siendo una amplitud máxima de 1.54 y, sin filtro, la amplitud es de 4.

4.2 ¿Qué cambios aprecias en la señal senoidal compuesta de dos senos sumados? Explica con tus palabras el efecto del filtro sobre ella, tanto en el tiempo como en la frecuencia.

Tenemos el mismo caso que en el anterior apartado, es decir, la señal que vamos a utilizar la podemos ver representada en la primera figura del ejercicio 2.2. Por lo tanto, si le aplicamos el filtro definido en el ejercicio 3, nos queda el siguiente resultado:

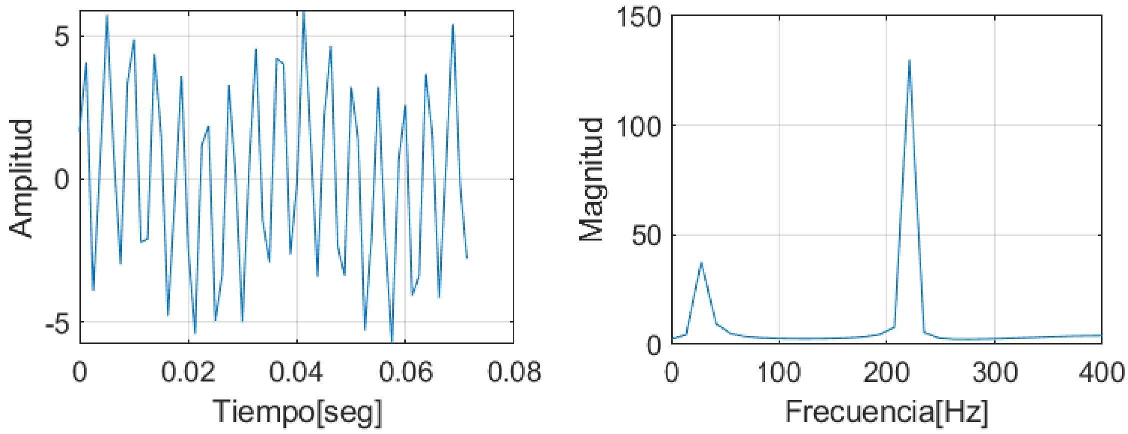

Figure 13: Representación de la señal compuesta filtrada en tiempo (izquierda) y en frecuencia (derecha)

En primer lugar, podemos ver que se han producido dos efectos diferentes, la atenuación de la señal en la zona de 30 Hz y la amplificación de la señal en la zona de 220 Hz. En este caso, la atenuación que se produce en el caso de 30 Hz es mucho más brusca que en el ejercicio 2.2 y, la amplificación de la señal de 220 Hz es menos brusca.