1.a $\sum_{i=1}^{n} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^n-1)}{2}$

b. paso1: $P(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^1-1)}{2}$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{1} 6.5^{i-1} = 6.5^{1-1} = 6.5^0 = 6.1 = 6 \\ \frac{3.(5^1-1)}{2} = \frac{3.(5-1)}{2} = \frac{3.4}{2} = \frac{12}{2} = 12 \end{cases}$$

paso2: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

(h) $\sum_{i=1}^{k} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^k-1)}{2}$

(T) $\sum_{i=1}^{k+1} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^{k+1}-1)}{2}$

Dem: $\sum_{i=1}^{k+1} 6.5^{i-1} = \underbrace{6.5^{1-1} + 6.5^{2-1} + 6.5^{3-1} + \dots + 6.5^{k-1}} + 6.5^{k+1-1}$

(h) $\sum_{i=1}^{k} 6.5^{i-1} + 6.5^{k+1-1}$

$\frac{3.(5^k-1)}{2} + 6.5^k$

$\frac{3.(5^k-1)+2.(6.5^k)}{2}$ ① suma de fracciones

$\frac{3.5^k-3+(2.6).5^k}{2}$ ② conmutatividad en productoria $a(a.c) = (a.b).c$

$\frac{3.5^k-3+12.5^k}{2}$ ③ factor comun de 5^k. ③ $(5^k).(3+12) = 5^k.15 \overset{①}{=} 15.5^k$

$\frac{15.5^k-3}{2}$ ③

$\frac{3.(5.5^k-1)}{2}$ ④ factor comun

$\frac{3.(5^{k+1}-1)}{2}$ ⑤ Producto de igual base. $a.a = a^{1+1} = a^2$

∴ por paso1 y paso2 $\sum_{i=1}^{n} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^n-1)}{2}$ es verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$

1

c $\sum_{i=1}^{30} (24.5^{i-1} + 2)$

$\sum_{i=1}^{30} 24.5^{i-1} + \sum_{i=1}^{30} 2$ (1)

$\sum_{i=1}^{30} 4.6.5^{i-1} + \sum_{i=1}^{30} 2$ (2)

$4.\sum_{i=1}^{30} 6.5^{i-1} + \sum_{i=1}^{30} 2$ (3)

$4.\left(\frac{3.(5^{30}-1)}{2}\right) + \sum_{i=1}^{30} 2$ (4)

$4.\left(\frac{3.(5^{30}-1)}{2}\right) + 30.2$ (5)

$\frac{4.3.(5^{30}-1)}{2} + 60$

$\frac{12.(5^{30}-1)}{2} + 60$

$\frac{12.(5^{30}-1) + 2.60}{2}$

$6.(5^{30}-1) + 60$ simplificación por 2.

$6.((5^{30}-1) + 10)$

1. $\sum_{i=1}^{n} a_i + b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

2. factorización de 24 en 4.6

3. $\sum_{i=1}^{n} k.a_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$

4. usando el ítem anterior:

$\sum_{i=1}^{n} 6.5^{i-1} = \frac{3.(5^{n}-1)}{2}$

5. $\sum_{i=1}^{n} k = \underbrace{k+k+k...+k}_{n \text{ veces}} = n.k$

2.

dato: $18 \nmid a \Rightarrow a = 18.K + 6 \ , \ K \in \mathbb{Z}$

$a^2 = (18.K+6)^2 \ , \ K \in \mathbb{Z}$

$a^2 = (18K)^2 + 18.K + 36$ ①

$a^2 = 18^2.K^2 + 18.K + 36$

$a^2 = 18.(18K^2+K) + 36$ ②

$a^2 - 11 = 18.L + 36 - 11$ ③ ④

$a^2 - 11 = 18.L + 25.$

$\therefore$ el resto de dividir $a^2 - 11$ por 18 es 25

1. binomio al cuadrado
2. factor comun
3. la potencia de enteros y la suma es cerrada en enteros
4. propiedad uniforme

3. a P es primo $P | a.(b-7P)$ $P \nmid a$, entonces $P | b$

(H) P es primo $P | a.(b-7P)$ $P \nmid a$,

(T) $P | b$

Dem:

si P es primo y $P | a.(b-7P)$ por propiedad 1, $P | a$ v $P | b-7P$, como $P \nmid a$

por hipotesis $P | b-7P \Rightarrow b-7P = P.K, K \in \mathbb{Z} \overset{①}{\Rightarrow} b = P.K + 7P \ , \ K \in \mathbb{Z} \overset{①}{\Rightarrow}$

$b = P(K+7) \ , \ K \in \mathbb{Z} \overset{②}{\Rightarrow} b = P.S \ , S \in \mathbb{Z} \ S:(K+7) \overset{④}{\Rightarrow} P | b$

$\therefore$ luego $P | b$

① propiedad uniforme

② factor comun

③ la suma es cerrada en $\mathbb{Z}$

④ definicion de divisibilidad.

b. $(3b, 2a+b)=7$ entonces $7|b$

(H) $(3b, 2a+b)=7$

(T) $7|b \Rightarrow b=7.?$

Dem: usando propiedad (1) $(3b, 2a+b)=7$ entonces $7|3b \wedge 7|2a+b \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$7|b \vee 7\nmid 3 \wedge 7|2a+b \overset{(3)}{\Rightarrow} b=7.S \wedge 2a+b=7.K \,, SK\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$b=7.S \wedge b=7.K-2a \,, SK\in\mathbb{Z} \overset{\text{propiedad}}{\Rightarrow} b=7.S \wedge b=7.(K-2a) \,, SK\in\mathbb{Z} \overset{\text{la sum. cerr. } \mathbb{Z}}{\Rightarrow}$

$b=7.S \wedge b=7.T \,, ST\in\mathbb{Z} \overset{(4)}{\Rightarrow} b=7.S \,, S\in\mathbb{Z} \overset{(3)}{\Rightarrow} 7|b$

1. $(ab)=7 \Rightarrow 7|a \wedge 7|b$
2. 7 es primo $7|a.b \Rightarrow 7|a \vee 7|b$
3. def divisibilidad,
4. simplificacion

4. (ab), $8a+3b=35$, $(ab)\neq 1$, $(b5)=1$

$8a+3b=35$

$(ab)|35$

$(ab)\in\{\pm1, \pm5, \pm7, \pm35\}$

$(ab)>0$ entonces

$(ab)\in\{1, 5, 7, 35\}$

por dato $(ab)\neq 1$

$(ab)\in\{5, 7, 35\}$

suponemos que $(ab)=5$

$5|a \wedge 5|b$ por dato

$5|5 \wedge 5|b$ por como $(b5)=1$

luego $5\neq(ab)$

suponiendo $(ab)=35$

$35|a \wedge 35|b$

$a=35.K \wedge b=35.T$

$a=5.7.K \wedge b=5.7.T \overset{(1)}{\Rightarrow} a=5(7.K) \wedge b=5(7T) \overset{(2)}{\Rightarrow} a=5.L \wedge b=5.Y \overset{(3)}{\Rightarrow}$

1. factorizamos 35 en 7.5
2. usando comutatividad, y luego como el producto es cerrado en $\mathbb{Z}$ $7.K=L$, $7.T=Y$
3. definicion de divisibilidad

$s | a \wedge s | b$ pero por punto ortario $s \nmid (a b)$, luego

$(a b) \neq 35$

$\therefore (a b) = 7$

5. a:

$(358; -124) = (358; 124)$

	2	1	7	1	6
358	124	110	14	12	2
110	14	12	2	0	

ii $358 = 124.2 + 110 \longrightarrow 110 = 358 - 124.2$

$124 = 110.1 + 14 \longrightarrow 14 = 124 - 110.1$

$110 = 14.7 + 12 \longrightarrow 12 = 110 - 14.7$

$14 = 12.1 + 2 \longrightarrow 2 = 14 - 12.1$

$2 = 14 - 12.1$

luego $2 = (-124).(-26) + (358).(-9)$

$2 = 124 - 110.1 - 12.1$

$2 = 124 - 110 - 110 + 14.7$

$2 = 124 - 2.(110) + 14.7$

$2 = 124 - 2.(358 - 124.2) + 7.(124 - 110)$

$2 = 124 - 2(358) + 4.124 + 7(124) - 7(110)$

$2 = 124 + 7(124) + 4(124) - 2(358) - 7(110)$

$2 = 12(124) - 2(358) - 7(358 - 124.2)$

$2 = 12.(124) - 2(358) - 7(358) + 14(124)$

$2 = 12.(124) + 14(124) - 2(358) - 7(358)$

$2 = 26(124) - 9(358)$

$2 = (-124).(-26) + (358).(-9)$

5

luego $(-124)x + (358).y$ donde $x = -26$ y $y = -9$, es la forma lineal de $(358, -124)$

iii.

factorizamos $\overline{358.-124}$

358	2	-124	2
179	179	-62	2
1		-31	31
		-1	-1
		1	

$358 = 2.179$

$-124 = -1.2^2.31$

usando ①

$[358; -124] = -1.2^2.31.179 = -22,196$

①

$[a\ b]$

$a = p^{\alpha_1}.p^{\alpha_2}.\cdots.p^{\alpha_n}$

$b = p^{\beta_1}.p^{\beta_2}.\cdots.p^{\beta_n}$

$[a\ b]\ p^{\max(\alpha_1\beta_1)}.\cdots.p^{\max(\alpha_n\beta_n)}$

b.

factorizamos $35^4.10^9 =$

$35^4.10^9$ | $(5.7)^4.(2.5)^9$

$5^4.7^4.2^9.5^9$

$2^9.5^{13}.7^4$

sea $a = p^{\alpha_1}.p^{\alpha_2}\ldots p^{\alpha_n}$

llamaremos $d(a)$ a los divisores de a.

luego los $d(a) = (\alpha_1+1).(\alpha_2+2).\cdots.(\alpha_n+1)$

$\therefore d(35^4.10^9) = (9+1).(13+1).(4+1) = 10.14.5 = 700.$

luego los divisores de $35^4.10^9$ son 700