PRÁCTICA 4 - Aplicaciones del Cálculo Diferencial

1. Calcule los siguientes límites aplicando la regla de L'Hôpital, cuando sea posible:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1},\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{tg(5x)},\qquad c)\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right),$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{x},\quad e)\ \lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x-sen(\pi x)}{4x^2-1},\quad f)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-cosx}-\frac{2}{x^2}\right).$$

2. Calcule los siguientes límites:

$$a)\ \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2},\qquad b)\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21},\qquad c)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{senh} x-\operatorname{sen} x}{x^3},$$

$$d)\ \lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)e^x-x-2}{x^3},\qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},\qquad f)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{(x\ \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$g)\ \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},\quad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,sen}(2x)-2\operatorname{arc\,sen} x}{x^3},\quad i)\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x}.$$

$$j)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(a\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{a}-b\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x\sqrt{x}},\quad k)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}x^k-n}{x-1},\qquad l)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b},\quad a>1,,$$

$$m)\ \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\ln x}{(1+x)^2}-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right],\qquad n)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\cosh(x+1)}{e^x},,\quad o)\ \lim_{x\to 0^+}x^{x^x}-1.$$

3. ¿Para qué valores de las constantes a y b es $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\sin(3x)+a\,x^{-2}+b)=0$?

4. Halle c de modo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=4.$

5. Represente gráficamente las siguientes funciones y halle, si es posible sus extremos relativos y absolutos.

$i)$ $f_1:[-1,0)\to\mathbb{R}$ tal que $f_1(x)=2-2x^2;$

$ii)$ $f_2:(-3,1)\to\mathbb{R}$ tal que $f_2(x)=2x^2+3x-2;$

$iii)$ $f_3:[0,2)\to\mathbb{R}$ tal que $f_3(x)=-x^2+2x-2;$

$iv)$ $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f_4(x)=x^2+|2-4x|+1;$

$$v)\ f_5(x)=\begin{cases}\cos(2x) & \text{si } x\geq 0,\\ \arctan x & \text{si } x<0;\end{cases}\qquad vi)\ f_6(x)=\begin{cases}x^3+1 & \text{si } x\leq 0,\\ \dfrac{1}{2}|x-2| & \text{si } x>0.\end{cases}$$

6. Sea la función $f(x)=ax^2+bx+1$. Determine los valores de a y b de manera que el máximo absoluto de f sea 3 y alcance el mismo en $x=1$.

7. Determine para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = -1$.

8. Sea $k \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^k - kx$ posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.

9. Halle los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

$i)$	$f_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$	en $[0,3]$;	$ii)$	$f_2(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$	en $[1,3]$;
$iii)$	$f_3(x) = x\sqrt{1-x}$	en $[-1,1]$;	$iv)$	$f_4(x) = x - \operatorname{sen} x$	en $[-\pi,\pi]$;
$v)$	$f_5(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$	en $[0,2\pi]$;	$vi)$	$f_6(x) = (x-1)^{1/3} + \dfrac{1}{2}(x+1)^{2/3}$	en $[-2,7]$.

10. Represente gráficamente una función que satisfaga simultáneamente las condiciones dadas en cada caso.

   (a) $g(-1) = 4$, $g(1) = 0$, $g'(-1) = 0$, $g'(1)$ no existe,
   $g'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $g'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $g''(x) < 0$ si $|x| \neq 1$.

   (b) $f'(2) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$ si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$ si $x > 2$,
   $f''(x) < 0$ si $0 < x < 4$, $f''(x) > 0$ si $x > 4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$,
   $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. (a) Suponga que $f'(x) > g'(x)$ para todo x y que $f(a) = g(a)$. Demuestre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ y $f(x) < g(x)$ para $x < a$.
   Busque un ejemplo donde se muestre que lo anterior no es válido sin la hipótesis $f(a) = g(a)$.

   (b) Suponga que f es continua y derivable en [0,1], que $f(x)$ está en [0,1] para todo x y que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in [0,1]$. Demuestre que existe exactamente un $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

   (c) Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.

12. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

   (a) determine el dominio de f y estudiar su paridad;

   (b) determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de extremos relativos;

   (c) determine los intervalos de concavidad y de convexidad y la existencia de puntos de inflexión;

   (d) analice la existencia o no de asíntotas horizontales y/o verticales para f;

   (e) construya un boceto de la gráfica de f utilizando la información de los items anteriores;

   (f) analice la existencia de máximo o mínimo absoluto para esta función.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

$i)\ f(x) = x^3 - 4x,$ $ii)\ f(x) = (x-1)^2\,(x+2)\,,$

$iii)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5,$ $iv)\ f(x) = 2 + (x-1)^4,$

$v)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x^2},$ $vi)\ f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)},$

$vii)\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2},$ $viii)\ f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9},$

$ix)\ f(x) = \operatorname{sen}^2 x,$ $x)\ f(x) = x - \operatorname{sen} x,$

$xi)\ f(x) = x\ e^x,$ $xii)\ f(x) = \ln(x^2 + x + 1).$

13. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$.

    Ayuda: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

14. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

15. Convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo. Si $s(t)$ representa la posición de un cuerpo en tiempo t al ser arrojado hacia arriba, entonces su aceleración es $s''(t) = -9,8m/s^2$.

    (a) Si se lanza un cuerpo con velocidad inicial $v_0\ m/s$ y a 1 metro del suelo, ¿a qué altura llegará?
    (b) ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?
    (c) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?