

Geometría

Juan Pablo Cabaña

Universidad Tecnológica Nacional

Training Camp 2024



Gracias Sponsors!

Organizador



Universidad
Nacional
de Rosario

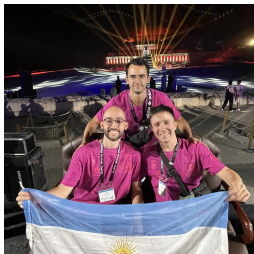
Diamond



Gold



Presentacion



① Vector

② Polar Sort - Convex Hull

③ Línea

④ Segmento

Temario

① Vector

② Polar Sort - Convex Hull

③ Línea

④ Segmento

Vector: Definiciones

Vector de N componentes

Conjunto ordenado de n numeros:

$$(a_1, \dots, a_N)$$

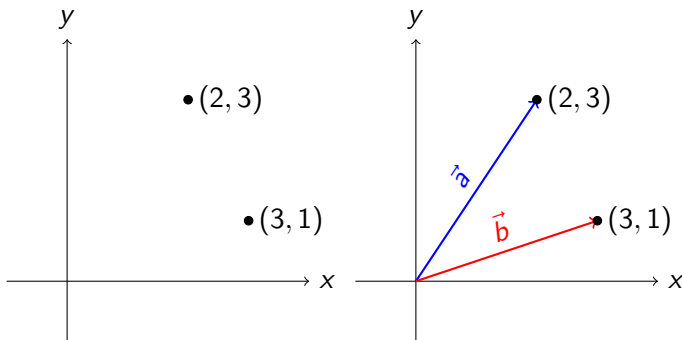
R^N

Conjunto de todos los vectores de dimension N (a_1, \dots, a_N) , donde a_i es un numero real. En esta clase nos vamos a centrar en R^2 , es decir los vectores de pares ordenados (a_1, a_2) .

Vector: Definiciones

Interpretacion geometrica

- Como los puntos del plano xy estan descritos por un par ordenado (x,y) podemos considerarlos equivalentes a los vectores de R^2 .
- Tambien pueden considerase a los vectores en R^2 como una entidad con magnitud y direccion.



¿Que podemos hacer con vectores?

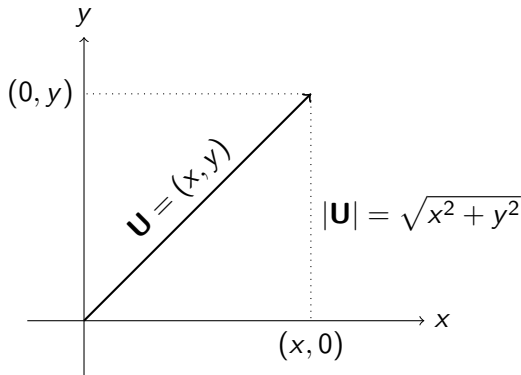
- Norma de un vector U
- Suma/Resta de dos vectores U y V
- Multiplicar/Dividir un vector U por un numero K
- Producto punto entre dos vectores U y V
- Producto cruz entre dos vectores U y V
- Proyectar un vector U sobre un vector V

Vector: Operaciones

Norma de un vector

Largo o extension de un vector U en el espacio:

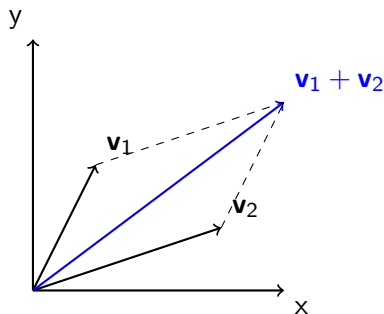
$$|U| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Vector: Operaciones

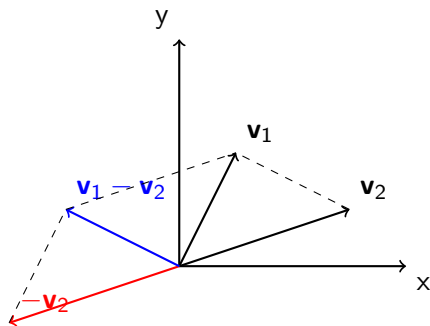
Suma de dos vectores

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$



Resta de dos vectores

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$



Distancia entre dos puntos

Distancia entre dos puntos

- Dado dos puntos U y V , el vector que va de V a U es $U-V$.

Distancia entre dos puntos

- Dado dos puntos U y V , el vector que va de V a U es $U-V$.
- Dado un vector, ya sabemos calcular su longitud.

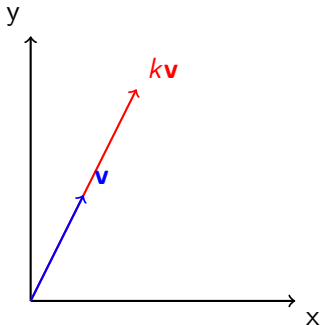
Distancia entre dos puntos

- Dado dos puntos U y V , el vector que va de V a U es $U - V$.
- Dado un vector, ya sabemos calcular su longitud.

$$|U - V|$$

Multiplicar/Dividir por un escalar

$$k * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k * x \\ k * y \end{pmatrix}$$



Producto punto de dos vectores

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$$

Teorema

Sean U y V vectores en R^2 diferentes del vector cero, y sea α el ángulo formado entre U y V , entonces:

$$U * V = |U||V| * \cos(\alpha)$$

Interpretacion geometrica

Dado un vector U , que conjunto de puntos tienen igual producto punto con U ?

Interpretacion geometrica

Dado un vector U , que conjunto de puntos tienen igual producto punto con U ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = k$$

$$x * x_u + y * y_u = k$$

Interpretacion geometrica

Dado un vector U , que conjunto de puntos tienen igual producto punto con U ?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = k$$

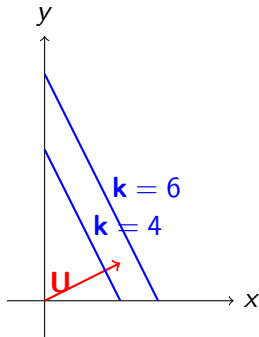
$$x * x_u + y * y_u = k$$

Al fijar el valor del producto punto (K), obtenemos una linea perpendicular al vector U .

Vector: Operaciones

Interpretacion geometrica

Podemos interpretar el producto punto entre una direccion U y un punto V , como una medida de "que tan lejos esta el punto V en la direccion U ".



Algunas observaciones

Dados dos vectores de norma conocida:

- Que valores puede tomar el producto punto de ellos?

Algunas observaciones

Dados dos vectores de norma conocida:

- Que valores puede tomar el producto punto de ellos?

$$U * V = |U||V| * \cos(\alpha) \rightarrow -|U||V| \leq U * V \leq |U||V|$$

Algunas observaciones

Dados dos vectores de norma conocida:

- Que valores puede tomar el producto punto de ellos?

$$U * V = |U||V| * \cos(\alpha) \rightarrow -|U||V| \leq U * V \leq |U||V|$$

- En que direccion el producto punto es maximo y minimo?

Algunas observaciones

Dados dos vectores de norma conocida:

- Que valores puede tomar el producto punto de ellos?

$$U * V = |U||V| * \cos(\alpha) \rightarrow -|U||V| \leq U * V \leq |U||V|$$

- En que direccion el producto punto es maximo y minimo?

Alcanza un maximo cuando U y V tienen igual direccion ($\cos(\alpha) = 1$)
y un minimo cuando tienen direccion opuesta ($\cos(\alpha) = -1$)

Aplicaciones del producto punto

- Determinar si dos vectores son perpendiculares.

Aplicaciones del producto punto

- Determinar si dos vectores son perpendiculares.
- Ordenar un conjunto de puntos en una cierta dirección U .

Aplicaciones del producto punto

- Determinar si dos vectores son perpendiculares.
- Ordenar un conjunto de puntos en una cierta dirección U .
- Encontrar el punto más cercano/lejano en una dirección U .

Aplicaciones del producto punto

- Determinar si dos vectores son perpendiculares.
- Ordenar un conjunto de puntos en una cierta direccion U .
- Encontrar el punto mas cercano/lejano en una direccion U .
- Resolver problemas de optimizacion.

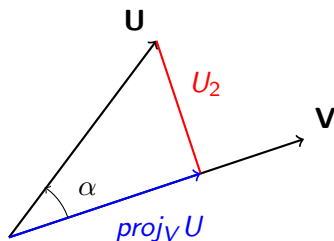
Proyeccion de un vector U sobre un vector V

$$\text{proj}_V U = V * \frac{U * V}{V * V}$$

Vector: Operaciones

Interpretacion geometrica

Es la proyeccion ortogonal del vector U sobre la linea que contiene al vector V .



Aplicaciones de la proyección de vectores

- Dado un punto P y una línea/segmento L , encontrar el punto en L mas cercano a P .

Producto cruz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 * y_2 - x_2 * y_1$$

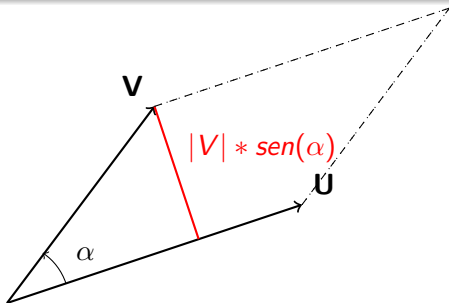
Teorema

Sean U y V vectores en R^2 diferentes del vector cero, y sea α el ángulo que va de U a V en sentido antihorario, entonces:

$$U \times V = |U| |V| * \text{sen}(\alpha)$$

Interpretacion geometrica

Podemos interpretar el producto cruz entre dos vectores U y V como el "area con signo" del paralelogramo que tiene como lados a U y V .



Aplicaciones del producto cruz

- Determinar si dos vectores son paralelos.

Aplicaciones del producto cruz

- Determinar si dos vectores son paralelos.
- Dado un vector U y un punto P , saber si P esta a la izquierda de U .

Aplicaciones del producto cruz

- Determinar si dos vectores son paralelos.
- Dado un vector U y un punto P , saber si P esta a la izquierda de U .
- Dados dos vectores, calcular el area del paralelogramo que los tiene como lados.
- Dados tres puntos, calcular el area del triangulo formado.

Vector:

```
1  typedef long long T;
2  typedef double ld;
3  struct pto {
4      T x, y;
5      pto() : x(0), y(0) {}
6      pto(T _x, T _y) : x(_x), y(_y) {}
7      pto operator+(pto b) { return pto(x+b.x, y+b.y); }
8      pto operator-(pto b) { return pto(x-b.x, y-b.y); }
9      pto operator+(T k) { return pto(x+k, y+k); }
10     pto operator*(T k) { return pto(x*k, y*k); }
11     pto operator/(T k) { return pto(x/k, y/k); }
12     T operator*(pto b) { return x*b.x + y*b.y; }
13     pto proj(pto b) { return b*((*this)*b) / (b*b); }
14     T operator^(pto b) { return x*b.y - y*b.x; }
15     ld norm() { return sqrt(x*x + y*y); }
16     ld dist(pto b) { return (b - (*this)).norm(); }
17 };
```

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.
- Rombo: tiene cuatro lados de igual largo.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.
- Rombo: tiene cuatro lados de igual largo.
- Paralelogramo: tiene dos pares de lados paralelos.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.
- Rombo: tiene cuatro lados de igual largo.
- Paralelogramo: tiene dos pares de lados paralelos.
- Trapecio: tiene un par de lados paralelos.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.
- Rombo: tiene cuatro lados de igual largo.
- Paralelogramo: tiene dos pares de lados paralelos.
- Trapecio: tiene un par de lados paralelos.
- Romboide: tiene simetría de reflexión a través de una diagonal.

Enunciado

Dado cuatro puntos, determinar que figura forman:

- Cuadrado: tiene cuatro angulos rectos y cuatro lados iguales.
- Rectangulo: tiene cuatro angulos rectos.
- Rombo: tiene cuatro lados de igual largo.
- Paralelogramo: tiene dos pares de lados paralelos.
- Trapecio: tiene un par de lados paralelos.
- Romboide: tiene simetría de reflexión a través de una diagonal.
- Ninguno.

Temario

① Vector

② Polar Sort - Convex Hull

③ Línea

④ Segmento

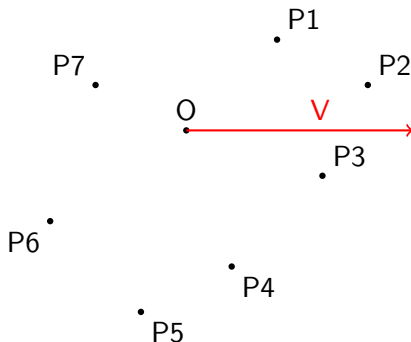
Polar Sort

Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.

Polar Sort: Definicion

Polar Sort

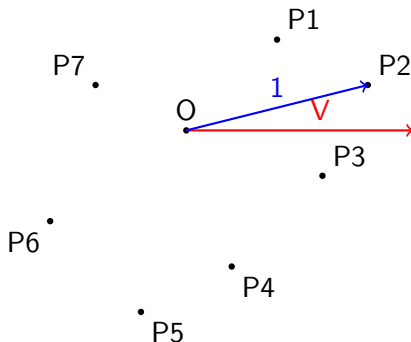
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

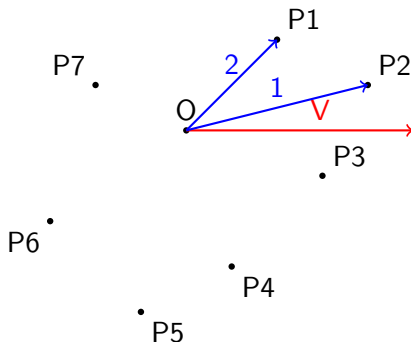
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

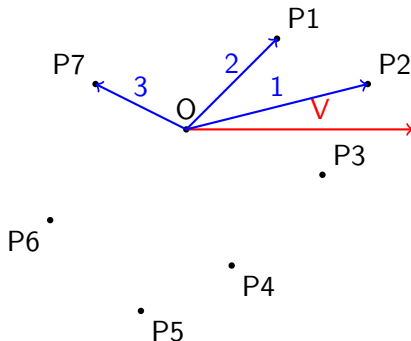
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

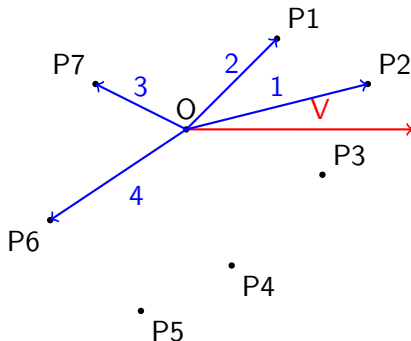
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

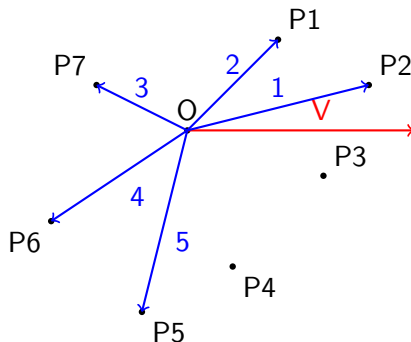
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

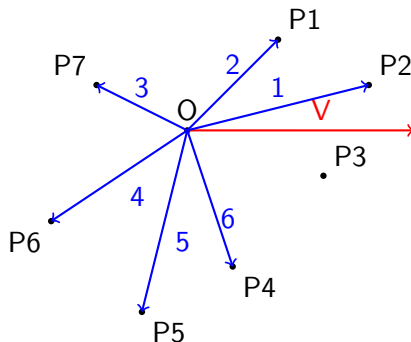
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

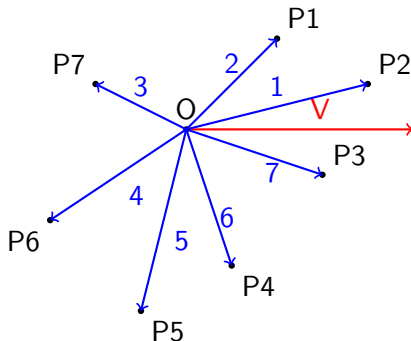
Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Definicion

Polar Sort

Dado un punto O , un vector V , el polar sort de un conjunto de puntos S es el ordenamiento de los puntos de S , en sentido antihorario, tomando a O como centro y V como direccion inicial.



Polar Sort: Implementacion

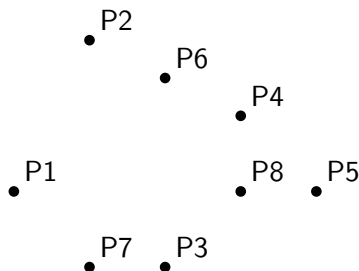
```
1  struct cmp {
2      pto o, v;
3      cmp(pto no, pto nv) : o(no), v(nv) {}
4      bool half(pto p) {
5          assert(!(p.x == 0 && p.y == 0)); // (0,0) isn't well defined
6          return (v ^ p) < 0 || ((v ^ p) == 0 && (v * p) < 0);
7      }
8      bool operator()(pto& p1, pto& p2) {
9          return mp(half(p1 - o), T(0)) < mp(half(p2 - o), ((p1 - o) ^ (p2 - o)));
10     }
11 };
```

Convex Hull

- Un conjunto de puntos es convexo si contiene todos los segmentos entre todo par de puntos del conjunto.
- El convex hull de un conjunto de puntos S es el conjunto convexo minimo que contiene a S .

Convex Hull

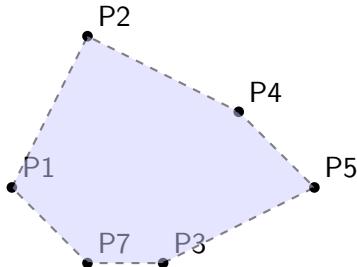
- Un conjunto de puntos es convexo si contiene todos los segmentos entre todo par de puntos del conjunto.
- El convex hull de un conjunto de puntos S es el conjunto convexo minimo que contiene a S .



Convex Hull: Definición

Convex Hull

- Un conjunto de puntos es convexo si contiene todos los segmentos entre todo par de puntos del conjunto.
- El convex hull de un conjunto de puntos S es el conjunto convexo minimo que contiene a S .



Convex Hull: Algoritmo

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.
Veamos como hallar el upper hull (UH):

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .
- Recorrer los puntos ordenados:

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .
- Recorrer los puntos ordenados:
 - Si $|UH| \geq 2$, sean U y V los dos ultimos puntos agregados.

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .
- Recorrer los puntos ordenados:
 - Si $|UH| \geq 2$, sean U y V los dos ultimos puntos agregados. Mientras $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \geq 0$ borrar V de UH .
 - Agregar P a UH .

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .
- Recorrer los puntos ordenados:
 - Si $|UH| \geq 2$, sean U y V los dos ultimos puntos agregados. Mientras $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \geq 0$ borrar V de UH .
 - Agregar P a UH .

Para hallar el lower hull solo hay que reemplazar $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \geq 0$ por $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \leq 0$.

Convex Hull: Algoritmo

Algoritmo

Hallar el upper hull y el lower hull por separado, luego unirlos.

Veamos como hallar el upper hull (UH):

- Ordenar los puntos por x , luego por y .
- Recorrer los puntos ordenados:
 - Si $|UH| \geq 2$, sean U y V los dos ultimos puntos agregados. Mientras $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \geq 0$ borrar V de UH .
 - Agregar P a UH .

Para hallar el lower hull solo hay que reemplazar $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \geq 0$ por $\overrightarrow{UV} \times \overrightarrow{UP} \leq 0$.

Complejidad

Ordenar los puntos lleva $O(N * \log(N))$, recorrer todos los puntos $O(N)$, entonces $O(N * \log(N) + N) = O(N * \log(N))$.

Convex Hull: Implementacion

```
1  vector<pto> upper_hull(vector<pto>& p) {
2      vector<pto> uh;
3      sort(p.begin(), p.end());
4      forn(i, sz(p)) {
5          while(sz(uh)>=2 && (uh[sz(uh)-1]-uh[sz(uh)-2])^(p[i]-uh[sz(uh)-2])>=0)
6              uh.pop_back();
7          uh.pb(p[i]);
8      }
9      return uh;
10 }
```

Enunciado

Dado un conjunto de puntos S , un polígono P es casi convexo si:

- P es simple: sus vertices son diferentes y ningun lado se intersecta con otro.
- Los vertices de P pertenecen a S , y todos los puntos de S estan dentro o en el borde de P .

Sea R el polígono casi convexo de tamaño minimo, ¿Cuantos poligonos casi convexos Q existen tal que $|Q| \leq |R| + 1$?.

Cotas

- $3 \leq |S| \leq 2000$

Temario

① Vector

② Polar Sort - Convex Hull

③ Línea

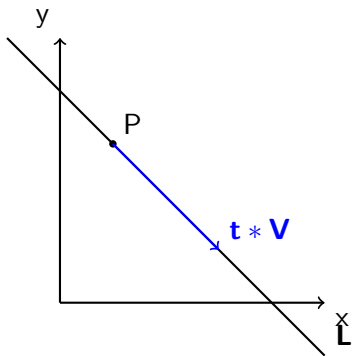
④ Segmento

Línea: Definición

Línea

Sea P un punto en la línea L , y V un vector director de L , la línea L es el conjunto de puntos Q dados por:

$$Q = P + V * t, t \in R$$



Lineas paralelas

Líneas paralelas

Dos líneas L_1 y L_2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V , y un punto cualquiera Q :

- Q esta a la izquierda de L si:

Líneas paralelas

Dos líneas L_1 y L_2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V , y un punto cualquiera Q :

- Q esta a la izquierda de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} > 0$

Lineas paralelas

Dos líneas L1 y L2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V, y un punto cualquiera Q:

- Q esta a la izquierda de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} > 0$
- Q esta a la derecha de L si:

Lineas paralelas

Dos líneas L1 y L2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V, y un punto cualquiera Q:

- Q esta a la izquierda de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} > 0$
- Q esta a la derecha de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} < 0$

Lineas paralelas

Dos líneas L1 y L2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V, y un punto cualquiera Q:

- Q esta a la izquierda de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} > 0$
- Q esta a la derecha de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} < 0$
- Q esta sobre L si:

Lineas paralelas

Dos líneas L1 y L2 son paralelas si sus vectores directores V_1 y V_2 cumplen:

$$V_1 \times V_2 = 0$$

Lado de un punto

Dada una línea L que contiene al punto P y con vector director V, y un punto cualquiera Q:

- Q esta a la izquierda de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} > 0$
- Q esta a la derecha de L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} < 0$
- Q esta sobre L si: $\vec{V} \times \overrightarrow{PQ} = 0$

Punto mas cercano

Dada una linea L que contiene al punto P y con vector director V , el punto de L mas cercano a un punto cualquiera Q es:

Punto mas cercano

Dada una linea L que contiene al punto P y con vector director V, el punto de L mas cercano a un punto cualquiera Q es:

$$P + \text{proj}_V \overrightarrow{PQ}$$

Interseccion de lineas

Dadas las lineas:

$$P_1 + V_1 * \alpha, P_2 + V_2 * \beta$$

Interseccion de lineas

Dadas las lineas:

$$P_1 + V_1 * \alpha, P_2 + V_2 * \beta$$

Igualando:

$$P_1 + V_1 * \alpha = P_2 + V_2 * \beta$$

Interseccion de lineas

Dadas las lineas:

$$P_1 + V_1 * \alpha, P_2 + V_2 * \beta$$

Igualando:

$$P_1 + V_1 * \alpha = P_2 + V_2 * \beta$$

Multiplicando ambos lados por V_2 :

$$P_1 \times V_2 + V_1 \times V_2 * \alpha = P_2 \times V_2 + V_2 \times V_2 * \beta$$

$$P_1 \times V_2 + V_1 \times V_2 * \alpha = P_2 \times V_2$$

$$\alpha = \frac{(P_2 - P_1) \times V_2}{V_1 \times V_2}$$

Linea: Implementacion

```
1  struct line{
2      pto p, v;
3      line(){ }
4      line(pto p_, pto v_): p(p_), v(v_) {}
5
6      bool inside(pto q) { return abs(v^(q-p)) <= EPS; }
7      bool left(pto q) { return v^(q-p)>EPS; }
8      pto closest(pto q) { return p + (q-p).proj(v); }
9      pto inter(line l) {
10         if(v^l.v<=EPS) return pto(INF,INF);
11         return p+v*((l.p-p)^l.v)/(v*l.v);
12     }
13 };
```

Enunciado

Dadas C calles (representadas como líneas) y la posición inicial de un auto (representada como un punto), este va a moverse por las calles y en cada intersección va a realizar un giro a la derecha. Si el auto empieza a moverse hacia el este ¿en qué calle se encuentra el auto después de N giros?

Cotas

- $1 \leq C \leq 100$
- $1 \leq N \leq 10^{10}$

Temario

① Vector

② Polar Sort - Convex Hull

③ Línea

④ Segmento

Segmento

Sean U y V los puntos extremos del segmento, el mismo queda definido por el conjunto de puntos P :

$$P = \overrightarrow{UV} * t + U, t \in [0, 1]$$

Segmento: Implementacion

```
1  struct segm {
2      pto s, e;
3      segm(pto s_, pto e_) : s(s_), e(e_) {}
4      pto closest(pto b) {
5          pto bs = b - s, es = e - s;
6          ld l = es * es;
7          if (abs(l) <= EPS) return s;
8          ld t = (bs * es) / l;
9          if (t < 0.) return s;      // comment for lines
10         else if (t > 1.) return e;  // comment for lines
11         return s + (es * t);
12     }
13     bool inside(pto b) {
14         return abs(s.dist(b) + e.dist(b) - s.dist(e)) < EPS;
15     }
16     pto inter(segm b) { // if a and b are collinear, returns one point
17         if ((*this).inside(b.s)) return b.s;
18         if ((*this).inside(b.e)) return b.e;
19         pto in = line(s, e).inter(line(b.s, b.e));
20         if ((*this).inside(in) && b.inside(in)) return in;
21         return pto(INF, INF);
22     }
23 };
```

Enunciado

Dado un conjunto de edificios de forma triangular (T), cuadrada (Q) y circular (C), una persona debe caminar de un edificio triangular a uno cuadrado. Seleccionar un edificio triangular y otro cuadrado de forma que se minimice la distancia caminada al sol (sin estar debajo de un edificio).

Cotas

- $(T + C) * (Q + C) \leq 10^6$

Problema Extra: Large Triangle

Enunciado

Dado N puntos y un entero S , encontrar tres puntos tal que el area del triangulo formado sea igual a S .

Cotas

- $3 \leq N \leq 2000$

Pueden preguntarme durante el tc o escribirme por:

- jp.cabana@icloud.com
- JPrime