Unidad 1 - Funciones reales

1. Los números reales

A esta altura de nuestra educación, ya todos tenemos experiencia con "los números" y con varias operaciones que los relacionan (empezando seguramente por la suma, la resta, la multiplicación y la división), y recordamos algunas propiedades que tienen, como que el orden de los números en la suma no altera el resultado, o que "menos por menos es más". Y, por supuesto, aquella enigmática restricción por la cual "no se puede dividir por cero".

Nos preguntamos, entonces: ¿qué son los números reales? Hay distintas formas de responderlo, distintas formas de *definirlos*. La presentada libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol (ver Parte III del capítulo de Introducción), se encuadra bajo el título de definición axiomática. No investiga en la naturaleza de los números ni los construye a partir de otros objetos matemáticos, sino que los considera elementos primitivos. Los define **describiendo la relación** que guardan entre ellos: los números reales son simplemente elementos de un *conjunto* entre los que existen dos *operaciones* que, por definición, satisfacen ciertas propiedades específicas llamadas *axiomas*. Al conjunto lo designamos con $\mathbb{R}$, y las operaciones se llaman *suma* y *producto*. Las operaciones son reglas de asignación o correspondencia que a cada par de números (es decir, a cada par de elementos de $\mathbb{R}$) le asignan algún otro elemento específico del mismo conjunto.

Hay tres grupos de axiomas: *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y el *axioma del supremo*.

1.1. Axiomas de cuerpo. Propiedades aritméticas.

Son los axiomas que se usan para demostrar las leyes usuales del álgebra elemental.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ (es decir, son números reales cualesquiera). Son válidas las siguientes afirmaciones:

A1) *Propiedades conmutativas:* $a + b = b + a$ y $ab = ba$.

A2) *Propiedades asociativas:* $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$.

A3) *Propiedad distributiva:* $a(b + c) = ab + ac$.

A4) *Existencia de elementos neutros:* Existen dos números reales distintos, denotados con 0 y 1, tales que, para todo $a \in \mathbb{R}$, verifican $a + 0 = 0 + a = a$ y $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

A5) *Existencia de elementos opuestos:* Para todo número real a, existe un número real b tal que

$$a + b = b + a = 0.$$

A6) *Existencia de elementos recíprocos:* Para todo número real $a \neq 0$, existe un número real b tal que

$$ab = ba = 1.$$

A modo de ejemplo presentamos la prueba de la propiedad cancelativa de la suma. Para más propiedades referimos al libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol, donde todo esto está desarrollado en detalle.

Teorema 1 (Ley de simplificación para la suma o Propiedad cancelativa de la suma)**.** *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$*. Si* $a + b = a + c$*, entonces* $b = c$*.*

Demostración:

Sean a, b y c números reales tales que $a + b = a + c$. Llamemos con d a la suma $a + b$. Es decir, sea $d = a + b$ (y por ende, $d = a + c$).

Por el axioma 5, existe al menos un número, llamémoslo y, que es opuesto a a; es decir, que verifica $a + y = y + a = 0$. Entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b.$$

(Sobre algunos de los símbolos $=$ se ha explicitado el axioma que lo justifica). Luego, $y + d = b$. Pero también $y + d = c$; en efecto:

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c.$$

Por lo tanto

$$b = c,$$

quod erat demonstrandum (q.e.d.)

Notación: para cualquier número $a \in \mathbb{R}$, denotamos con $-a$ al elemento opuesto a a; es decir, al número (que se demuestra es único a partir de los axiomas) que verifica $a + (-a) = 0$. Si nos topamos con un número b tal que $a + b = 0$, entonces $b = -a$.

Llamamos *diferencia* (o resta) entre dos números reales a y b, y la denotamos con $a-b$, al número dado por la suma de a y el opuesto de b. Es decir, $a - b = a + (-b)$.

El siguiente teorema presenta algunas de las propiedades básicas de la diferencia. Para una demostración referimos nuevamente al *Calculus. Vol I.* de Apostol

Teorema 2. *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *(cualesquiera). Entonces:*

1. $-(-a) = a$ *(El número opuesto al opuesto de* a *es el propio número* a*).*
2. $-0 = 0$ *(El opuesto a 0 es el propio 0).*
3. $0 \cdot a = 0$*. (El producto de 0 con cualquier otro número, es 0).*
4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$*.*
5. $(-a)(-b) = ab$*.*
6. $a(b - c) = ab - ac$*.*

El siguiente teorema y sus corolarios establecen propiedades de la operación del producto.

Teorema 3 (*Ley de simplificación para el producto* o *Propiedad cancelativa del producto*)**.** *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$*, con* $a \neq 0$*. Si* $ab = ac$*, entonces* $b = c$*.*

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Corolario 1 (*Unicidad del elemento neutro del producto*)**.** *Si $1'$ es un número que verifica que $a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, entonces $1' = 1$.*

Corolario 2 (*Unicidad del recíproco o inverso*)**.** *Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un único número b tal que $ab = ba = 1$.*

Notación: A partir de la unicidad recién demostrada, dado $a \neq 0$, al único número que es recíproco de a se lo denota con a^{-1}.

Si a y b son dos número reales y $b \neq 0$, llamamos *cociente* entre a y b, y lo denotamos con $\dfrac{a}{b}$ (o también a/b), al número dado por el producto de a y el recíproco de b. Es decir, $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$.

Teorema 4. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

1. *El número 0 no tiene recíproco. (Y es por esto que "no se puede dividir por cero").*
2. $1^{-1} = 1$.
3. $\dfrac{a}{1} = a$*; y si $a \neq 0$,* $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$.
4. *Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.*
5. *Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces:*

   i) $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$.
   ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$.
   iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$.

6. *Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces* $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$.
7. $-a = (-1) \cdot a$.

1.2. Axiomas de orden.

Estos axiomas establecen una ordenación de los números reales; una forma de relacionarlos entre sí definiendo para todo par de números distintos cuál de ellos es "mayor" al otro.

Para ello incluimos un nuevo concepto primitivo: el de que un número sea *positivo*. Formalmente, suponemos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ al que llamaremos *conjunto de números positivos* y denotaremos con $\mathbb{R}^+$, tal que, por definición, satisface los siguientes tres axiomas:

A7) Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $ab \in \mathbb{R}^+$.

A8) Para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$, vale que $a \in \mathbb{R}^+$ ó $-a \in \mathbb{R}^+$, pero no ambas.

A9) $0 \notin \mathbb{R}^+$. (Es decir: el elemento neutro de la suma, el 0, no es un número positivo.)

Vamos a <u>definir</u> los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, llamados respectivamente *menor que*, *mayor que*, *menor o igual que* y *mayor o igual que*, de la siguiente forma. Sean a y b dos números culesquiera:

- $a < b$ significa que $b - a \in \mathbb{R}^+$.
- $a > b$ significa que $a - b \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b < a$.
- $a \leq b$ significa que, o bien $b - a \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$.
- $a \geq b$ significa que, o bien $a - b \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$; es decir, $b \leq a$.

De los axiomas de orden se deducen todas las reglas usuales del cálculo con desigualdades. A continuación, presentaremos algunas de ellas.

Teorema 5. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $a < b$*, entonces* $a + c < b + c$.
2. *Si* $a < b$ *y* $c < d$ *entonces* $a + c < b + d$.
3. *i) Si* $a < b$ *y* $c > 0$*, entonces* $ac < bc$.
   ii) Si $a < b$ *y* $c < 0$*, entonces* $ac > bc$.
4. *Si* $a \neq 0$*, entonces* $a^2 > 0$ *(donde* a^2 *es una notación para el producto* aa*).*
5. $1 > 0$*. Es decir,* $1 \in \mathbb{R}^+$.
6. *Si* $a < b$*, entonces* $-b < -a$
7. $ab > 0$ *si y solo si* a *y* b *son los dos positivos o los dos negativos.*
8. $ab < 0$*, entonces o bien* a *es positivo y* b *negativo o bien* a *es negativo y* b *positivo.*
9. $a > 0$ *si y solo si* $\dfrac{1}{a} > 0$.
10. *Si* $0 < a < b$*, entonces* $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

1.3. Números naturales, enteros, racionales e irracionales.

¿Cuántos números reales hay? En otras palabras: ¿cuántos elementos hay en el conjunto $\mathbb{R}$? Los axiomas de cuerpo imponen explícitamente la existencia de dos distintos, el 0 y el 1. Con los axiomas de orden vimos que

$$0 < 1$$

y que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a < b \ \Rightarrow \ a + c < b + c.$$

Luego,

$$0 < 1 \ \Rightarrow \ 0 + 1 < 1 + 1 \ \Rightarrow \ 1 < 1 + 1.$$

Al número $1 + 1$ se lo denota con 2 (¡menos mal!). Es decir, $2 = 1 + 1$.

Por lo tanto, en $\mathbb{R}$ sabemos que existen al menos tres números distintos: 0, 1 y 2, y que respetan este orden:

$$0 < 1 < 2.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Repitiendo el razonamiento, introducimos los números 3,4,5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, . . . , etc, que junto a los anteriores verifican esta ordenación:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < \dots$$

Definición. Llamamos *conjunto de números naturales* al conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10, 11, \dots\}.$$

Notemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$, pues $0 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
El conjunto de los naturales verifica dos propiedades básicas:

i) El número 1 pertenece al conjunto.

ii) Si a pertenece al conjunto, también $a + 1$ pertenece.

Como los números naturales son positivos, sus opuestos son negativos. Al conjunto formado por los naturales, sus opuestos y el 0 se lo denomina conjunto de números *enteros*, $\mathbb{Z}$. Así,

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \ \vee \ -x \in \mathbb{N} \ \vee x = 0\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \dots\}.$$

Se puede demostrar (lo omitiremos aquí) que la suma, la diferencia y el producto de números son operaciones cerradas en $\mathbb{Z}$, esto es, que si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$ y $ab \in \mathbb{Z}$. No ocurre lo mismo con el cociente de dos números enteros. Por ejemplo, veamos que $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. En efecto, como $0 < 1 < 2$, por el Teorema 5 (10), se tiene $0 < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} = 1$. Así, $\frac{1}{2}$ es un número positivo, pero que no pertenece a $\mathbb{N}$ por ser estrictamente menor que 1. Luego, $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Al conjunto de todos los números reales que se obtienen como cocientes de números enteros se lo llama *conjunto de números racionales*, $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \ \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \text{ tal que } x = \frac{p}{q}\right\}.$$

Así, son racionales, por ejemplo, los números:

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{3}{2}, \ \frac{6}{4}, \ \frac{-15}{1}, \ \text{ etc.}$$

Los números reales que no son racionales forman el *conjunto de números irracionales*, $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Por ejemplo, son irracionales los números:

$$\sqrt{2}, \ -\sqrt{3}, \ \sqrt[3]{9}, \ \pi, \ e, \ \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \ etc.$$

No debemos pasar por alto que al mencionar, por ejemplo, que $\sqrt{2}$ es irracional, estamos haciendo una afirmación importante: que no existe ningún par de enteros p, q, con $q \neq 0$, tales que $\sqrt{2} = p/q$. Tal afirmación puede y debe demostrarse (el lector interesado no tendrá dificultad en hallar una demostración adecuada).

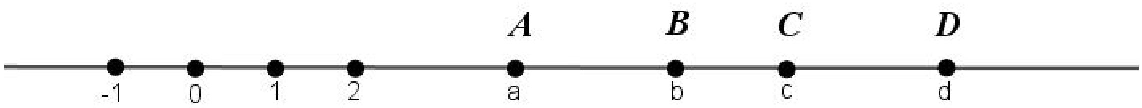
1.4. Representación geométrica de los números reales: la recta real.

Para ganar intuición sobre el conjunto de números reales y mejorar nuestra comprensión de ellos resulta muy importante contar con una manera de visualizarlos o representarlos geométricamente, en especial de alguna forma coherente con el orden establecido en $\mathbb{R}$ por los axiomas de orden.

La manera habitual de hacerlo, que cumple muy bien ese cometido, es mediante la llamada *recta real* (o *eje real*): en una recta se elige un punto para representar al 0 y otro punto distinto para el 1 (en una recta horizontal, generalmente a la derecha del anterior). Esta elección fija la escala. Cada punto de la recta representa a un único número real, y cada número real está representado por un único punto de la recta. Dicha *asociación biunívoca* se establece de manera tal que:

i) Si los puntos A y B sobre la recta representan a los números reales a y b, respectivamente, entonces A está a la izquierda de B si y solo si $a < b$.

ii) Si los puntos A, B, C, D representan a los reales a, b, c, d, respectivamente, con $a < b$ y $c < d$, entonces los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si y solo si $b - a = d - c$.



En particular, los números positivos quedan a la derecha del 0, y los negativos, a la izquierda.

Esta identificación lleva a hablar indistintamente de “punto” y “número real”, tomándolos como sinónimos.

1.5. Intervalos reales.

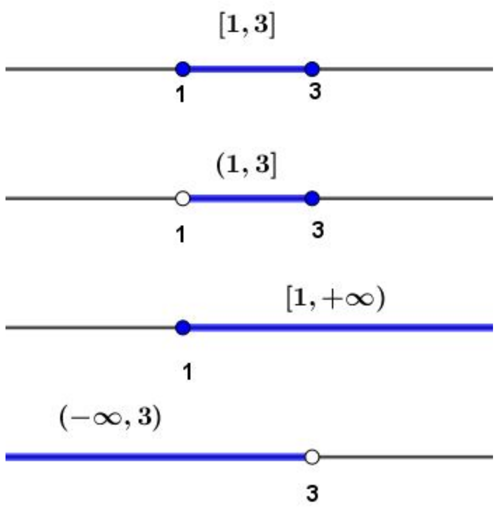
De suma importancia para el estudio de funciones serán los conjuntos de números cuya representación en la recta real es la de un segmento (o una semirrecta), con la salvedad de que pueden o no incluir los extremos del mismo. Se denominan *intervalos reales*.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Definición. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se definen los siguientes conjuntos.

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ *(intervalo abierto).*
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ *(intervalo semiabierto).*
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ *(intervalo semiabierto).*
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ *(intervalo cerrado).*
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$.

Representación de algunos intervalos en la recta real.



En los casos donde aparecen, a y b son *extremos* del intervalo.

1.6. Valor absoluto de un número.

Pensemos en la *distancia* entre un número cualquiera y el 0, *id est* (*i.e.*), la longitud del segmento que los une en la recta real. Por ejemplo, es claro que la distancia entre 0 y 14 es, justamente, 14. Es la misma distancia que hay entre 0 y -14. Resulta conveniente contar con una notación para la distancia entre un número $x \in \mathbb{R}$ y el 0.

Definición. Dado $x \in \mathbb{R}$, su *valor absoluto* es el número real $|x|$ definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Así, por ejemplo, como $14 > 0$, $|14| = 14$; y como $-14 < 0$, $|-14| = -(-14) = 14$. Además, $|0| = 0$.

Proposición 1 (Propiedades del valor absoluto)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $|x| \geq 0$. *Además,* $|x| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$.
4. *Dado* $a > 0$*, se tiene:*

   -a- $|x| < a$ *si y sólo si* $-a < x < a$.

-b- $|x| > a$ *si y sólo si* $x < -a$ *o bien* $a < x$.

5. *Desigualdad triangular:* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

7. *Si* $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Geométricamente, $|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x, pero nótese que la definición del valor absoluto de un número real es puramente analítica.

Puede verse también que la distancia entre dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ está dada por el valor $|x - y|$ (que es igual a $|y - x|$, como se deducirá de la siguiente proposición).

Así, por ejemplo, al intervalo $[1, 3]$ lo podemos pensar como el conjunto de puntos de la recta cuya distancia al punto medio del intervalo, el 2, es menor o igual a 1, o sea,

$$[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\}.$$

1.7. Axioma del supremo (o de completitud)

Los axiomas de cuerpo establecen la existencia de al menos dos números distintos, 0 y 1, y a partir de los axiomas de orden se deduce que hay muchos más: los naturales y los racionales. **Pero estos axiomas no nos aseguran que existan otros números reales.**

Para justificar esta última afirmación, basta notar que las operaciones de suma y producto son cerradas en $\mathbb{Q}$ (i.e., si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{Q}$ y $ab \in \mathbb{Q}$), y **el sistema de números racionales con la suma y el producto satisfacen todos los axiomas de cuerpo y orden**: satisfacen las propiedades conmutativas y asociativas; verifican la propiedad distributiva; tienen elementos neutros (pues $0, 1 \in \mathbb{Q}$), opuestos y recíprocos (si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $-a \in \mathbb{Q}$ y $a^{-1} \in \mathbb{Q}$, si $a \neq 0$); y el conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ cumple perfectamente el rol de "conjunto de números positivos" en los axiomas de orden. Esto quiere decir que no está implícito entre los nueve axiomas presentados la existencia de números irracionales. Necesitamos un axioma más. Para enunciarlo, precisamos algunas definiciones previas.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una *cota superior* de A si

$$a \leq b \quad \forall a \in A.$$

- Si existe b tal que b es una cota superior de A, se dice que A está *acotado superiormente*.

Por ejemplo, 5 es una cota superior del intervalo $(-7, 3)$, que por lo tanto está acotado superiormente. Los puntos 4 y $\frac{7}{2}$ también son cotas superiores de dicho intervalo. Su propio extremo derecho, 3, es la menor de todas sus cotas superiores. Por otra parte, el intervalo $(-7, +\infty)$ no está acotado superiormente.

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es *supremo* de A si verifica:

i) $a \leq b \quad \forall a \in A$.

ii) Si $c < b$, entonces c no es una cota superior de A.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

En otras palabras, b es supremo de A si es una cota superior de A (por i)) y es la menor de ellas (por ii)). Así, por lo antedicho, 3 es un supremo del intervalo $(-7, 3)$.

¿Puede un conjunto tener más de un supremo? No es difícil argumentar a partir de la definición que esto no es posible.

Teorema 6 (Unicidad del supremo)**.** *Dos números distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto.*

Para una demostración referimos nuevamente al libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol.
La unicidad del supremo nos permite darle una **notación**: si b es **el** supremo de A, escribiremos

$$b = \sup(A).$$

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el *máximo* de A, y se denota $b = \text{máx}(A)$, si verifica:

i) $a \leq b \quad \forall a \in A$.

ii) $b \in A$.

Proposición 2. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = \text{máx}(A)$ si y solo si $b \in A$ y $b = \sup(A)$.*

Ejemplos.

- Llamando $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in \mathbb{R}^+\} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\}$, se tiene $\sup(\mathbb{R}^-) = 0$. Como $0 \notin \mathbb{R}^-$, deducimos que $\mathbb{R}^-$ no tiene máximo.
- Llamando $-\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in \mathbb{N}\}$, se tiene $\sup(-\mathbb{N}) = -1 = \text{máx}(-\mathbb{N})$.
- Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $A = (a, b)$ y $B = (a, b]$, entonces $\sup(A) = \sup(B) = b$. Sin embargo, $\text{máx}(B) = b$ pero el conjunto A no tiene máximo.
- $\mathbb{R}^+$ no tiene supremo (y por lo tanto tampoco máximo), ya que no tiene ninguna cota superior.
- $\mathbb{N}$ tampoco es acotado superiormente (a esta propiedad se la conoce como Propiedad Arquimediana[1]), por lo que no tiene supremo ni máximo.

Al final de la sección 2.1 hemos definido que un número real a es irracional si no es racional; y mencionamos por ejemplo que $\sqrt{2}$ es irracional. Pero, ¿qué número es $\sqrt{2}$? Si no vamos a contradecir nada de lo que ya sabíamos sobre los números antes de empezar esta exposición, $\sqrt{2}$ ha de ser un número positivo tal que su cuadrado es 2. Es decir, es un número positivo que satisface la *ecuación*:

$$x^2 = 2.$$

Pero, ¿existe necesariamente una solución de esa ecuación? Con mayor generalidad: dado $a \in \mathbb{R}^+$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^+$, tal que $x^2 = a$?
Con los axiomas de cuerpo y orden ya podíamos contestar afirmativamente la pregunta para algunos valores de a, como ser $a = 4$ y $a = 9$ (en efecto, $2, 3 \in \mathbb{R}^+$, $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$), pero no para todo $a > 0$.
No es muy difícil –ni tampoco obvio– demostrar que si $x^2 = 2$, entonces $x \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, la existencia de una solución positiva de dicha ecuación no está implícita entre los nueve primeros axiomas. Precisa el axioma del supremo.

[1]Consultar la sección 10 de la unidad 3, Calculus, Vol. I, Tom Apostol.

A10) *Axioma del Supremo:* Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

El siguiente teorema establece la existencia en $\mathbb{R}^+$ de una solución de la ecuación $x^2 = a$ (para cualquier $a > 0$), número al que llamaremos *raíz cuadrada de* a.

Teorema 7 (Existencia de raíces cuadradas)**.** *Dado* $a \geq 0$*, existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \geq 0$ *y* $x^2 = a$.

La demostración se puede consultar en el libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol (sección 13 de la unidad 3).

Veamos otro ejemplo (sin entrar en detalles) de cómo el Axioma del Supremo permite definir números irracionales. Considere el conjunto S definido por:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ \text{ para algún } n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Escriba explícitamente cinco elementos de S.

Se puede demostrar que S está acotado superiormente; por lo tanto, por *A10*, existe $\sup(S)$. Al igual que π, este número es irracional y tiene símbolo propio:

$$\sup(S) = e, \quad \text{llamado número de Euler.}$$

(e es aproximadamente igual a $2{,}718$).

1.7.1. Cotas inferiores, ínfimo y mínimo de un conjunto.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una *cota inferior* de A si

$$b \leq a \quad \forall a \in A.$$

- Si existe b tal que b es una cota inferior de A, se dice que A está *acotado inferiormente*.

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es *ínfimo* de A si verifica:

i) $b \leq a \quad \forall a \in A$.

ii) Si $b < c$, entonces c no es una cota inferior de A.

Análogamente al caso del supremo, se prueba que, si existe, el ínfimo de un conjunto A es único; se lo denota $\inf(A)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el *mínimo* de A, y se denota $b = \text{mín}(A)$, si verifica:

i) $b \leq a \quad \forall a \in A$.

ii) $b \in A$.

Proposición 3. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = \text{mín}(A)$ si y solo si $b \in A$ y $b = \text{ínf}(A)$.*

Teorema 8. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si A está acotado inferiormente, entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \text{ínf}(A)$.*

En otras palabras, todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo. Es importante remarcar que esto no se impone como un nuevo axioma, sino que su validez se deduce a partir de los diez anteriores. Su demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo:
Sea

$$S = \left\{ \frac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Como todo elemento en S es positivo, el número 0 es una cota inferior de S. Por lo tanto, por el teorema anterior, existe un número que es ínfimo de S.

Más aún, como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente, para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{x}$, o $\frac{1}{n} < x$, lo cual quiere decir que ningún número positivo puede ser cota inferior de S. Así, 0 es la menor de sus cotas inferiores, i.e., $\text{ínf}(S) = 0$. Pero como $0 \notin S$, S no tiene mínimo.

2. Funciones reales: Generalidades

El concepto de función es fundamental en el análisis matemático de una situación en la que se requiere establecer una relación entre las variables que describen tal situación. Podríamos decir que una función es una relación especial en la que una cantidad depende de otra, por ejemplo:

- El área de un círculo (A) depende de su radio (r), es decir "A es función de r".
- Cuando se invierte dinero a una tasa de interés determinada, el interés (I) depende del tiempo (t) en que se invierte el dinero. Decimos entonces que " I es función de t ".
- El costo (c) de producir cualquier artículo depende del número de artículos producidos (q). O sea "c es función de q ".

Definición. Una función f es una terna compuesta por dos conjuntos X e Y y una ley que asocia a **cada** elemento $x \in X$ un **único** elemento $y \in Y$.

$$\begin{aligned} f:\ X &\ \rightarrow\ Y \\ x &\ \mapsto\ y \end{aligned}$$

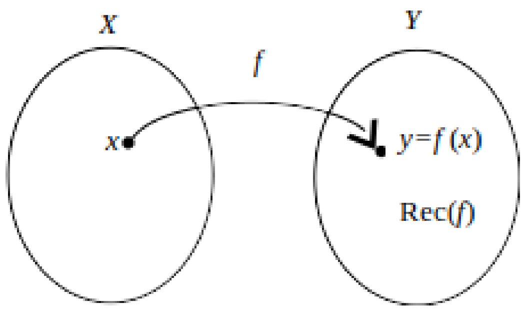
Los conjuntos X e Y pueden ser de distinta naturaleza, por ejemplo conjuntos de personas, de ciudades, de mesas, etc. Nosotros sólo vamos a estudiar funciones en las que los conjuntos X e Y son conjuntos de números reales o sea, estudiaremos **funciones reales**.

Llamaremos:

- al conjunto X, **dominio** de la función f y lo notaremos $\mathrm{Dom}(f)$.
- al conjunto Y, **codominio** de la función f y lo notaremos $\mathrm{Codom}(f)$.
- al elemento y, imagen de x por la función f y lo notaremos $y = f(x)$ que se lee "y es igual a f de x" y se dice que y es el valor de f en x.
- al elemento x, pre-imagen de y por f.
- al conjunto de todas las imágenes, **recorrido** de f o **imagen** de f y lo notaremos $\mathrm{Rec}(f)$ o $\mathrm{Im}(f)$. También se lo suele llamar rango de f. Entonces,

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Im}(f) = \{y \in Y :\ \exists\, x \in X/\ y = f(x)\} = f\,(X)\,.$$

Observemos que el recorrido de una función **no** necesariamente coincide con el codominio, sino que está formado por los elementos del codominio que son imagen de algún elemento del dominio.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

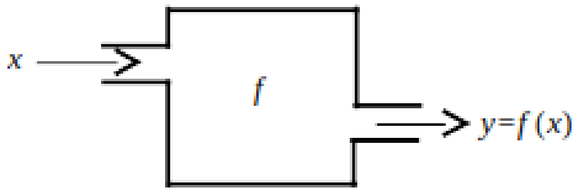
- Si una función expresa una relación de la forma $y = f(x)$, las variables intervinientes, x e y, juegan distintos papeles, ya que el valor de y depende del valor asignado a x, por lo tanto,

x es la **variable independiente**,
y es la **variable dependiente.**

Se utilizan distintas letras para nombrar una función, las más comunes son : f, g, h, F, P, etc. Para las variables se suelen utilizar las letras x, y, w, z, t, etc.

- A una función f la podemos imaginar como una "máquina" que acepta como entrada un valor $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y que produce como salida un número $y = f(x)$.

Una máquina de este tipo es la calculadora, con una tecla para la raíz cuadrada $\sqrt{\cdot}$
Cuando se usa como dato un número no negativo y se oprime esta tecla, la calculadora exhibe un número. La "máquina" no admite cualquier entrada. Para la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$, el dominio es el conjunto de los números reales no negativos, o sea, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}_0^+$. El recorrido es el conjunto de los reales no negativos, $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$.



Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 2x^2 + 1$, calcular el valor de f para $x = 2$, $x = -1$, $x = a$, $x = a + 1$, es decir, determinar $f(2)$, $f(-1)$, $f(a)$, $f(a + 1)$.

- Cuando no se especifica cual es el dominio de una función, se considera que el dominio es el mayor conjunto de todos los números reales para los que tiene sentido la ley de dicha función. Ejemplos: $f(x) = x + 3$; $g(x) = \sqrt{x}$; $h(x) = \dfrac{3x}{x} - 1$.

2.1. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g , para cada $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, $f(x)$ y $g(x)$ son números reales por lo tanto podemos operar con ellos, sumarlos, restarlos, multiplicarlos y, si $g(x) \neq 0$, dividirlos.

Llamando $X = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, definimos entonces las siguientes funciones.

Función suma: $f + g$

$$f + g : X \to R \quad \text{donde } (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Función diferencia: $f - g$

$$f - g : X \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (f-g)(x) = f(x) - g(x).$$

Función producto: $f \cdot g$

$$f \cdot g : X \to \mathbb{R} \quad \text{donde } (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Función cociente: $\dfrac{f}{g}$

Sea $A = \{\, x \in X : \; g(x) \neq 0 \,\}$

$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R} \text{ donde } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ejemplo. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, halle las funciones $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ y $\dfrac{g}{f}$, indicando los dominios de cada una de ellas.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

2.2. Gráfica de una función. Sistema de coordenadas cartesianas

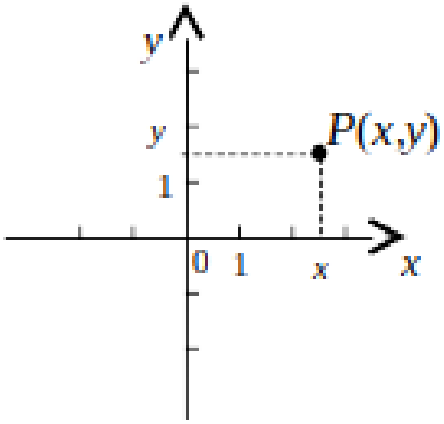
Definición. La gráfica de una función f es el conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e $y = f(x)$. Notamos con G_f a dicho conjunto.

$$G_f = \{(x,\ y)\ :\ x \in \mathrm{Dom}(f)\ ,\ y = f(x)\ \} = \{(x,\ f(x))\ :\ x \in \mathrm{Dom}(f)\}$$

$$(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow\ x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \wedge \quad y = f(x).$$

Sabemos que los números reales se representan gráficamente en el eje real, veamos ahora la manera de representar pares ordenados de números reales.

Un par ordenado de números reales (x, y), tiene un primer elemento x y un segundo elemento y. Para representar los pares ordenados utilizaremos un sistema de coordenadas cartesianas. Dibujamos en el plano dos rectas perpendiculares que denominamos ejes coordenados. Dichos ejes se intersectan en el punto de coordenadas $(0, 0)$ llamado origen de coordenadas.



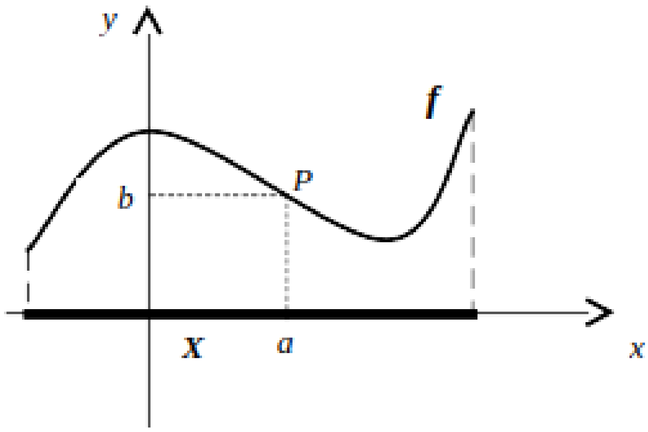
- A cada punto del plano le corresponde un único par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales le corresponde un único punto del plano.
- Si P es un punto cualquiera del plano, sus coordenadas cartesianas están dadas por un par ordenado de la forma (x, y). A x se lo denomina abscisa de P y a y ordenada de P.
  Notación $P(x, y)$.

Los puntos sobre el eje x tienen ordenada 0, o sea coordenadas $(x, 0)$, para algún $x \in \mathbb{R}$, y los puntos sobre el eje y tienen abscisa 0, o sea coordenadas $(0, y)$, para algún $y \in \mathbb{R}$.
Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes.
Ejercicio: graficar los puntos (1,0), (0,1), (0,-1), (-2,0), (3,1), (-2,2), (-1,-1) y (1,-1).

De acuerdo a lo analizado, resulta natural representar gráficamente una función en el plano coordenado, teniendo en cuenta que: si un punto del plano pertenece a la gráfica de una función entonces la ordenada es la imagen de la abscisa a través de dicha función y recíprocamente, si y es la imagen de x a través de la función f, entonces el punto $P(x, y)$ pertenece a la gráfica de la función f. Es decir,

$$P(x, y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x) \quad y \quad x \in \mathrm{Dom}(f).$$

El dominio de la función se representa en el eje de las abscisa (eje x) y el recorrido en el eje de las ordenadas (eje y).

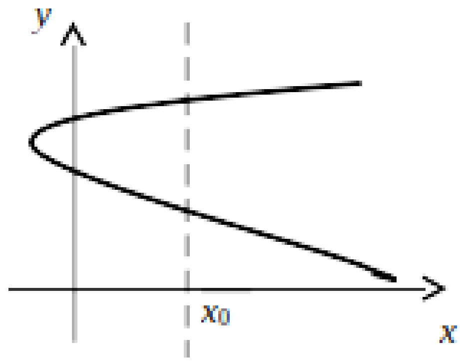


Por ejemplo, supongamos conocida la gráfica de una función, como se muestra en la figura anterior. Observamos que el punto P de coordenadas (a, b) pertenece a la gráfica de f , por lo tanto podemos asegurar que a pertenece al dominio de f y que $f(a) = b$.

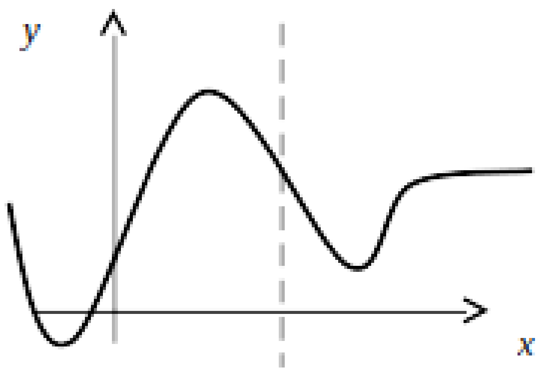
Según la definición de función a cada elemento de X le corresponde un único elemento en Y, es decir cada elemento del dominio de f es abscisa de un único punto de la gráfica de f.

Cualquier recta vertical corta a la gráfica de una función a lo sumo en un punto

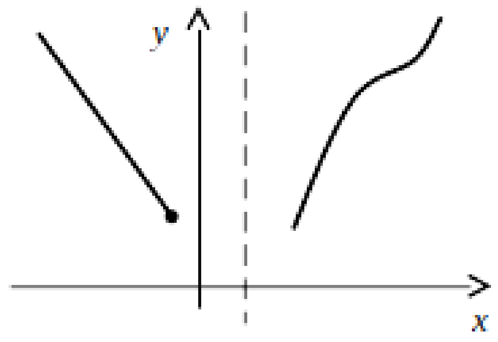
Esto nos proporciona un criterio gráfico para determinar si una curva es la gráfica de una función, el criterio de la recta vertical. Veamos como aplicarlo en las siguientes gráficas.



a) no es la gráfica de una función de x



b) es la gráfica de una función de x



c) es la gráfica de una función de x

Ejemplo. Dada la función $f : [-2,\ 3] \to \mathbb{R}$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x \leq, 0 \\ -1, & 0 < x \leq 3. \end{cases}$$

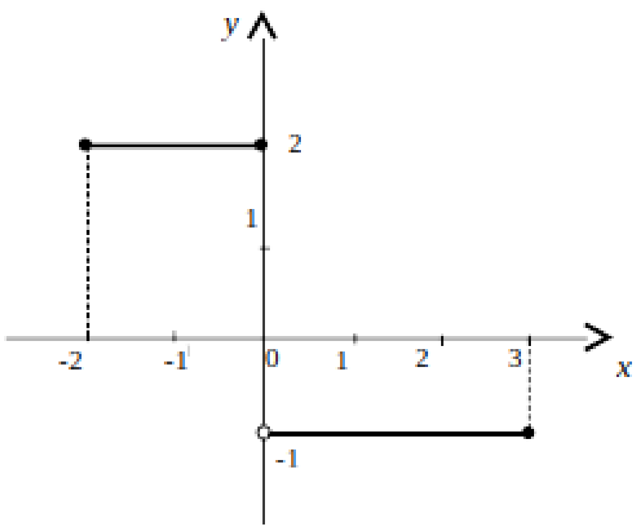
El dominio de esta función es el intervalo $[-2,\ 3]$.

Si $-2 \leq x \leq 0$, la función f está definida por $f(x) = 2$, y si $0 < x \leq 3$ por la expresión $f(x) = -1$.

Observemos que el punto $(\ 0,\ -1\ )$ no pertenece a la gráfica de la función f, ya que $f(0) \neq -1$, por lo tanto marcamos en dicho punto un círculo.

Los únicos valores que toma y son -1 y 2 , por lo tanto, el recorrido de f es:

$$\text{Rec}(f) = \{\ -1,\ 2\ \}$$



Antes de continuar con otros ejemplos de funciones, veremos algunas definiciones de propiedades que pueden caracterizar a las funciones.

2.3. Propiedades de las funciones

Definición. Decimos que una función f es suryectiva o sobreyectiva cuando su recorrido coincide con su codominio. O sea,

$$\mathrm{Rec}(f) = \mathrm{Codom}(f)$$

Observemos que en este caso, todo elemento del codominio es imagen de algún elemento del dominio (todos los elementos del codominio reciben alguna flecha).

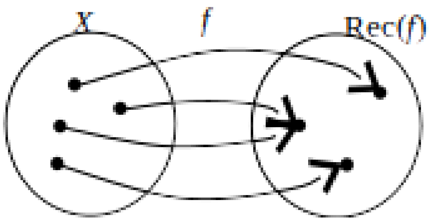


Figura 1: f es una función suryectiva

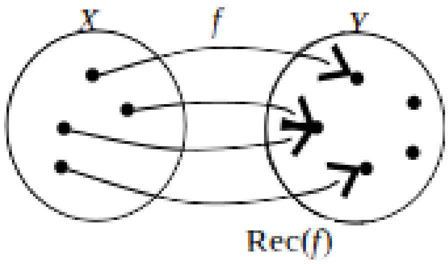


Figura 2: f no es una función suryectiva

Definición. Decimos que una función f es inyectiva cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imágenes. O sea,

$$x_1,\ \ x_2\ \in \mathrm{Dom}(f), \quad x_1 \neq x_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2).$$

O bien, $x_1,\ \ x_2\ \in \mathrm{Dom}(f), \quad f(x_1) = f(x_2) \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2$.

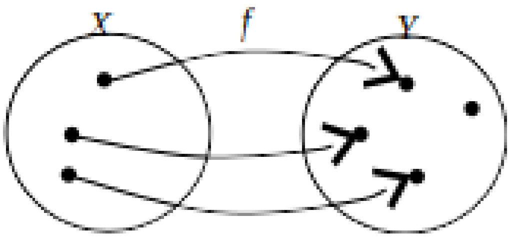


Figura 3: f es una función inyectiva

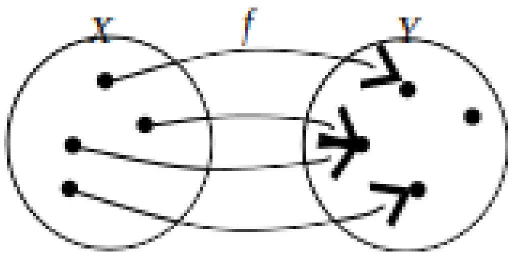


Figura 4: f no es una función inyectiva

Cada elemento de la imagen recibe sólo una flecha.

En cuanto a la gráfica de una función inyectiva, toda recta horizontal interseca a la gráfica de f a lo sumo en un punto.

Si existe una recta horizontal que corta a la gráfica de una función en más de un punto, la función no es inyectiva, esto se observa en la figura de la derecha.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

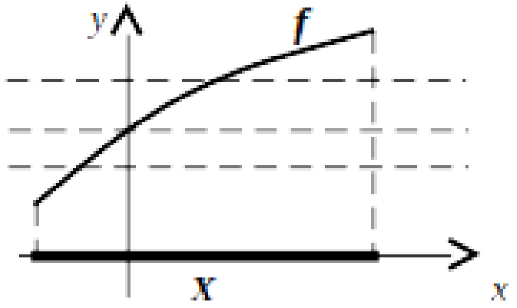


Figura 5: f es una función inyectiva

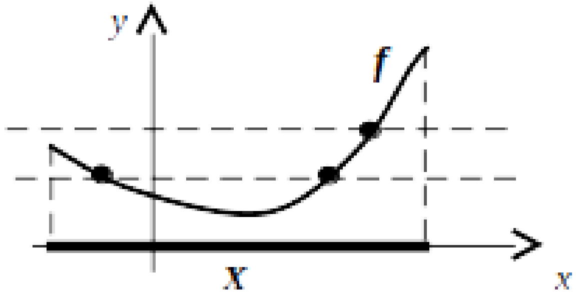


Figura 6: f no es una función inyectiva

Definición. Decimos que una función f es biyectiva cuando es suryectiva e inyectiva. Se dice en este caso que existe una correspondencia biunívoca o uno a uno entre el dominio y el codominio de la función f. Cada elemento del codominio recibe una única flecha.

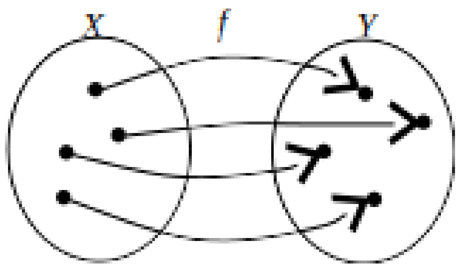


Figura 7: f es una función biyectiva

Para la próxima propiedad de funciones reales, observemos primero ciertos conjuntos particulares.

- Un conjunto no vacío A de números reales es simétrico cuando

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad -x \in A.$$

Es decir, si un número pertenece al conjunto, su opuesto también pertenece al conjunto. Son ejemplos de conjuntos simétricos:

$$A = [-4,\ 4\,], \quad B = \mathbb{R}, \quad C = \mathbb{R} - \{\ 0\ \}, \quad D = (-3,\ 3)\,.$$

No son conjuntos simétricos:

$$A = [0,\ 3\,], \quad B = \mathbb{R} - \{1\ \}, \quad C = [-5,\ 5).$$

Las dos propiedades que veremos a continuación se estudian exclusivamente en funciones cuyos dominios son conjuntos simétricos.

Definición. Una función f es **par**, si su dominio es un conjunto simétrico y se verifica

$$f(x) = f(-x), \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

La gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y, ya que

$$(x,\ y) \in G_f \ \Leftrightarrow\ x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x) \ \Leftrightarrow\ -x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(-x) \ \Leftrightarrow\ (-x,\ y) \in G_f.$$

Definición. Una función f es **impar**, si su dominio es un conjunto simétrico y se verifica

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, ya que

$$(x,\ y) \in G_f \ \Leftrightarrow\ x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = f(x) \ \Leftrightarrow\ -x \in \mathrm{Dom}(f),\ y = -f(-x) \ \Leftrightarrow\ (-x,\ -y) \in G_f.$$

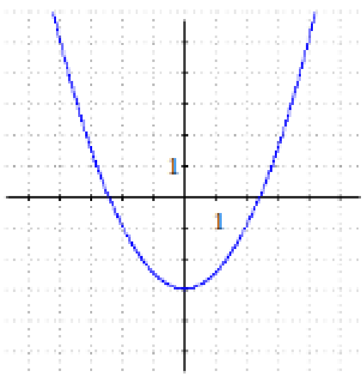


Figura 8: Función par

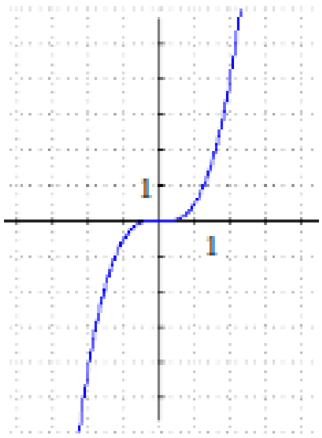


Figura 9: Función impar

Definición. Sea A un subconjunto del dominio de f. Si para todo par de puntos $x_1,\ x_2$ de A se tiene:

- $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2)$ entonces f es una función **creciente** en A.
- $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2)$ entonces f es una función **decreciente** en A.
- $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \leq f(x_2)$ entonces f es una función **no decreciente** en A.
- $x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \geq f(x_2)$ entonces f es una función **no creciente** en A.

Veamos ejemplos de gráficas de funciones que respondan a cada una de las propiedades presentadas.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

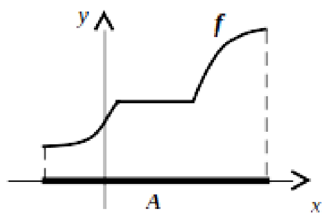


Figura 10: función no decreciente

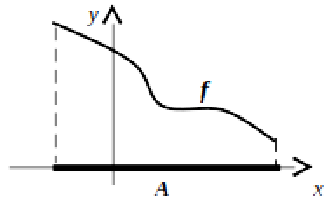


Figura 12: función no creciente

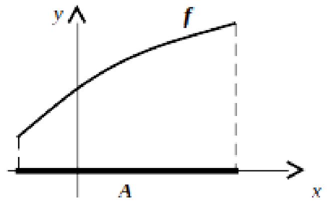


Figura 11: función creciente

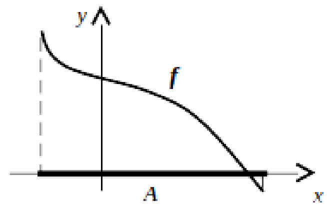
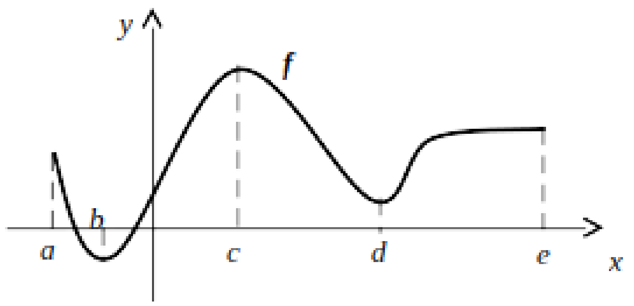


Figura 13: función decreciente

Observación: Una función se dice que es **monótona** en un conjunto si es creciente o decreciente en dicho conjunto.

Ejemplo. Determine los intervalos de monotonía de la función f, cuya gráfica se presenta en la figura.



f es decreciente en los intervalos: $[a, b]$, $[c, d]$,
f es creciente en el intervalo: $[b, c]$,
f es no decreciente en el intervalo: $[d, e]$.

2.4. Gráfica de funciónes elementales

Trazar la gráfica de una función es buscar puntos de la forma $(x, f(x))$ y luego unirlos de la "mejor" forma posible? Pero, ¿cuántos puntos debemos marcar? ¿Estamos seguros de que los unimos bien? O sea, ¿esa curva que trazamos es en realidad la gráfica de la función? Si contamos con una calculadora gráfica o un programa para computación podríamos tener la gráfica de la función simplemente apretando algunas teclas. A medida que aumentamos el número de puntos marcados, la curva se irá aproximando a la gráfica buscada, esto lo observamos en las siguientes figuras. En la figura -a- marcamos sólo 3 puntos y los unimos con alguna curva. En la figura -b- agregamos tres puntos más y nuevamente los unimos con una curva, observemos la diferencia con la figura -a-. Y por último en la figura -c- presentamos la gráfica de la función realizada por un programa de computación. Por lo tanto, **no** se pueden realizar las gráficas sólo marcando algunos puntos, debemos analizar sus propiedades para conocerlas.

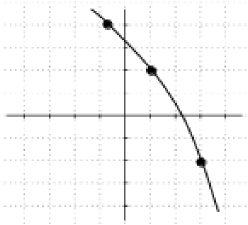


Figura 14: figura -a-

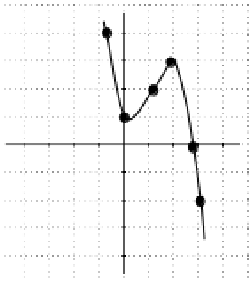


Figura 15: figura -b-

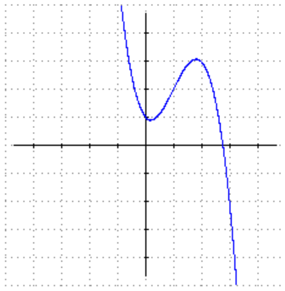


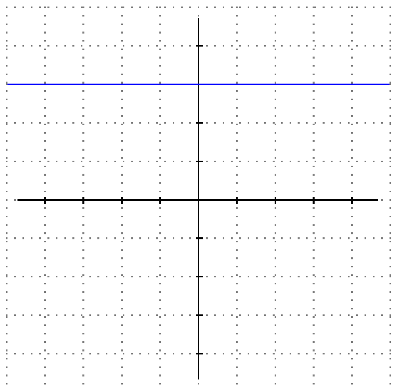
Figura 16: figura -c-

La idea básica de esta sección es presentar las gráficas de algunas funciones elementales, con el objeto de relacionar la ley de una función y la forma de su gráfica, para que con pocos cálculos podamos trazar la gráfica de una función con cierta seguridad. Analizaremos también para cada función las propiedades que verifica.

Función constante

Sea c un número real.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = c \end{array}$$



- $G_f = \{\ (x,\ y)\ :\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y = c\ \} = \{(x, c) :\ \ x \in \mathbb{R}\}$.

Observando que todos los puntos pertenecientes a la gráfica tienen la ordenada igual a c y, recíprocamente, todos los puntos de ordenada igual a c están en la gráfica, entonces la gráfica de la función constante es una recta paralela al eje x de ecuación $y = c$.

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(f) = \{\ c\ \}$.
- $\mathrm{Rec}(f) \neq \mathrm{Codom}(f)\ \Rightarrow\ f$ no es suryectiva.
- $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2) = c\ \Rightarrow\ f$ no es inyectiva.
- $f(-x) = c = f(x)\ \Rightarrow\ f$ es una función par.
- Es no creciente y no decreciente.

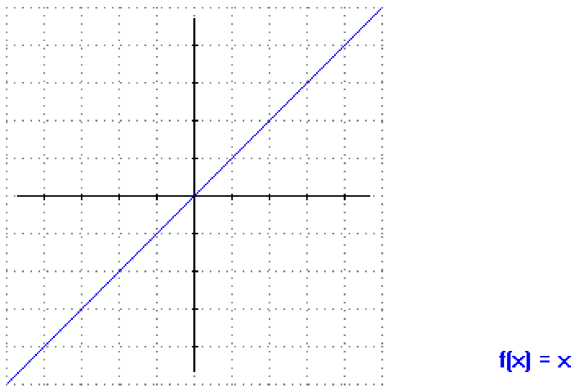
Función identidad

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & i(x) = x \end{array}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

- $\mathrm{Dom}(i) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Codom}(i) = \mathbb{R}$
- $G_i = \{\, (x,\ y)\ :\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y = x\,\} = \{\,(x,\ x)\ :\ \ x \in \mathbb{R}\}.$

Observamos que si la ordenada de un punto coincide con su abscisa, dicho punto está en la gráfica de la función, y recíprocamente. Luego, la gráfica de la función identidad i es la recta de ecuación $y = x$.



- $\mathrm{Rec}(i) = \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec}(i) = \mathrm{Codom}(i) \ \Rightarrow \quad i$ es sobreyectiva.
- $[x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \quad i(x_1) \neq i(x_2)] \ \Rightarrow \quad i$ es inyectiva.
- La función identidad es biyectiva.
- $i(-x) = -x = -i(x) \ \Rightarrow \ \ i$ es una función impar.
- i es una función creciente.

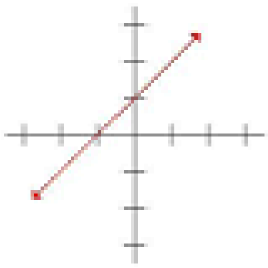
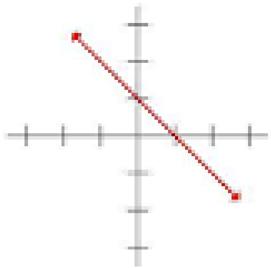
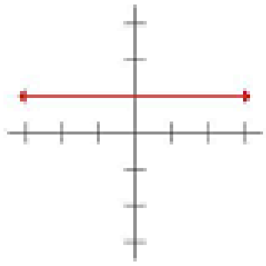
Función lineal afín

Sean $m, h \in \mathbb{R}$, con $m \neq 0$ (el caso $m = 0$ es la función constante).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = mx + h \end{array}$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Codom}(f) = \mathbb{R}$.
- $G_f = \{\, (x,\ y)\ :\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y = mx + h\,\} = \{\,(x, mx + h)\ :\ \ x \in \mathbb{R}\}.$

La gráfica de la función lineal f, es la recta de ecuación $y = mx + h$, donde m es la pendiente de la recta y h es la ordenada al origen.

m > 0	m < 0	m = 0
		
Función Creciente	Función Decreciente	Función Constante

- $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Rec}(f) = \text{Codom}(f) \;\Rightarrow\; f$ es sobreyectiva.
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \; f(x_1) \neq f(x_2)] \Rightarrow \; f$ es inyectiva.
- La función lineal es biyectiva.
- Cuando $h = 0$, $f(-x) = m(-x) = -f(x) \;\Rightarrow\; f$ es una función impar.
- f es una función creciente si $m > 0$, y es decreciente si $m < 0$.

Función valor absoluto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = |x| \end{array}$$

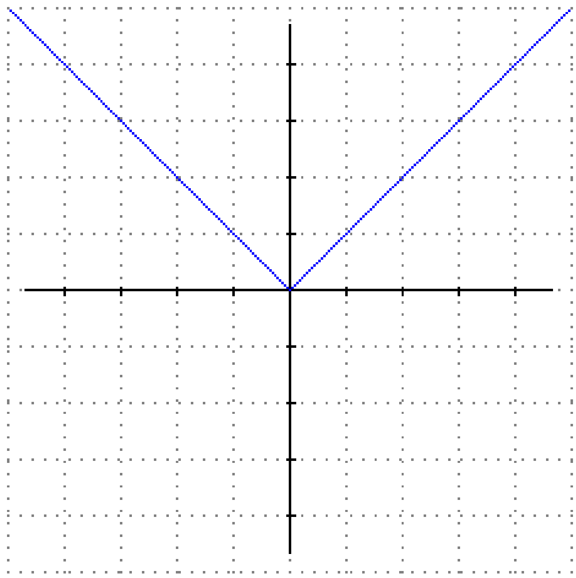
Recordemos que ya hemos estudiado la definición de valor absoluto en la sección 1.6.

Observemos que cualquiera sea x real,

- $|x| \geq 0$,
- $|-x| = |x|$,
- $G_f = \{\, (x,\ y) \ : \ x \in \mathbb{R},\ \ y = |\, x \,|\, \} = \{(x,\ y) \ : \ (x \geq 0,\ \ y = x) \quad \vee \quad (x < 0,\ \ y = -x)\, \}$,

o sea, la gráfica de f se puede describir con dos semirrectas de ecuaciones
$y = x$ si $x \geq 0$, $\quad y = -x$ si $x < 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

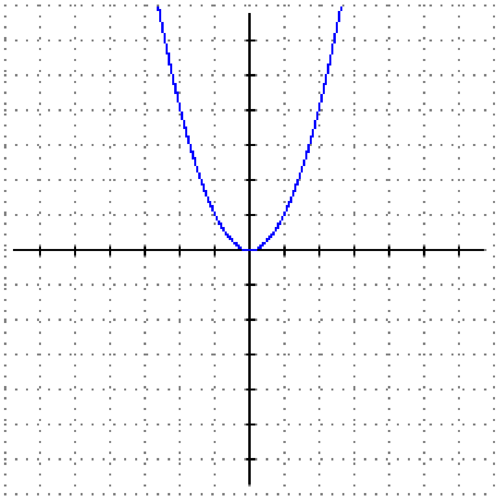


- $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$
- $\mathrm{Rec}(f) \neq \mathrm{Codom}(f) \;\Rightarrow\; f$ no es sobreyectiva.
- $f(-1) = |-1| = 1 \;\; y \;\; f(1) = |1| = 1 \;\Rightarrow\; f$ no es inyectiva.
- $f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow f$ es una función par. La gráfica de f es simétrica respecto al eje y.
- f es decreciente en $(-\infty,\ 0\,]$ y f es creciente en $[\,0,\ +\infty\,)$.

Función cuadrática

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

- $G_f = \{\ (x,\ y)\ :\ x \in \mathbb{R},\ \ y = x^2\ \} = \{\ (x,\ x^2)\ :\ x \in \mathbb{R}\ \}$.
- $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ es una función par, luego la gráfica de f es simétrica respecto al eje y.



La gráfica de la función $f(x) = x^2$ se llama parábola[2], el punto $(0,0)$ es el vértice y el eje y es el eje de simetría de la parábola.

- $f(0) = 0, \; f(1) = 1, \quad 0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 < x, \qquad x > 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 > x.$
- $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$.
- $x_1, x_2 > 0 \,, \quad x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; x_1^2 < x_1 \cdot x_2 < x_2^2,$ luego f es creciente en $[\,0, \; +\infty\,)$.
- f es decreciente en $(-\infty, \; 0\,]$.
- $\mathrm{Rec}(f) \neq \mathrm{Codom}(f) \;\Rightarrow\; f$ no es sobreyectiva.
- $f(-1) = 1 = f(1) \;\Rightarrow\; f$ no es inyectiva.

Función potencia $f(x) = x^a$ con a constante racional.

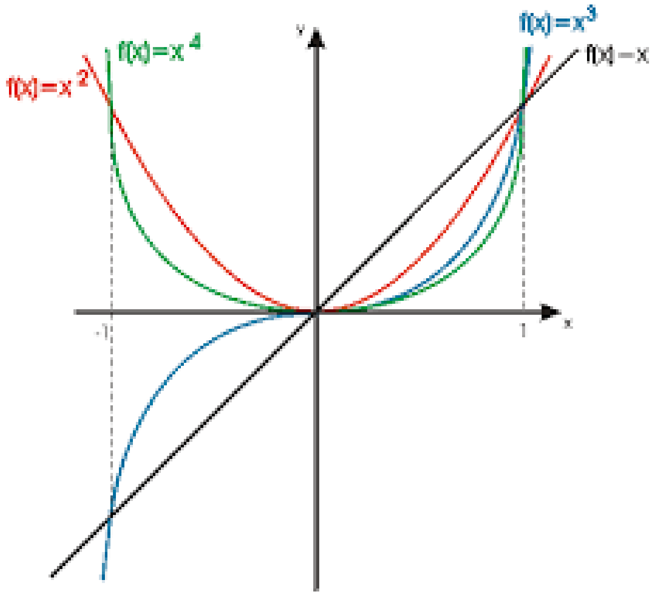
- Caso $a = n$, un número natural,

$$f(x) = x^n = \underbrace{x.x...x}_{n \text{ veces.}}$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$ si n impar, $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}_0^+$ si n es par.
- Si n es impar es sobreyectiva, es inyectiva, es una función impar y creciente.
- Si n es par f no es sobreyectiva, no es inyectiva, es una función par, es seccionalmente monótona.

[2]Se estudiará más en detalle en Álgebra y Geometría 2.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



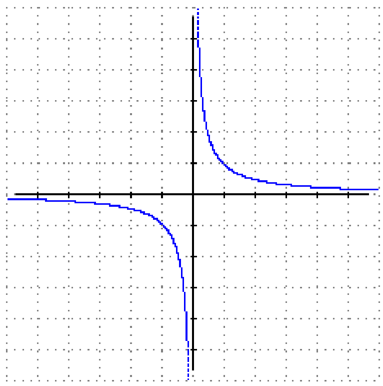
Funciones potenciales: $f(x)=x^n$

- Caso $a=-1$: **Función recíproca**

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)=\dfrac{1}{x} \end{array}$$

- $\text{Dom}(f)=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$, $\quad \text{Codom}(f)=\mathbb{R}$.
- $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$, por lo tanto, f es una función impar.
- $0<x<1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x}>1,\quad x>1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x}<1.$

La gráfica que resulta se llama hipérbola y se estudiará más en detalle en Álgebra y Geometría 2.



- $\dfrac{1}{x}\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$; cualquiera sea $y\in\mathbb{R}-\{0\}$ existe $x=\frac{1}{y}\in\mathbb{R}-\{0\}$, tal que $f(x)=f\left(\frac{1}{y}\right)=y$, luego: $\text{Rec}(f)=\mathbb{R}-\{\,0\,\}$.
- $\text{Rec}(f)\neq\text{Codom}(f) \;\Rightarrow\;$ f no es sobreyectiva.
- Analizar: f es decreciente en $(0,\,+\infty)$ y es decreciente en $(-\infty,\,0)$, ¿es f decreciente en su dominio?
- f es inyectiva.

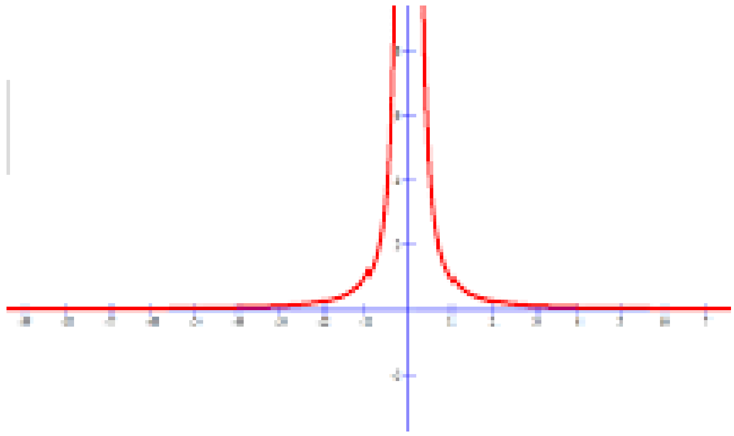
Observemos que para valores positivos y grandes de x, $y = \frac{1}{x}$ toma valores pequeños, cercanos a cero, pero la función no vale nunca cero. La gráfica de f se acerca al eje x, pero no lo corta en ningún punto. Decimos entonces que el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica de la función o sea la recta de ecuación $y = 0$ es una asíntota horizontal.

De la misma manera, cuando x toma valores positivos pequeños, cercanos a cero, $y = \frac{1}{x}$ toma valores positivos grandes. La gráfica de f se acerca al eje y, pero no lo corta en ningún punto. Decimos entonces que el eje y es una asíntota vertical de la gráfica de la función, o sea la recta de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical.

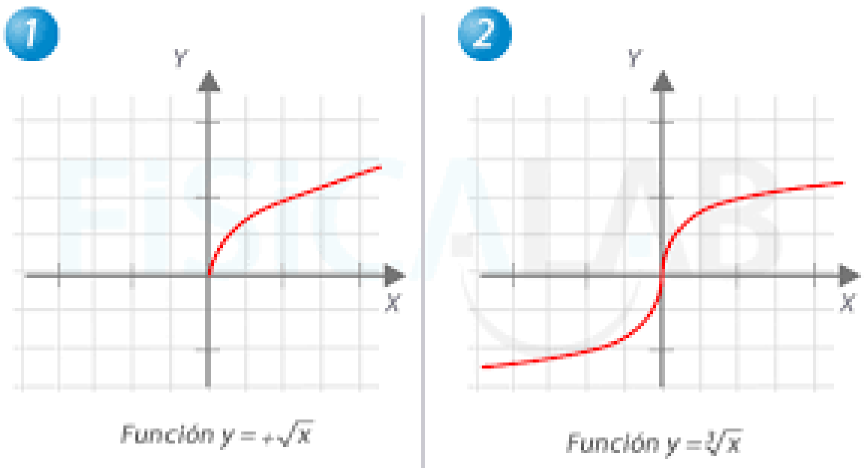
En la próxima unidad daremos las definiciones formales de rectas asíntotas.

- Caso $a = -2$.

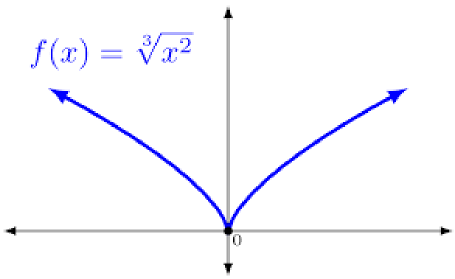
Determinar dominio, codominio, recorrido, analizar inyectividad, sobreyectividad, paridad, monotonía, existencia de asíntotas.



- Casos $a = 1/2$, $a = 1/3$, $a = 2/3$.



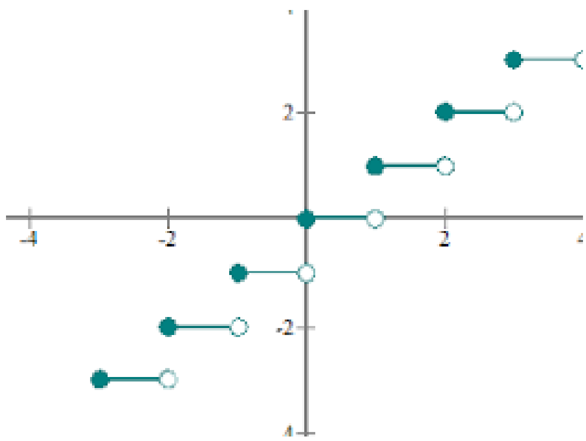
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



Función parte entera (mayor entero menor o igual que x)

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = [x] \end{array}$$

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Codom}(f) = \mathbb{R}$.

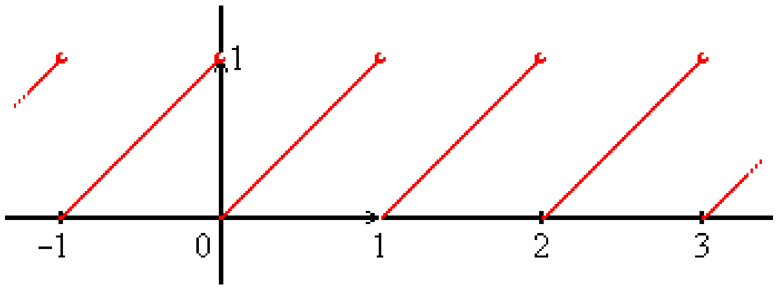


- $\mathrm{Rec}(f) = Z \neq \mathrm{Codom}(f) \;\Rightarrow\;$ f no es sobreyectiva.
- $f(1) = f(1{,}3) = 1 \Rightarrow$ f no es inyectiva.
- Analizar: paridad y monotonía.
- $\forall x \in \mathbb{R},$ se verifica $[x] \leq x < [x] + 1$.

Función mantisa

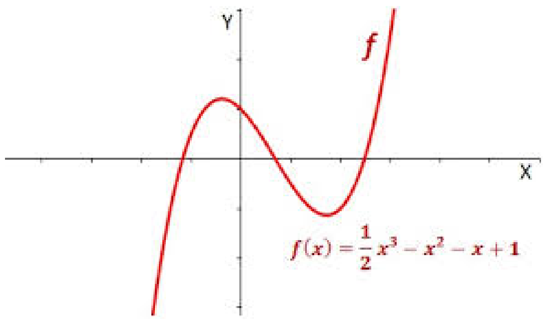
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \mathrm{mant}(x) := x - [x] \end{array}$$

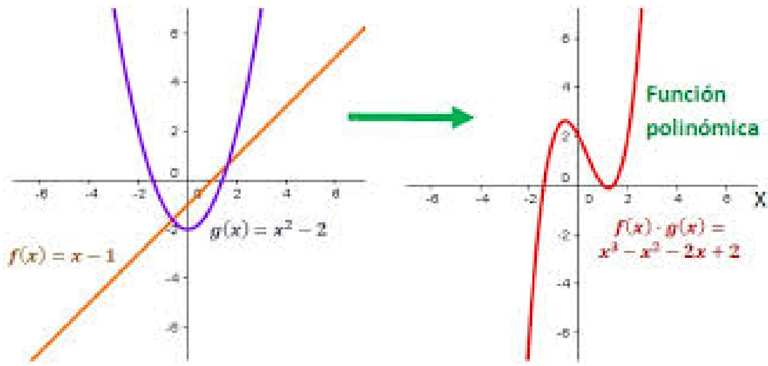
- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}, \quad \mathrm{Codom}(f) = \mathbb{R} \neq \mathrm{Rec}(f) = [0, 1) \quad \Rightarrow$ f no es sobreyectiva.
- $f(1{,}5) = 0{,}5 = f(2{,}5) \;\Rightarrow$ f no es inyectiva.



Función polinómica o polinomial

Una función $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio o función polinómica, si $n \in N_0$ y $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ son constantes reales llamados coeficientes del polinomio. $\mathrm{Dom}(p) = \mathbb{R}$, si $a_n \neq 0$ decimos que n es el grado del polinomio. Casos particulares, las funciones constantes, lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.





Cuadrática caso general: $f(x) = ax^2 + bx + c$**, con** a **distinto de cero.**

Completando cuadrados,

$$f(x) = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})\right] = a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

llegamos a la siguiente expresión para f:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Por lo tanto, calcular las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es equivalente a encontrar soluciones de

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

De allí surge que si denotamos $\Delta = b^2 - 4\text{ac}$, entonces los ceros de f cumplen:

- si $\Delta > 0$ la función f tiene dos ceros:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4\text{ac}}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\text{ac}}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

  x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación. En ese caso la parábola corta al eje x en dos puntos.

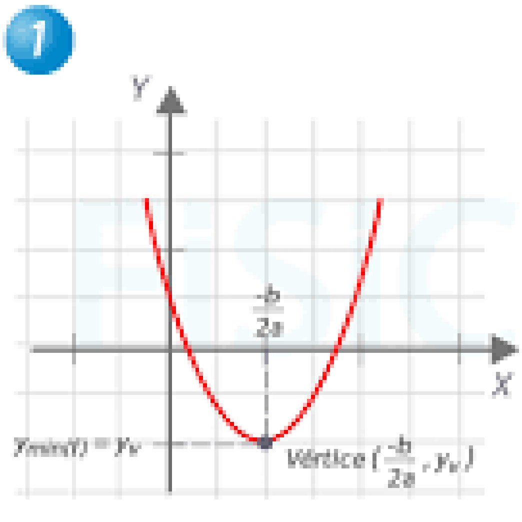
- Si $\Delta < 0$ la función f no tiene ceros, la ecuación no tiene soluciones. En ese caso la parábola no corta al eje x.

- Si $\Delta = 0$ la función f tiene un único cero. Los puntos x_1 y x_2 coinciden. En ese caso la parábola corta al eje x en un punto de abcsisa $x = x_V = \dfrac{-b}{2a}$.

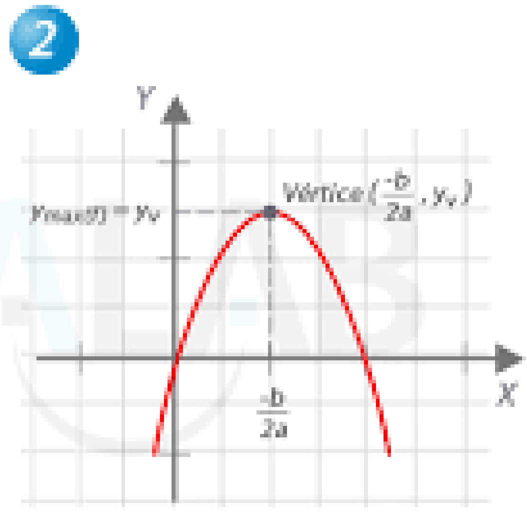
El vértice de la parábola es el punto de coordenadas $(x_V,\ y_V)$, donde $x_V = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-b}{2a}$, $y_V = f(\frac{-b}{2a}) = \dfrac{-\Delta}{4a}$.

El eje de simetría de la parábola es la recta de ecuación $x = x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

Mínimo de f: La función f asume un valor mínimo si $a > 0$, $\text{mín}(f) = f\ (x_V) = y_V$.
Máximo de f: La función f asume un valor máximo si $a < 0$, en este caso, $\text{máx}(f) = f\ (x_V) = y_V$.

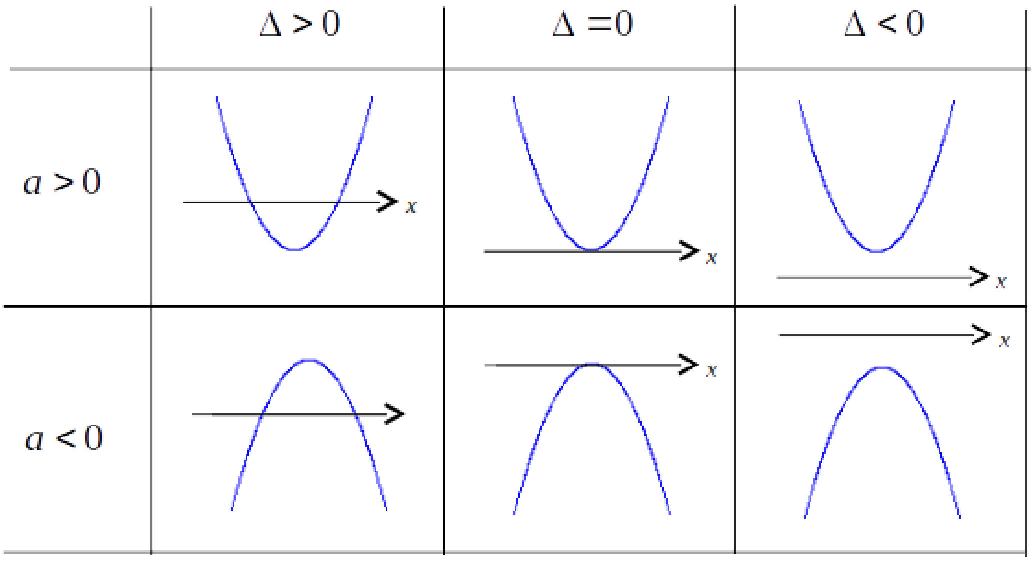


Parábola con a>0



Parábola con a<0

Resumimos en el siguiente cuadro la posición de una parábola, gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, con respecto al eje x, según sean a (el coeficiente de x^2) y Δ (discriminante: $b^2 - 4ac$).



Ejemplo.

$f(x) = 2x^2+2x-4 = 2(x^2+x-2) = 2[x^2+2\frac{1}{2x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2] = 2[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}] = 2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{2}$,

con $x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2}$, $y_V = f(x_V) = f(\frac{-1}{2}) = \dfrac{-9}{2}$. Además $f(0) = -4$ y $f(x) = 0$ si y sólo si $x_1 = \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{-2-3}{4} = \frac{-5}{4}$. Realizar la gráfica.

Funcion Homográfica

Dados $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$, $bc \neq ad$, $c \neq 0$, se define la función homográfica para todo $x \neq -\frac{d}{c}$,

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

es decir, $\mathrm{Dom}(f) = \{\ x \in \mathbb{R} : x \neq -\frac{d}{c}\ \}$.

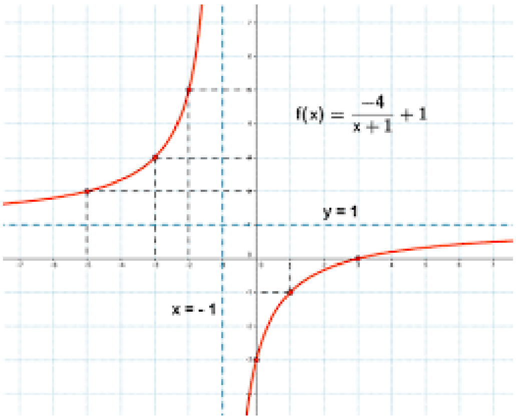
La función homográfica más simple es la función recíproca $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(a = 0,\ b = 1,\ c = 1,\ d = 0)$ cuya gráfica sabemos que es una hipérbola. A partir de esta se puede obtener la gráfica de cualquier otra función homográfica. Teniendo en cuenta la siguiente expresión para f:

$$f(x) = \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Tengamos entonces en cuenta que, la gráfica de una función homográfica es una hipérbola, en la que siempre deberemos identificar una asíntota horizontal , $y = \dfrac{a}{c}$ y una asíntota vertical, $x = -\dfrac{d}{c}$.

Ejemplos. 1) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1} = 1 + \dfrac{-4}{x+1}$, con asíntota vertical, $x = -1$ y asíntota horizontal , $y = 1$. Calculamos, $f(0) = -3$ y los x tales que $f(x) = 0$, para determinar los puntos de intersección con los ejes, $(0,\ -3)$ y $(3, 0)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



2) $g(x) = \dfrac{2x+2}{3x-6} = \frac{2}{3}\dfrac{x+1}{x-3} = \frac{2}{3} + \dfrac{2}{x-2}$ luego asíntota vertical, $x = 2$ y asíntota horizontal , $y = \frac{2}{3}$. Calculamos, $g(0) = \frac{-1}{3}$ y los x tales que $g(x) = 0$, para determinar los puntos de intersección con los ejes, $(0, \frac{-1}{3})$ y $(-1, 0)$.

Función Racional

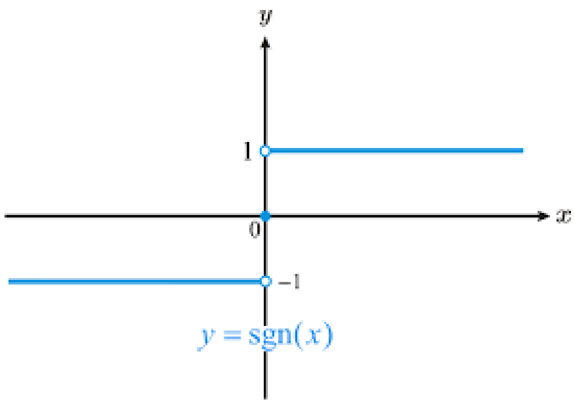
$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ siendo p y q dos polinomios. El dominio de la función racional será

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q) \cap \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \cap \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}.$$

Ejemplos: determinar los dominios de las funciones $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ y $h(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$. Si es posible esbozar sus gráficas.

Función Signo

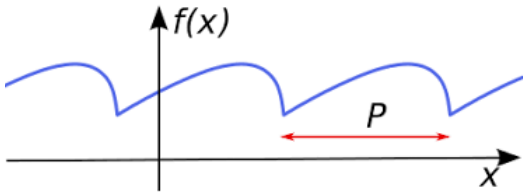
$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

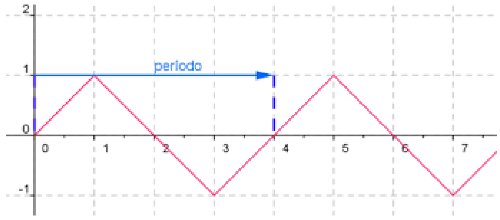


Es una función impar, no sobreyectiva, no inyectiva, $\mathrm{Rec}(\mathrm{sgn}) = \{-1, 0, 1\}$, es no decreciente.

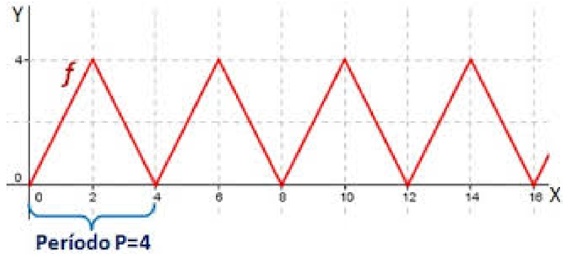
Función periódica

Una función f es periódica de período $p \in \mathbb{R}^+$ si $f(x) = f(x+p)\ \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$, y además p es el mínimo número positivo que verifica esta relación.





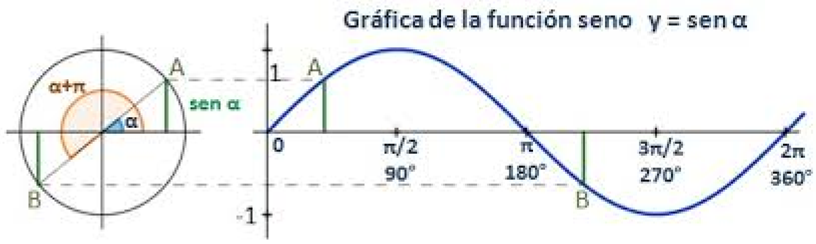
Observemos que $f(x+2p) = f((x+p)+p) = f(x+p) = f(x)$.



Funciones trigonométricas

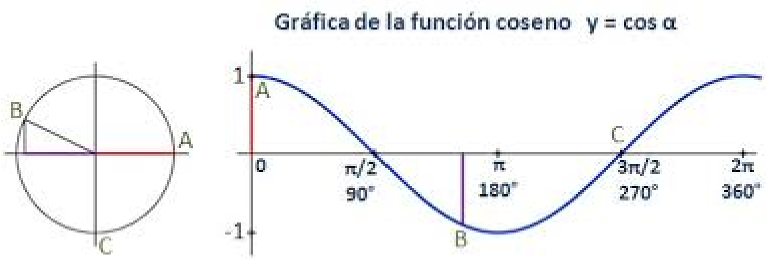
Función seno

$f(x) = \mathrm{sen}(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Rec}(f) = [-1, 1]$, periódica de período 2π, función impar.



Función coseno

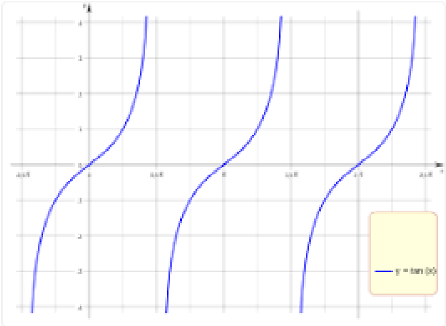
$f(x) = \cos(x),\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{Rec}(f) = [-1, 1]$, periódica de período 2π, función par.



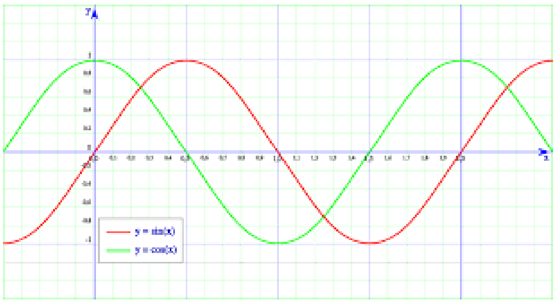
Función tangente

$f(x) = \tan(x) = \dfrac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\right\},\ \mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$, periódica de período π, función impar.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



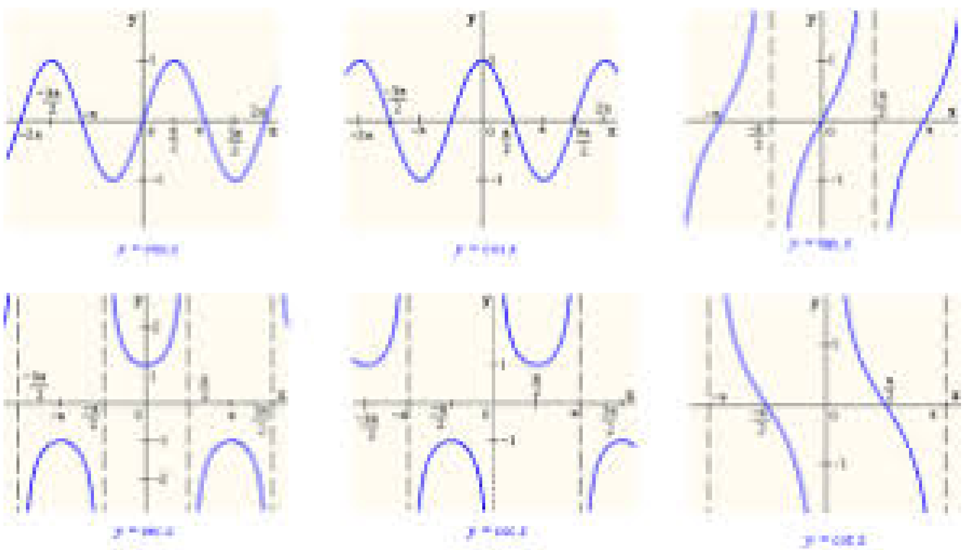
Observemos que son funciones periódicas y que $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})\ \forall x \in \mathbb{R}$.



Función recíprocas trigonométricas: cosecante, secante y cotangente.

$$\csc(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}\ y \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Todas son periódicas, las dos primeras de período 2π y la cotangente de período π.

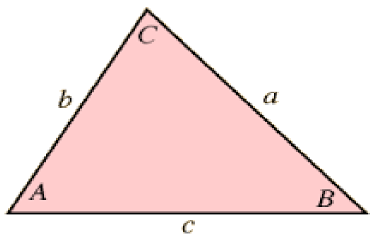


Identidades trigonométricas

1. $\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1,$ (identidad Pitagórica).
2. $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$
3. $1 + \cot^2(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = \csc^2(x).$
4. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\ \operatorname{sen}(y)$ y $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\ \operatorname{sen}(y).$
5. $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ y $\cos(x)-\cos(y) = -2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right).$
6. $\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y) = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ y $\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(y) = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{x-y}{2}\right).$
7. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$ y $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x).$
8. $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}.$

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Ley de los senos

$$\frac{\textbf{sen}A}{a} = \frac{\textbf{sen}B}{b} = \frac{\textbf{sen}C}{c}$$

2.5. Gráfica de una función definida a partir de una función dada

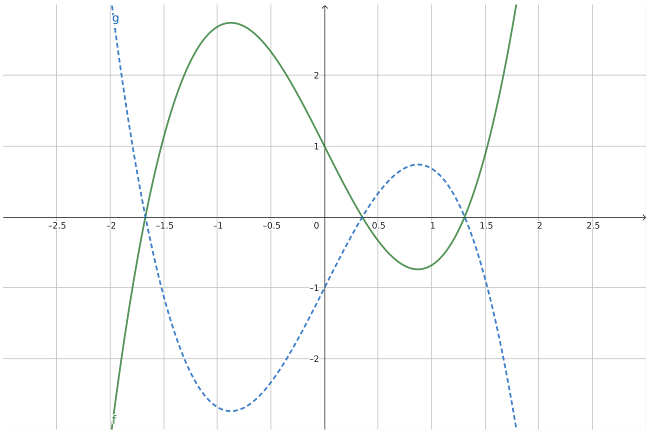
La gráfica de una función f permite determinar la gráfica de nuevas funciónes, definida a partir de f. Analizaremos algunos casos.

Traslaciones o reflexiones respecto de una recta.

- $g(x) = -f(x)$.

Observemos que $x \in \operatorname{Dom}(g) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \operatorname{Dom}(f)$. Luego, $(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (x,\ -y) \in G_g$.
La gráfica de g se obtiene a partir de la gráfica de f, efectuando a la misma una reflexión respecto del eje x, como se indica en la siguiente figura.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



Observemos que tanto f como $-f$ tienen los mismos ceros, es decir que se anulan para los mismos valores de x. En la gráfica vemos que cortan al eje x en los mismos puntos.

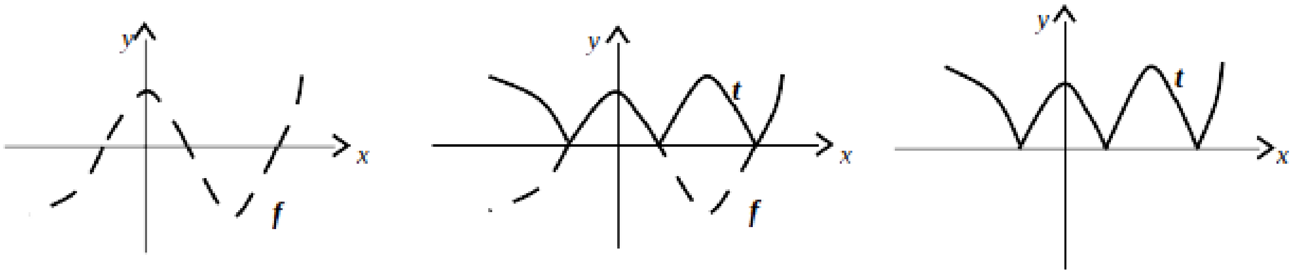
Analizar el recorrido de g.

Por ejemplo, $\mathrm{Rec}(f) = [c, d] \Leftrightarrow \mathrm{Rec}\ (g) = [-d, -c]$.

- $t(x) = |\ f(x)\ | \qquad x \in \mathrm{Dom}(t) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Si x es tal que $f(x) \geq 0$, entonces $t(x) = |\ f(x)\ | = f(x)$. Así, $(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (x,\ y) \in G_t$. Por lo tanto, para estos valores de x la gráfica de f y t coinciden.

Si x es tal que $f(x) < 0$, entonces $t(x) = |\ f(x)\ | = -f(x)$. Así, $(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (x,\ -y) \in G_t$. Luego, para dichos valores de x, la gráfica de t se obtiene efectuando a la gráfica de f una reflexión respecto del eje x.



Por ejemplo, si $\mathrm{Rec}(f) = [c, d]$ con $c \geq 0$ entonces $\mathrm{Rec}\ (t) = \mathrm{Rec}\ (f)$; si $\mathrm{Rec}(f) = [c, d]$ con $c < 0$ y $d > 0$ entonces $\mathrm{Rec}(t) = [0, d]$.

- $h(x) = f(x) + \alpha, \quad x \in \mathrm{Dom}(h) \quad \Leftrightarrow \quad x \in \mathrm{Dom}(f)$.

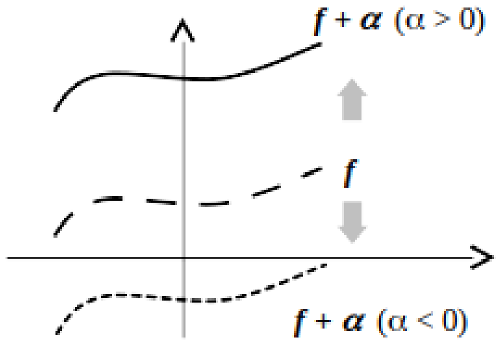
  $(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (x,\ y + \alpha) \in G_h$.

  En consecuencia:

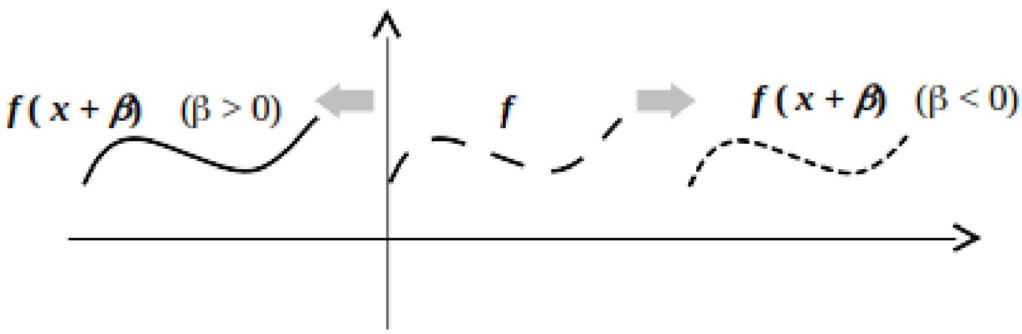
  - Si $\alpha > 0$ la gráfica de h se obtiene trasladando verticalmente hacia arriba α unidades la gráfica de f .
  - Si $\alpha < 0$ la gráfica de h se obtiene trasladando verticalmente hacia abajo $|\alpha|$ unidades la gráfica de f .

- Recorrido de h. Por ejemplo, si

$$\operatorname{Rec}(f) \;=\; [c,d] \;\Rightarrow\; \operatorname{Rec}(h) \;=\; [c+\alpha, d+\alpha].$$



- $p(x) = f(x+\beta)$, $\qquad x \in \operatorname{Dom}(f) \Leftrightarrow (x-\beta) \in \operatorname{Dom}(p)$.
  $(x,\ y) \in G_f \quad \Leftrightarrow\ x \in \operatorname{Dom}(f),\quad y = f(x) = p(x-\beta) \Leftrightarrow (x-\beta,\ y) \in G_p$.
  - La gráfica de p se obtiene trasladando horizontalmente $|\beta|$ unidades la gráfica de f
  - hacia la izquierda si $\beta > 0$.
  - hacia la derecha si $\beta < 0$.
  - El recorrido $\operatorname{Rec}(p) \;=\; \operatorname{Rec}\,(f)$.



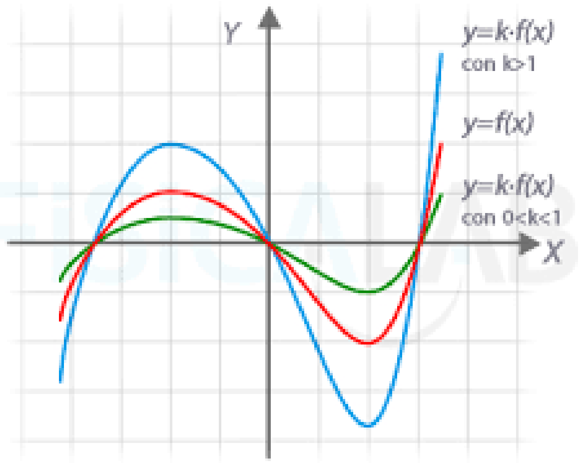
Cambio de tamaño y reflexión.
Estudiaremos $f(cx)$ y $c \cdot f(x)$ para cierto $c \in \mathbb{R}$.
Para $c > 1$:

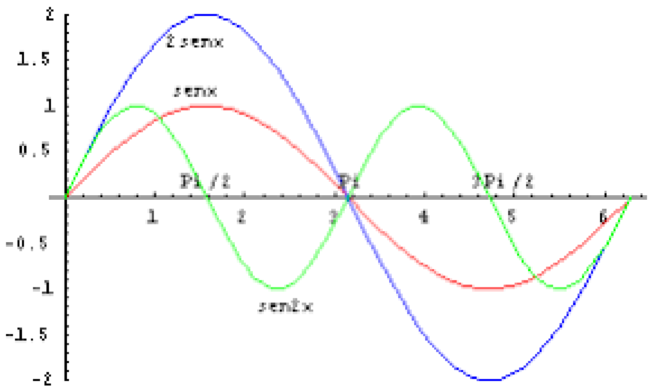
- $y = \;\; c \cdot f(x)$ dilata o estira verticalmente la G_f.
- $y = \;\; \frac{1}{c} \cdot f(x)$ comprime verticalmente la G_f.
- $y = \;\; f(cx)$ comprime horizontalmente la G_f.
- $y = \;\; f\left(\frac{1}{c}x\right)$ dilata o estira horizontalmente la G_f.

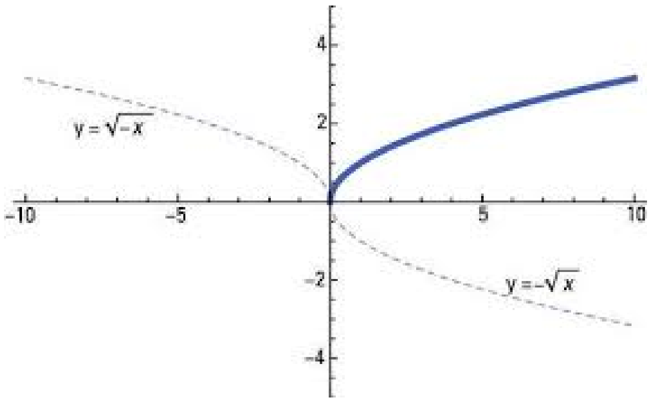
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Para $c = -1$:

- $y = \ -f(x)$ refleja la G_f respecto del eje x, ya estudiado.
- $y = \ f(-x)$ refleja la G_f respecto del eje y.







Ejercicio: Deducir cómo es la gráfica de $f\,(|x|)$ a partir de la de f.

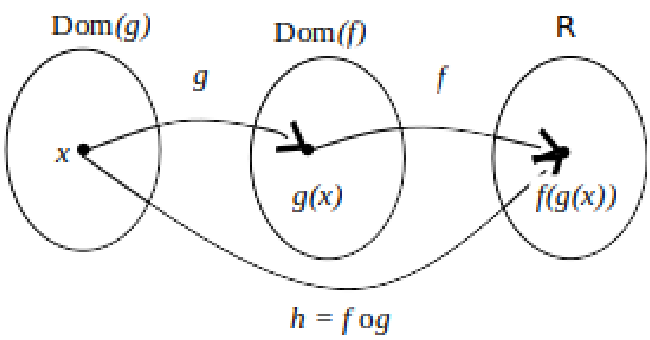
2.6. Composición de funciones

- Dadas dos funciones $f:\ \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$ y $g:\ \mathrm{Dom}(g) \to \mathbb{R}$, es posible definir una nueva función h, que se denomina función compuesta de f con g mediante la siguiente ley

$$h(x) = f\left(g(x)\right).$$

A la función compuesta de f con g se la nota $h = f \circ g$ $\boxed{(f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)}$

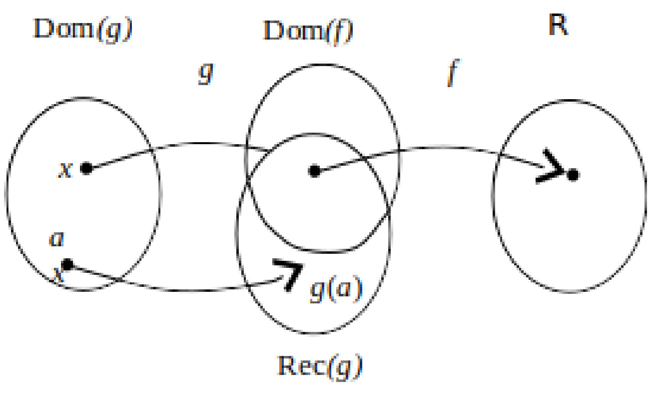
Para calcular la función compuesta $(f \circ g)(x)$, primero se calcula $g(x)$ y luego se evalúa f en $g(x)$, como se observa en el siguiente diagrama.



Es claro que para que este cálculo tenga sentido es necesario que se verifique:

- x pertenezca al $\mathrm{Dom}(g)$,
- $g(x)$ pertenezca al $\mathrm{Dom}(f)$,

ya que si elegimos un elemento a del dominio de g tal que $g(a)$ no sea un elemento del $\mathrm{Dom}(f)$, no podremos aplicarle dicha función, como se observa en la siguiente figura.



Por lo tanto,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{\ x \in \mathrm{Dom}(g):\quad g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\ \}.}$$

Ejemplo:
Sean las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$, determine el dominio y ley de $f \circ g$ y $g \circ f$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Observación: Surge de este ejemplo que en general:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Ejemplo:
Sean las funciones $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, determine dominio y ley de $f \circ g$ y $g \circ f$.

2.7. Funciones inversas

Recordemos que una función f es inyectiva cuando a todo par de elementos distintos del dominio le corresponden distintas imágenes, o sea, $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ \ x_1 \neq x_2 \ \ \Rightarrow \ \ f(x_1) \neq f(x_2)$.

Recordemos también que una función es sobreyectiva cuando su recorrido es igual a su codominio. Una función f es biyectiva cuando es sobreyectiva e inyectiva. Se dice en este caso que existe una correspondencia biunívoca o uno a uno entre el dominio y el codominio de la función f.

Observemos que cuando f es biyectiva podemos asignar a cada $y \in \mathrm{Rec}(f)$ su única preimagen $x \in \mathrm{Dom}(f)$ mediante una función que llamaremos inversa de f.

Definición. Sea f una función inyectiva con dominio A y recorrido B entonces su función inversa f^{-1} con dominio B y recorrido A se define para cada $y \in B$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Esta definición dice que si f mapea x en y, entonces f^{-1} mapea y en x, si f no fuera inyectiva, f^{-1} no estaría bien definida.

Gráfica de la inversa: $\boxed{(x,y) \in G_f \ \Leftrightarrow \ f(x) = y \ \Leftrightarrow \ f^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow (y,x) \in G_{f^{-1}}.}$

Observemos que el punto (y,x) se obtiene de reflejar (x,y) respecto de la recta de ecuación $y = x$. Luego, la $G_{f^{-1}}$ se obtiene reflejando la G_f respecto de la recta $y = x$. O sea, las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto a la gráfica de la función identidad.

Además, $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathrm{Rec}(f)$ y $\mathrm{Rec}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f)$.

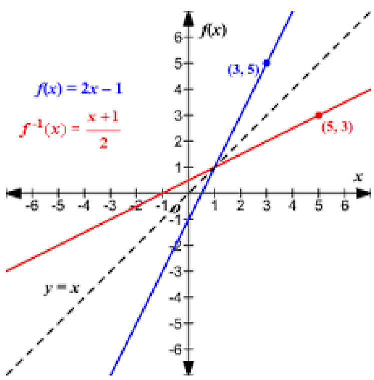
Como $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ resulta que $f^{-1}(f(x)) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}(y)) = y$. Es decir, la composición de f con f^{-1} y de f^{-1} con f son las funciones identidad en cada conjunto,

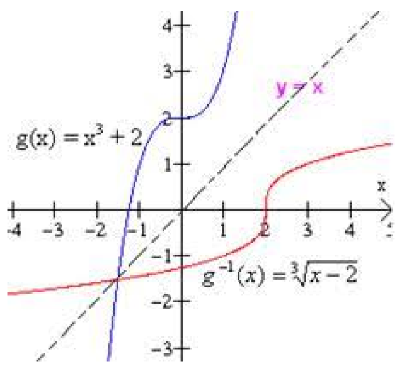
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id} : A \to A \text{ y } f \circ f^{-1} = \mathrm{id} : B \to B.$$

Ejemplos.

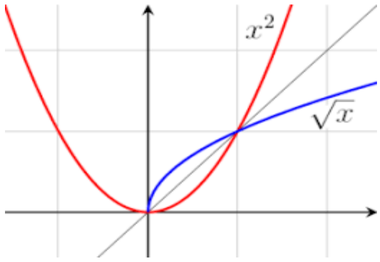
1) $f(x) = 2x - 1$ y $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

2) $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.





Cuando f no es inyectiva podemos restringir el dominio a un subconjunto donde sí lo sea, y definir la inversa de dicha función restringida. Por ejemplo, la función cuadrática no es inyectiva en $\mathbb{R}$ pero si lo es en $\mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ si $x \geq 0$ y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

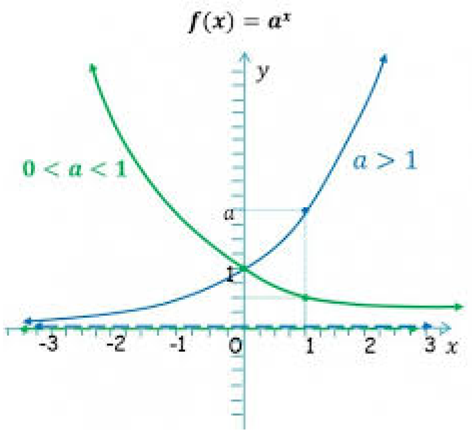


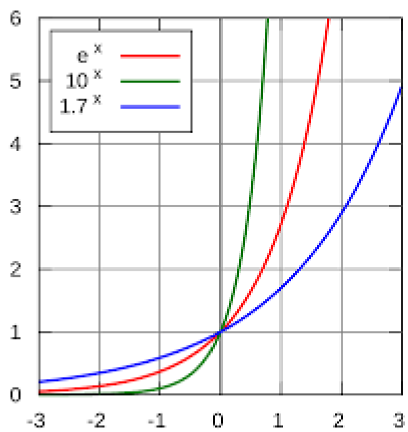
Función exponencial

Sea a es una constante positiva con $a \neq 1$. La función de las forma $f(x) = a^x$ se llama función exponencial de base a.

- $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}^+$.
- $a^x \neq 0 \; \forall x$.
- $a^0 = 1 \; \forall a$.
- $a^1 = a$.
- En particular, si $a = e$, tenemos $f(x) = e^x$. La definición del número irracional e la comentamos en la sección 1.7 (pág. 10).

- Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.





ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

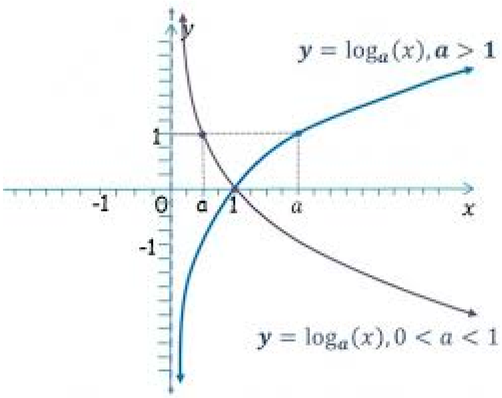
Función logarítmica

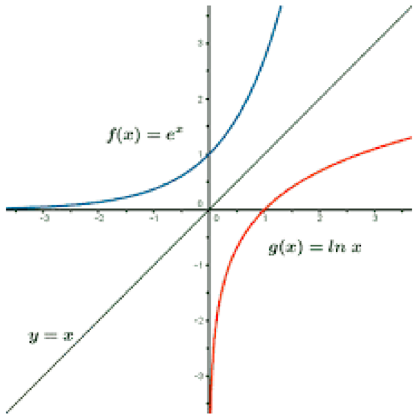
Son funciones de la forma $f(x) = \log_a(x)$ donde la base a es una constante positiva y $a \neq 1$. Se trata de las funciones inversas de las exponenciales (las estudiaremos en detalle más adelante). En cada caso $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

En particular, $f(a) = \log_a(a) = 1$ pues $a^1 = a$. Además, $f(1) = \log_a(1) = y \Leftrightarrow a^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$, pues $a \neq 1$.

Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.

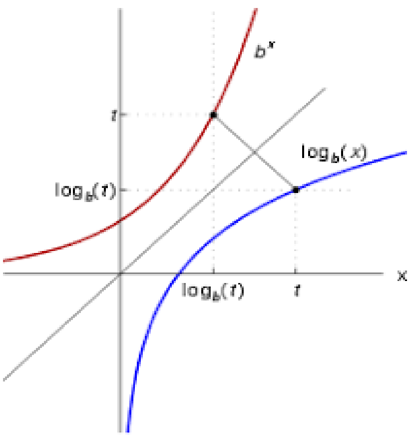


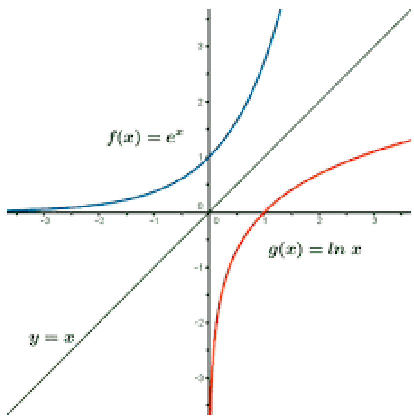


$$\mathrm{Dom}(\log_a) = \mathrm{Rec}(a^x) = \mathbb{R}^+ \text{ y } \mathrm{Rec}(\log_a) = \mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}.$$

Cuando $a = e$ notamos $\log_e(x) = \ln(x)$ y lo llamamos logaritmo natural de x. La composición de logaritmo y la exponencial nos da la identidad.

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a(a^x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}. \\ a^{\log_a(x)} = x, \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \end{array}} \qquad \boxed{\log_e(x) = \ln(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.}$$





Propiedades: Si $a > 1$, la funciones $\log_a(x)$ y a^x son inyectivas y crecientes, entonces:

1. $$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),\ \forall x \in R^+, \quad a^x a^y = a^{x+y},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. $$\log_a(x^y) = y\ \log_a(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (a^x)^y = a^{xy},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que a partir de la propiedad $\ln(x^y) = y\ \ln(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, podemos definir la función potencia para $a \in \mathbb{R}$ como $x^a = e^{\ln(x^a)} = e^{a\ln(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Funciones trigonométricas inversas

Las funciones trigonométricas son periódicas, por lo tanto no son inyectivas. Si restringimos el dominio a un conjunto donde sean inyectivas podemos definir sus respectivas funciones inversas.

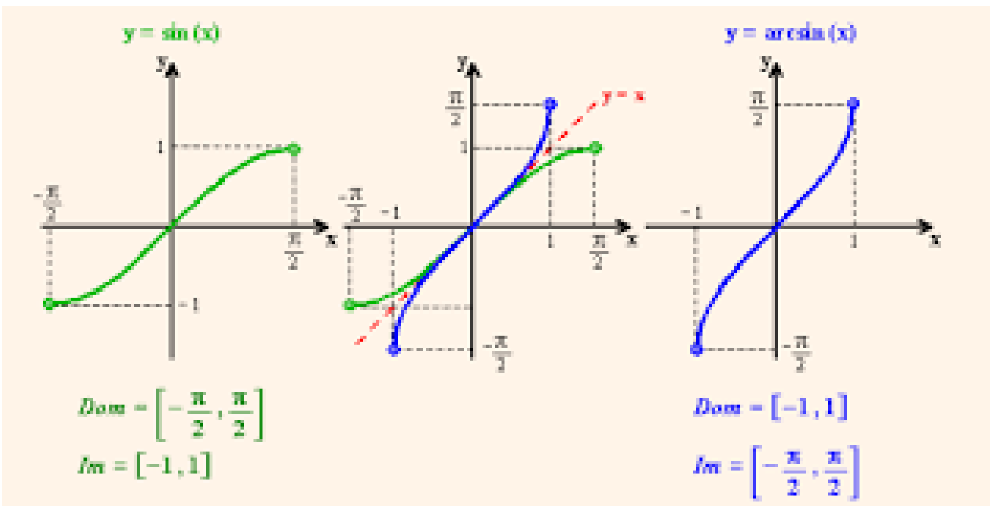
- Inversa del seno:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \operatorname{sen}(y) = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Así, si $x \in [-1,1] = \operatorname{Rec}(\operatorname{sen})$, $\operatorname{arc\,sen}(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x)$ es el número y entre $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ cuyo seno vale x.

A partir de esta restricción,

$$\operatorname{Dom}(\operatorname{sen}) = \operatorname{Rec}(\operatorname{arc\,sen}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ y, } \operatorname{Rec}(\operatorname{sen}) = \operatorname{Dom}(\operatorname{arc\,sen}) = [-1,1].$$



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

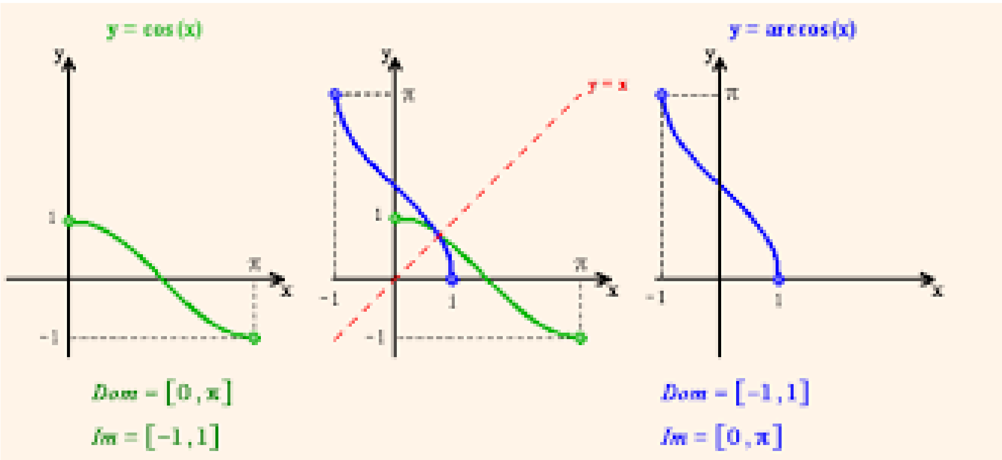
- Inversa del coseno:

$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x \text{ para } 0 \leq y \leq \pi.$$

Así, si $x \in [-1, 1] = \mathrm{Rec}(\cos)$, $\arccos(x) = \cos^{-1}(x)$ es el número y entre $0 \leq y \leq \pi$ cuyo coseno vale x.

A partir de esta restricción:

$$\mathrm{Dom}(\cos) = \mathrm{Rec}(\arccos) = [0, \pi] \text{ y } \mathrm{Rec}(\cos) = \mathrm{Dom}(\arccos) = [-1, 1] .$$



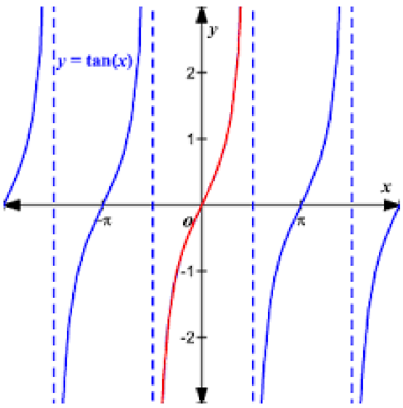
- Inversa de la tangente:

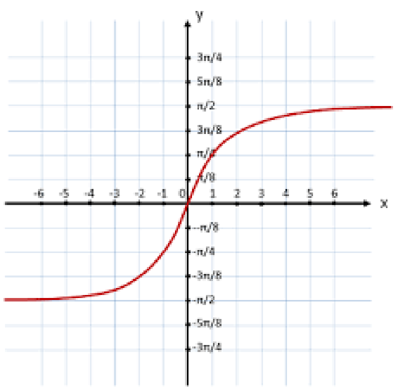
$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x \text{ para } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

Así, si $x \in \mathbb{R} = \mathrm{Rec}(\tan)$, $\arctan(x) = \tan^{-1}(x)$ es el número y entre $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ cuya tangente es x.

A partir de esta restricción:

$$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathrm{Rec}(\arctan) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y } \mathrm{Rec}(\tan) = \mathrm{Dom}(\arctan) = \mathbb{R}.$$





- Funciones hiperbólicas.

Definiciones: Para $x \in \mathbb{R}$ definimos las funciones seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica de x como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}.$$

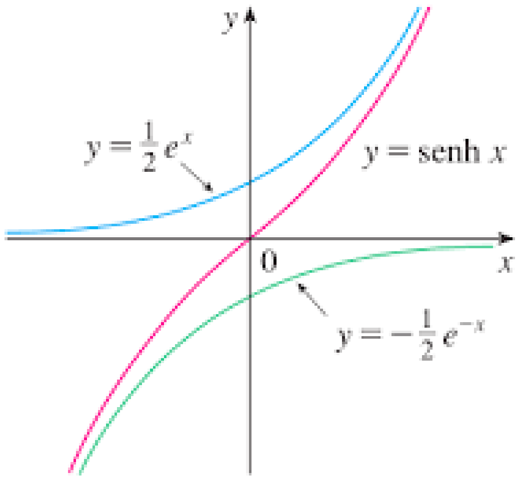


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

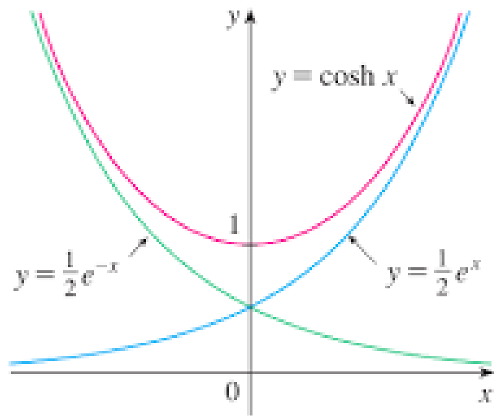
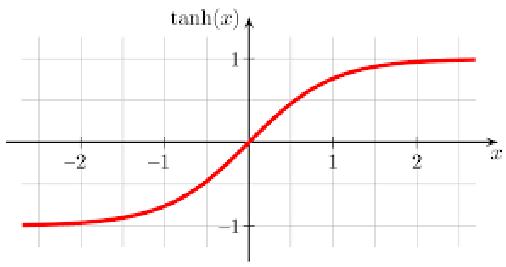
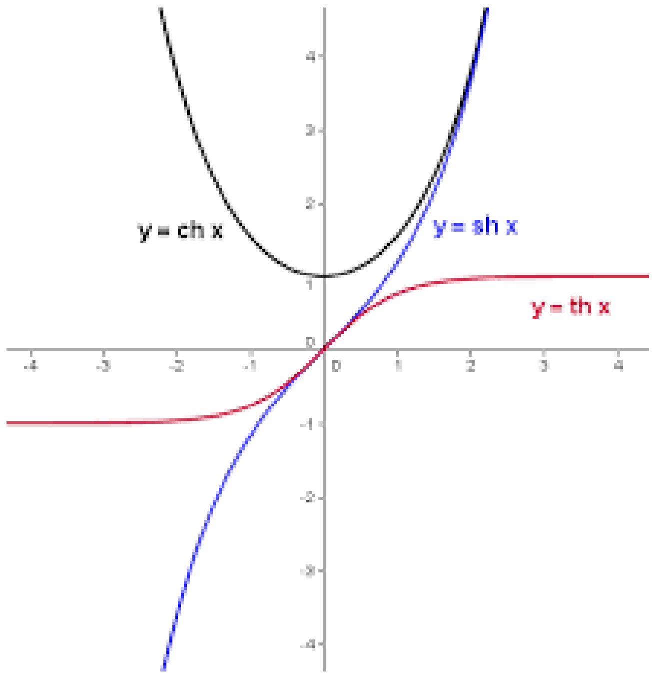


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$





ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119