FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría II 2024

PRÁCTICA 3: Sistemas de ecuaciones

---

1. Hallar una representación paramétrica del conjunto solución de cada ecuación.

   a) $2x - 4y = 0$.

   b) $x + y + z = 1$.

2. En cada ítem graficar el sistema de ecuaciones, resolverlo e interpretar los resultados.

$$a)\begin{cases} 2x+y &= 4 \\ x-y &= 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y &= 1 \\ -2x+\frac{4}{3}y &= -4 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} \frac{1}{4}x+\frac{1}{6}y &= 1 \\ x-y &= 3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} \frac{2}{3}x+\frac{1}{6}y &= \frac{2}{3} \\ 4x+y &= 4 \end{cases}$$

3. Resolver cada sistema de ecuaciones utilizando sustitución regresiva.

$$a)\begin{cases} -x+y-z &= 0 \\ 2y+z &= 3 \\ \frac{1}{2}z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x+2y+z &= 0 \\ 5x+y &= 0 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} x+y+z &= 6 \\ 2x-y+z &= 3 \\ 3x-z &= 0 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} 5x-3y+2z &= 3 \\ 2x+4y-z &= 7 \\ x-11y+4z &= 3 \end{cases} \qquad e)\begin{cases} x_1+3x_4 &= 4 \\ 2x_2-x_3-x_4 &= 0 \\ 3x_2-2x_4 &= 1 \\ 2x_1-x_2+4x_3 &= 5 \end{cases}$$

4. En cada ítem resolver el sistema de ecuaciones.

$$a)\begin{cases} x-y &= 0 \\ 3x-2y &= -1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 2u+v &= 120 \\ u+2v &= 120 \end{cases}$$

5. En cada ítem justificar por qué el sistema de ecuaciones debe tener al menos una solución. Resolver cada sistema y determine si tiene una única solución o infinitas soluciones.

$$a)\begin{cases} 4x+3y+17z &= 0 \\ 5x+4y+22z &= 0 \\ 4x+2y+19z &= 0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x+5y-z &= 0 \\ 10x+5y+2z &= 0 \\ 5x+15y-9z &= 0 \end{cases}$$

6. Hallar los valores de k para que el siguiente sistema tenga infinitas soluciones.

$$\begin{cases} kx+y &= 4 \\ 2x-3y &= -12 \end{cases}$$

7. Hallar los valores de k para que el siguiente sistema tenga única solución.

$$\begin{cases} x+ky &= 0 \\ kx+y &= 0 \end{cases}$$

8. Para el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} x+5y+z &= 0 \\ x+6y-z &= 0 \\ 2x+ay+bz &= c \end{cases}$$

hallar valores de a, b y c tales que el sistema

   a) tenga única solución
   b) infinitas soluciones
   c) no tenga solución

9. Identificar en cada ítem las operaciones por filas elementales para obtener la nueva matriz.

   a)
$$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

   b)
$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

10. Encontrar en cada ítem el conjunto solución del sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada dada.

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

11. Resolver en cada ítem el sistema usando eliminación Gaussiana con sustitución regresiva o bien con eliminación Gauss-Jordan.

$$a)\begin{cases} 2x+3z &= 3 \\ 4x-3y+7z &= 5 \\ 8x-9y+15z &= 10 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 4x+12y-7z-20w &= 22 \\ 3x+9y-5z-28w &= 30 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 2x+y-z+2w &= -6 \\ 3x+4y+w &= 1 \\ x+5y+2z+6w &= -3 \\ 5x+2y-z-w &= 3 \end{cases}$$

12. En cada ítem resolver el sistema homogéneo correspondiente a las matrices de coeficientes dadas.

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

13. El siguiente sistema tiene una solución dada por $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$:

$$\begin{cases} 4x - 2y + 5z &= 16 \qquad \text{(ec. 1)} \\ x + y &= 0 \qquad \text{(ec. 2)} \\ -x - 3y + 2z &= 6 \qquad \text{(ec. 3)} \end{cases}$$

Resolver los sistemas compuestos por

a) Ecuaciones 1 y 2.

b) Ecuaciones 1 y 3.

c) Ecuaciones 2 y 3.

¿Cuántas soluciones hay en cada caso?

14. *a*) ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que incógnitas no tenga solución? En tal caso mostrar un ejemplo.

b) ¿Una matriz tiene una única forma escalonada? Ilustrar la respuesta con ejemplos. ¿La forma escalonada reducida es única?

15. En cada ítem hallar una función polinomial cuya gráfica pase por los puntos dados.

a) $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(4, 4)$.

b) $(0, 42)$, $(1, 0)$, $(2, -40)$, $(3, -72)$.

16. Use $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$ para estimar $\log_2 3$.

17. Utilizando un adecuado sistema de ecuaciones, probar que si un polinomio $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene raíces en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ entonces es el polinomio nulo.

18. Usar un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Luego resolver el sistema usando matrices.

$$\frac{3x^2 - 7x - 12}{(x+4)(x-4)^2} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

19. Halle (si existe) la inversa de las siguientes matrices, usando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

20. Use la inversa de una matriz para resolver ambos sistemas.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = & 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = & 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = & -2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = & 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = & 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = & -3 \end{cases}$$

21. Determine si la cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

a) Si la matriz A puede reducirse por filas a la matriz identidad I, entonces A es no singular.

b) Si A es una matriz cuadrada, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene una única solución.

c) Si A, B y C son matrices tales que $BA = CA$ y A es invertible, entonces $B = C$.

22. Demuestre (¡y recuerde!) las siguientes propiedades de matrices:

    a) Si A es una matriz no sigular, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

    b) Si A es una matriz invertible, entonces $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

    c) Si A es una matriz simétrica y no singular, entonces su inversa A^{-1} también es simétrica.

23. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En cada item, halle una matriz elemental E que verifique la igualdad dada.

a) $EA = B$ *b*) $EA = C$ *c*) $EB = A$ *d*) $EC = A$

24. Halle la inversa de las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; (k \neq 0)$$

25. Demuestre que la inversa de una matriz elemental también es elemental.

26. Exprese la inversa de cada una de las siguientes matrices como producto de matrices elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27. Exprese cada una de las siguientes matrices como producto de matrices elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

28. Determine si la cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

    a) La matriz identidad es una matriz elemental.

    b) La matriz nula es una matriz elemental.

    c) Una matriz cuadrada es no singular si puede escribirse como producto de matrices elementales.

29. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. En los que sea posible, hágalo mediante la regla de Cramer.

$$a) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 17x_3 & = & 4 \end{array} \right. \qquad b) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & - & 1x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -8 \\ -1x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 13x_3 & = & 17 \end{array} \right.$$