PRÁCTICA 3 - Polinomios

1. Escribir las siguientes expresiones utilizando $\sum$ ó $+ ... +$ según corresponda:

   a) $\sum_{i=1}^{10} i$

   b) $\sum_{j=0}^{4} 2j$

   c) $\sum_{k=0}^{4} 4$

   d) $\sum_{k=1}^{3} a$ con $a \in \mathbb{C}$

   e) $\sum_{j=1}^{n} b$ con $b \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$

   f) $\sum_{i=0}^{5} a_i x^i$ con $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 0, \dots, 5$

   g) $3 + 6 + \cdots + 30 =$

   h) $a_0 + a_1 x + \cdots + a_6 x^6$ con $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 0, \dots, 6$

   i) $b_0 + b_1 y + \cdots + b_m y^m$ con $b_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 0, \dots, m$ y $m \in \mathbb{N}$

   ¿Qué propiedad se puede aplicar en los items $b)$ y $g)$?

2. Sean $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2i$, $Q(x) = x^2 + (2 - i)$ y $R(x) = x^7 + 5x^3 - ix^2 + 2x + 1 - i$. Hallar los polinomios indicados en cada caso:

   a) $P + Q$

   b) $P + Q - R$

   c) $P \cdot Q$

   d) $Q \cdot (P + 2R)$

   e) $2P \cdot (R - Q)$

3. En cada uno de los siguientes casos hallar el cociente y el resto de dividir el polinomio P por el polinomio Q. En los casos que sea posible aplicar la regla de Ruffini.

   a) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x^2 + 1 + i$

   b) $P(x) = 4x^3 + x^2$, $Q(x) = x + 1 + i$

   c) $P(x) = 3x^4 - x^2 + ix - 2$, $Q(x) = 5x - 4$

   d) $P(x) = 3x^6 - x^4 + ix^3 - 2x^2$, $Q(x) = 5x^3 - 4x^2$

4. Analizar porqué son iguales los resultados de los ejercicios 3c) y 3d).

5. Siendo $P(x) = x^4 - ix^3 - ix + 1 + i$, hallar $P(0)$, $P(1)$, $P(i)$, $P(-i)$, $P(i + 1)$, $P(5)$, $P(6)$ y $P(2 - i)$. Cuando resulte más conveniente, utilizar el Teorema del Resto.

6. Siendo $P(x) = kx^4 + kx^3 - 33x^2 + 17x - 10$, calcular $P(4)$ sabiendo que $P(5) = 0$.

7. Siendo $P(x) = 3x^{12} + x^9 - x^6 + 2x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 2$, determinar si los números 1, -1, i y $-i$ son raíces de P.

8. Dar en cada caso un polinomio P que cumpla con las condiciones pedidas, explicitando si es único o no.

   a) P tiene a 2 como raíz simple y a i como raíz triple.

b) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz triple y es de grado 4.

c) P tiene a 2 como raíz simple, a i como raíz triple, es de grado 4 y $P(1) = 3i$.

d) 0, 1, 2 y 4 son raíces de P y P es de grado 6.

e) 0, 1, 2 y 4 son raíces de P, P es de grado 5 y a coeficientes reales.

9. Encontrar la descomposición factorial de los siguientes polinomios. En los casos que existan raíces complejas, dar la descomposición en factores lineales exclusivamente y en factores lineales y cuadráticos a coeficientes reales.

   a) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$
   b) $P(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + 4$
   c) $P(x) = x^4 - \frac{29}{6}x^3 + \frac{17}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + \frac{5}{6}$.
   d) $P(x) = x^4 + \frac{14}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{5}x + \frac{3}{5}$.
   e) $P(x) = x^4 - \pi x^3 - x^2 + \pi x$.
   f) $P(x) = x^6 - 3x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 7x^2 - 3x - 4$.

10. Sea $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 + ax + a$. Determinar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $(1 + i)$ es raíz de P. Luego hallar las restantes raíces de P.

11. Hallar un polinomio P de grado mínimo con coeficientes complejos que verifique simultáneamente:

   a) las raíces de $Q(x) = x^3 + (1 - 2i)x^2 - (1 + 2i)x - 1$ son también raíces de P,
   b) P tiene grado impar,
   c) $P(1) = -5$.

12. Hallar un polinomio P de grado mínimo con coeficientes reales que verifique simultáneamente:

   a) las soluciones de $z^2 = 5\overline{z}$ son raíces de P,
   b) P tiene alguna raíz doble,
   c) $P(1) = 31$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119