Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2024

UNIDAD 3: Sistemas de Ecuaciones Lineales [1]

1 Introducción

El gran área del Álgebra Lineal se desarrolló a partir de los sistemas de ecuaciones lineales. En la Matemática moderna se considera al Álgebra Lineal como un área transversal a las demás: prácticamente no hay ningún área que no utilize Álgebra Lineal en su desarrollo.

Además de sus aplicaciones directas, los sistemas de ecuaciones lineales pueden utilizarse para aproximar las soluciones de sistemas no lineales. Es por eso que es de gran interés el cálculo numérico de soluciones, y por supuesto a tal respecto la ayuda computacional es invaluable.

Algunos ejemplos elementales de sistemas de ecuaciones ya han sido presentados en Álgebra y Geometría I cuando estudiamos las posiciones relativas entre dos rectas en el plano, por ejemplo

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases} \quad (S_1) \qquad \begin{cases} x+2y=1 \\ 2x+4y=2 \end{cases} \quad (S_2) \qquad y \qquad \begin{cases} x+2y=1, \\ x+2y=2. \end{cases} \quad (S_3).$$

El sistema (S_1) representa dos rectas que se intersectan en un punto, cuyas coordenadas son la única solución del sistema. El sistema (S_2) representa una única recta por lo que dicho sistema tiene infinitas soluciones y el sistema (S_3) no tiene solución, esto se traduce en que las rectas que lo conforman son paralelas no coincidentes.

Ejercicio 1.1. Realizar la gráfica de cada sistema y chequear que efectivamente las soluciones de cada uno son las mencionadas.

Definición 1.2. Una **ecuación lineal en n variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = y,$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ son los **coeficientes** de la ecuación e $y \in \mathbb{F}$ es el **término independiente** o **constante**.

Observación 1.3. Las ecuaciones lineales **no** involucran productos, raíces ni funciones trigonométricas de las variables.

Definición 1.4. Una **solución** de la ecuación es una $n-$upla de escalares que reemplazados en las incógnitas verifican la igualdad. El conjunto de todas las soluciones se llama **conjunto solución**.

2 Sistemas de ecuaciones lineales

Estudiaremos un **sistema de m ecuaciones (lineales) con n incógnitas** $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= b_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= b_2, \\ & \vdots \\ A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \cdots + A_{mn}x_n &= b_m. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

[1]Notas de Cátedra basadas en notas de clases de Silvio Reggiani y ediciones anteriores de la cátedra de las docentes Isolda Cardozo y Paola Tolomei. Edición 2024 con modificaciones de Ma. Inés Lopez Pujato y Pablo Fekete.

El sistema (S) se puede representar matricialmente de la siguiente forma

$$\text{(S)} \iff Ax = b$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{se llama } \textbf{matriz de coeficientes},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ es el } \textbf{vector incógnita} \text{ y}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ es el vector de } \textbf{términos independientes}\text{, o “lado derecho” del sistema.}$$

Definición 2.1. Diremos que una **solución del sistema** (S) es una n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que $Ax = b$. El conjunto de todas las soluciones de un sistema (S) se llama **conjunto solución** de (S).

El objetivo de esta sección será resolver completamente un sistema de ecuaciones $m \times n$, vale decir, hallar el conjunto solución del sistema.

Definición 2.2. El sistema (S) se dice **homogéneo** si $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$.

Un sistema homogéneo siempre admite la solución $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada la **solución trivial** o **solución nula**, aunque también podría tener soluciones no triviales.

La siguiente definición es un elemento clave en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

Definición 2.3. Dos sistemas $Ax = b$ (S_1) y $A'x = b'$ (S_2) con $A, A' \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $b, b' \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ se dicen **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución; es decir, si toda solución de (S_1) es solución de (S_2) y viceversa.

Ejercicio 2.4. Muestre que la definición anterior efectivamente define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

De esta definición sigue la siguiente **idea de trabajo:** para resolver un sistema $Ax = b$ pasamos a un sistema equivalente que sea *más fácil* de resolver. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.5. Encontrar las soluciones de

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_1)$$

- Sumamos -2 veces la 2da ecuación a la primera

$$\begin{cases} -7x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_2)$$

- Multiplicamos la 1ra ecuación por $-1/7$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_3)$$

- Sumamos -3 veces la 1ra ecuación a la 2da

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{S}_4)$$

Los sistemas (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) son equivalentes (es un buen ejercicio tratar de justificar esta afirmación, aunque en breve daremos el resultado general). Luego el conjunto solución de cada sistema es exactamente el mismo, y está dado por: $x_1 = x_2 = -x_3$. Más precisamente, el **conjunto solución** del sistema (S_1) es

$$\{(-x_3, -x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

En lo que sigue, trataremos de responder la siguiente pregunta: **¿cómo podemos formalizar este procedimiento para aplicarlo a otros sistemas lineales?**

3 Operaciones elementales

3.1 Operaciones elementales de ecuaciones

Describiremos tres tipos de operaciones que, aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales (S), obtienen un sistema (S') equivalente a (S) (¡justificar!).

Operaciones de escalamiento

Se pasa de un sistema (S) a un sistema (S') multiplicando la i-ésima ecuación por un escalar $\alpha \neq 0$: si la i-ésima ecuación de (S) es

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n = b_i,$$

la i-ésima ecuación de (S') es

$$\alpha A_{i1}x_1 + \alpha A_{i2}x_2 + \cdots + \alpha A_{in}x_n = \alpha b_i.$$

Las demás ecuaciones de (S) y (S') son idénticas.

Operaciones de eliminación

Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') sumando a la i-ésima ecuación α veces la k-ésima ecuación (con $k \neq i$): si la i-ésima y la k-ésima ecuación de (S) son

$$\begin{aligned} A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + \cdots + A_{in}x_n &= b_i \\ A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \cdots + A_{kn}x_n &= b_k, \end{aligned}$$

entonces la i-ésima ecuación de (S') es

$$(A_{i1} + \alpha A_{k1})x_1 + (A_{i2} + \alpha A_{k2})x_2 + \cdots + (A_{in} + \alpha A_{kn})x_n = b_i + \alpha b_k.$$

Las demás ecuaciones de (S) y (S') son idénticas.

Se llaman **operaciones de eliminación** porque eligiendo α apropiado se pueden ir eliminando incógnitas.

Operaciones de intercambio

Pasamos de un sistema (S) a un sistema (S') intercambiando de posición dos ecuaciones.

Estos dos sistemas son trivialmente equivalentes. Esta operación cobra relevancia cuando trabajamos con la representación matricial.

En la próxima parte de esta sección trabajaremos sobre la siguiente pregunta: Si el sistema (S) se representa matricialmente por $Ax = b$, **¿cuál es la representación matricial del sistema (S')?** (en donde (S') se obtuvo aplicando alguna de las operaciones anteriores).

3.2 Operaciones elementales por filas (OEF)

Sea A una matriz con m filas. Definimos tres tipos de operaciones elementales por filas **OEF** sobre A, en el espíritu de las operaciones sobre las ecuaciones que hemos hecho anteriormente (escalamiento, eliminación e intercambio de filas):

Tipo I Se multiplica la fila r por un escalar $\alpha \neq 0$.

Tipo II Se suma a la fila r, α veces la fila s, con $r \neq s$.

Tipo III Se intercambia la fila r con la fila s.

Más precisamente, una OEF e sobre A devuelve la matriz $e(A)$ dada por

Tipo I $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ \alpha A_{rj}, & i = r. \end{cases}$

Tipo II $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r. \end{cases}$

Tipo III $e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, s \\ A_{sj}, & i = r \\ A_{rj}, & i = s. \end{cases}$

Observación 3.1. Las OEF también se pueden aplicar a vectores columna de tamaño m (o sea, con m filas), de hecho las aplicaremos a los vectores de términos independientes.

Teorema 3.2. *Sean $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$. Si e es una OEF entonces los sistemas*

$$Ax = b, \qquad\qquad e(A)x = e(b)$$

son equivalentes.

Proof. Ejercicio. *(Ayuda: hacer cada tipo por separado, observar que hay que demostrar una equivalencia de sistemas, es decir, igualdad de los conjuntos solución.)* □

En términos matriciales podemos formular la relación de equivalencia de sistemas como sigue:

Definición 3.3. Sean $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Se dice que B es **equivalente por filas** a A si se puede pasar de A a B por una sucesión finita de OEF.

Ejercicio 3.4. Equivalencia por filas es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Corolario 3.5. *Si B es equivalente por filas a A, entonces los sistemas homogéneos*

$$Ax = 0, \qquad\qquad Bx = 0$$

son equivalentes.

Proof. Como B es equivalente por filas a A, existen OEF $e_1, e_2, \ldots, e_k$ tales que

$$B = e_k(\cdots e_2(e_1(A))).$$

Veamos que toda solución de $Ax = 0$ es solución de $Bx = 0$.

En efecto, si $Ax = 0$ sigue que, por el teorema anterior, $e_1(A)x = 0$. Luego también $e_2(e_1(A))x = 0$. Siguiendo este proceso de aplicación sucesiva de las OEF obtenemos el mismo resultado, esto es, $e_k(\cdots e_2(e_1(A)))x = Bx = 0$.

Por otro lado, toda solución de $Bx = 0$ es solución de $Ax = 0$. En efecto, dado que la relación de equivalencia por filas es una relación de equivalencia, es evidente que B equivalente por filas a A implica que A equivalente por filas a B. Luego el argumento anterior también sirve para demostrar esto.

□

Ejemplo 3.6. Resolver el sistema (homogéneo)

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 0 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 & = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 5x_4 & = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(S)}$$

El sistema (S) se representa matricialmente como $Ax = 0$ en donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos OEF sobre A para pasar a un sistema equivalente más fácil de resolver

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_1 \to f_1 - 2f_2}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_3 \to f_3 - 2f_2}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo I}]{\mathtt{f_3 \to -\frac{1}{2}f_3}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_2 \to f_2 - 4f_3}} \begin{pmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_1 \to f_1 + 9f_3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{15}{2} & -\frac{55}{2} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo I}]{\mathtt{f_1 \to \frac{2}{15}f_1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Tipo II}]{\mathtt{f_3 \to f_3 - \frac{1}{2}f_1}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} =: R$$

El sistema $Ax = 0$ es equivalente a $Rx = 0$.

Es decir, es equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rl} x_3 - \frac{11}{3}x_4 & = 0 \\ x_1 + \frac{17}{3}x_4 & = 0 \\ x_2 - \frac{5}{3}x_4 & = 0 \end{array}\right.$$

Podemos poner todo en función de x_4 como sigue:

$$x_1 = -\frac{17}{3}x_4 \qquad x_2 = \frac{5}{3}x_4 \qquad x_3 = \frac{11}{3}x_4$$

Luego, el conjunto solución es

$$\text{Sol} = \left\{(-\frac{17}{3}c, \frac{5}{3}c, \frac{11}{3}c, c) : c \in \mathbb{F}\right\} = \{(-17c, 5c, 11c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}.$$

4 Matrices elementales

Sea e una OEF que aplica sobre matrices con m filas. La **matriz elemental asociada a** e es $E = e(I)$ en donde I es la matriz identidad $m \times m$.

Ejemplo 4.1 ($m = 4$).

$$e = \text{"}\mathtt{f}_2 \leftrightarrow \mathtt{f}_4\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e = \text{"}\mathtt{f}_3 \to \alpha\mathtt{f}_3\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e = \text{"}\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 + \alpha\mathtt{f}_4\text{"} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.2. *Sea e una OEF y sea $E = e(I_m)$ su correspondiente matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ vale*

$$e(A) = EA.$$

Proof. Hay tres casos según el tipo de OEF. Haremos la prueba para operaciones Tipo I y II, dejando como ejercicio las del Tipo III.

Tipo I Sea $e = \text{"}\mathtt{f}_\mathtt{r} \to \alpha\mathtt{f}_\mathtt{r}\text{"}$, $\alpha \neq 0$. Luego, $E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r, \\ \alpha\delta_{rj}, & i = r, \end{cases}$ de donde el coeficiente ij de la matriz EA es $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij}, & i \neq r, \\ \sum_{k=1}^{m} \alpha\delta_{rk}A_{kj} = \alpha A_{rj}, & i = r. \end{cases}$

Esto significa que $EA = e(A)$.

Tipo II Sea $e = \text{"}\mathtt{f}_\mathtt{r} \to \mathtt{f}_\mathtt{r} + \alpha\mathtt{f}_\mathtt{s}\text{"}$, $r \neq s$. Luego, $E_{ij} = e(I)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \neq r, \\ \delta_{rj} + \alpha\delta_{sj}, & i = r, \end{cases}$ de donde el coeficiente ij de la matriz EA es:

$(EA)_{ij}$ para $i \neq r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}A_{kj} = A_{ij},$$

Y para $i = r$ calculamos $(EA)_{rj}$

$$\begin{aligned} (EA)_{rj} &= \sum_{k=1}^{m} E_{rk}A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + \alpha\delta_{sk})A_{kj}, \\ &= \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk}A_{kj} + \alpha \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk}A_{kj} = A_{rj} + \alpha A_{sj}. \end{aligned}$$

Así, $(EA)_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & i \neq r, \\ A_{rj} + \alpha A_{sj}, & i = r. \end{cases}$

Finalmente $(EA) = e(A)$. □

□

Observación 4.3. Las matrices elementales son invertibles. Pensemos en los siguientes argumentos para justificar esto:

Argumento 1 El determinante de una matriz elemental es siempre no nulo (¿por qué?), y por lo tanto la matriz resulta invertible.

Argumento 2 Las OEF son "invertibles"(¿cuál será el significado de esta palabra?). En efecto, es posible calcular explícitamente las operaciones "inversas" de OEF (ver siguiente párrafo).

Veamos a continuación cuáles son las inversas:

- **Tipo I**

$$e = "\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}", \ \alpha \neq 0, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{-1} = "\mathtt{f_r} \to \frac{1}{\alpha} \mathtt{f_r}", \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\alpha} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Tipo II**

$$e = "\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}", \ r \neq s, \qquad e^{-1} = "\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} - \alpha \mathtt{f_s}".$$

  Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Tipo III**
  - $e = "\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}" \implies e^{-1} = e.$
  - $E^{-1} = E.$

  Por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{-1}.$$

  Las matrices que son su propia inversa se llaman **involutivas**.

5 Matrices escalón reducidas por filas

Definición 5.1. Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ se dice **reducida por filas (RF)** si

1. El 1er. elemento no nulo de cada fila no nula es igual a 1. Tal elemento se denomina **1 principal**, y la posición del mismo se denomina **posición pivote**.
2. Toda columna que contenga el 1er elemento de una fila no nula tiene sus demás elementos iguales a 0.

Ejemplo 5.2. ¿Son RF las siguientes matrices?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no,} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{no,}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sí,} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sí.}$$

Definición 5.3. Una matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ se dice **escalón reducida por filas (ERF)** si

1. A es reducida por filas
2. Toda fila nula de A esté debajo de todas las filas no nulas
3. Si $1, 2, \ldots, r$ son las filas no nulas de A y el primer elemento no nula de la fila i esté en la columna k_i, entonces $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Estas matrices son muy importantes porque podremos representar a un sistema lineal por una matriz ERF y ésto nos permitirá hallar el conjunto solución del mismo de manera sencilla.

Ejemplo 5.4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{RF pero no ERF.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{RF pero no ERF.}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ERF.}$$

Ejemplo 5.5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ERF.}$$

El sistema lineal (homogéneo) asociado $AX = 0$ es

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + \frac{1}{2}x_5 &= 0, \\ x_4 + 2x_5 &= 0. \end{aligned}$$

- x_1, x_3, x_5 son parámetros libres,
- x_2, x_4 se pueden poner en función de x_1, x_3, x_5,
- $\text{Sol} = \left\{(x_1, 3x_3 - \frac{1}{2}x_5, x_3, -2x_5, x_5) : x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{F}\right\}$.

Teorema 5.6. *Toda matriz $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ es equivalente por filas a una matriz ERF. En otras palabras, existes matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que*

$$E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$$

es ERF.

Proof. Ejercicio. □

Observación 5.7. Se podría intentar hacer un programa de computadora que devuelva la forma ERF de una matriz dada A.

Ejemplo 5.8. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 & = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 & = 0, \\ x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = 0. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 - 2\mathtt{f}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_2 \leftrightarrow \mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - \mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_3 \to \mathtt{f}_3 + 2\mathtt{f}_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_3 \to -\frac{1}{3}\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathtt{f}_1 \to \mathtt{f}_1 - 2\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathtt{f}_2 \to \mathtt{f}_2 + 2\mathtt{f}_3} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Luego el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{3}x_4 & = 0, \\ x_2 + \frac{1}{3}x_4 & = 0, \\ x_3 + \frac{5}{3}x_4 & = 0, \end{cases} \qquad \text{(S')}$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\text{Sol} = \left\{ \left(\frac{4}{3}c, -\frac{1}{3}c, -\frac{5}{3}c, c \right) : c \in \mathbb{F} \right\} = \{(4c, -c, -5c, 3c) : c \in \mathbb{F}\}.$$

Ejercicio 5.9. En el ejemplo anterior, encontrar matrices elementales $E_1, \dots, E_k$ tales que $E_k \cdots E_1 A$ es ERF.

Teorema 5.10. *Si $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ con $m < n$ entonces el sistema homogéneo $Ax = 0$ admite una solución no trivial. En otras palabras, un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene una solución no trivial.*

Proof. Por el teorema anterior, A es equivalente por filas a una matriz R ERF. Sean $1, \dots, r$ las filas no nulas de R, $r \leq m < n$ y sean $k_1, \dots k_r$ las columnas de R en donde aparece el 1er elemento no nulo de las filas $1, \dots, r$. Tenemos que $x_{k_1}, \dots, x_{k_r}$ se pueden escribir como combinación lineal de los otros parámetros. Luego para cada elección de x_i, con $i \neq k_1, \dots, k_r$ se obtiene una solución de $Ax = 0$. □ □

6 Resolución de sistemas no homogéneos

Para resolver un sistema lineal (no homogéneo)

$$Ax = b$$

debemos aplicar al vector de los términos independientes cada una de las OEF que aplicamos a A para llevarla a su forma ERF.

Para ello es conveniente pasar a la **matriz ampliada** A' que se obtiene agregando a A la columna b, y luego aplicar las OEF directamente sobre A'

Ejemplo 6.1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

En forma matricial $Ax = b$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Llevamos a la forma ERF

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right).$$

Luego el sistema (S) es equivalente a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 0 &= 9. \end{cases} \qquad \text{¡No tiene solución!}$$

Clasificaremos los sistemas de ecuaciones lineales de acuerdo a sus conjunto de soluciones de la siguiente manera:

Sistema incompatible No existe solución

Sistema compatible Hay dos casos:

- **Determinado** Existe una única solución
- **Indeterminado** Existe más de una solución

Observación 6.2. Si $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 6.3. Resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2. \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathtt{f_2 \to f_2 + 2f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Luego, el sistema (S) es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1, \\ 0 &= 0, \end{cases} \qquad \text{que es compatible indeterminado.}$$

El conjunto solución es entonces

$$\text{Sol} = \{(1 + 2x_2 - x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\} = \{ \underbrace{(1,0,0)}_{\text{Sol de } Ax=b} + \underbrace{(2x_2 - x_3, x_2, x_3)}_{\text{Sol de } Ax=0} : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

Teorema 6.4. *Consideremos el sistema*

$$Ax = b \qquad \text{(S)}$$

con $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ *y sea* x_0 *una solución de (S) (o sea,* x_0 *es tal que* $Ax_0 = b$*). Entonces el conjunto de soluciones de (S) es*

$$\text{Sol} = \{x_0 + x_h : x_h \textit{ es solución de } Ax = 0\}.$$

O sea, toda solución de (S) se escribe como una solución particular más una solución del sistema homogéneo.

Proof. Sea x_h una solución del sistema homogéneo asociado: $Ax_h = 0$. Luego,

$$A(x_0 + x_h) = Ax_0 + Ax_h = Ax_0 + 0 = b,$$

lo que significa que $x_0 + x_h$ es solución de (S).

Recíprocamente, si $Ax = b$, escribimos $x = x_0 + (-x_0 + x)$. Notar que $A(-x_0 + x) = -Ax_0 + Ax = -b + b = 0$. Luego $x_h := -x_0 + x$ es solución del sistema homogéneo. □ □

Es claro ahora que para resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera, es de gran utilidad resolver el sistema de ecuaciones lineales homogéneo asociado.

Ejemplo 6.5. Encontrar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = a, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 & = b + 1, \\ -3x_1 - 6x_2 + 3x_3 & = a + b + 1. \end{array}\right. \qquad \text{(S)}$$

tenga solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 2 & 4 & -2 & b+1 \\ -3 & -6 & 3 & a+b+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+1 \\ 0 & 0 & 0 & 4a+b+1 \end{array}\right).$$

Luego, obtenemos un sistema lineal en a, b que nos da las condiciones para que el sistema (S) sea compatible

$$\left\{\begin{array}{rl} -2a + b & = -1, \\ 4a + b & = -1. \end{array}\right. \qquad \text{(S')}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Luego $a = 0$, $b = -1$ y el sistema (S) es equivalente a

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0,$$

cuyo conjunto de soluciones es

$$\mathrm{Sol} = \{(-2x_2 + x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{F}\}.$$

7 Sistemas cuadrados

En esta sección estudiaremos los sistemas cuadrados. Como queremos hallar el conjunto solución, es de gran utilidad resolver primero los sistemas homogéneos. Luego vamos a derivar un método para calcular inversas de matrices cuadradas invertibles.

Teorema 7.1. *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Son equivalentes:*

1. *A es invertible;*
2. *el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única (la solución trivial $x = 0$);*
3. *el sistema $Ax = b$ tiene solución única para cada $b \in \mathbb{F}^{n\times 1}$.*

Proof. Veamos que $(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{2})$. En efecto, sea A invertible. Luego existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I$. Si consideramos el sistema homogéneo $Ax = 0$ sigue que $x = Ix = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0$, que claramente es la única solución.

Veamos que $(\mathbf{1}) \implies (\mathbf{3})$. Sea A invertible. Consideremos el sistema $Ax = b$. Luego la única solución del sistema viene dada por $x = A^{-1}b$.

Veamos que $(\mathbf{3}) \implies (\mathbf{2})$. Esto sigue trivialmente tomando $b = 0$.

Finalmente, veamos que $(\mathbf{2}) \implies (\mathbf{1})$. Supongamos que $Ax = 0$ tiene sólo la solución trivial. Sea R la forma ERF de A. Tal matriz es triangular superior (¿porqué?). Como $Ax = 0$ tiene solución única, tenemos que $Rx = 0$ tiene solución única, de donde $R = I$ (puesto que si la última fila de R fuera nula, podemos poner una incógnita en función de las demás). Esto significa que A es equivalente por filas a $R = I$, de modo que existen matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I,$$

y por lo tanto A es invertible con $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$. □

□

Muy importante: La Demostración del teorema anterior nos da un método eficiente para calcular la inversa de una matriz A tal que $\det A \neq 0$. En efecto:

- $\det A \neq 0 \implies A$ es equivalente por filas a I.
- Si $e_1, e_2, \dots, e_k$ son las OEF que aplicamos a A para llevarla a I, y E_i es la matriz identidad, entonces
$$A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1 = e_k(\cdots e_2(e_1(I))).$$
- En palabras: **si aplicamos a la matriz identidad las mismas OEF que le aplicamos a A para llegar a I, lo que se obtiene es la matriz inversa A^{-1}.**

Ejemplo 7.2. Encontrar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. *Se sugiere al lector describir al lado de las columnas cuál es la OEF que se realiza en cada paso.*

$$\begin{array}{ccc|rrr}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} & -1 & 1 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & -6 & 12 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & 0 & -9 & 60 & -60 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 9 & -36 & 30 \\
0 & 1 & 0 & -36 & 192 & -180 \\
0 & 0 & 1 & 30 & -180 & 180
\end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7.3. Verdadero o Falso: la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

es invertible y A^{-1} tiene coeficientes enteros.

8 Eliminación Gaussiana

Ahora estudiaremos el método clásico para llevar una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ a su forma ERF. El algoritmo que describiremos a continuación se conoce como **eliminación Gaussiana**.

1. Ir a la 1ra columna no nula de A. Si el 1er elemento es cero intercambiamos la 1ra fila con alguna fila que tenga un elemento no nulo en esa columna (si no, lo dejamos como esté).
2. Obtener ceros debajo de este elemento usando OEF de tipo II.
3. Aplicar el mismo procedimiento a la submatriz que se obtiene quitando la 1ra fila y la 1ra columna no nulas.
4. Hacer unos en los 1ros elementos no nulos de cada fila no nula usando OEF tipo I y ceros arriba de éstos usando OEF tipo II.

Obsevación:

- Los tres primeros pasos del algoritmo se llaman *paso directo* de la eliminación de Gauss. El cuarto paso se llama *paso inverso* o *sustitución para atrás*.
- Una variante de la eliminación de Gauss se presenta si, durante el paso directo, se producen 1 en la posición pivote y después ceros abajo y arriba de los pivotes. Así, cuando se termina el paso directo, la matriz se encontrará en su ERF. A este método se lo llama eliminación de *Gauss-Jordan*.

Comentario. En cuanto a la complejidad computacional del algoritmo, podemos decir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} 2k(k-1) + \sum_{k=1}^{n} k = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &\approx \frac{n^3}{3}, \qquad n \to \infty. \end{aligned}$$

- El problema de calcular el determinante de una matriz $n \times n$ tiene una complejidad de $n^3/3$ si usamos eliminación gaussiana para pasar a una matriz triangular superior (hay que recordar qué OEF tipo I y III hicimos porque éstas cambian el determinante)
- Si lo hacemos por definición la complejidad es $n! \gg n^3/3$

Ejemplo 8.1. Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 8 \\ -3x - y + 2z &= -11 \\ -2x + y + 2z &= -3 \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

Usamos eliminación gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_3 \to -f_3}]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_2 \to 2f_2}]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{Tipo II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathtt{f_1 \to \frac{1}{2}f_1}]{\text{Tipo I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Luego, el sistema tiene solución única $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.

Además, las cuentas que hicimos nos permiten calcular fácilmente el determinante de la matriz A de coeficientes del sistema (S) :

- A es equivalente por filas a la matriz identidad I.
- Para pasar de A a I usando OEF hicimos
  - OEF Tipo II (no cambian el determinante),
  - 3 OEF Tipo I: $e_1 =$ "$\mathtt{f_1} \to -\mathtt{f_1}$", $e_2 =$ "$\mathtt{f_2} \to 2\mathtt{f_2}$", $e_3 =$ "$\mathtt{f_3} \to \frac{1}{2}\mathtt{f_3}$",
  - No hicimos OEF Tipo III.

Luego
$$1 = \det I = \det(e_3(e_2(e_1(A)))) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1) \det A$$
y por ende
$$\det A = -1.$$

9 Aplicación a determinantes

Culminamos esta unidad probando, con las nuevas herramientas aprendidas, el teorema de la unidad anterior que quedó pendiente: el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes.

Definición 9.1. Una matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ se dice

- **no-singular** si el sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución única. O sea, $Ax = 0 \implies x = 0$.
- **singular** si no es no-singular. O sea, existe $0 \neq x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ tal que $Ax = 0$.

Observación 9.2. A partir del corolario 2.46 de la Unidad 2, y de la implicancia (1) $\Rightarrow$ (2) del teorema 7.1 de esta unidad, tenemos que

$$\det A \neq 0 \quad \implies A \text{ es invertible} \implies \quad A \text{ es no singular,}$$

y por lo tanto también que

$$A \text{ es singular} \implies \quad A \text{ no es invertible} \implies \det A = 0.$$

Las recíprocas de cada una de las implicaciones anteriores también son ciertas, pero su validez depende, en última instancia, del teorema que demostraremos a continuación. (Es un buen ejercicio de repaso de la teoría corroborar lo dicho en esta observación).

Teorema 9.3. *Dadas $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, se tiene*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Antes de dar la prueba necesitamos algunos lemas previos

Lema 9.4. *Sea $E \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz elemental asociada a una OEF e. Entonces*

1. $e = "\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}" \implies \det E = \alpha$, $\alpha \neq 0$,
2. $e = "\mathtt{f_r} \to \mathtt{f_r} + \alpha \mathtt{f_s}", r \neq s \implies \det E = 1$,
3. $e = "\mathtt{f_r} \leftrightarrow \mathtt{f_s}", r \neq s \implies \det E = -1$.

Proof. Sigue de las propiedades del determinante, pues $E = e(I)$.

□

Lema 9.5. *Sea E una matriz elemental. Entonces para toda $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ vale*

$$\det(EA) = (\det E)(\det A).$$

Proof. Por hipótesis $E = e(I)$ para alguna OEF e. Tenemos que analizar tres casos de acuerdo a si e es Tipo I, II o III.

Tipo I: $e = "\mathtt{f_r} \to \alpha \mathtt{f_r}"$, $\alpha \neq 0$, tenemos:

- $\det(EA) = \det(e(A)) = \alpha \det A$ (prop. del determinante),
- $(\det E)(\det A) = \alpha \det A$ (lema previo).

Por lo tanto, $\det(EA) = (\det E)(\det A)$.

Tipo II y III Ejercicio. □ □

Pasamos ahora a la prueba del teorema:

Proof. Distinguimos dos casos:

Caso 1: A singular.

Si B es singular entonces existe $x \neq 0$ tal que $Bx = 0$. Luego $ABx = 0$ de donde AB es singular. Esto es, $0 = \det(AB) = \underbrace{(\det A)}_{=0}(\det B)$.

Supongamos ahora que B es no singular.

Como A es singular, existe $\bar{x} \neq 0$ tal que $A\bar{x} = 0$. Sea x' la única solución del sistema $Bx = \bar{x}$. Notemos que $x' \neq 0$, pues de lo contrario sería $\bar{x} = 0$. Luego,

$$(AB)x' = A(Bx') = A\bar{x} = 0.$$

Es decir que el sistema $ABx = 0$ tiene una solución no trivial, por lo que AB es singular y por lo tanto $\det(AB) = 0$.

En cualquiera de los dos casos $0 = \det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Caso 2: A no-singular.

Como A es no singular, de $Ax = 0$ sigue que $x = 0$. Además A es equivalente por filas a la matriz identidad, de modo que existen matrices elementales $E_1, E_2, \dots, E_k$ tales que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I$$

con $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ y E_i^{-1} también es una matriz elemental. Por el Lema 9.5,

$$\det A = (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \cdots (\det E_k^{-1}),$$

luego $AB = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}B$. Nuevamente por el Lema 9.5

$$\begin{aligned}\det(AB) &= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1})\cdots(\det E_k^{-1})(\det B)\\ &= (\det A)(\det B).\end{aligned}$$

□

10 Regla de Cramer

Teorema 10.1. ***Teorema de Cramer*** *Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ una matriz invertible. Entonces la (única) solución del sistema $Ax = b$ está dada por*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

donde A_i es la matriz que se obtiene de A reemplazando la i-ésima columna por el vector b.

Proof. Como A es invertible, la única solución del sistema es $Ax = b$ es $x = A^{-1}b$. Recordemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A, \qquad \text{donde } (\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(j|i).$$

Luego,

$$\begin{aligned}x_i = (A^{-1}b)_i &= \frac{1}{\det A}((\operatorname{adj} A)b)_{i1}\\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{adj} A)_{ij}b_j\\ &= \frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\underbrace{b_j}_{(A_i)_{ji}}\underbrace{\det A(j|i)}_{A_i(j|i)}\\ &= \frac{1}{\det A}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(A_i)_{ji}\det A_i(j|i)}_{\det A_i,\text{ desarrollo por la columna } i}\\ &= \frac{\det A_i}{\det A}.\end{aligned}$$

□

□

Ejemplo 10.2. Resolver el sistema

$$\begin{cases} ax + by &= u,\\ cx + dy &= v,\end{cases}$$

en donde $ad - bc \neq 0$.

Aplicamos la regla de Cramer

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} u & b\\ v & d\end{vmatrix} = \frac{ud - bv}{ad - bc},\\ y &= \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} a & u\\ c & v\end{vmatrix} = \frac{av - uc}{ad - bc}.\end{aligned}$$