UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

Modelación y Simulación

Laboratorio 2

Felipe González M.

Franco Labra L.

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Diego Mellis

Santiago – Chile

2020

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

A continuación se presenta el laboratorio 2 del curso de Modelación y Simulación, el cual tiene como objetivo principal realizar el análisis de sistemas de primer, segundo y tercer orden mediante el uso de MATLAB. Para poder realizar a cabo lo anterior, se utilizaron las respuestas de las funciones de lazo abierto y cerrado a una función escalón unitario, además de la construcción de un diagrama de bloque mediante funciones de MATLAB.

En los siguientes capítulos de este informe se va a presentar un marco teórico, en donde se detallan los conceptos mas importantes a tratar en esta experiencia, con el objetivo de lograr una mayor comprensión de lo expuesto en este informe. Luego, se encuentra el desarrollo de la primera parte, en donde se encuentra la explicación del desarrollo de cada uno de los gráficos presentados, junto con el desarrollo matemático para obtener la función H(s). Seguido de esto, se encuentra el desarrollo de la segunda parte, en donde se detalla cómo fue abordado el diagrama de bloques presentado, para poder reducirlo utilizando las funciones de MATLAB. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, donde se verifica el cumplimiento del objetivo principal de la experiencia.

- MATLAB: Corresponde a un sistema de computo numérico, con un entorno de desarrollo integrado (IDE) y con un lenguaje de programación interpretado. Combina un entorno de escritorio perfeccionado para el análisis iterativo y los procesos de diseño con un lenguaje de programación que expresa las matemáticas de matrices y arrays directamente.
- Sistema de control: Corresponden a sistemas hechos para permitir el control automático de algún proceso. Existen dos tipos
- Sistema de lazo abierto: Sistema de control cuya salida no tiene efecto sobre la acción de control.
- Sistema de lazo cerrado: Es un sistema de control cuya salida y entrada de referencia están relacionadas y su diferencia se usa como medio de control.
- Función de transferencia: Es una representación algebraica dada al aplicar la transformada de Laplace a una ecuación diferencial. Se estructura de dos polinomios, uno como numerador y el otro denominador que dependen de una variable compleja comúnmente denominada s. Tiene la siguiente forme: $FT = \frac{Y(s)}{X(s)}$
- Función escalón unitario: Función por tramos definida como lo indica la figura 2.1

$$s(t-t_0) = \begin{cases} 1 & si \quad t \geq t_0 \\ 0 & si \quad t < t_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

- Polos: Son los ceros del denominador ($X(s)$) de una función de transferencia.
- Ceros: Son los ceros del numerador ($Y(s)$) de una función de transferencia.
- Estabilidad de una función de transferencia: Este valor depende de la posición de los polos en el plano imaginario. Si se encuentran en el semiplano izquierdo, es estable; si solo uno se encuentra en el origen y el resto en el semiplano izquierdo, es críticamente estable; si solo hay un par de polos complejos conjugados sobre el eje imaginario y los demás están en el semiplano izquierdo, es marginalmente estable; en el resto de los casos, es

inestable. Esto se da, porque los polos representan los valores que tienen los coeficientes de las exponenciales una vez la función de trasferencia se devuelve al dominio del tiempo, siendo que si son negativos, mediante el paso del tiempo van a converger a un valor. Las funciones de transferencia cuando vuelven al dominio del tiempo tienen la siguiente forma $f(t) = c_1e^{\alpha_1 t} + c_2e^{\alpha_2 t} + \cdots + c_ne^{\alpha_n t}$

- Ganancia estática: Es la relación entre la salida y entrada de un sistema estable, cuando estás se estabilizan.
- Tiempo de estabilización: Tiempo que tarda la respuesta en permanecer dentro de un 2 % de diferencia respecto al valor final.
- Diagrama de bloques: Corresponden a representaciones para desarrollar esquemas que permiten comprender fácilmente las operaciones de control de un sistema, mediante la representación de cada uno de los elementos físicos de dicho sistema.
- Procesos continuos: Son aquellos que operan con señales analógicas y presentan continuidad en la magnitud y el tiempo.

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

Para esta experiencia se solicitó graficar las respuestas que tiene el lazo abierto y cerrado de tres funciones a una función escalón. Estas funciones corresponden a ecuaciones diferenciales de primer, segundo y tercer orden, donde las dos primeras son ofrecidas por el enunciado y se solicita proponer la tercera.

3.1 PRIMERA FUNCIÓN

El modelo de sistema de primer orden está expresado en la ecuación 3.1.

$$6\frac{\partial y}{\partial t} + 2y = 8\frac{\partial u}{\partial t}, y(0) = 3, u(0) = 1 \tag{3.1}$$

Se aplica la Transformada de Laplace

$$\begin{gathered}
6\frac{\partial y}{\partial t} + 2y = 8\frac{\partial u}{\partial t} \Big/ \mathscr{L}\{\} \\
6\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\} + 2\mathscr{L}\{y\} = 8\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} \\
6(sY - y(0)) + 2Y = 8(sU - u(0))
\end{gathered}$$

Como $y(0) = 3$ y $u(0) = 1$

$$6sY - 18 + 2Y = 8sU - 8$$

$$\begin{gathered}
Y(6s + 2) = 8sU + 10 \\
Y = \frac{8s}{6s + 2}U + \frac{10}{6s + 2}
\end{gathered}$$

Por lo tanto la ecuación de transferencia queda expresada en la ecuación 3.2.

$$H(s) = \frac{8s}{6s+2} \tag{3.2}$$

Para aplicar la función escalón se utilizó la función *step* de MATLAB. Su gráfico corresponde a la figura 3.1. Para transformar la función de transferencia a una de lazo cerrado se usó la función *cloop*, luego, se le aplicó la función escalón. La figura 3.2 demuestra el resultado.

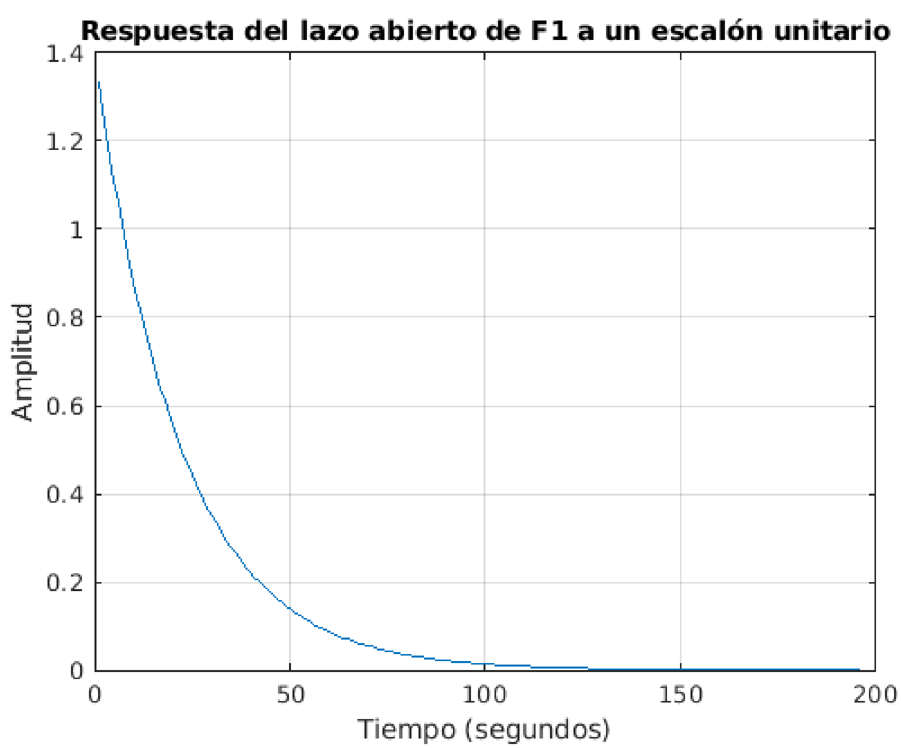

Figura 3.1: Respuesta de la función de primer orden a una función escalón unitario

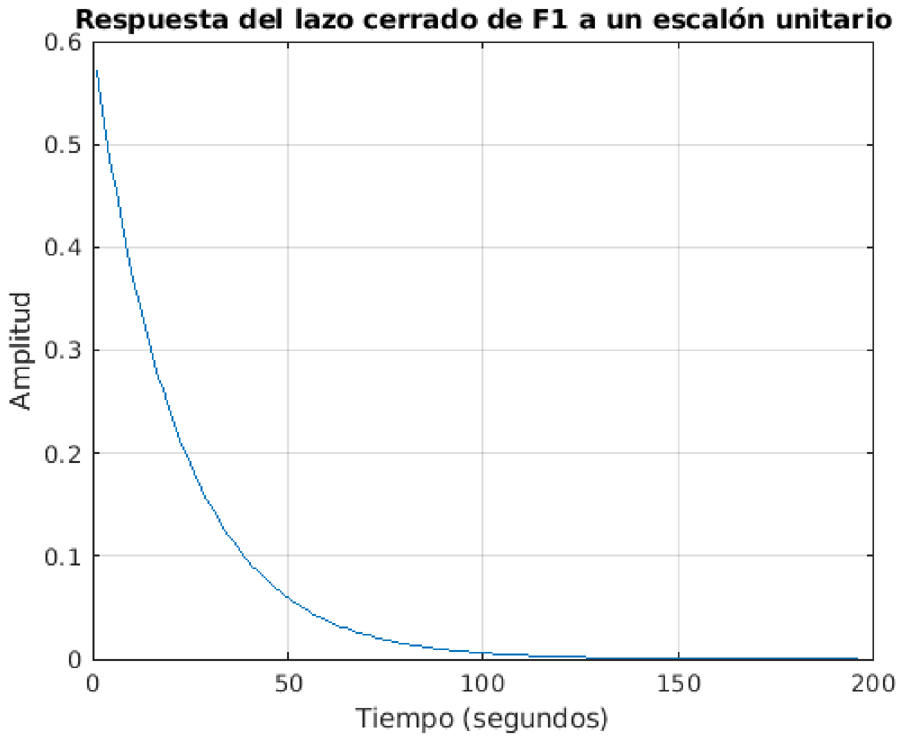

Figura 3.2: Respuesta del lazo cerrado de la función de primer orden a una función escalón unitario

3.2 SEGUNDA FUNCIÓN

El modelo de sistema de segundo orden está expresado en la ecuación 3.3.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 6\frac{\partial y}{\partial t} + 3y - 5\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\frac{\partial u}{\partial t} - 4u = 0, \qquad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1 \tag{3.3}$$

Se aplica la Transformada de Laplace,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 6\frac{\partial y}{\partial t} + 3y - 5\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 7\frac{\partial u}{\partial t} - 4u = 0 \Big/ \mathscr{L}\{\}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\} + 6\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\} + 3\mathscr{L}\left\{y\right\} - 5\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} - 7\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} - 4\mathscr{L}\left\{u\right\} = 0$$

$$s^2Y - sy(0) - \dot{y}(0) + 6(sY - y(0)) + 3Y - 5(s^2U - su(0) - \dot{u}(0)) - 7(sU - u(0)) - 4U = 0$$

Como $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$, $u(0) = 0$ y $\dot{u}(0) = 1$, entonces

$$s^2Y + 6sY + 3Y - 5s^2U + 5 - 7sU - 4U = 0$$

$$Y(s^2 + 6s + 3) - U(5s^2 + 7s + 4) + 5 = 0$$

$$Y = \frac{5s^2 + 7s + 4}{s^2 + 6s + 3}U - \frac{5}{s^2 + 6s + 3}$$

Por lo tanto, la ecuación de transferencia queda expresada en la ecuación 3.4.

$$H(s) = \frac{5s^2 + 7s + 4}{s^2 + 6s + 3} \tag{3.4}$$

El gráfico de la respuesta de esta función a una función escalón unitario se refleja en la figura 3.3. La figura 3.4 muestra la respuesta del lazo cerrado de esta función a una función escalón unitario.

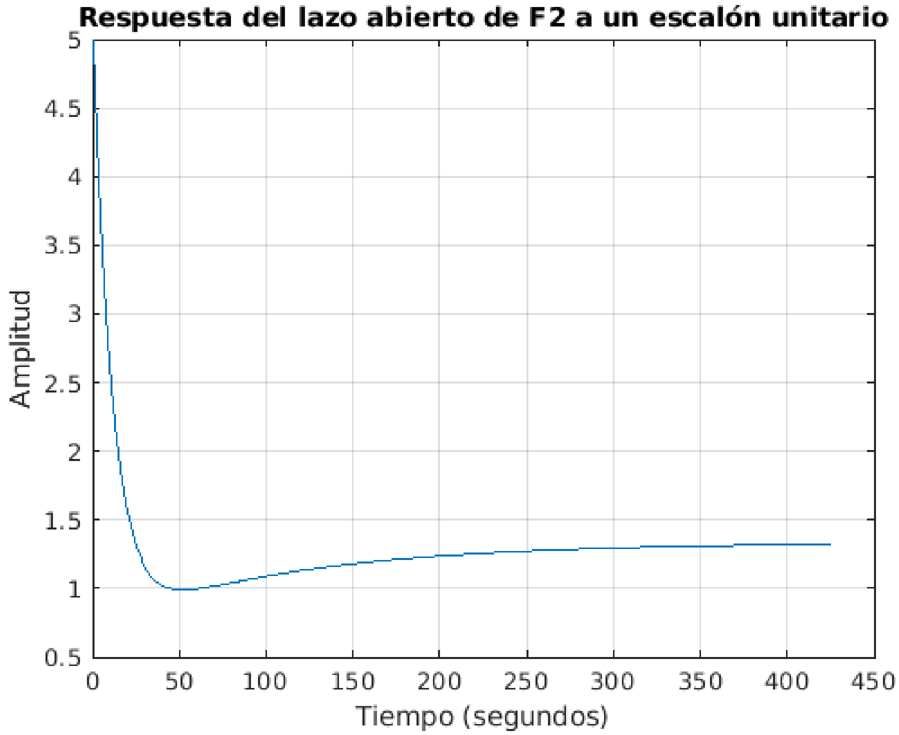

Figura 3.3: Respuesta de la función de segundo orden a una función escalón unitario

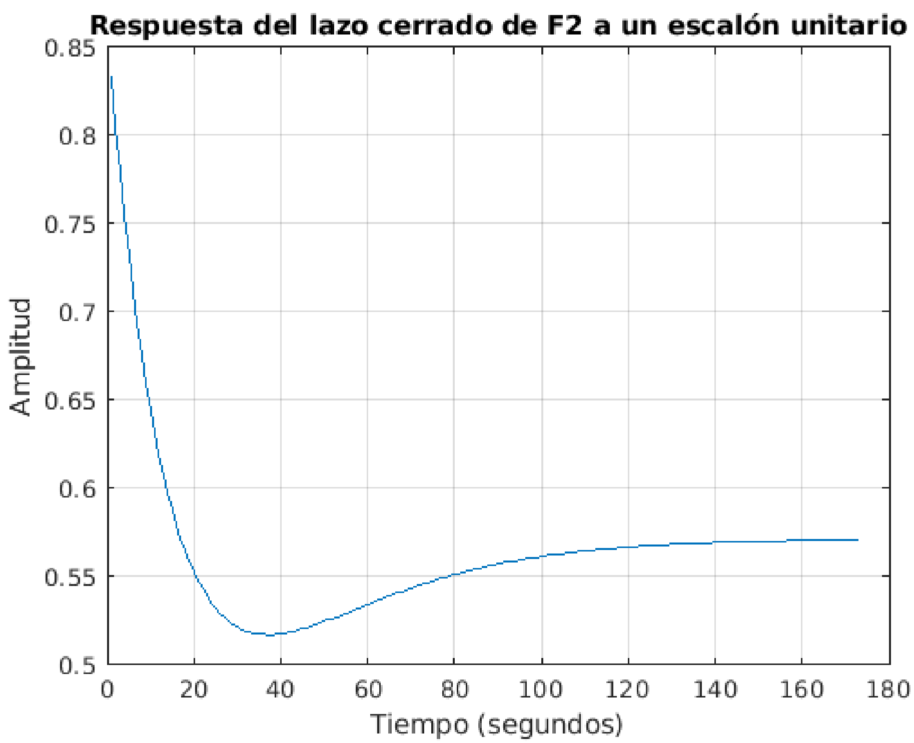

Figura 3.4: Respuesta del lazo cerrado de la función de segundo orden a una función escalón unitario

3.3 TERCERA FUNCIÓN

El modelo de sistema de tercer orden propuesto está expresado en la ecuación 3.5.

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+4\frac{\partial y}{\partial t}+8y=16u,\\ y(0)=0,\dot{y}(0)=0,\ddot{y}(0)=1\end{gathered} \tag{3.5}$$

Se aplica la Transformada de Laplace,

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}+2\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+4\frac{\partial y}{\partial t}+8y=16u\Big/\mathscr{L}\{\}\\ \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}\right\}+2\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right\}+4\mathscr{L}\left\{\frac{\partial y}{\partial t}\right\}+8\mathscr{L}\{y\}=16\mathscr{L}\{u\}\\ s^3Y-s^2y(0)-s\dot{y}(0)-\ddot{y}(0)+2(s^2Y-sy(0)-\dot{y}(0))+4(sY-y(0))+8Y=16U\end{gathered}$$

Como $y(0)=0$, $\dot{y}(0)=0$ y $\ddot{y}(0)=1$, entonces

$$\begin{gathered}Y(s^3+2s^2+4s+8)-1=16U\\ Y=\frac{16}{s^3+2s^2+4s+8}U\frac{1}{s^3+2s^2+4s+8}\end{gathered}$$

Por lo tanto, la ecuación de transferencia queda expresada en la ecuación 3.6.

$$H(s)=\frac{16}{s^3+2s^2+4s+8} \tag{3.6}$$

El gráfico de la respuesta de esta función a una función escalón unitario se refleja en la figura 3.5. La figura 3.6 muestra la respuesta del lazo cerrado de esta función a una función escalón unitario.

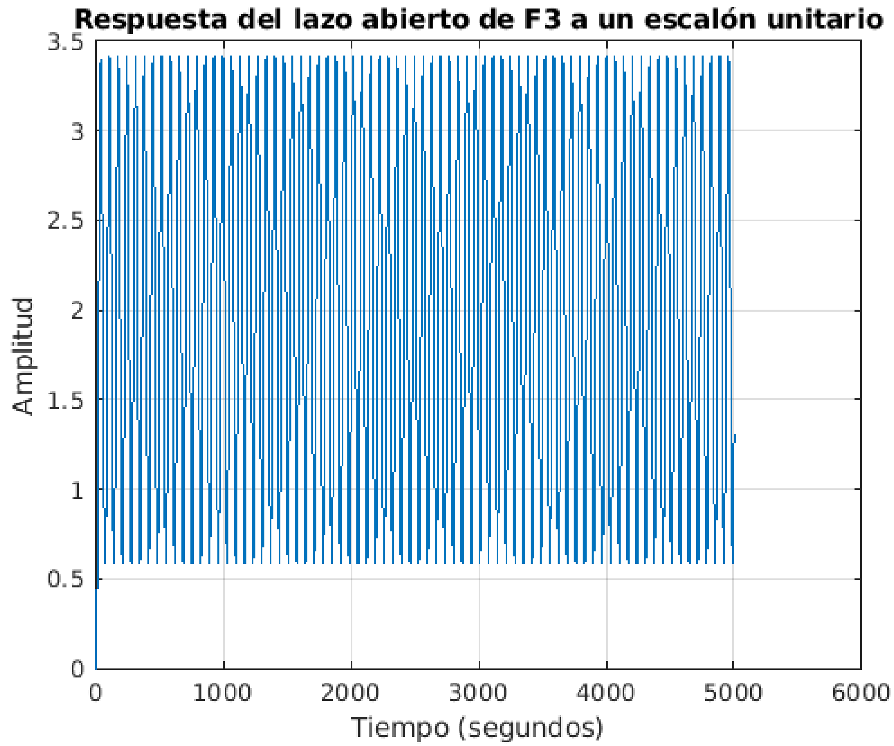

Figura 3.5: Respuesta de la función de tercer orden a una función escalón unitario

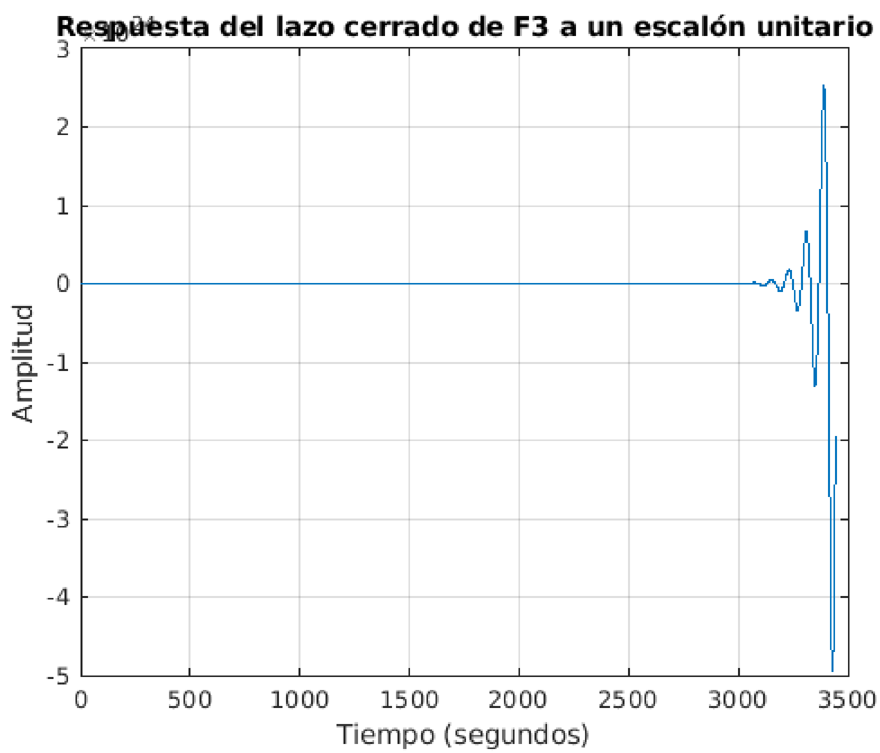

Figura 3.6: Respuesta del lazo cerrado de la función de tercer orden a una función escalón unitario

3.4 CUADRO COMPARATIVO

Se realizó un cuadro comparativo entre las funciones de primer y segundo orden para los gráficos de lazo abierto. El resultado queda plasmado en la tabla 3.1.

Métrica	Función 1	Función 2	Función 3
Ceros	0	-0.7000 + 0.5568i; -0.7000 - 0.5568i	NAN
Polos	-0.333	-5.4495; -0.5505	-2; 2i; -2i
Ganancia estática	1.333	5	16
Tiempo de Estabilización	11.7362	3.8664	NAN
RiseTime	6.5910	0.2711	NAN
SettlingMin	3.5070e-05	0.9890	NAN
SettlingMax	0.1273	1.6283	NAN
Overshoot	Inf	275.0000	NAN
Undershoot	0	0	NAN
Peak	1.3333	5	Inf
PeakTime	0	0	Inf

Tabla 3.1: Cuadro comparativo de métricas entre las funciones de lazo abierto de primer, segundo y tercer orden

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

Para la segunda parte de la experiencia, se pide graficar la función escalón del siguiente diagrama de bloque.

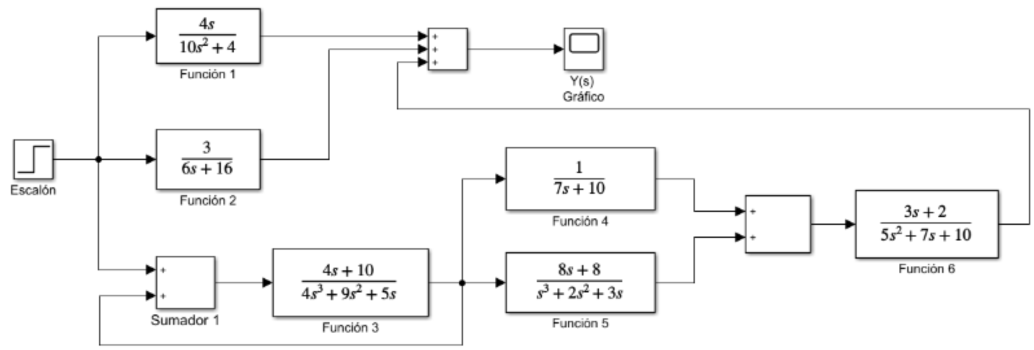

Figura 4.1: Diagrama de bloque.

Haciendo uso de las funciones de MATLAB, es posible implementar cada parte del diagrama de bloques simulando los lazos y sumadores que lo componen. A continuación se explica como fue abordado este diagrama para poder obtener la función de transferencia equivalente y así poder obtener la respuesta al escalón de dicha función.

1. El primer paso es el lazo cerrado presente en la función 3.
2. Luego se toma como series el lazo cerrado anterior con la función 4 y luego con la función 5.
3. Se sigue tomando en paralelo la serie entre el lazo cerrado con la función 4 y con la función 5, mencionado en el punto anterior.
4. Posteriormente se toma en serie el resultado anterior con la función 6.
5. Finalmente se toma en paralelo el resultado anterior con la función 1 y 2.

A continuación se muestra la respuesta al escalón de la función equivalente que se obtuvo al realizar los pasos anteriores.

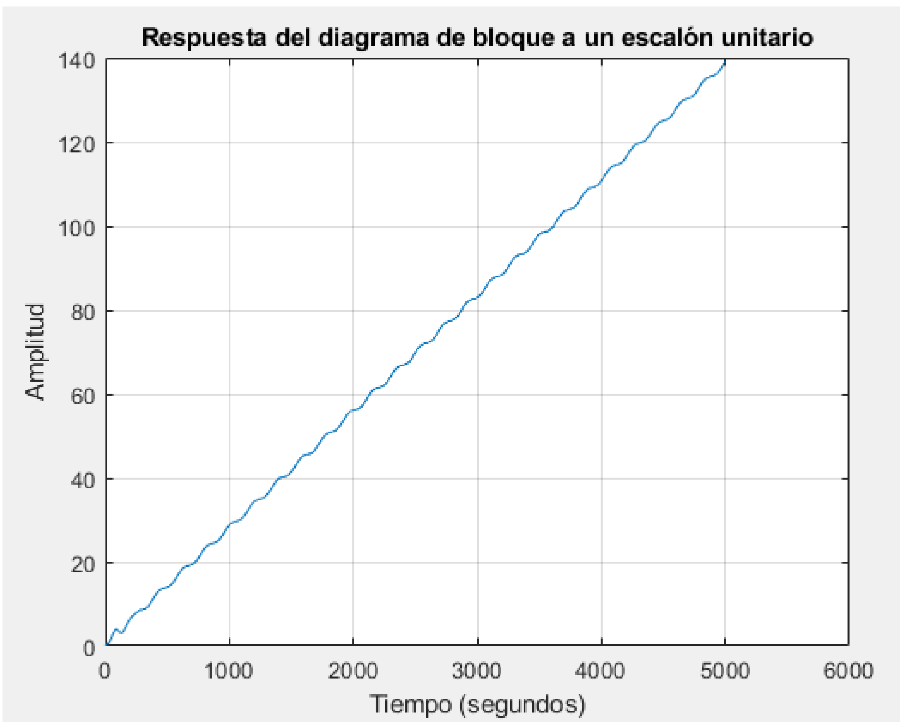

Figura 4.2: Respuesta al escalón.

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

A modo de conclusión, en la parte 1 de esta experiencia se puede observar que los gráficos de la primera función, la respuesta al lazo abierto y cerrado, son bastante similares entre si, en cuanto a la segunda función, se puede apreciar que las respuestas al escalón unitario no son tan similares como en la función 1.

En cuanto a los polos de la primera función, se puede decir que es estable, ya que cuando el tiempo tiende al infinito el resultado tiende a cero. Al observar la segunda función estudiada también es posible afirmar que es estable, esto debido a que la parte real de los polos de la función es estrictamente negativo. Para la tercera función, al ser de tercer orden, es necesario tener en cuenta los criterios de Routh-Hurwitz, en base a esto se puede afirmar que la función no es inestable, ya que no existe ningún cambio de signo en los coeficientes del denominador, al momento de analizar los polos de la función, si se tienen un par de polos complejos conjugados en el eje imaginario y los demás se encuentran en el semiplano izquierdo, se puede afirmar que es marginalmente estable, caso que corresponde a la función 3. En cuanto a los valores de la función 3 en la tabla comparativa, se encuentran la mayoría de los valores como NAN, esto ocurre porque la función no es estable.

En cuanto a la parte 2 de esta experiencia, se hizo uso de las funciones de MATLAB para reducir el diagrama parcialmente. Finalmente, al obtener la respuesta del diagrama a un escalón unitario en el gráfico, se puede apreciar que la ganancia estática del sistema es infinita, por lo que es posible afirmar que este sistema es inestable.

Para finalizar, fue posible cumplir con el objetivo de este laboratorio, puesto que se pudo analizar utilizando MATLAB tanto las funciones de primer, segundo y tercer orden, como el diagrama de bloques. Cabe mencionar que los resultados concuerdan con lo visto en teoría.

BIBLIOGRAFÍA

Giraldo, S. A. C. (2015). Función de transferencia. Recuperado desde https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/funcion-de-transferencia/".

Giraldo, S. A. C. (2020). Concepto de cero en una función de transferencia. Recuperado desde https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/cero-de-una-funcion-de-transferencia/".

mathworks (2020). stepinfo. Recuperado desde https://la.mathworks.com/help/control/ref/stepinfo.html?s_tid=srchtitle".

Villanueva, M. V. (2005). Tutorial de análisis y control de sistemas usando matlab. Recuperado desde https://www.u-cursos.cl/usuario/f77fc7be176d9b7e1bf51e951eae2753/mi_blog/r/Matlab_Tutorial_Control.pdf.