Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2025

UNIDAD 1: ESPACIOS VECTORIALES

1. Cuerpos

A modo de introducción veamos una estructura algebraica abstracta que nos servirá como punto de partida para la definición de Espacios Vectoriales (recordemos la definición que vimos en Álgebra y Geometría Analítica II). ¿Conocemos cuerpos? Si!! $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$. Sabemos además que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ no lo son. ¿Cuál es la diferencia? ¿Cómo definimos *cuerpo de escalares*? Como toda estructura algebraica, la definimos de manera axiomática.

Definición: Sea F un conjunto no vacío dotado de dos operaciones: $+: F\times F \to F$ llamada *suma* y $\cdot : F\times F\to F$ llamada multiplicación. Decimos que $(F,+,\cdot)$ es un *cuerpo* o que F *es un cuerpo con la suma* $+$ *y el producto* $\cdot$ si se verifican los siguientes axiomas

(i) la suma es asociativa: para todos $a,b,c\in F$ tenemos que $a+(b+c)=(a+b)+c$,

(ii) existe un elemento neutro para la suma: existe un elemento $0\in F$ tal que para todo $a\in F$, $a+0=0+a=a$,

(iii) existencia de opuestos para la suma: dado $a\in F$ existe $b\in F$ tal que $a+b=b+a=0$,

(iv) la suma es conmutativa: para todos $a,b\in F$ tenemos que $a+b=b+a$,

(v) la multiplicación es asociativa: para todos $a,b,c\in F$ tenemos que $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$,

(vi) existe un elemento neutro para la multiplicación: existe un elemento $1\in F$ tal que para todo $a\in F$, $a\cdot 1=1\cdot a=a$,

(vii) existencia de inversos para la multiplicación: dado $a\in F^*$ (donde definimos $F^* := F\backslash\{0\}$) existe $b\in F$ tal que $a\cdot b=b\cdot a=1$,

(viii) el producto es conmutativo: para todos $a,b\in F$ tenemos que $a\cdot b=b\cdot a$,

(ix) distributiva de la multiplicación respecto de la suma: para todos $a,b,c\in F$ tenemos que $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

A los elementos de F los llamamos *escalares*.

Ejemplos:

1. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ con las operaciones usuales son cuerpos. EJERCICIO!
2. $\mathbb{Z}$ con las operaciones usuales no es un cuerpo. EJERCICIO!
3. Un subconjunto $\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ es un *subcuerpo* si con las operaciones restringidas tenemos que $(\mathbb{F},+,\cdot)$ es un cuerpo.

   $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son subcuerpos de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{Q}\subsetneq\mathbb{R}\subsetneq\mathbb{C}$. EJERCICIO!

   Puesto que la asociatividad, conmutatividad y distributivas se heredan del cuerpo, bastará con chequear:

   a) para todos $a,b\in\mathbb{F}$ tenemos que $a+b\in\mathbb{F}$, esto es que la suma sea cerrada en $\mathbb{F}$, *b*) para todos $a, b \in \mathbb{F}$ tenemos que $a \cdot b \in \mathbb{F}$, esto es que la multiplicación también sea cerrada en $\mathbb{F}$,

c) $0, 1 \in \mathbb{F}$ (es decir que ambos neutros para la suma y la multiplicación de $\mathbb{C}$ también sean elementos de $\mathbb{F}$)

d) para todo $a \in \mathbb{F}$ su opuesto $-a \in \mathbb{C}$ también sea un elemento de $\mathbb{F}$, es decir $-a \in \mathbb{F}$,

e) para todo $a \in \mathbb{F}^*$ su inverso $a^{-1} \in \mathbb{C}$ también sea un elemento de $\mathbb{F}$, es decir $a^{-1} \in \mathbb{F}$.

Observemos que aquí hemos usado la notación de opuesto e inverso puesto que estamos en $\mathbb{C}$ y sabemos de su unicidad. Para un cuerpo general, luego de probar la unicidad de opuestos e inversos podríamos dar la misma definición y caracterización de subcuerpo.

Más arriba mencionamos la cadena de contenciones estrictas $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$. Éstos no son los únicos subcuerpos de $\mathbb{C}$. Veamos un subcuerpo de $\mathbb{C}$ que contiene estrictamente a $\mathbb{Q}$ y está estrictamente contenido en $\mathbb{C}$.

Sea el conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{2} \cdot y : x, y \in \mathbb{Q}\}$. Este conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. EJERCICIO! Aclaración: $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es sólo una notación. Decimos que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ es la extensión de $\mathbb{Q}$ por $\sqrt{2}$. Extensión de cuerpos es un tema de importancia en álgebra abstracta, y es la base para la llamada *teoría de Galois*, que tiene importantes aplicaciones por ejemplo en Ecuaciones Diferenciales. Si no conocen a Galois, googleen su historia, es muy interesante (spoiler: se batió duelo a los 20 años!).

Existen además cuerpos que no son ninguno de los cuerpos numéricos ni extensiones de los mismos, y más sorprendentemente, son *finitos*, es decir, constan de una cantidad finita de elementos. Antes de ver la construcción general, hagamos un ejemplo de precalentamiento:

Ejemplo:

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$. Ya vimos que con la suma y producto usuales no es un cuerpo. Spoiler: el problema es que los enteros no nulos diferentes de cero no tienen inverso para la multiplicación (salvo ± 1). Pensemos lo siguiente: para tener un cuerpo necesitamos un neutro para la operación suma y un neutro para la operación producto, o sea debemos tener 0 y 1. Consideremos entonces el conjunto $X = \{0, 1\}$. Si consideramos la suma y producto habituales, nos queda sólo un inconveniente: $1+1 = 2$. Para que las operaciones *cierren*, deberíamos asignar a $1 + 1$ el valor 0 o el valor 1. Si le asignamos el valor 1, no tenemos opuesto para la suma: no existe ningún elemento en X que sumado a 1 de 0 (el neutro de la suma). Si asignamos el valor 0, queda bien definidas la suma, el producto, y más aún, los axiomas que las vinculan se satisfacen (EJERCICIO!!). Esto es, tenemos un cuerpo con dos elementos. Dejamos como ejercicio completar las siguientes tablas:

+	0	1
0		
1		

$\cdot$	0	1
0		
1		

Esta construcción es un poco artificial, veamos cómo la podemos hacer más formalmente. En primer lugar, si consideramos paridad (0 es par y 1 es impar), podemos mirar la tabla de otra forma:

+	par	impar
par		
impar		

$\cdot$	par	impar
par		
impar		

Esto parece menos formal que lo anterior, no? Pero la paridad si es un concepto que podemos poner en términos formales: un número entero es par si el resto de la división por 2 es 0 y es impar si el resto de la división por 2 es 1. Dado cualquier entero podemos decidir su paridad simplemente dividiendo por dos. Es decir, separamos a todos los enteros en dos bolsitas: la bolsita de los pares y la bolsita de los impares. Hemos *particionado* el conjunto $\mathbb{Z}$, lo cual define una relación de equivalencia en $\mathbb{Z}$ que tiene dos clases: la clase $\overline{0}$ y la clase $\overline{1}$. EJERCICIO: describir esta relación de equivalencia.

Formalmente diremos que dos enteros a y b son *congruentes módulo 2* y escribimos $a \equiv b \pmod{2}$ sii $2|(b-a)$. Esta definición es más que sólo una equivalencia, hablamos de *congruencia* puesto que esta relación respeta las operaciones suma y producto habituales en el sentido de que si $a \equiv b \pmod{2}$ y $c \equiv d \pmod{2}$ para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{2}$ y $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{2}$. Sigue inmediatamente que $\overline{a} + \overline{c} = \overline{a+c}$ y $\overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{a \cdot c}$, es decir, tenemos una suma y productos de clases de equivalencia bien definidos. Más aún, las tablas confeccionadas anteriormente son exactamente las tablas que obtenemos con esta suma y producto en el conjunto cociente (recordar que el conjunto cociente es el conjunto de las clases de equivalencia), que consiste de las clases del cero y del uno.

Hemos construido formalmente nuestro cuerpo finito de dos elementos: $\mathbb{Z}_2 := \{\overline{0}, \overline{1}\}$. Copiando esta idea, obtendremos más cuerpos finitos.

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define la relación de *congruencia módulo n* de la siguiente manera:

$$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \,|\, (b-a).$$

1. Probar que define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros.

Sea $a \in \mathbb{Z}$, vamos a determinar su clase de equivalencia:

$$\begin{aligned}
\overline{a} &= \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \pmod{n}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z} : n \,|\, (b-a)\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z} : b - a = kn, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{b \in \mathbb{Z} : b = a + kn, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Esto es, en $\overline{a}$ se encuentran todas las sumas de a con múltiplos de n. En particular,

$$\begin{aligned}
\overline{0} &= \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}, \\
\overline{1} &= \{\cdots, 1-2n, 1-n, 1, 1+n, 1+2n, 1+3n, \cdots\}, \\
\overline{2} &= \{\cdots, 2-2n, 2-n, 2, 2+n, 2+2n, 2+3n, \cdots\}, \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &= \{\cdots, -1-n, -1, -1+n, -1+2n, -1+3n, -1+4n, \cdots\}.
\end{aligned}$$

Notemos que no existen otras clases de equivalencia distintas. Por ejemplo,

$$\overline{n} = \{\cdots, -n, 0, n, 2n, 3n, 4n, \cdots\} = \overline{0}.$$

Observemos que, de acuerdo al algoritmo de la división, los representantes de las clases de equivalencia que escogimos son los posibles restos de la división de un entero por n.

Luego, el conjunto cociente resulta

$$\mathbb{Z}_n := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}.$$

Por ejemplo, si tomamos $n = 3$, el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\},$$

donde $\overline{0}$ es el conjunto de los múltiplos de 3, o equivalentemente, el conjunto de los enteros que divididos por 3 dan resto nulo, a $\overline{1}$ pertenecen los enteros que divididos por 3 dan resto 1, y en $\overline{2}$, los enteros que divididos p or 3 dan resto 2.

Ahora, dados dos elementos $\overline{i}$ y $\overline{j}$ en $\mathbb{Z}_n$, definimos

$$\overline{i} + \overline{j} = \overline{i + j},$$
$$\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i \cdot j}.$$

EJERCICIOS:

(b) Verficar que estas operaciones se encuentran bien definidas.

(c) Analizar si $\mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4$ son cuerpos.

(d) Mostrar que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si n es primo.

Los cuerpos finitos tienen interés en si mismos y se estudian en áreas como aritmética modular, teoría de números, álgebra abstracta, criptografía, informática (y por supuesto interacciones entre estas áreas). Algunas aplicaciones son muy interesantes y actuales, como el cifrado RSA para comunicaciones digitales seguras. Otras son más antiguas pero no menos bellas: en la música, por ejemplo, cuando se utiliza una escala temperada, o en las artes visuales cuando se crean patrones simétricos para crear obras de arte. En el campus dejamos algunos vínculos de divulgación que les pueden interesar. Si encuentran alguna otra información de interés, siéntanse libres de compartirla.

Sea F un cuerpo. Para $n \in \mathbb{N}$ consideramos el elemento $1 + 1 + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + 1$ donde $n \in \mathbb{N}$ es un natural. Este elemento lo llamamos, duplicando la notación, n. Así, *identificamos* los números naturales con ciertos elementos del cuerpo. De esta forma, la expresión nx para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{Z}$ la entendemos como:

$$nx = (1 + 1 + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + 1)x = 1x + 1x + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + 1x = x + x + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + x,$$

es decir, nx es el elemento de F que se obtiene sumando n veces el elemento x.

Un cuerpo F se dice **de característica** n si $n \in \mathbb{N}$ es el menor natural para el cual $1 + 1 + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + 1 = 0$. Si no existe tal $n \in \mathbb{N}$, decimos que F es **de característica 0**.

Ejercicio 1 *En un cuerpo F de característica $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $nx = 0$ para todo $x \in F$.*

2. Espacios Vectoriales

Recordemos un poco lo visto en Álgebra y Geometría Analítica II sobre espacios vectoriales:

- $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$. $\alpha \in F$ escalar.
- El vectorial espacio de las $n-$uplas de escalares de F: $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, \ldots, n\}$
  - Elementos: $\overline{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ n-uplas o vectores. Igualdad: componente a componente.
  - Suma: $\overline{u} + \overline{v} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
  - Producto por escalar: $\alpha\overline{v} = \alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

- El espacio vectorial de las matrices $m \times n$ de escalares de F: $F^{m\times n} = ...$
    - Elementos: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices $m \times n$ a coeficientes en F. Igualdad: ...
    - Suma: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$.
    - Producto por escalar: $\alpha A = \alpha(a_{ij}) := (\alpha a_{ij})$.
- El espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en F: $F_n[X]$...
    - Elementos: ...
    - Suma: ...
    - Producto por escalar: ...
- ¿qué otros conocemos?
- **Ejercicio 2** *Recordar los axiomas...*
    - ...
    - ...
    - ...

Definición 1 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de escalares. Sea un conjunto V dotado de dos operaciones, una llamada suma, denotada por el símbolo $+$, que a un par de elementos v y w de V les asigna un elemento que denotamos $v+w$, y otra llamada producto por escalar denotada por el símbolo $\cdot$ que a un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un elemento $v \in V$ le asigna un elemento que denotamos $\alpha \cdot v$. Diremos que la terna $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:*

1. *Clausura de la suma: si $v, w \in V$ entonces $v + w \in V$.*
2. *Asociatividad de la suma: si $v, w, u \in V$ entonces $(v + w) + u = v + (w + u)$.*
3. *Existencia de elemento neutro para la suma: existe $\overline{0} \in V$ tal que $v + \overline{0} = \overline{0} + v = v$.*
4. *Existencia de opuestos para la suma: dado $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = w + v = \overline{0}$.*
5. *Conmutatividad de la suma: si $v, w \in V$, entonces $v + w = w + v$.*
6. *Clausura del producto por escalar: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $\alpha \cdot v \in V$.*
7. *Asociatividad del producto por escalar: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.*
8. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.*
9. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v, w \in V$ entonces $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.*
10. *Unitariedad del producto por escalar: si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$.*

A los elementos v de un espacio vectorial V se los denomina vectores.

Proposición 1 *En un F-ev $(V, +, \cdot)$ se verifican:*

(a) *El elemento neutro para la suma es único.*

(b) *Dado un vector $v \in V$, existe un único opuesto, que denotaremos $-v$.*

(c) *Dado un vector $v \in V$, se tiene que $0 \cdot v = \overline{0}$.*

(d) *Dado un escalar $\alpha \in F$, se tiene que $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$.*

(e) *Dado un vector $v \in V$, se tiene que $(-1) \cdot v = -v$.*

(f) *Dados un escalar $\alpha \in F$ y un vector $v \in V$ que verifican que $\alpha \cdot v = \overline{0}$, se tiene que o bien $\alpha = 0$ o bien $v = \overline{0}$ (sin excluír que ambas puedan ocurrir en simultáneo).*

Desafío 1 *Intentar hacer las pruebas!*

Ejercicio 3 ***Hacer** las pruebas.*

Ejemplos 1

1. *A los sospechosos de siempre ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$) le agregamos $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}_2^n$, etc.*
2. *De la misma forma, si F es un cuerpo, tenemos que $F^{n \times m}, F[X]$ son F-ev con las sumas y productos habituales.*
3. *Sea X es un conjunto no vacío y F un cuerpo. Definimos el conjunto $\mathcal{F}^X = \{f : X \to F\}$. ¿Qué operaciones suma y producto son naturales definir? ¿Obtenemos un F-ev?*
4. *Pensemos ahora lo siguiente:*
   a) *$\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-ev y no es $\mathbb{C}$-ev (¿por qué?).*
   b) *$\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-ev y un $\mathbb{C}$-ev.*
   c) *$\mathbb{Q}$ es .... y no es ....*
5. *$\emptyset$ no es ev sobre ningún cuerpo F (¿por qué?).*
6. *El espacio de las sucesiones de escalares: dado un cuerpo F definimos el conjunto F^∞ cuyos elementos son sucesiones de escalares de F: $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in F$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos*

una suma y un producto por escalar de la forma natural: componente a componente. Así, resulta F^∞ un F-ev. (Ejercicio: probar todas las afirmaciones).

Desafío 2 *Pensar en cómo justificar esto sin probar todos los axiomas de ev.*

7. $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : .... \to ....\}$ *es un $\mathbb{R}$-ev con la suma y producto por escalar habituales.* $\sin(x), x^{23} - \sqrt{3}x^5, e^{2x-1}$ *son funciones de este ev, y hay muchas más. Pero hay más, hay funciones que tienen un salto o funciones que tienen infinitos saltos.*

   $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f$ *es continua* $\}$ *es un $\mathbb{R}$-ev con la suma y producto por escalar habituales.*

   Tenemos que $C([0,1]) \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$, y la suma y el producto por escalar son las mismas, y ambas resultan ser $\mathbb{R}$-ev. Esto no es casual, en la próximas sección formalizaremos el concepto de subespacio vectorial luego de ver algunos ejemplos más.

3. Subespacios

Comenzamos esta sección con algunos ejemplos que motivarán la definición de la estructura de subespacio de un ev. Esto nos permitirá ampliar considerablemente los ev conocidos.

Aclaración: en general, cuando trabajemos con los espacios usuales (F^n, $F[X]$, etc.) los interpretaremos como F-ev con la suma y producto por escalar habituales, salvo que indiquemos lo contrario.

Ejemplos 2 1. *Sea $V = \mathbb{R}^3$. Sea $U = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset V$ el plano xy. Tenemos que si $v = (x, y, 0), u = (x', y', 0) \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,*

   a) $v + u = (x + x', y + y', 0) \in U$,

   b) $\alpha v = (\alpha x, \alpha y, 0) \in U$.

   En particular, $\overline{0} = (0, 0, 0) \in U$. Si chequeamos los axiomas de ev restantes, vemos que U es un ev con las operaciones suma y producto por escalar de $\mathbb{R}^3$ restringidas al plano xy.

2. *Sea $V = \mathbb{R}^3$. Sea ahora $W = \{(x, y, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} \subset V$ el plano $z = 2$. ¿Se verifican los axiomas de ev para la suma y producto por escalares restringidos a W?*

3. *Sea $V = \mathbb{R}[x]$ el ev de los polinomios. Consideremos $U = \mathbb{R}_2[x]$ los polinomios de grado menor o igual a 2 a coeficientes reales. Tenemos que $U \subset V$, y si chequeamos los axiomas de ev con las operaciones suma y producto por escalar restringidas, sabemos que $\mathbb{R}_2[x]$ es un ev.*

4. *Sea $V = \mathbb{R}[x]$ el ev de los polinomios. Consideremos $W = \{p \in \mathbb{R}[x] : \ gr(p) = 2\}$. ¿Se verifican los axiomas de ev para la suma y producto por escalares restringidos a W?*

5. *Sea ahora $V = \mathbb{R}^2$ y consideremos el subconjunto $U = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ con la suma definida según $v + u = \overline{0}$ y el producto por escalar definido para $\alpha \in \mathbb{R}$ por $\alpha v = v$ (EJERCICIO: chequear que con estas operaciones queda definido un $\mathbb{R}$-ev). ¿Es el mismo razonamiento que el anterior?*

6. *Tenemos también que $\mathbb{C}^n$ es un $\mathbb{C}$-ev y es un $\mathbb{R}$-ev, con las operaciones restringidas a este campo. ¿Es el mismo razonamiento que el anterior?*

Definición 2 *Sean $(V, +, \cdot)$ un F-ev y $U \subset V$. Decimos que U es un* ***F-subespacio vectorial de*** *V si con las operaciones restringidas es un F-ev.*

Observaciones 1 *En la definición de sev U de V se debe considerar:*

1. *$U \subset V$,*
2. *las operaciones suma y producto por escalar restringidas,*
3. *el mismo cuerpo.*

Notación: Escribiremos $U \subset V$ sev, sobreentendiendo el cuerpo.

En la práctica, cuando queremos ver si $U \subset V$ es un sev, lo primero que tenemos que chequear es si $\overline{0} \in U$. En muchos casos con este simple hecho descartamos la posibilidad de que lo sea. Si resulta verdadero, **debemos** chequear los 10 axiomas. O no tanto, en realidad algunos menos, como veremos en la siguiente caracterización.

Proposición 2 *Sea V un F-ev. Sea $U \subset V$. Tenemos que $U \subset V$ sev sii se satisfacen:*

Agregar que U o queel v

1. *la suma es cerrada en U: $u + v \in U$ para todo $u, v \in U$,*
2. *el producto por escalar es cerrado en U: $\alpha u \in U$ para todo $\alpha \in F$ y $u \in U$.*

Demostración: EJERCICIO.

Ejemplos 3 *Dejamos como EJERCICIO probar todos los ejemplos.*

1. *V F-ev. Los subespacios triviales o impropio son V y $\{\overline{0}\}$.*

   $\emptyset$ no es un sev de V.

   Si $\{\overline{0}\} \subsetneq U \subsetneq V$ sev se dice no trivial o propio.
2. *El plano xy es un sev de $\mathbb{R}^3$*
3. *Si $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ es un subcuerpo,*

   $$U_b = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\},$$

   ¿para qué valores de $b \in \mathbb{F}$ se tiene que $U_b \subset \mathbb{C}^4$ sev?
4. *$C([0,1]) \subset \mathbb{F}^{[0,1]}$ sev.*
5. *$D(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sev (las funciones diferenciables).*
6. *$U_b = \{f : (0,3) \to \mathbb{R} :$ diferenciable y $f'(2) = b\} \subset \mathbb{R}^{(0,3)}$ sev sii $b \in \{....\}$.*
7. *$U = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty} : \lim_{j \to \infty} x_j = 0\} \subset \mathbb{C}^{\infty}$ sev.*
8. *¿Cuáles son todos los sev de $\mathbb{R}^2$? Los triviales: $\{\overline{0}\}$ y $\mathbb{R}^2$ y las rectas por el origen. Son los únicos, pero esto es más difícil de probar, lo veremos más adelante.*
9. *¿Cuáles son todos los sev de $\mathbb{R}^3$? Los triviales: $\{\overline{0}\}$ y $\mathbb{R}^3$ y las rectas y planos por el origen.*

Desafío 3 *En el último ejemplo, recordemos que una recta puede expresarse como intersección de dos planos. Pensar: ¿Ocurre en general que intersección de sev es sev? ¿Qué ocurre con la unión de sev? Ayuda: considerar la unión del eje x y del eje y.*

Spoiler: en el práctico se verá que en todo ev (no sólo en $\mathbb{R}^3$) la intersección de sev es, efectivamente un sev; que la unión de sev en general no es sev (la ayuda ya nos daba una pauta). Pero sí podremos definir un sev a partir de la unión: la suma de sev. De esto se trata la siguiente sección.

4. Suma de sev

En esta sección estudiaremos un concepto muy importante que utilizaremos a lo largo de toda la asignatura y que nos permitirá construír muchísimos ev y sev, proporcionándonos muchos ejemplos nuevos y sofisticados.

Nuevamente comenzaremos con ejemplos sencillos para empezar a entender qué queremos definir:

Ejemplos 4

1. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, $U = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $W = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$ el eje x y el eje y, respectivamente. Hemos visto que $U \cup W$ no es un sev, a pesar de que ambos son sev. Por otro lado, sabemos que $T = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, que es el plano xy, es un sev. ¿Cómo se relacionan los elementos del plano xy con los del eje x y el eje y? Bueno, es claro que todo elemento del plano es suma de un elemento del eje x y uno del eje y:*

   $$(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0).$$

   Y en este sentido podríamos escribir $U + W = T$. Consideremos ahora el sev $W' = \{(x, 2x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. ¿Podemos decir que todo elemento de T es suma de un elemento de U y uno de W'? Sí, en efecto, $(x, y, 0) = (x - y/2, 0, 0) + (y/2, y, 0)$. En este caso, también tiene sentido $U + W' = T$.

2. *Sea $V = \mathbb{R}_2[x]$. Sean $U_1 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, $U_2 = \{cx^2 : c \in \mathbb{R}\}$ y $U_3 = \{dx + dx^2 : d \in \mathbb{R}\}$. Tenemos que $U_1, U_2, U_3 \subset V$ sev (EJERCICIO!). Definimos $U = \{p = p_1 + p_2 + p_3 \in \mathbb{R}_2[x] : p_1 \in U_1, p_2 \in U_2, p_3 \in U_3\}$, es decir, el conjunto de todos los polinomios que se obtienen sumando un polinomio de cada espacio. Así, $U \subset V$ sev (EJERCICIO). ¿Qué más puede decir de U?.*

3. *En el primer ejemplo observemos que descompusimos cualquier vector del plano como suma de un vector en el eje x y un vector sobre el eje y, y esta elección de vectores es única: no podemos elegir otro par que resulte en el mismo vector del plano. En cambio, en el ejemplo de los polinomios, tenemos la siguiente situación: si denotamos por $o(x)$ al polinomio nulo, resulta*

$$o(x)_{\in U} = o(x)_{\in U_1} + o(x)_{\in U_2} + o(x)_{\in U_3},$$

es decir, lo escribimos como suma del polinomio nulo mirándolo en cada sev. Pero también tenemos que

$$o(x)_{\in U} = (1 \cdot x + 0)_{\in U_1} + (1 \cdot x^2)_{\in U_2} + (-x - x^2)_{\in U_3},$$

o sea, lo escribimos como suma de polinomios (al menos alguno de ellos no nulo) en cada sev. Esto nos dice que puede haber distintas formas de escribir a un mismo vector como suma de vectores de los sev.

La unicidad de escritura les sonará de otro concepto relacionado, pero no lo veremos hasta dentro de dos secciones. Por ahora lo tendremos en cuenta al hacer una distinción muy sutil entre definiciones: suma de sev y suma directa de sev. Antes de dar estas definiciones, hagamos un par de observaciones más:

En el primer ejemplo sumamos dos sev, y en el segundo sumamos tres. Haremos las definiciones para n cantidad de sev, PERO al ser conceptos difíciles **sugerimos fuertemente** escribirlas para $n = 2$ y para $n = 3$. Esto ayudará a reforzar los conceptos.

Definición 3 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$. Definimos el conjunto **suma** de $U_1, \dots, U_n$ como*

$$S = U_1 + \dots U_n := \{u_1 + \dots u_n \in V : u_i \in U_i \text{ para todo } i = 1, \dots, n\} \subset V.$$

Proposición 3 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$ sev. Si S es el conjunto suma de $U_1, \dots, U_n$, entonces $S \subset V$ sev. Más aún, es el sev de V más chico que contiene a $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$ en el sentido de que si $U \subset W \subset V$ sev entonces $S \subset W$.*

Demostración:

Desafío 4 *Intentar hacer la prueba.*

1. Veamos que $S \subset V$ sev. Para esto, sean $u = u_1 + \dots + u_n, w = w_1 + \dots + w_n \in S$, donde $u_i, w_i \in U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$, y sea $\alpha \in F$. Entonces:

   a) $u + w = (u_1 + \dots + u_n) + (w_1 + \dots + w_n) = (u_1 + w_1) + \dots + (u_n + w_n) \in S$, puesto que cada U_i es sev con lo cual $u_i + w_i \in U_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

   b) $\alpha u = \alpha \cdot (u_1 + \dots + u_n) = (\alpha \cdot u_1 + \dots + \alpha \cdot u_n) \in S$, por la misma razón.

   Por la caracterización de sev, sigue que $S \subset V$ sev.

2. Sea $U \subset W \subset V$ sev. Veamos que $S \subset W$. En efecto, si $u = u_1 + \dots + u_n \in S$ con $u_i \in U_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$ tenemos que $u_i \in U_i \subset U \subset W$ para todo $i = 1, \cdot, n$. Luego $S \subset W$.

Observaciones 2 *Bajo las hipótesis de la proposición anterior,*

1. *cada $U_i \subset S$ sev, $i = 1, \dots, n$;*
2. *$U \subset S$, aunque no necesariamente U es un sev;*
3. *si $U = S$ entonces U es un sev.*

Definición 4 *Sea V un F-ev y sean $U_1, \dots U_n \subset V$ sev. Decimos que el sev suma $S = U_1 + \dots U_n$ es **suma directa** si para cada vector $u \in S$ existen únicos $u_1 \in U_1 \dots u_n \in U_n$ tales que $u = u_1 + \dots + u_n$. En tal caso, denotamos*

$$S = U_1 \oplus \dots \oplus U_n.$$

Ejemplos 5 *1. Sea $V = \mathbb{C}^{3\times 3}$. Sean los conjuntos:*

$$\begin{aligned}
T_s &= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \textit{ triangular superior}\}\\
&= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij}=0 \quad \forall i<j\},\\
T_{se} &= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \textit{ triangular superior estricta}\}\\
&= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij}=0 \quad \forall i\le j\},\\
T_i &= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \textit{ triangular inferior}\}\\
&= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij}=0 \quad \forall i>j\},\\
T_{ie} &= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \textit{ triangular inferior estricta}\}\\
&= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij}=0 \quad \forall i\ge j\},\\
D &= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \textit{ diagonal}\}\\
&= \{A=(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{3\times 3} : a_{ij}=0 \quad \forall i\ne j\}.
\end{aligned}$$

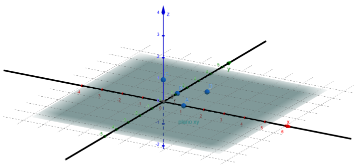
Cada uno de estos conjuntos es un sev de V (EJERCICIO). Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^{3\times 3} &= T_{se} \oplus D \oplus T_{ie},\\
\mathbb{C}^{3\times 3} &= T_s + T_i.
\end{aligned}$$

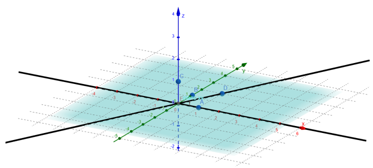
Además ***no es cierto que*** *$\mathbb{C}^{3\times 3} = T_s \oplus T_i$.*

2. Las siguientes gráficas de $\mathbb{R}^3$ y subespacios representan distintas sumas y sumas directas:

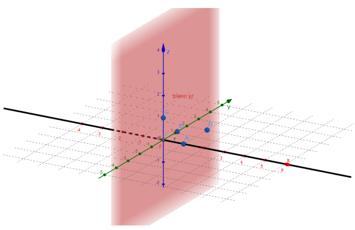
a) *En esta gráfica vemos pl xy = eje $x \oplus$ eje y:*



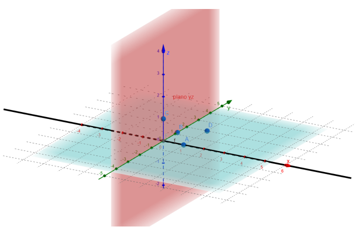
b) *En esta gráfica vemos pl xy = eje $x \oplus r$:*



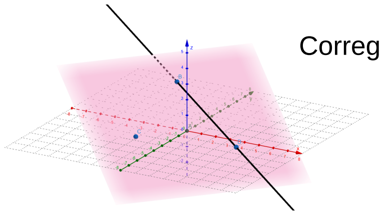
c) *En esta gráfica vemos $\mathbb{R}^3$ = eje $x \oplus$ pl yz:*



d) *En esta gráfica vemos $\mathbb{R}^3$ = pl xy + pl yz:*

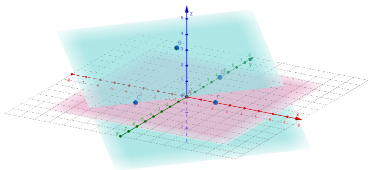


e) *En esta gráfica vemos* $\mathbb{R}^3 = r \oplus \pi$.

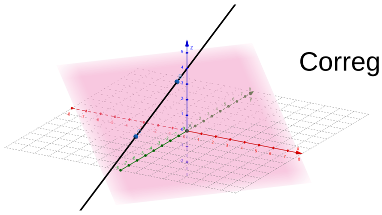


Corregir esta gráfica para que pase por el origen

f) *En esta gráfica vemos* $\mathbb{R}^3 = pl\ xy + \pi$.



g) *En esta gráfica vemos* $\pi = r + \pi$.



Corregir esta gráfica para que pase por el origen

Desafío 5 *Conjeturar acerca de las diferencia entre los casos c y d, o entre los casos e, f y g del ejemplo anterior.*

La suma directa es una suma, pero no necesariamente un espacio suma es suma directa. Esta diferencia, como seguramente han conjeturado, se debe a la unicidad de escritura: ésta obliga a que los sev que sumamos tengan intersección trivial (no disjunta, trivial). Esto caracteriza la suma directa, como veremos en la siguiente proposición:

Proposición 4 *Sea V un F-ev y sean $U, W \subset V$ sev. Consideremos el subespacio suma $S = U + W$. Tenemos que $S = U \oplus W$ sii $U \cap W = \{\overline{0}\}$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) $S = U \oplus W$, sea $u \in U \cap W$. Como $\overline{0} = u + (-u) = -u + u$ y la escritura es única, debe ser $u = -u$, luego $u = \overline{0}$.

$\Leftarrow$) Tenemos que si $v = u + w = u' + w' \in S$ con $u, u' \in U$ y $w, w' \in W$. Luego $\overline{0} = u - u' + w - w' \in U \cap W$, de modo que $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{\overline{0}\}$. Esto nos dice que $u = u'$ y $w = w'$, de modo que la escritura es única.

$\square$

Ejemplo 1 *Volviendo al ejemplo de los polinomios, tenemos que U_1, U_2, U_3 no se suman de manera directa, aunque si es cierto que $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \{\overline{0}\}$. Esto no contradice la proposición anterior y nos da una pauta de cómo generalizar a una suma de más términos.*

Un poco más generalmente,

Proposición 5 *Sean V un F-ev, ,$U_1, \dots U_n \subset V$ sev y $S = U_1 + \cdots + U_n$. Entonces S es suma directa sii el vector $\overline{0}$ sólo se puede obtener sumando el elemento trivial de cada sev $U_1, \dots, U_n$.*

Demostración: Cambiar por "..."

$\Rightarrow$) $S = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Si $\overline{0} = u_1 + \oplus + u_n \in S$, por unicidad de escritura debe ser cada $u_i = \overline{0}$, $i = 1, \dots, n$. Cambiar por "..."

$\Leftarrow$) Sea $u = u_1 + \oplus + u_n = v_1 + \cdots + v_n \in S$ con $u_i, v_i \in U_i$, $i = 1, \dots, n$. Entonces $\overline{0} = (u_1 - v_1) + \cdots + (u_n - v_n)$ y por hipótesis debe ser $u_i = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Luego la suma es directa.

$\square$

Ejercicio 4 *Escribir las definiciones de suma y suma directa para* $n = 2$ *y para* $n = 3$.

5. Conjunto generador

Motivadxs por las propiedades de $\mathbb{F}^n$, nuestro próximo objetivo es claro: queremos caracterizar un ev V completo con *poquitos vectores*. Para esto, mudaremos las ideas a un ev abstracto.

Definición 5 *V F-ev. $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

Una ***combinación lineal*** *(cl) de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ es un vector de la forma*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.

Very Important 1 *Las cl de vectores de un ev SIEMPRE constan de una cantidad* ***finita*** *de términos. No definimos cl infinitas, pues precisaríamos de una noción de convergencia. El Análisis Funcional se ocupará de estas cuestiones, por ahora baby steps.*

Definición 6 *Sean V F-ev y $\emptyset \subsetneq S \subset V$. El* ***conjunto generado por*** *S o* ***span*** *de S es el conjunto de todas las cl posibles de elementos de S: span(S):*

$$\operatorname{span}(S) := \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : v_1, \ldots, v_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F, n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $S = \emptyset$ definimos $\operatorname{span}(S) := \{\overline{0}\}$.

Notación: Trataremos de utilizar $\operatorname{span}(S)$, pero pueden aparecer: $\operatorname{cl}(S)$, $\langle S \rangle$, $\operatorname{linspan}(S)$, etc.

Observaciones 3 *No perder de vista que las cl que forman la cápsula lineal son FINITAS, como dijimos antes.*

Proposición 6 *Sean V un F-ev y $S \subset V$. Entonces* $\operatorname{span}(S) \subset V$ *sev.*

Demostración

Usamos caracterización de subespacios.

$\alpha, \beta \in F$, $u, v \in \operatorname{span}(S)$. Veamos que $\alpha u + \beta v \in \operatorname{span}(S)$. En efecto:

- $u \in \operatorname{span}(S) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$.

- $v \in \operatorname{span}(S) \Rightarrow \exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in F$ tales que $v = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m$ con $w_i \in S$.

Luego

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m) \\ &= \alpha\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 w_1 + \cdots + \beta\beta_n w_m \in \operatorname{span}(S),\end{aligned}$$

pues es una cl de elementos de S.

$\square$

A partir de la proposición anterior, llamaremos al $\operatorname{span}(S)$ el **subespacio generado por S**.

Observaciones 4 *Sean V un F-ev y $S \subset V$. Entonces $S \subset$* $\operatorname{span}(S)$.

En efecto, cada $u \in S$ tenemos $u = 1 \cdot u$, que es una cl de elementos de S, luego está en $\operatorname{span}(S)$.

Ejercicio 5 *Sean V un F-ev y $S, T \subset V$. Si $S \subset T$ entonces* $\operatorname{span}(S) \subset \operatorname{span}(T)$.

El sev generado por un conjunto S es el menor subespacio que contiene a S, esto significa que si $U \subset V$ sev tal que $U \supset S$ entonces $\operatorname{span}(S) \subset U$. Más aún, es la intersección de todos los sev que lo contienen. En efecto:

Proposición 7 *Sean V un F-ev y $S \subset V$. Entonces* $\operatorname{span}(S) = \bigcap\{U \subset V : U$ *sev y* $S \subset U\}$.

Demostración

Llamemos $\mathcal{F} = \{U \subset V : U \text{ sev y } S \subset U\}$ a la familia de sev que contienen a S. Queremos ver que $\text{span}(S) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$.

$\subset$) Veamos que $\text{span}(S) \subset U$ para todo $U \in \mathcal{F}$.

Sea $U \in \mathcal{F}$. Entonces $S \subset U$. Sea $u \in \text{span}(S) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$, luego $v_i \in U$, y como $U \subset V$ sev, sigue que $u \in U$.

$\supset$) $\text{span}(S) \in \mathcal{F}$ (por qué???) Luego la intersección de $\text{span}(S)$ con el resto de los sev de la familia $\mathcal{F}$ está contenida en $\text{span}(S)$.

$\square$

Ejercicio 6 *Probar el siguiente corolario.*

Corolario 1 *$S \subset V$ sev sii $S = \text{span}(S)$.*

Definición 7 *Sean V F-ev y $S \subset V$. Si $\text{span}(S) = V$ decimos que S **genera a** V, o que V **es generado por** S o que S **es un subconjunto generador de** V o que S **es un sistema generador de** V.*

*Si existe un conjunto generador de V que es finito, decimos que V es **finitamente generado**. Si no existe tal S decimos que es V **es infinito dimensional**.*

Very Important 2 *RECORDAR: los ejemplos que veamos deberán completarse como ejercicio.*

Ejemplos 6

1. *Base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\{i, j, k\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.*
2. *$\{1, x, x^2\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{C}_2[x]$ como $\mathbb{C}$-ev.*
3. *$\mathbb{C}[x]$ es infinito dimensional: ningún conjunto finito de elementos puede generarlo - ¿por qué?*
4. *Recuerdos de AyGII: El conjunto solución del sistema $AX = 0$ donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   está generado por $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, -4, 1, 0)\}$.

6. Independencia lineal

Nuevamente, recordando la definición de li que vimos en $\mathbb{F}^n$ queremos replicar estas ideas a un ev abstracto V.

Definición 8 *Sean V F-ev y $S \subset V$.*

- *Si S es finito, digamos $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, decimos que S es **linealmente independiente** (li) si la única cl de elementos de S que resulta en el vector nulo es la trivial.*

  En símbolos: si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overline{0}$ p.a. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
- *Si $S = \emptyset$ DECRETAMOS que S sea li.*
- *Si S es un conjunto infinito, decimos que es li si todo subconjunto finito de S es li.*
- *Si S no es li decimos que S es **linealmente dependiente** (ld).*

Ejercicio 7 *Probar la siguiente Proposición:*

Proposición 8 *Sean V F-ev y $S \subset V$.*

1. *S es ld sii $\exists v_1, \ldots, v_m \in S$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ no todos nulos tq $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overline{0}$.*
2. *$\overline{0} \in S \Rightarrow S$ ld.*
3. *S ld entonces todo $T \supset S$ es ld.*
4. *S li entonces todo $T \subset S$ es li.*
5. *$v \in V$, $\{v\}$ ld sii $v = \overline{0}$.*
6. *$u, v \in V$, $\{u, v\}$ ld sii $\exists \lambda \in F$ tq $u = \lambda v$.*
7. *S ld sii $\exists$ un vector en S que es cl de los demás.*

Ejemplos 7 1. *Los vectores i, j, k son li en $\mathbb{R}^3$.*

2. *El conjunto $\{x^2, x^4, x^6, x^8\}$ es li en $\mathbb{R}[x]$.*
3. *El conjunto $\{\sin x, \cos x\}$ es li en $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$.*

7. Bases y dimensión

Ya estamos en condiciones de dar la definición de *base*. Para hablar de *dimensión* necesitamos más trabajo.

Definición 9 *Sea V un F-ev. Una **base** de V es un conjunto generador li.*

*V se dice que es **finito dimensional** si tiene una base finita.*

Observaciones 5 1. *V finito dimensional no nos dice qué es lo que entendemos por dimensión ni cómo la definimos.*

2. *No hay unicidad para las bases de un ev. Cuando veamos que en el caso finito dimensional todas tienen igual cardinal podremos definir dimensión.*

Ejemplo 2 *BASES CANÓNICAS DE LOS ESPACIOS USUALES*

1. *$\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$.*
2. *$\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots n\}$.*
3. *$\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, es infinito dimensional.*
4. *$\mathbb{F}^{m\times n}$, $B = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$.*

La clave para poder dar una buena definición de base viene dada en la siguiente proposición, que dice que en un ev, dados un conjunto generador S y un conjunto li T siempre tenemos que $|T| \leq |S|$.

Proposición 9 *Sea V un F-ev. Si V está generado por un conjunto S de cardinal finito n, entonces todo conjunto T de vectores li de V es finito y más aún, si su cardinal es m, entonces $m \leq n$.*

Demostración

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tq $\mathrm{span}(S) = V$ y sea $T \subset V$ li.

Supongamos primero que T es finito, digamos $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Tenemos que T es li por hipótesis y queremos probar que debe ser $m \leq n$.

Como $\mathrm{span}(S) = V$, todo vector de T se escribe como cl de los elementos de S:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11} v_1 + \alpha_{12} v_2 + \cdots + \alpha_{1n} v_n \\ u_2 &= \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2 + \cdots + \alpha_{2n} v_n \\ &\vdots \\ u_m &= \alpha_{m1} v_1 + \alpha_{m2} v_2 + \cdots + \alpha_{mn} v_n \end{aligned}$$

Llamemos $A = (\alpha_{ij})$ a la matriz en $F^{m\times n}$ de coeficientes de las expresiones anteriores.

Consideremos el sistema homogéneo $A^t X = 0$ (observar que tomamos la traspuesta de A), luego X es el vector de m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ y el sistema consta de n ecuaciones y m incógnitas:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Sea $(\beta_1, \ldots, \beta_m)^t$ una solución del sistema (que sabemos que siempre existe, porqué?), y veamos que debe ser la trivial, es decir, que el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Para esto, planteamos la cl de vectores de T y la reescribimos como cl de elementos de S:

$$\begin{aligned} \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_m u_m &= \beta_1(\alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{1n} v_n) + \cdots + \beta_m(\alpha_{m1} v_1 + \cdots + \alpha_{mn} v_n) \\ &= \beta_1 \alpha_{11} v_1 + + \cdots + \beta_1 \alpha_{1n} v_n + \cdots + \beta_m \alpha_{m1} v_1 + \cdots + \beta_m \alpha_{mn} v_n \\ &= (\beta_1 \alpha_{11} + \cdots + \beta_m \alpha_{m1}) v_1 + \cdots + (\beta_1 \alpha_{1n} \cdots + \beta_m \alpha_{mn}) v_n, \end{aligned}$$

y puesto que $(\beta_1, \ldots, \beta_m)^t$ es una solución de $A^T X = 0$, tenemos que cada coeficiente de la cl resultante debe ser 0. Entonces la cl de elementos de T resultantes es igual al vector nulo, luego cada coeficiente $\beta_i = 0$. Es decir, la solución del sistema es la trivial, y no puede haber otra. Sigue que no hay variables libres, y como tiene n filas y m columnas, debe ser $m \leq n$.

Finalmente, supongamos que T es infinito, y consideremos un subconjunto U de T de n vectores. Tal conjunto es li por definición. Si agregamos un elemento de T, digamos u_{n+1}, tenemos un subconjunto $U' = U \cup \{u_{n+1}\}$ de T de $n+1$ vectores. Esto contradice lo que probamos anteriormente, luego T no puede ser infinito.

□

Corolario 2 *Sea V un F-ev finito dimensional. Entonces todas sus bases tienen igual cantidad de elementos.*

Demostración Si B_1, B_2 bases de V de cardinales n_1, n_2 respectivamente, entonces:

- como B_1 genera y B_2 li, debe ser $n_2 \leq n_1$,

- como B_2 genera y B_1 li, debe ser $n_1 \leq n_2$.

Así, $n_1 = n_2$.

□

Definición 10 *Sea V un F-ev finito dimensional. La* ***dimensión de V sobre F*** *es la cantidad de elementos de sus bases. Denotamos $\dim_F V$. Definimos además la dimensión del espacio trivial como $\dim_F\{\overline{0}\} = 0$.*

Notación: A veces sobreentendemos el cuerpo y simplemente escribimos $\dim V$ o $\dim(V)$.

Ejercicio 8 *Probar el siguiente Corolario de la Proposición anterior:*

Corolario 3 *Sea V un F-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Entonces:*

- *Si $S \subset V$ y $|S| > n$ entonces S es ld.*
- *Si $S \subset V$ y $|S| < n$ entonces S no genera V.*

La gracia de las bases es que nos provee unicidad de escritura, y más aún, esta propiedad de unicidad de escritura *caracteriza* a las bases. Ya hemos hablado de unicidad de escritura asociado a otro concepto, veremos en algún momento cómo se relacionan estas nociones.

Proposición 10 *Sea V un F-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.*

B es base de V sii pc $v \in V$ $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Falta el más

Demostración:

$\Rightarrow$) Como $\operatorname{span}(B) = V$, existen tales escalares. Como B li, son únicos. En efecto, si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ y $\beta_1, \dots, \beta_n \in F$ tq

$$
\begin{aligned}
v =& \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n \text{ y} \\
v =& \beta_1 v_1 + \dots \beta_n v_n, \text{ entonces restando ambas expresiones obtenemos} \\
\overline{0} =& (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \dots (\alpha_n - \beta_n) v_n,
\end{aligned}
$$

y puesto que B es li, cada coeficiente debe ser 0, luego $\alpha_i = \beta_i$.

$\Leftarrow$) Puesto que, por hipótesis todo vector de V es cl de elementos de B, B genera V. La unicidad de escritura se da en particular para $\overline{0}$, luego tenemos que B debe ser li.

□

Very Important 3 *La siguiente proposición nos dice que en un ev finito dimensional:*

- *todo conjunto generador se puede reducir a una base, y*
- *todo conjunto li se puede extender a una base.*

Proposición 11 *Sea V un F-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Sea $S = \{v_1, \dots, v_s\} \subset V$.*

1. *Si S genera V entonces existe $B \subset S$ tal que B es base de V.*
2. *Si S es li entonces existe $T = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V.*

Demostración

1. Si S es li, no puede tener más elementos que la dimensión de V, es decir, $s \leq n$. Como además S genera a V, es una base. Así, $s = n$ y eligiendo $B = S$ tenemos una base de V.

   Si S no es li, como además S genera a V, debe ser $s > n$, luego existe $v \in S$ tq $v \in \operatorname{span}(S \backslash \{v\})$ y más aún, $\operatorname{span}(S \backslash \{v\}) = \operatorname{span}(S) = V$ (porqué? ver los ejercicios del práctico).

   Ahora bien, si $S \backslash \{v\}$ es li, $B = S \backslash \{v\}$ es base. Si no es li, procedemos inductivamente.

   El proceso se detiene pues no puede existir un conjunto generador con menos de n elementos.

2. Si S genera V, tiene al menos tantos elementos como V, es decir, $s \geq n$. Como además S es li, es una base. Así, $s = n$ y eligiendo $B = S$ tenemos una base de V.

   Si S no genera V, como además S es li, debe ser $s < n$. Sea B una base cualquiera de V, luego existe $v \in B$ tq $v \notin \operatorname{span}(S)$. Entonces $S \cup \{v\}$ es li.

   Ahora bien, si $B = S \cup \{v\}$ genera V, B es base. Si no genera, procedemos inductivamente.

   El proceso se detiene al completar un conjunto li de n elementos.

□

Como corolario obtenemos algo que a priori parece trivial: todo ev finito dimensional tiene base. Para ev's infinito dimensionales esto también es cierto y es difícil de probar. Y para estructuras más abstractas (como por ejemplo los llamados *módulos* sobre un anillo), es muchísimo más difícil de probar, incluso la noción de base es difícil de definir. La importancia entonces radica en entender que el hecho de que el ev sea finito dimensional nos permite caracterizar completamente un espacio a partir de su base, y esto no siempre es fácil de probar.

Corolario 4 *Sea V un F-ev con $\dim_F V = n$. Entonces tiene base.*

El próximo corolario también es importante. Tener una *descomposición* de un ev en «partecitas» no es trivial, y sirve para estudiar por separado cada partecita para entender como funciona el todo. A lo largo de la carrera verán infinidad de descomposiciones de todos los objetos que se les ocurran.

Es importante poder descomponer pero también poder volver a «unir». Aquí observamos cómo se relacionan los conceptos que involucran unicidad de escritura.

Corolario 5 *Sea V un F-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. $U \subset V$ sev. Entonces $\dim_F U \leq n$ y existe $W \subset V$ sev tq $V = U \oplus W$.*

Demostración: Si $\dim_F U > n$ y S es una base de U, entonces S es li y su cardinal es mayor a n. Esto no puede ser (porqué?). Luego $\dim_F U \leq n$.

Sea entonces $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y por la proposición sabemos que existe $T = \{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V. Sea entonces $W = \text{span}(T)$. Veamos que W es el complemento buscado, vd, que $V = U \oplus W$. Para esto usamos la caracterización de suma directa (ver práctico). Bastará con probar que $V = U + W$ y que $U \cap W = \{\overline{0}\}$.

Veamos que $V = U + W$. Para esto necesitamos probar que todo $v \in V$ puede escribirse como suma de un elemento de U y uno de W. En efecto, dado $v \in V$ al ser B base, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde observamos que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in U$ y $w = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in W$ y $v = u + w$.

Finalmente, sea $v \in U \cap W$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ y $v = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde sigue que

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m - \alpha_{m+1} v_{m+1} - \cdots - \alpha_n v_n.$$

Luego cada $\alpha_i = 0$ (por qué?), luego $v = \overline{0}$.

$\square$

Recordar que a veces, cuando el cuerpo se sobreentiende, podemos prescindir del subíndice $_F$ en el símbolo para la dimensión: $\dim_F V = dimV$.

Estamos en condiciones de probar algo más general para sumas (no necesariamente directas), y la prueba es muy linda!

Teorema 1 *Sea V un F-ev y $U_1, U_2 \subset V$ sev finito dimensionales. Entonces*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Demostración Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U_1 \cap U_2$.

- Completamos S a una base de U_1: $T_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$.

- Completamos S a una base de U_2: $T_2 = \{w_1, \ldots, w_s\}$.

Así,

- $\dim U_1 = m + r$.

- $\dim U_2 = m + s$.

Veamos que $B = S \cup T_1 \cup T_2$ es base de $U_1 + U_2$.

Tenemos en primer lugar que $U_1 \subset \text{span}(B)$ y $U_2 \subset \text{span}(B)$, luego $U_1 + U_2 = \text{span}(B)$ (por qué?). Veamos que es li. Para esto, planteamos:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = \overline{0},$$

donde $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in \text{span}(S)$, $b = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \in \text{span}(T_1) \subset U_1$ y $c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s \in \text{span}(T_2) \subset U_2$. Luego, $c = -a - b \in U_1 \cap U_2$ (por qué?). Entonces, existen $d_1, \ldots, d_m \in S$ tq $c = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m$. Así,

Cambiar las d por param

$$c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m,$$

de donde $\overline{0} = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s - d_1 v_1 - \cdots - d_m v_m$, esto es, una cl de elementos de $S \cup T_2$ que es base de U_2 y por lo tanto li. Como está igualada al vector nulo, resulta que $c_i = d_i = 0$. Sigue entonces que $a_i = b_i = 0$ (por qué?). Así, B es base del espacio suma $U_1 + U_2$.

reemplazar por _i

reemplazar por _i y _i

Finalmente,

$$\dim(U_1 + U_2) = m + r + s = m + r + m + s - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

$\square$

Ejemplo 3 *DIMENSIONES DE LOS ESPACIOS USUALES:*

1. $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}$, $\dim \mathbb{F}^n = n$.
2. $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots n\}$, $\dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$.
3. $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, *es infinito dimensional.*
4. $\mathbb{F}^{m \times n}$, $B = \{E_{ij}\}$, $\dim \mathbb{F}^{m \times n} = mn$.