PRÁCTICA 3 - Cálculo Diferencial

1. En cada uno de los siguientes casos, calcular el cociente incremental en el punto $a \in \mathbb{R}$ indicado, determinar si la función es derivable en a y, si existe, calcular su derivada en el punto a.

   -a- $H(t) = \sqrt{5-4t}$, $a = -1$.

   -b- $\varphi(z) = z + \dfrac{9}{z}$, $a = -3$.

   -c- $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$.

   -d- $g(t) = |t|$, $a = 0$.

2. Se sabe que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, donde $f(t) = t^3 - t^2 - t$, indica la posición de una partícula en el instante t. Se pide:

   -a- Calcular la velocidad promedio en un intervalo de tiempo $[a, a+h]$ (cociente incremental) para cada $a \in \mathbb{R}^+$.

   -b- Hallar la velocidad de la partícula en cada tiempo $a > 0$, utilizando la definición de derivada de una función en un punto.

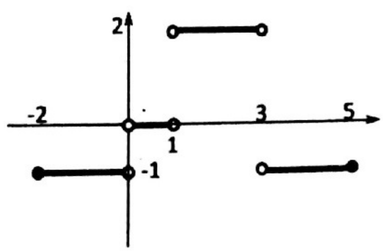
   -c- Hallar el o los valores de a para los cuales la velocidad es nula.

3. Utilizar la siguiente información para trazar la gráfica de la función f en el intervalo $[-2, 5]$:

   -a- $f(-2) = 3$,

   -b- f es continua,

   -c- la gráfica de f' es la que se muestra en la figura.



4. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ ax + b, & x < 2. \end{cases}$$

   determinar los posibles valores de a y b para los cuales la función g es derivable en el punto 2 y calcular, a continuación, la función derivada de la función g.

5. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0, \\ x^3 + 1, & x < 0. \end{cases}$$

   -a- Mostrar que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$.

   -b- Analizar la existencia de las derivadas laterales de la función f en el punto 0.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-c- Analizar la derivabilidad de la función f en el punto 0.

6. Sea $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

   -a- A partir de la definición de derivada en un punto demostrar que la función f es derivable en su dominio y, además, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

   -b- Mostrar que la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto cualquiera se interseca con la misma en un único punto.

7. Sea $f : D \to \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de $\mathbb{R}$ simétrico con respecto al origen.

   -a- Probar que si f es una función par y derivable en un punto $x \in D$ entonces es también derivable en el punto $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = -f'(x)$.

   -b- Probar que si f es una función impar y derivable en un punto $x \in D$ entonces es también derivable en el punto $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = f'(x)$.

   -c- De lo anterior, obtener que la función derivada de una función par (impar) es una función impar (par).

8. Hallar la función derivada de cada una de las siguientes funciones, indicando su dominio.

   -a- $f_1(x) = x^2 + x + 2$;
   -c- $f_3(x) = x^4 + 2 \operatorname{sen} x$;
   -e- $f_5(x) = x^5 \cos x$;
   -b- $f_2(x) = \dfrac{-3x}{x+1}$;
   -d- $f_4(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$;
   -f- $f_6(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^{-2} \tan x$.

9. Una pelota es lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de $49 \mathrm{m/seg}$. La altura en el instante t viene dada por la función

$$x(t) = -4{,}9t^2 + 49t.$$

   -a- Determinar la altura máxima alcanzada por la pelota.

   -b- Calcule la velocidad de la pelota cuando se encuentra a $19{,}6\mathrm{m}$ del suelo y va hacia arriba.

10. Un objeto se mueve por una línea recta con velocidad dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.

11. Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

12. Sea la función

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^3}{3} + x, & x \leq 0, \\ -\dfrac{x^2}{2} + bx + c, & x > 0. \end{cases}$$

   -a- Determinar los valores de b y c para que la función h sea derivable en $\mathbb{R}$. Justificar.

   -b- Para los valores encontrados en el ítem anterior, realizar la gráfica de la función h'.

13. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 12x$ que sean paralelas al eje x.

14. Si $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(4) = 0$, $g'(4) = -1$ y la función h está definida por $h(x) = [f(g(x))]^2 + x$, hallar $h'(4)$.

15. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función:

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-a- $f_1(x) = \left(\dfrac{x^2}{8} + x - \dfrac{1}{x}\right)^4$,

-b- $f_2(x) = \cos x \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$,

-c- $f_3(x) = \dfrac{\cos(\operatorname{sen} x)}{x}$,

-d- $f_4(x) = \left(\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{-2}$,

-e- $f_5(x) = \tan \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

-f- $f_6(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3 (3-2x)^2$.

16. Sea $f(x) = \tan x$ definida para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si su función inversa es $f^{-1}(y) = \arctan y$, con $y \in \mathbb{R}$, demostrar que:
$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

17. Sea la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x + 1$, para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

    -a- Demostrar que f admite inversa.

    -b- Calcular $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

18. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función.

-a- $f_1(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 3\left(x^{-\frac{3}{2}} + \pi^{\frac{1}{7}}\right)$,

-b- $f_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$,

-c- $f_3(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{3} + \sqrt{x}}$,

-d- $f_4(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+\cos 2x}}$,

-e- $f_5(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

-f- $f_6(x) = \left(\operatorname{arc\,sen} x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$,

-g- $f_7(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$,

-h- $f_8(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{x+1}$,

-i- $f_9(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$,

-j- $f_{10}(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

19. Dada la función $f(x) = \sqrt{x+3}$

    a) Encontrar una aproximación lineal para f en $a = 1$.

    b) Utilizar el ítem anterior para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3,98}$ y $\sqrt{4,05}$.

    c) ¿Las aproximaciones obtenidas en el ítem anterior son sobreestimaciones o subestimaciones?

20. Utilizar la aproximación lineal de una adecuada función para hallar un valor aproximado de los siguientes números:

    $a)$ $\sqrt[3]{1,1}$ $\quad$ $b)$ $\sqrt[4]{15,8}$ $\quad$ $c)$ $sin\ 3$

21. Sea f la función cuya ley es
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{3} - x & x \leq 3, \\ 6 & x > 3. \end{cases}$$
Determinar se f posee extremos relativos y absolutos.

22. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

23. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

-a- Dibujar la gráfica de f para el intervalo $[0, 2]$.

-b- Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

24. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$ pero que f' no tiene raíces en el intervalo $[-1, 1]$. Explicar por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.

25. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.

26. Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 mm por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de $3\mathrm{cm}$?

27. Un depósito de $3\mathrm{m}$ de altura tiene la forma de un cono con el vértice hacia abajo. El radio en la parte superior es de $1{,}25\mathrm{m}$. Se le echa agua a razón de $0{,}15\mathrm{m}^3$ por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el agua si la profundidad de ésta es de $1{,}5\mathrm{m}$?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119