Tópicos de Grafos

Agustín Santiago Gutiérrez

Universidad Nacional de Buenos Aires - FCEN

Training Camp Argentina 2024

Gracias Sponsors!

Organizador

UNR Universidad Nacional de Rosario

FCEIA Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Diamond

GTS

Gold

Avature

accenture

Temas

1. Teoremas de Dirac y Ore
2. Grafo Cactus
3. Ciclo y Camino Euleriano
4. Descomposición en Orejas

Temas

1. Teoremas de Dirac y Ore
2. Grafo Cactus
3. Ciclo y Camino Euleriano
4. Descomposición en Orejas

Teorema de Ore (Ore en castellano es mena)

Sea G un grafo simple (sin rulos, sin multiejes) de n nodos, en el que para cada par de vértices u, v no adyacentes entre sí, se tiene $deg(u) + deg(v) \geq n$.

G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración constructiva

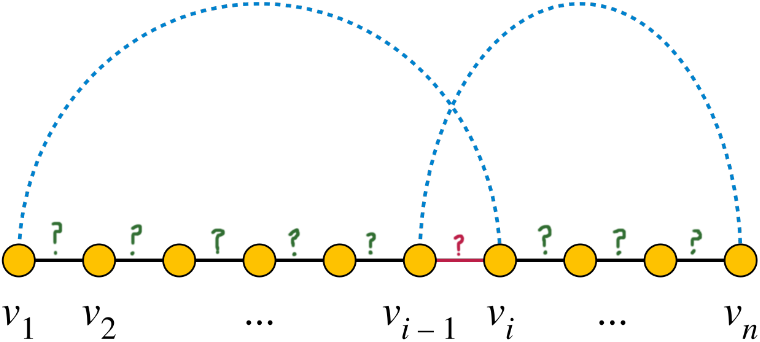
Definimos el puntaje de una permutación de los nodos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ como la cantidad de valores de i con $1 \leq i \leq n$ tales que hay arista en G entre v_i y v_{i+1} (tomando $v_{n+1} = v_1$).

El siguiente algoritmo lineal construye un ciclo hamiltoniano:

- `tomar una permutación inicial cualquiera`
- `mientras el puntaje no es` n
  `cambiar la permutación por otra de mejor puntaje`

Cómo mejorar

Supongamos que v_1 y v_n no son vecinos en G (podemos rotar la permutación, o renombrar índices mentalmente)



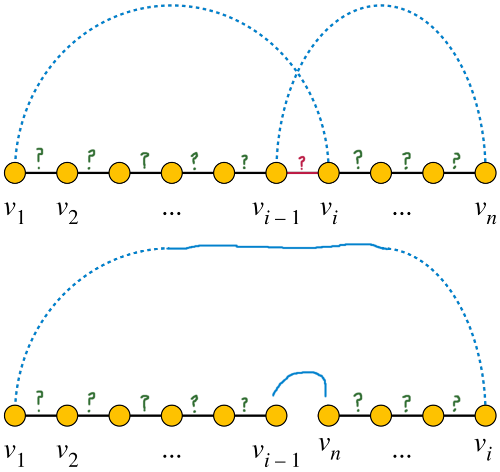
Tomamos un i (con $2 \leq i \leq n$) tal que:

- v_1 y v_i son vecinos
- $v_i - 1$ y v_n son vecinos

Existe por la condición de Ore y el principio del palomar

Cómo mejorar (cont.)

Ahora invertimos el rango $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$



El puntaje mejoró en $+1$ o en $+2$

Teorema de Dirac (Or, Why Friends Are Important)

Sea G un grafo simple (sin rulos, sin multiejes) de n nodos, en el que todo vértice u tiene $deg(u) \geq \frac{n}{2}$.

G tiene un ciclo hamiltoniano (Es corolario inmediato del teorema de Ore)

Temas

1. Teoremas de Dirac y Ore
2. Grafo Cactus
3. Ciclo y Camino Euleriano
4. Descomposición en Orejas

Cuidado ICPCeros: Los cactus pinchan globos

Cactus Revolution: `https://dmoj.ca/problem/neerc10c`

Temas

1. Teoremas de Dirac y Ore
2. Grafo Cactus
3. Ciclo y Camino Euleriano
4. Descomposición en Orejas

Grafos que se descomponen en ciclos

Teorema: Las aristas de un grafo no dirigido se particionan en ciclos si y solo si todos los grados son pares

Teorema: Las aristas de un grafo dirigido se particionan en ciclos si y solo si el grado neto (salidas menos entradas) en cada nodo es cero

Grafos eulerianos

Un ciclo euleriano es un ciclo que pasa por cada arista del grafo exactamente una vez. Un camino (no ciclo) euleriano es un camino de un nodo a hasta otro b que pasa por cada arista del grafo exactamente una vez.

Un grafo (no dirigido / dirigido) es euleriano si existe un ciclo euleriano.

Teorema: Un grafo es euleriano si y solo si las aristas se descomponen en ciclos y es (débilmente) conexo ignorando nodos aislados

Teorema: Un grafo tiene camino (no ciclo) euleriano de a hasta b si y solo si es (débilmente) conexo ignorando nodos aislados, y además se cumple la condición de los grados en todos los nodos excepto en a y b, que cumplen:

- En el caso no dirigido, a y b son los únicos de grado impar
- En el caso dirigido, a es el único con grado neto 1 y b el único con grado neto -1

Aplicaciones

- Mínima cantidad de trazos para hacer un dibujo dado
- Problema del cartero chino dirigido $O(N^2 M)$
- Problema del cartero chino no dirigido en "existe polinomial"
- Curiosidad: Variantes NP-hard de Chinese Postman Problem (CPP)
  - Problema del cartero ventoso (Windy Postman Problem)
  - Problema del cartero chino mixto (Mixed Chinese Postman Problem)
  - Problema del cartero rural (Rural Postman Problem)

Para practicar

https://cses.fi/problemset/task/1691

Temas

1. Teoremas de Dirac y Ore
2. Grafo Cactus
3. Ciclo y Camino Euleriano
4. Descomposición en Orejas

Ejemplo concreto: Problema N del miércoles

Problema N

- Enunciado: `https://codeforces.com/gym/102760/problem/C`
- Tutorial: `https://kaist.run/contest/2020-fall/solution.pdf`

Bibliografía:

- https://codeforces.com/blog/entry/80932