PRÁCTICA 5 - Teoría de Conjuntos

1. Escribir los siguientes conjuntos por extensión.

   a) $\{1 + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.
   b) $\{y/y = t^2, t \in \mathbb{N}, t \leq 5\}$
   c) $\{n^3 + n^2 : n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}\}$
   d) $\{1/(n^2 + n) : n \in \mathbb{N},\ n$ impar $, n \leq 11\}$
   e) $\{n \in \mathbb{N}, / -4 \leq n \leq 8, n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$
   f) $\{u \in \mathbb{Z}/0 \leq u \leq 9, u + 1 < 7\}$
   g) $\{n + 1/n : n \in \{1, 2, 3, 5, 7\}\}$
   h) $\{z \in \mathbb{R}/\sqrt{z} \in \mathbb{N}, z^2 \leq 25\}$

   Además, observar si hay relaciones entre los mismos. ¿Qué se deduce en cuanto a la forma de definir un conjunto? Intentar otras formas de definir los conjuntos de (a), (b) y (c).

2. Escribir los siguientes conjuntos por comprensión usando lenguaje simbólico:

   a) El conjunto de los números racionales positivos cuyos denominadores son mayores que los numeradores.
   b) El conjunto de los divisores de 20.
   c) El conjunto de los números pares múltiplos de 3.
   d) El conjunto de los números reales cuyas raíces cuadradas son menores a 1.
   e) $\{3\}$

3. Indicar en cada caso cuáles afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando la respuesta.

   a) $A = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, -4\}$

   1) $-4 \in \mathbb{N}$
   2) $-4 \in \mathbb{Z}$
   3) $-4 \in A$
   4) $\mathbb{Z} \in A$
   5) $\mathbb{N} \in A$
   6) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$
   7) $6 \in \mathbb{N}$
   8) $6 \in \mathbb{Z}$
   9) $6 \in A$
   10) $-8 \in \mathbb{N}$
   11) $-8 \in \mathbb{Z}$
   12) $8 \in A$

   b) $B = \{1, 2, 3, 4, \{5\}\}$

   1) $2 \in \{1, 2\}$
   2) $2 \in B$
   3) $\{1, 2\} \in B$
   4) $3 \in B$
   5) $1 \notin B$
   6) $5 \in B$
   7) $4 \notin B$
   8) $5 \in \{5\}$
   9) $\{3, 4\} \in B$
   10) $\{3\} \in B$

4. Dar un ejemplo de tres conjuntos $W,\ , X\ , Y$ tales que $W \in X$, $X \in Y$ pero $W \notin Y$.¿Qué puede decirse de la afirmación $W \in X \wedge X \in Y \Rightarrow W \in Y$?

5. Dado $A = \{1, \{1\}, 2\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $\mathbb{N}$ es un universo para A.
   b) $1 \in A$.
   c) $\{1\} \in A$.
   d) $\{1\} \subseteq A$.
   e) $\{\{1\}\} \subset A$.
   f) $\{2\} \in A$.
   g) $\{2\} \subseteq A$.
   h) $\{\{2\}\} \subseteq A$.
   i) $\{\{1, 2\}\} \subset A$.

6. Dados $V = \{a, b\}$, $X = \{d, b\}$, $Z = \{a, d, e\}$, $W = \{a, b, d, e\}$ y $Y = \{d, e\}$, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $V \subset W$
   b) $Y \nsubseteq V$
   c) $V \subset Z$
   d) $Y \subseteq W$
   e) $Y \not\supseteq X$
   f) $Z \supset Y$
   g) $Y \supseteq W$
   h) $V \nsubseteq Z$
   i) $X \subseteq W$
   j) $X \subseteq Z$

7. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas, justificando la respuesta.

   a) $\emptyset \in \emptyset$.
   b) $\emptyset \subset \emptyset$.
   c) $\emptyset \subseteq \emptyset$.
   d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
   e) $\emptyset \subset \{\emptyset\}$.
   f) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$.

8. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles falsas, justificando adecuadamente la respuesta.

   a) $E \subseteq C \subseteq A$
   b) $A \subseteq C \subseteq E$
   c) $B \subseteq D$
   d) $D \subseteq B$
   e) $D \subseteq A$

9. Para los conjuntos $A, B, C \subseteq U$ demostrar la verdad o falsedad (con un contraejemplo) de lo siguiente: Si $A \subseteq B$ y $B \nsubseteq C$, entonces $A \nsubseteq C$.

10. En cada caso, analizar si los conjuntos dados son iguales.

    a) $\{5, 6, 7\}$ y $\{5, \{6\}, 7\}$
    b) $\{n \in \mathbb{N} / n \text{ es par}\}$ y $\{n \in \mathbb{N} / n = p + q,\ p, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ impares}\}$
    c) $\{2, 5\}$ y $\{\{2, 5\}\}$

11. Sean A, B y C conjuntos. Demostrar que:

    a) Si $A \subset B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.
    b) Si $A \subseteq B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.

12. Dar ejemplos de conjuntos que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:

    a) $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, $D \subseteq C$, $A \nsubseteq D$
    b) $A \subseteq B$, $B \in C$, $C \subseteq D$
    c) $A \in B$, $B \nsubseteq C$, $A \in C$
    d) $A \in B$, $B \nsubseteq C$, $A \notin C$

13. Dado $E = \{1, \{2\}, \{3, 4\}, 5, \{6, 7\}\}$ decir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando la respuesta.

    a) $1 \in E$
    b) $\{2\} \in E$
    c) $\{1\} \in P(E)$
    d) $\{1\} \subseteq P(E)$
    e) $\{5\} \subset E$
    f) $\{3, 4\} \in P(E)$
    g) $\{6, 7\} \subseteq E$
    h) $\{6, 7\} \subseteq P(E)$
    i) $\exists x \in E / \{x\} \in E$
    j) $\forall x \in E, \{x\} \notin P(E)$
    k) $\exists x \in E / \{x\} \nsubseteq E$
    l) $\exists x \in E / \{x\} \nsubseteq P(E)$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

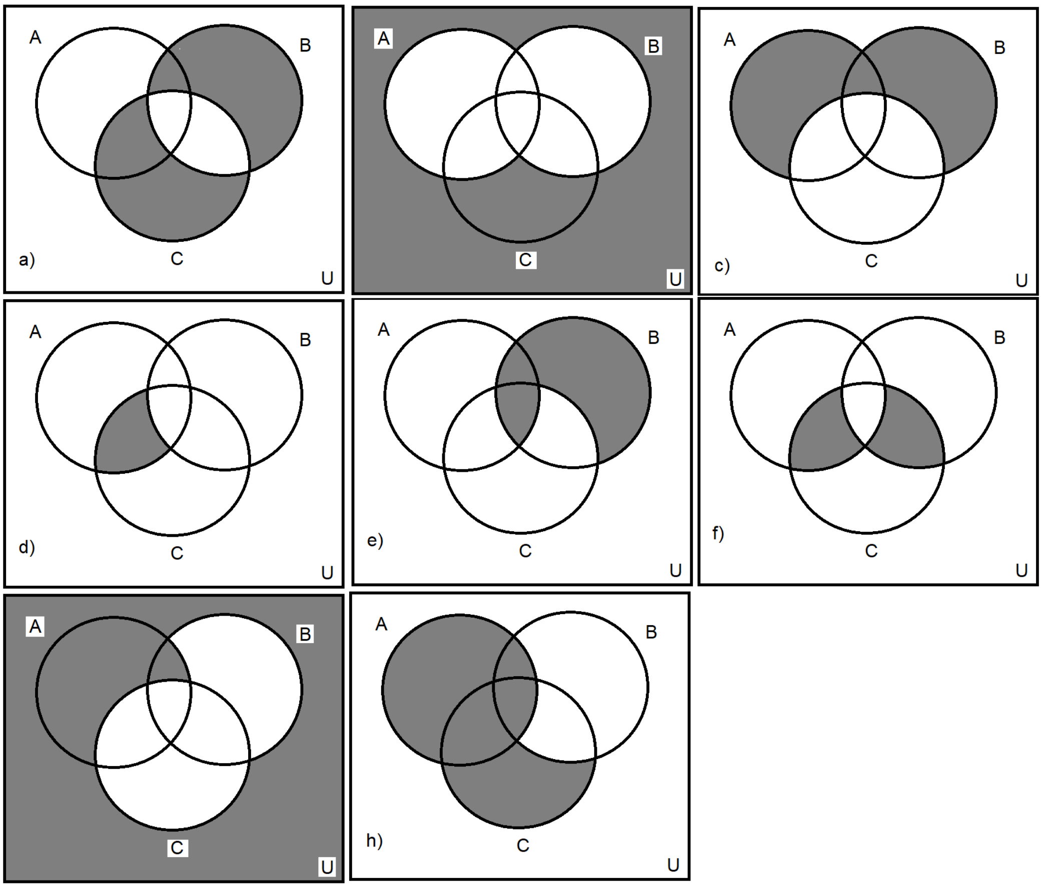
14. Sean $A, B, C, D, E \subset \mathbb{Z}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{4n : n \in \mathbb{Z}\}$, $D = \{6n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $E = \{8n : n \in \mathbb{Z}\}$. Determinar cada uno de los siguientes conjuntos:

    a) $C \cap E$
    b) $B \cup D$
    c) $A \cap B$
    d) $B \cap D$
    e) $\overline{A}$
    f) $A \cap E$

15. Para $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Representar los conjuntos en un diagrama de Venn y determinar:

    a) $(A \cup B) \cap C$
    b) $A \cup (B \cap C)$
    c) $\overline{C} \cup \overline{D}$
    d) $\overline{C \cap D}$
    e) $(A \cup B) - C$
    f) $(A \cup (B - C))$
    g) $(B - C) - D$
    h) $B - (C - D)$
    i) $(A \cup B) - (C \cap D)$.

16. Escribir en forma simbólica los siguientes conjuntos representados mediantes los diagramas de Venn:



17. En una comisión de primer año en la FCEIA de 100 estudiantes se tiene que:

    32 aprobaron el primer parcial de análisis, 38 aprobaron el primer parcial de programación, 50 aprobaron el primer parcial de álgebra, 20 aprobaron el primer parcial de análisis y el de programación, 18 aprobaron el primer parcial de análisis y el de álgebra, 25 aprobaron el primer parcial de programación y el de álgebra, 15 aprobaron los tres parciales.

    ¿Cuántos estudiantes no aprobaron ninguna de las 3 materias? Recordarles que aún hay esperanzas, existen los recuperatorios!

18. Calcular cuantos números naturales menores o iguales a 1000 existen que no sean múltiplos ni de 3, ni de 5, ni de 7.

19. Construir, si es posible conjuntos A, B, C, D que cumplan las siguientes condiciones. En caso de no ser posible justifique por qué no lo es:

    a) $B \subsetneq A, \quad A \cap D \neq \emptyset, \quad C \cap D \neq \emptyset, \quad C \cap A = \emptyset, \quad B \cap D = \emptyset.$
    b) $A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset, \quad A \subseteq D, \quad D \cap C = \emptyset.$

20. Dados dos conjuntos A y B cualesquiera, demostrar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

    a) $A \subseteq B$
    b) $A \cup B = B$
    c) $A \cap B = A$.

21. Sea A un subconjunto del conjunto universal U. Demostrar las siguientes propiedades:

    a) $A \cup A = A$ *b*) $A \cap A = A$ *c*) $A \cap \emptyset = \emptyset$ *d*) $A \cup U = U$.

22. Determinar qué relación existe entre $P(A \cup B)$ con $P(A) \cup P(B)$ y entre $P(A \cap B)$ con $P(A) \cap P(B)$.

23. Dados dos conjuntos A y B se define la *diferencia simétrica* entre A y B al conjunto

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

    a) Dados los siguientes subconjuntos de números enteros:

$$A = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \geq 1\}, \quad B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| \leq 2\}, \quad C = \{z \in \mathbb{Z} : z = 3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

    determinar:

    1) $A \triangle B$
    2) $A \triangle C$
    3) $B \triangle C$
    4) $(A \cap B) \triangle C$
    5) $(\overline{A} \cap C) \triangle (B \cap C)$
    6) $A \triangle \overline{C}$

    b) Dados A y B subconjuntos de un conjunto universal U, demostrar las siguientes propiedades de la diferencia simétrica:

    1) $A \triangle B = B \triangle A$
    2) $A \triangle \emptyset = A$
    3) $A \triangle U = \overline{A}$

24. Demostrar las siguientes proposiciones, justificando en cada paso la propiedad de la teoría de conjuntos aplicada.

    a) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.
    b) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$.
    c) $\overline{A - B} = \overline{A} \cup B$.
    d) $\overline{\overline{(A \cup B) \cap \overline{C} \cup \overline{B}}} = B \cap C$.
    e) $\overline{A \triangle B} = \overline{A} \triangle B = A \triangle \overline{B}$.
    f) $(A \cap B) \cup [B \cap ((C \cap D) \cup (C \cap \overline{D}))] = B \cap (A \cup C)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

25. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n = \{n+1, n+2, n+3, \cdots\}$. Determinar:

    a) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{8} B_n$,
    b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{11} B_n$,
    c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,
    d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{m} B_n$, con $m \in \mathbb{N}$ fijo.

26. Sea $U = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = [-2n, 3n]$. Determinar:

    a) A_3
    b) A_4
    c) $A_3 - A_4$
    d) $A_3 \triangle A_4$
    e) $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$
    f) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$
    g) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$
    h) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

27. Dado un universo U y un conjunto de índices I, para cada $i \in I$ sea $B_i \subset U$. Demostrar que para cada $A \subseteq U$ se verifican:

    a) $\displaystyle A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I}(A \cap B_i)$
    b) $\displaystyle A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I}(A \cup B_i)$

28. Sea I un conjunto cualquiera de índices y $\{A_i\}_{i \in I} \subset U$ una familia de conjuntos. Probar que

    a) $A_j \subseteq B$ para cada $j \in I$ si y sólo si $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq B$
    b) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_j$ para cada $j \in I$
    c) $B \subseteq A_j$ para cada $j \in I$ si y sólo si $\displaystyle B \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$