Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Algebra y Geometría Analítica II

Año 2024

UNIDAD 4: Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ [1]

1. Introducción.

Repasemos un poco algunos conceptos que hasta ahora hemos estudiado en Álgebra y Geometría I:

- Describimos analíticamente los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ como coordenadas de puntos en el plano y en el espacio respectivamente. Así es que $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de pares ordenados de números reales y $\mathbb{R}^3$ es el conjunto de ternas ordenadas de números reales. Hemos definido analíticamente dos operaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$: un producto por escalar y una suma, y hemos estudiado sus propiedades.
- Hemos definido también los conjuntos V_2 y V_3 de vectores en el plano y espacio respectivamente en forma geométrica a partir de los conceptos de módulo, dirección y sentido. Hemos definido geométricamente dos operaciones en V_2 y V_3: un producto por escalar y una suma, y hemos estudiado sus propiedades.
- Hemos vinculado ambas formulaciones según las ideas de Descartes.

Como ya nos es usual, $\mathbb{F}$ denotará un cuerpo de números como $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Es nuestro objetivo extender un poco las nociones dadas. En primer lugar estudiaremos el conjunto $\mathbb{F}^n$, y luego comparándolo con otros entes matemáticos ya conocidos, a saber $\mathbb{F}_n[x]$ (polinomios de grado menor o igual a n en una variable con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$ y el polinomio nulo) y $\mathbb{F}^{n\times m}$ (matrices de tamaño $m \times n$ con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$) seremos capaces de hacer una abstracción de definiciones y propiedades, dando lugar a una formulación axiomática más general.

La construcción axiomática de lo que llamaremos *espacios vectoriales* se abordará más profundamente en las diferentes carreras cuando se estudie Álgebra Lineal. Si bien parece algo muy lejano aún, podemos asegurar que tenemos gran parte del camino recorrido, pues la piedra fundamental del Álgebra Lineal ya es para nosotros conocida: los sistemas de ecuaciones lineales.

2. Los espacios $\mathbb{F}^n$

2.1. Definiciones elementales

Definición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número natural. Consideramos el conjunto de $n-$uplas ordenadas de escalares en el cuerpo $\mathbb{F}$, a saber

$$\mathbb{F}^n = \{\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}\},$$

con las operaciones

- *producto por escalar* definida según: $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ tal que si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces
$$\alpha \cdot \overline{x} = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{F}^n;$$

[1] Notas de Cátedra basadas en ediciones anteriores de las mismas de las docentes Isolda Cardozo y Paola Tolomei. Edición 2024 con modificaciones de Ma. Inés Lopez Pujato y Pablo Fekete.

- *suma* definida según: $+ : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n$ tal que si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Cuando $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ decimos que $\mathbb{R}^n$ es el *espacio vectorial euclídeo $n-$dimensional*, y cuando $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ decimos que $\mathbb{C}^n$ es el *espacio vectorial complejo $n-$dimensional*. Los elementos $\overline{x}$ de $\mathbb{F}$ son llamados *vectores $n-$dimensionales*, o simplemente *vectores*.

Observación 2.2. Hemos utilizado en la definición la palabra *dimensión*. Volveremos a este vocablo hacia el fin de la unidad, dándole un sentido matemático estricto.

Observación 2.3. Las operaciones suma y producto por escalar recién definidas se conocen como *usuales*. En la práctica veremos ejemplos de otras operaciones también llamadas suma y producto por escalar, pero definidas de otra manera.

Al definir un ente matemático una de las primeras cosas que debe decirse al respecto es qué entendemos por noción de igualdad. Vale decir, cómo decidir si dos objetos de ese universo son iguales. En nuestro caso, podemos decir lo siguiente:

Definición 2.4. Dos vectores $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{F}^n$ se dicen *iguales* si
$$x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

En el próximo párrafo haremos un estudio exhaustivo de las propiedades de estas operaciones. La lista que se desprende será conocida como *los 10 axiomas de espacio vectorial*.

2.2. Los 10 axiomas de Espacio Vectorial

A1) *Clausura de la suma de vectores:* Al definir operaciones, como éstas son funciones, debemos ver que están *bien definidas*. Esto significa, en nuestro caso, verificar que efectivamente la definición que dimos para suma de vectores nos de como resultado otro vector. Tenemos que dados $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ e $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$,
$$\overline{x} + \overline{y} \in \mathbb{F}^n.$$

Verificar esta afirmación implica probar pertenencia a un conjunto, en este caso será probar que $\overline{x} + \overline{y}$ es una $n-$upla de escalares en $\mathbb{F}$. Por definición de suma de vectores, tenemos que
$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
y podemos afirmar que este es un elemento de $\mathbb{F}^n$ puesto que $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n \in \mathbb{F}$. Esta última afirmación se debe a que la suma de escalares es *cerrada*.

Observemos que la suma de vectores se define a partir de la suma de escalares. Y ésta es la clave. En este sentido seguiremos avanzando con las propiedades de las operaciones, la clave será siempre aprovechar las propiedades que conocemos del cuerpo $\mathbb{F}$.

El sentido de la palabra *clausura* es el de *cierre*, es decir, al operar en el conjunto quedamos en él, no nos devuelve un elemento de otro conjunto sino de él mismo. Así, decimos por ejemplo que *la suma es cerrada*.

A2) *Asociatividad de la suma de vectores:* Tenemos perfectamente comprendido cómo realizar una suma de dos vectores. Pero si queremos sumar tres vectores, ¿cómo hacemos? Como sabemos sumar dos, podemos elegir dos y sumarlos, luego como la suma es cerrada el resultado es otro vector al cual le sumamos el tercero. Lo bueno es que no importa cuál par elijo sumar primero, el resultado final será siempre el mismo. Esto se expresa simbólicamente como sigue: sean $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{F}^n$, entonces
$$\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} = (\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}).$$

Probemos que la suma definida en $\mathbb{F}^n$ es cerrada: si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} =& ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) \stackrel{d}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) + (z_1, \ldots, z_n) \\
\stackrel{d}{=}& ((x_1 + y_1) + z_1, \ldots, (x_n + y_n) + z_n) \stackrel{a}{=} (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n), \\
\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z}) =& (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n)) \stackrel{d}{=} (x_1, \ldots, x_n) + (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \\
\stackrel{d}{=}& (x_1 + (y_1 + z_1), \ldots, x_n + (y_n + z_n)) \stackrel{a}{=} (x_1 + y_1 + z_1, \ldots, x_n + y_n + z_n),
\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de suma de vectores y las igualdades a se verifican por la asociatividad de la suma de escalares de $\mathbb{F}$; de modo que ambas expresiones resultan idénticas.

Observemos cómo el concepto de *igualdad* juega un rol importantísimo en esta propiedad.

Un conjunto dotado de una operación asociativa se dice que es un *semigrupo.*

A3) *Existencia de elemento neutro para la suma de vectores:* Esta propiedad es clave, se trata de que existe dentro del conjunto de vectores un vector destacado con la propiedad de *no hacer nada.* Definimos tal vector destacado, como es habitual, a partir de las propiedades del cuerpo: sabemos que $0 \in \mathbb{F}$ es el neutro para la suma en $\mathbb{F}$. Sea entonces el vector $\overline{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$, luego dado $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ tenemos que

$$\overline{x} + \overline{0} = \overline{0} + \overline{x} = \overline{x}.$$

Para probar la igualdad sólo hacen falta la definición de suma, el concepto de igualdad y la existencia de elemento neutro en $\mathbb{F}$. Sea entonces $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{0} =& (x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) \stackrel{d}{=} (x_1 + 0, \ldots, x_n + 0) \stackrel{ne}{=} (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}, \\
\overline{0} + \overline{x} =& (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) \stackrel{d}{=} (0 + x_1, \ldots, 0 + x_n) \stackrel{ne}{=} (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x},
\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de la suma en $\mathbb{F}^n$ y las igualdades *ne* se verifican por ser $0 \in \mathbb{F}$ el neutro para la suma de escalares.

A4) *Existencia de opuestos para la suma de vectores:* Esta propiedad de existencia no destaca un elemento entre los demás, sino que indica que para cada elemento existe uno que lo *anula* (que al sumarlo con él nos da el elemento neutro). En efecto, la propiedad dice que dado un elemento $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ existe otro elemento $\overline{u} \in \mathbb{F}^n$ tales que

$$\overline{x} + \overline{u} = \overline{u} + \overline{x} = \overline{0}.$$

La prueba sigue de tomar $\overline{u} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ donde $-x_1, \ldots, -x_n \in \mathbb{F}$ son los escalares opuestos de los escalares $x_1, \ldots, x_n$, respectivamente, con respecto a la suma en $\mathbb{F}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\overline{x} + \overline{u} =& (x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) \stackrel{d}{=} (x_1 + (-x_1), \ldots, x_n + (-x_n)) \stackrel{op}{=} (0, \ldots, 0) = \overline{0}, \\
\overline{u} + \overline{x} =& (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n) \stackrel{d}{=} (-x_1 + x_1, \ldots, -x_n + x_n) \stackrel{op}{=} (0, \ldots, 0) = \overline{0},
\end{aligned}$$

donde las igualdades d se verifican por definición de suma de vectores y las igualdades *op* se verifican por la propiedad de existencia de opuestos en $\mathbb{F}$.

Observemos que no es posible dar la propiedad de existencia de opuestos sin haber mencionado antes la existencia de elemento neutro.

Observemos también que aún no hemos hablado de *unicidad* del opuesto, esta consecuencia vendrá luego. Con lo cual no podemos aún utilizar la notación $-\overline{x}$, aunque la prueba nos tiente a hacerlo. En breve podremos.

Finalmente, todo semigrupo que tiene elemento neutro y para el cual existen opuestos se denomina *grupo.*

A5) *Conmutatividad de la suma de vectores:* En las propiedades de existencia anteriores hemos tenido que probar dos igualdades muy similares, *una de cada lado.* Esto lo hubiéramos evitado si probábamos antes que la suma es conmutativa. Esta propiedad dice que dados $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ se tiene que

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}.$$

Veamos cómo se prueba:

$$\begin{aligned}\overline{x} + \overline{y} =& (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \stackrel{d}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \stackrel{c}{=}& (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \stackrel{d}{=} (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) = \overline{y} + \overline{x},\end{aligned}$$

donde las igualdades d se justifican por definición de suma de vectores y la desigualdad c se justifica por la conmutatividad de la suma de escalares.

Un semigrupo tal que la operación es conmutativa se dice *semigrupo conmutativo.* Un grupo tal que la operación es conmutativa de dice *grupo abeliano.*

Ahora enfocamos la atención sobre la otra operación definida en $\mathbb{F}^n$, el producto por escalar.

A6) *Clausura del producto por escalar:* En este caso, en forma análoga a lo que sucedía con la suma de vectores, lo primero que tenemos que ver es que el producto por escalar esté bien definido, o sea, que el producto de un escalar por un vector nos de como resultado otro vector. Sean entonces $\alpha \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$. Como $\alpha, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{F}$ (o sea, son escalares del cuerpo), tenemos que $\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n \in \mathbb{F}$, de modo que $(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \in \mathbb{F}^n$, vale decir, $\alpha \cdot \overline{x}$ es un vector de $\mathbb{F}^n$, con lo cual esta operación está bien definida.

Nuevamente, la operación producto por escalar se define a partir de la operación producto en el cuerpo $\mathbb{F}$ y ésta es la clave de la demostración.

A7) *Asociatividad del producto por escalar:* Veamos que el producto por escalar también es asociativo: sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$, entonces

$$(\alpha\beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x}).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot \overline{x} \stackrel{d}{=}& ((\alpha\beta)x_1, \ldots, (\alpha\beta)x_n) \stackrel{a}{=} (\alpha(\beta x_1), \ldots, \alpha(\beta x_n)) \\ \stackrel{d}{=}& \alpha \cdot (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) \stackrel{d}{=} \alpha \cdot (\beta \cdot (x_1, \ldots, x_n)) = \alpha \cdot (\beta \cdot \overline{x}),\end{aligned}$$

donde las igualdades d se deducen de la definición de producto por escalar y la igualdad a de la asociatividad del producto de escalares en $\mathbb{F}$.

Las siguientes dos propiedades vinculan ambas operaciones.

A8) *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares:* Como es de esperar, el producto por escalar se distribuye respecto a la suma de escalares. Esto significa que:

dados los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y el vector $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot \overline{x} =& (\alpha + \beta) \cdot (x_1, \ldots, x_n) \stackrel{dp}{=} ((\alpha + \beta)x_1, \ldots, (\alpha + \beta)x_n) \\ \stackrel{di}{=}& (\alpha x_1 + \beta x_1, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) \stackrel{ds}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \ldots, \beta x_n) \\ \stackrel{dp}{=}& \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \beta \cdot (x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{x},\end{aligned}$$

donde las igualdades dp siguen de la definición del producto por escalar, la igualdad di sigue de la propiedad distributiva del producto de escalares respecto de la suma de escalares y la igualdad ds sigue de la definición de suma de vectores.

A9) *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores* Tenemos además que el producto por escalar se distribuye respecto a la suma de vectores. Esto significa que dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y dos vectores $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\overline{x} + \overline{y}) &= \alpha \cdot ((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) \overset{ds}{=} \alpha \cdot (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\
&\overset{dp}{=} (\alpha(x_1 + y_1), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) \overset{di}{=} (\alpha x_1 + \alpha y_1, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\
&\overset{ds}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \ldots, \alpha y_n) \overset{dp}{=} \alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) + \alpha \cdot (y_1, \ldots, y_n) = \alpha \cdot \overline{x} + \alpha \cdot \overline{y},
\end{aligned}$$

donde las igualdades ds sigue de la definición de suma de vectores, las igualdades dp siguen de la definición del producto por escalar y la igualdad di sigue de la propiedad distributiva del producto de escalares respecto de la suma de escalares.

La última propiedad involucra el elemento identidad del producto de escalares.

A10) *Unitariedad del producto por escalar:* Es de esperar que haya un elemento destacado también para el producto por escalar. Este elemento será la unidad del cuerpo, el elemento $1 \in \mathbb{F}$. Tenemos que dado $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$1 \cdot \overline{x} = \overline{x}.$$

La verificación es inmediata, por definición de producto por escalar y por ser 1 el neutro para el producto de escalares:

$$1 \cdot \overline{x} = 1 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (1x_1, \ldots, 1x_n) = (x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}.$$

Antes de continuar, hagamos un resumen y listemos lo que llamaremos *los 10 axiomas de espacio vectorial*. Consideramos un cuerpo $\mathbb{F}$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$. Tenemos definidas en el conjunto de $n-$uplas $\mathbb{F}^n$ dos operaciones usuales, una llamada suma de vectores y la otra llamada producto por escalares de $\mathbb{F}$. Hemos probado que se verifican:

1. Clausura de la suma de vectores.
2. Asociatividad de la suma de vectores.
3. Existencia de elemento neutro para la suma de vectores.
4. Existencia de opuestos para la suma de vectores.
5. Conmutatividad de la suma de vectores.
6. Clausura del producto por escalar.
7. Asociatividad del producto por escalar.
8. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares.
9. Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores.
10. Unitariedad del producto por escalar.

A modo de comentario, y sólo eso, dijimos que: un conjunto dotado de una operación que verifican (1) y (2) se dice semigrupo. Un semigrupo que verfica además (3) y (4) se dice grupo y un grupo que verifica (5) se dice grupo abeliano.

2.3. Propiedades y consecuencias inmediatas

A partir de estos 10 axiomas se pueden probar otras propiedades que se verifican utilizándolos. Observar que el orden en que probemos las propiedades es importante, pues las últimas se nutrirán de las primeras.

Proposición 2.5. *En $\mathbb{F}^n$ con las operaciones suma y producto por escalar usuales se verifican:*

(a) El elemento neutro para la suma es único.

(b) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, existe un único opuesto, que denotaremos $-\overline{x}$.

(c) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, se tiene que $0\overline{x} = \overline{0}$.

(d) Dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene que $\alpha\overline{0} = \overline{0}$.

(e) Dado un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$, se tiene que $(-1) \cdot \overline{x} = -\overline{x}$.

(f) Dados un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ que verifican que $\alpha \cdot \overline{x} = \overline{0}$, se tiene que o bien $\alpha = 0$ o bien $\overline{x} = \overline{0}$ (sin excluír que ambas puedan ocurrir en simultáneo).

Demostración. (a) Para probar unicidad la técnica clásica es tomar dos elementos que verifiquen la propiedad y ver que son iguales. Eso es lo que haremos: supongamos que existe otro vector $\overline{z} \in \mathbb{F}^n$ tal que para todo $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$,

$$\overline{x} + \overline{z} = \overline{z} + \overline{x} = \overline{x}. \qquad (*)$$

Entonces, en particular:

$$\overline{0} \stackrel{*}{=} \overline{0} + \overline{z} \stackrel{3}{=} \overline{z},$$

donde la igualdad $*$ es la antes nombrada, tomando $\overline{0}$ como el vector cualquiera $\overline{x}$ y la igualdad 3 se refiere al axioma correspondiente.

(b) Sea $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ y sean $\overline{z} = (z_1, \ldots, z_n), \overline{w} = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ dos vectores opuestos a $\overline{x}$, es decir,

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{z} = \overline{z} + \overline{x} = \overline{0}, \qquad & (*) \\ \overline{x} + \overline{w} = \overline{w} + \overline{x} = \overline{0}. \qquad & (\triangle) \end{aligned}$$

Luego,

$$\overline{z} \stackrel{3}{=} \overline{z} + \overline{0} \stackrel{\triangle}{=} \overline{z} + (\overline{x} + \overline{w}) \stackrel{2}{=} (\overline{z} + \overline{x}) + \overline{w} \stackrel{*}{=} \overline{0} + \overline{w} \stackrel{3}{=} \overline{w}.$$

Además, como ya sabemos que el vector $\overline{y} = (-x_1, \ldots, -x_n)$ es opuesto, y acabamos de probar que éste es único, podemos de ahora en más utilizar esta notación:

$$-\overline{x} = (-x_1, \ldots, -x_n).$$

(c) Esta prueba la podemos hacer en particular para $\mathbb{F}^n$ utilizando sólo la definición de producto por escalar, el axioma 3 y la unicidad dada en a. En efecto, si $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,

$$0 \cdot \overline{x} = 0 \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (0x_1, \ldots, 0x_n) = (0, \ldots, 0) = \overline{0}.$$

Sin embargo, con el fin de que esta prueba sea independiente de la definición específica que hemos dado de producto por escalar, trataremos de probarlo utilizando sólo los axiomas, y las propiedades ya enunciadas y demostradas. Tenemos que,

$$0 \cdot \overline{x} \stackrel{ne}{=} (0 + 0) \cdot \overline{x} \stackrel{8}{=} 0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x},$$

donde la igualdad *ne* se justifica al considerar al elemento 0 como neutro para la suma de escalares y 8 indica el axioma 8 (distributiva del producto por escalar respecto de la suma de escalares). Si nos quedamos con el primer y el último miembro de esta igualdad, a saber $0 \cdot \overline{x} = 0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x}$ y le sumamos el opuesto de $0 \cdot \overline{x}$ resulta

$$0 \cdot \overline{x} + (-0 \cdot \overline{x}) = (0 \cdot \overline{x} + 0 \cdot \overline{x}) + (-0 \cdot \overline{x}) \stackrel{2}{=} 0 \cdot \overline{x} + (0 \cdot \overline{x} + (-0 \cdot \overline{x})),$$

donde 2 indica la asociatividad de la suma, y utilizando ahora el axioma 4 sigue que

$$\overline{0} = 0 \cdot \overline{x} + \overline{0} \stackrel{3}{=} 0 \cdot \overline{x},$$

donde 3 indica el axioma 3.

(d) La prueba es completamente análoga a la prueba de (c): *Ejercicio*.

(e) Nuevamente, trataremos de dar una prueba aplicando sólo los axiomas y propiedades previos (*abstraernos* de la definición particular de las operaciones). En este caso la clave será el rol que cumple un elemento opuesto.

Queremos ver que $(-1)\cdot\overline{x}$ sea el opuesto del vector $\overline{x}$. Por el axioma 4 y el axioma 5, bastará con probar que $\overline{x}+(-1)\cdot\overline{x}=\overline{0}$. En efecto,

$$\overline{x}+(-1)\cdot\overline{x}\overset{10}{=}1\cdot\overline{x}+(-1)\cdot\overline{x}\overset{8}{=}(1+(-1))\cdot\overline{x}\overset{op}{=}0\cdot\overline{x}\overset{a}{=}\overline{0},$$

donde las igualdades indicadas con números refieren a los axiomas correspondientes, las letras a las propiedades correspondientes, y *op* significa que estamos considerando la existencia de opuestos para la suma de escalares.

(f) Supongamos que para $\alpha\in\mathbb{F}$ y $\overline{x}\in\mathbb{F}^n$ tenemos que $\alpha\cdot\overline{x}=\overline{0}$. Si $\alpha=0$ no hay nada que probar. Supongamos que $\alpha\neq 0$ y veamos que en tal caso debe ser $\overline{x}=\overline{0}$. Tenemos que

$$\overline{x}=1\cdot\overline{x}=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)\overline{x}=\frac{1}{\alpha}\left(\alpha\cdot\overline{x}\right)=\frac{1}{\alpha}\cdot\overline{0}=\overline{0}.$$

Queda como ejercicio marcar en cada igualdad qué axioma o propiedad se esté utilizando.

□

Todo lo definido y probado hasta ahora debería traer a la memoria algunas estructuras, algunos patrones en común.

3. Los espacios $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$

En esta sección haremos un recuerdo de algunas *estructuras algebraicas* conocidas.

Definición 3.1. Sea $n\in\mathbb{N}$ un número natural. Consideramos el conjunto de polinomios en una variable x con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$ de grado a lo sumo n y el polinomio nulo, a saber

$$\mathbb{F}_n[x]=\{p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n : a_0,\ldots,a_n\in\mathbb{F}\},$$

con las operaciones

- *producto por escalar* definida según: $\cdot:\mathbb{F}\times\mathbb{F}_n[x]\longrightarrow\mathbb{F}_n[x]$ tal que si $\alpha\in\mathbb{F}$ y $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$, entonces

$$\alpha\cdot p(x)=\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2+\cdots+\alpha a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x];$$

- *suma* definida según: $+:\mathbb{F}_n[x]\times\mathbb{F}_n[x]\longrightarrow\mathbb{F}_n[x]$ tal que si $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$ y $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n\in\mathbb{F}_n[x]$, entonces

$$p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\cdots+(a_n+b_n)x^n\in\mathbb{F}_n[x].$$

Ejercicio 3.2. Probar que los 10 axiomas de espacio vectorial listados pueden enunciarse y verificarse para $\mathbb{F}_n[x]$.

Ejercicio 3.3. Probar que si se considera el conjunto de polinomios en una variable a coeficientes en un cuerpo $\mathbb{F}$ de grado *exactamente* n para algún $n\in\mathbb{N}$, entonces al intentar enunciar y demostrar los 10 axiomas no podemos hacerlo. ¿Por qué? (¡Justificar!). ¿Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar usuales?

Ejercicio 3.4. Completar la siguiente definición:

Definición 3.5. Sean $m,n\in\mathbb{N}$ números naturales. Consideramos el conjunto de matrices de tamaño $m\times n$ a coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^{m\times n}$, con la suma de matrices y el producto por escalar definidos en la Unidad 2, a saber:

- *producto por escalar* definida según:

- *suma* definida según:

Ejercicio 3.6. Buscar y marcar en las notas de la Unidad 2 las pruebas de cada uno de los 10 axiomas de espacio vectorial para $\mathbb{F}^{m\times n}$. Si faltase alguna, hacerla.

4. Espacios vectoriales

A esta altura deberíamos habernos dado cuenta ya de que estamos siempre haciendo *las mismas cuentas*. Veamos cómo todo se repite:

	$\mathbb{F}^n$	$\mathbb{F}_n[x]$	$\mathbb{F}^{m\times n}$	V
producto por escalar	$(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$	$\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n$	$\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$	$\alpha \cdot v$
suma	$(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$	$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x \cdots + (a_n + b_n)x^n$	$\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$	$v + w$
Clausura +	✓	✓	✓	$v + w \in V$
Asociatividad +	✓	✓	✓	$(v + w) + u = v + (w + u)$
$\exists 0$	✓	✓	✓	$v + 0 = 0 + v = v$
$\exists -v$	✓	✓	✓	$v + (-v) = (-v) + v = 0$
Conmutatividad +	✓	✓	✓	$v + w = w + v$
Clausura $\cdot$	✓	✓	✓	$\alpha \cdot v \in V$
Asociatividad .	✓	✓	✓	$(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
Distributiva $\cdot$ cra $+_{\mathbb{F}}$	✓	✓	✓	$(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
Distributiva $\cdot$ cra +	✓	✓	✓	$\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
Unitariedad	✓	✓	✓	$1 \cdot v = v$

A modo de comentario, puesto que cuando estudiemos álgebra Lineal lo veremos con más detenimiento, damos la definición rigurosa de *espacio vectorial.*

Definición 4.1. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de escalares. Sea un conjunto V dotado de dos operaciones, una llamada *suma*, denotada por el símbolo $+$, que a un par de elementos v y w de V les asigna un elemento que denotamos $v+w$, y otra llamada *producto por escalar* denotada por el símbolo $\cdot$ que a un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un elemento $v \in V$ le asigna un elemento que denotamos $\alpha \cdot v$. Diremos que la terna $(V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{F}-$*espacio vectorial* si se verifican los siguientes axiomas:

A1) *Clausura de la suma de vectores:* si $v, w \in V$ entonces $v+w \in V$.

A2) *Asociatividad de la suma de vectores:* si $v, w, u \in V$ entonces $(v+w)+u = v+(w+u)$.

A3) *Existencia de elemento neutro para la suma de vectores:* existe $e \in V$ tal que $v+e = e+v = v$.

A4) *Existencia de opuestos para la suma de vectores:* dado $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v+w = w+v = e$.

A5) *Conmutatividad de la suma de vectores:* si $v, w \in V$, entonces $v+w = w+v$.

A6) *Clausura del producto por escalar:* si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $\alpha \cdot v \in V$.

A7) *Asociatividad del producto por escalar:* si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.

A8) *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares:* si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha+\beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

A9) *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de vectores:* si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v, w \in V$ entonces $\alpha \cdot (v+w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.

A10) *Unitariedad del producto por escalar:* si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$.

A los elementos v de un espacio vectorial V se los denomina *vectores.*

Observación 4.2. Es claro que $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Independientemente de la naturaleza de los elementos de un espacio vectorial V, éstos se llaman *vectores*, Así sean polinomios como es el caso cuando $V = \mathbb{F}_n[x]$ o matrices cuando $V = \mathbb{F}^{m\times n}$ o vectores $\overline{x}$ de $\mathbb{F}^n$. Siempre que el espacio esté claro, sabremos de qué naturaleza serán los vectores con los que trabajemos.

Observación 4.3. Así como nos hemos quedado con las operaciones de suma y de producto por escalar, en cada uno de los espacios $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}_n[x]$ y $\mathbb{F}^{m\times n}$ podemos dar algún concepto de *producto* y deducir sus propiedades. Las estructuras algebraicas que así surgen serán estudiadas más adelante en las respectivas carreras.

En la sección final volvemos a estudiar $\mathbb{F}^n$.

5. Bases y dimensión en $\mathbb{F}^n$

Definición 5.1. Dados los vectores $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$ de $\mathbb{F}^n$ y los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ de $\mathbb{F}$, decimos que el vector $\alpha_1 \cdot \overline{x_1} + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \cdots + \alpha_s \cdot \overline{x}_s$ de $\mathbb{F}^n$ es una *combinación lineal* de $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s$.

En $\mathbb{R}^2$ existe un par de versores destacados: $\overline{i}$ y $\overline{j}$. Nos interesa particularmente la siguiente propiedad: cualquier vector $\overline{x}$ en $\mathbb{R}^2$ puede escribirse de manera única como *combinación lineal* de $\overline{i}$ y $\overline{j}$, esto significa que existen únicos escalares x_1 y x_2 tales que

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}.$$

Recordemos además que $\overline{i}$ y $\overline{j}$ son ortogonales. En tal caso decimos que $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ es *la base canúnica de* $\mathbb{R}^2$. Si fijamos coordenadas, tenemos que $\overline{i} = (1,0)$ y $\overline{j} = (0,1)$, luego el vector $\overline{x}$ se escribe en coordenadas como $\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} = (x_1, x_2)$.

En forma análoga, en $\mathbb{R}^3$ la base canónica es $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, tenemos que dado $\overline{x} \in \mathbb{R}^3$ existen únicos escalares x_1, x_2, x_3 tales que $\overline{x}$ se escribe como *combinación lineal* de $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$:

$$\overline{x} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}.$$

En coordenadas esto se traduce en $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ puesto que $\overline{i} = (1,0,0)$, $\overline{j} = (0,1,0)$ y $\overline{k} = (0,0,1)$.

Extender estos resultados a $\mathbb{F}^n$ no representa mayor complicación: consideramos los vectores $\overline{e_1} = (1,0,\dots), \overline{e_2} = (0,1,\dots,0), \dots, \overline{e_n} = (0,0,\dots,1) \in \mathbb{F}^n$. Luego un vector $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se escribe (y de forma única, ¡justificar!) como la *combinación lineal*

$$\overline{x} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \cdots + x_n\overline{e_n}.$$

El conjunto $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_n}\}$ se denomina *base canónica* de $\mathbb{F}^n$.

Las bases canónicas son de gran utilidad, pero no siempre contamos con ellas. Veremos una definición de base un poco más general, y retomaremos el concepto de dimensión, ahora sí, de forma más rigurosa. Para esto, nos quedamos con dos propiedades que nos interesan de las bases canónicas: que todo vector se escriba como combinación lineal de los elementos de la base, y que esta combinación lineal sea única.

5.1. Independencia lineal

Independencia lineal en $\mathbb{F}^n$

Definición 5.2. Sean los vectores $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_r} \in \mathbb{F}^n$. Decimos que estos vectores son *linealmente independientes (LI)* si la ecuación vectorial $\alpha_1 \cdot \overline{x_1} + \cdots + \alpha_r \cdot \overline{x_r} = \overline{0}$ tiene sólo la solución trivial, a saber, $\alpha_1, \dots, \alpha_r = 0$. En caso contrario, decimos que son *linealmente dependientes (LD).*

Ejemplo 5.3. Tratemos de deducir si los vectores $\overline{x} = (-1,3)$ y $\overline{y} = (2,1)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. Para esto, planteamos una combinación lineal de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ y la igualamos al vector nulo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} &= \overline{0}, \\ (-\alpha, 3\alpha) + (2\beta, \beta) &= (0,0), \\ (-\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta) &= (0,0), \end{aligned}$$

de donde sigue el sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0, \\ 3\alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

vale decir, el sistema tiene sólo la solución trivial. Otra forma, dado que el sistema es homogéneo y cuadrado, podrá haber sido calcular el determinante de la matriz asociada, en este caso -7, que es no nulo y arribaríamos a la misma conclusión. Pero como no siempre el sistema resultante es cuadrado, optamos por seguir el camino más general.

Tres vectores $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ en $\mathbb{R}^2$ *siempre* serán linealmente dependientes. Esto quiere decir que la ecuación vectorial $\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} = \overline{0}$ tiene más soluciones que la trivial. En efecto, siguiendo el procedimiento anterior, arribamos a un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, y un tal sistema *siempre* tiene variables libres (¡justificar!). Veamos un ejemplo que podrá ilustrar un poco esto último:

Ejemplo 5.4. Tratemos de deducir si los vectores $\overline{x} = (-1,3)$, $\overline{y} = (2,1)$ y $\overline{z} = (1,-1)$ son linealmente independientes o linealmente dependientes. Para esto, planteamos una combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ y la igualamos al vector nulo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{0}, \\ (-\alpha, 3\alpha) + (2\beta, \beta) + (\gamma, -\gamma) &= (0,0), \\ (-\alpha + 2\beta + \gamma, 3\alpha + \beta - \gamma) &= (0,0), \end{aligned}$$

de donde sigue el sistema homogéneo de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha + \beta - \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de donde concluimos que hay una variable libre y por lo tanto el sistema es compatible indeterminado (tiene soluciones no triviales y por ende los vectores dados son LD).

Tres o más de tres vectores en $\mathbb{R}^2$ son *siempre* linealmente dependientes. El punto de quiebre está en la cantidad 2, que no es casual: 2 es la *dimensión* del espacio $\mathbb{R}^2$, como veremos más adelante.

Ejemplo 5.5. Sean los vectores $\overline{x} = (1, 1, -2)$, $\overline{y} = (2, 5, -1)$ y $\overline{z} = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (1, 1, -2) + \beta \cdot (2, 5, -1) + \gamma \cdot (0, 1, 1) =& (0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0, \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = 0, \\ \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

y del proceso de eliminación de Gauss obtenemos la siguiente matriz equivalente por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí sigue que el sistema tiene infintas soluciones, con lo cual existen infinitas combinaciones lineales de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que dan el vector nulo, o sea, los vectores son LD.

Ejemplo 5.6. Sean los vectores $\overline{x} = (1, 2, 3)$, $\overline{y} = (0, 1, 2)$ y $\overline{z} = (-2, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (1, 2, 3) + \beta \cdot (0, 1, 2) + \gamma \cdot (-2, 1, 0) =& (0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema homogéneo de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma = 0, \\ 2\alpha + \beta = 0, \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz identidad I_3, de aquí sigue que el sistema tiene una única solución (la trivial), con lo cual la única combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que da el vector nulo es la trivial, o sea, los vectores son LI.

Ejercicio 5.7. Sean los vectores $\overline{x} = (2, 2, 3)$, $\overline{y} = (6, -1, 2)$, $\overline{z} = (2, -1, 0)$ y $\overline{w} = (0, 0, 3)$ de $\mathbb{R}^3$. Decidir si son LI o LD y justificar adecuadamente.

Ejemplo 5.8. Sean los vectores $\overline{x} = (2, 1, 0, 1)$, $\overline{y} = (3, 0, 2, 1)$ y $\overline{z} = (1, 0, 2, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (2, 1, 0, 1) + \beta \cdot (3, 0, 2, 1) + \gamma \cdot (1, 0, 2, 0) =& (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + \gamma = 0, \\ \alpha = 0, \\ 2\beta + 2\gamma = 0, \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí sigue que el sistema tiene una única solución (la trivial), con lo cual la única combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que da el vector nulo es la trivial, o sea, los vectores son LI.

Ejemplo 5.9. Sean los vectores $\overline{x} = (-1, 2, 1, 0)$, $\overline{y} = (4, 0, -2, 2)$ y $\overline{z} = (1, 2, 0, 1)$ de $\mathbb{C}^4$. Veamos si son LI o LD. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{0}, \\ \alpha \cdot (-1, 2, 1, 0) + \beta \cdot (4, 0, -2, 2) + \gamma \cdot (1, 2, 0, 1) =& (0, 0, 0, 0), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} -\alpha + 4\beta + \gamma = 0, \\ 2\alpha + 2\gamma = 0, \\ \alpha - 2\beta = 0, \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

y que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de aquí sigue que el sistema tiene infinitas soluciones, con lo cual hay infinitas combinaciones lineales de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ que dan el vector nulo, o sea, los vectores son LD.

Ejemplo 5.10. 1. El conjunto $S = \{\overline{0}\}$ es un conjunto LD de $\mathbb{F}^n$.

2. El conjunto $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{R}^3$.
4. El conjunto $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ es un conjunto LI de $\mathbb{F}^n$.

Ejercicio 5.11. Pruebe que en $\mathbb{F}^n$ el vector nulo es siempre LD.

Ejercicio 5.12. Pruebe que todo conjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$ que contenga al vector nulo es LD.

Ejercicio 5.13. Pruebe que $n+1$ vectores en $\mathbb{F}^n$ son LD.

5.2. Generación

Definición 5.14. Decimos que un conjunto de vectores $S = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_s\}$ de $\mathbb{F}^n$ es un *conjunto generador* de $\mathbb{F}^n$ si todo vector $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores de S. Esto es, si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ tales que $\overline{x} = \alpha_1 \overline{x}_1 + \ldots \alpha_s \overline{x}_s$.

Ejemplo 5.15. 1. El conjunto $S = \{\overline{0}\}$ no es un conjunto generador de $\mathbb{F}^n$.

2. El conjunto $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.
3. El conjunto $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.
4. El conjunto $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{F}^n$.

Ejemplo 5.16. 1. Sea $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo. El conjunto $S = \{\overline{x}\}$ no es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$. En efecto, si fuera generador, tendríamos que un vector $\overline{y} = (y_1, y_2)$ se puede escribir como combinación lineal de $\overline{x}$: existirá $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{y} = \alpha \cdot \overline{x}$. Esto no es cierto si $\overline{y}$ no es paralelo a $\overline{x}$.

2. Sean los vectores $\overline{x} = (2,1)$, $\overline{y} = (-1,0)$ y $\overline{z} = (1,1)$. Veamos si estos vectores generan $\mathbb{R}^2$. Para esto, consideremos un vector cualquiera $\overline{w} = (w_1, w_2)$. Nos preguntamos si existen escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que la combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ de como resultado el vector $\overline{w}$. Hagamos este planteo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{w}, \\ \alpha \cdot (2,1) + \beta \cdot (-1,0) + \gamma \cdot (1,1) &= (w_1, w_2), \end{aligned}$$

y esta igualdad vectorial se traduce en el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta + \gamma = w_1, \\ \alpha + \gamma = w_2, \end{cases}$$

luego nos interesa saber si el sistema tiene solución, cualquiera sean los valores de w_1 y w_2. Por esto es importante considerar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & w_1 \\ 1 & 0 & 1 & w_2 \end{pmatrix},$$

cuya forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 1 & 1 & 2w_2 - w_1 \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que el sistema es compatible para todo par w_1, w_2, y concluimos así que los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ generan $\mathbb{R}^2$.

3. Sean los vectores $\overline{x} = (2,1)$, $\overline{y} = (4,2)$ y $\overline{z} = (1, \frac{1}{2})$. Veamos si estos vectores generan $\mathbb{R}^2$. Para esto, consideremos un vector cualquiera $\overline{w} = (w_1, w_2)$. Nos preguntamos si existen escalares

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que la combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ de como resultado el vector $\overline{w}$. Hagamos este planteo:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{w}, \\ \alpha \cdot (2,1) + \beta \cdot (4,2) + \gamma \cdot (1, \frac{1}{2}) &= (w_1, w_2), \end{aligned}$$

y esta igualdad vectorial se traduce en el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 2\alpha + 4\beta + \gamma = w_1, \\ \alpha + 2\beta + \frac{1}{2}\gamma = w_2, \end{cases}$$

luego nos interesa saber si el sistema tiene solución, cualquiera sean los valores de w_1 y w_2. Por esto es importante considerar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & w_1 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & w_2 \end{pmatrix},$$

cuya forma de escalón reducida es

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & w_1 \\ 0 & 0 & 0 & w_2 - \frac{1}{2}w_1 \end{pmatrix},$$

de donde deducimos que el sistema es incompatible para todo par w_1, w_2 que verifique que $4w_2 - 2w_1 \neq 0$, y concluimos así que los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$ no generan $\mathbb{R}^2$. Para ver esto, simplemente demos un ejemplo. El vector $\overline{w} = (3,1)$ no puede ser generado pues la matriz que obtendríamos será

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene un uno principal en la última columna, con lo cual el sistema es incompatible.

Observación 5.17. Deducimos de los ejemplos que para que un conjunto genere $\mathbb{R}^2$ debe tener *al menos* dos vectores, pero no todo conjunto de dos o más vectores es generador. De vuelta, en $\mathbb{R}^2$ el número 2 es importante. ¿qué pasará en $\mathbb{R}^3$? ¿cuál será la cantidad mínima de vectores que necesitamos para generar $\mathbb{R}^3$?

Ejemplo 5.18. 1. A esta altura estamos casi convencidos que un vector en $\mathbb{R}^3$ no alcanza para generar todo $\mathbb{R}^3$, y con dos tampoco (¡ejercicio!). Con tres podemos encontrar un conjunto generador (¿cuál?). Pero no todo conjunto de tres vectores es generador. En efecto, consideremos los vectores del ejemplo 5.7: $\overline{x} = (1,1,-2)$, $\overline{y} = (2,5,-1)$ y $\overline{z} = (0,1,1)$ de $\mathbb{R}^3$. Veamos que no generan $\mathbb{R}^3$. Para esto debemos tomar una combinación lineal de ellos y ver si así podemos formar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$. Planteamos esto: supongamos que $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ es un vector cualquiera, luego

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} &= \overline{w}, \\ \alpha \cdot (1,1,-2) + \beta \cdot (2,5,-1) + \gamma \cdot (0,1,1) &= (w_1, w_2, w_3), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = w_1, \\ 2\alpha + 5\beta + \gamma = w_2, \\ \beta + \gamma = w_3, \end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 1 & 5 & 1 & w_2 \\ -2 & -1 & 1 & w_3 \end{pmatrix},$$

y del proceso de eliminación de Gauss obtenemos la siguiente matriz equivalente por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{w_2-w_1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & w_3 - w_2 + 3w_1 \end{pmatrix}.$$

La última columna de este sistema tiene un uno principal si $w_3 - w_2 + 3w_1 \neq 0$, luego existe algún vector que no puede ser escrito como combinación lineal de $\overline{x}$, $\overline{y}$ y $\overline{z}$, por lo tanto estos tres vectores no pueden generar $\mathbb{R}^3$.

2. Si consideramos los vectores del ejemplo 5.8, $\overline{x} = (1, 2, 3)$, $\overline{y} = (0, 1, 2)$ y $\overline{z} = (-2, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, podemos ver que forman un conjunto generador. Para esto planteamos la combinación lineal de ellos y la igualamos a un vector cualquiera $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3)$. El objetivo es ver que el sistema de ecuaciones que se deduce es siempre compatible, sin importar la elección de $\overline{w}$:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y} + \gamma \cdot \overline{z} =& \overline{w}, \\ \alpha \cdot (1, 2, 3) + \beta \cdot (0, 1, 2) + \gamma \cdot (-2, 1, 0) =& (w_1, w_2, w_3), \end{aligned}$$

de donde deducimos un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha - 3\gamma = w_1, \\ 2\alpha + \beta = w_2, \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = w_3, \end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 2 & 1 & 0 & w_2 \\ 3 & 2 & 1 & w_3 \end{pmatrix},$$

que resulta equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & w_1 \\ 0 & 1 & 4 & w_2 - 2w_1 \\ 0 & 0 & 1 & -w_3 + 2w_2 - w_1 \end{pmatrix},$$

que no tiene un uno principal en la última columna, con lo cual el sistema asociado es siempre compatible. Luego los vectores $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ generan $\mathbb{R}^3$.

3. Sean los vectores $\overline{x}_1 = (1, 2, -1, 3, 4)$, $\overline{x}_2 = (0, 1, 3, -2, 3)$, $\overline{x}_3 = (0, 0, 2, -1, 5)$, $\overline{x}_4 = (0, 0, 0, 2, 3)$. ¿Es posible generar $\mathbb{R}^5$ con estos vectores? La intuición nos dice que no, pero hagamos las cuentas. Queremos ver si la ecuación vectorial $\alpha_1 \cdot \overline{x}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{x}_2 + \alpha_3 \cdot \overline{x}_3 + \alpha_4 \cdot \overline{x}_4 = \overline{w}$ tiene solución para cualquier $\overline{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5) \in \mathbb{R}^5$. Esta ecuación vectorial se traduce en el siguiente sistema de 5 ecuaciones con 4 incógnitas:

$$\begin{cases} \alpha_1 = w_1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = w_2, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = w_3, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = w_4, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 - 3\alpha_4 = w_5, \end{cases}$$

cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & w_2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & w_3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & w_4 \\ 4 & 3 & 5 & -3 & w_5 \end{pmatrix},$$

que es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w_2 - 2w_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(w_3 - 3w_2 + 7w_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4}(2w_4 + w_3 + w_2 - 7w_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(w_5 + 10w_4 - 5w_3 + 23w_2 - 97w_1) \end{pmatrix},$$

que tiene un uno principal en la última columna si w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 verifican que $w_5 + 10w_4 - 5w_3 + 23w_2 - 97w_1 \neq 0$. Por lo tanto el sistema no es compatible para todo $\overline{w} \in \mathbb{R}^5$. Es decir, no nos alcanza con 4 vectores para generar $\mathbb{R}^5$.

4. Esto ocurre en general: en $\mathbb{F}^n$ podemos encontrar un conjunto generador de n vectores, e intuímos que con menos no alcanza. La prueba sigue de tomar el sistema correspondiente y ver que el sistema resultante no siempre es compatible. Ejercicio: plantear esto y resolverlo.

5.3. Bases y dimensión

Estamos en condiciones de dar la definición de base:

Definición 5.19. Un conjunto de vectores de $\mathbb{F}^n$ se dice que es una *base* del mismo, si es linealmente independiente y es un conjunto generador.

Ejercicio 5.20. Probar que las bases canónicas en $\mathbb{R}^2$, en $\mathbb{R}^3$ y en $\mathbb{F}^n$ mencionadas al principio de la sección son efectivamente bases.

Ejemplo 5.21.

1. Sea el conjunto $\beta = \{\overline{x} = (1,2,3), \overline{y} = (0,1,2), \overline{z} = (-2,0,1)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^3$. Afirmamos que β es una base. En efecto, es LI pues en el ejemplo 5.7 lo hemos probado. Y es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$, pues así lo hemos probado en el ejemplo 5.18, item 2.
2. Sea el conjunto $\sigma = \{\overline{x} = (-1,3), \overline{y} = (2,1), \overline{z} = (1,-1)\}$ de vectores de $\mathbb{R}^2$. Este conjunto NO es base, pues hemos visto en el ejemplo 5.4 que es LD.
3. Sea el conjunto $\sigma = \{\overline{x}_1 = (1,2,-1,3,4), \overline{x}_2 = (0,1,3,-2,3), \overline{x}_3 = (0,0,2,-1,5), \overline{x}_4 = (0,0,0,2,3)\}$ de $\mathbb{R}^5$. Este conjunto NO es base, pues hemos visto en el ejemplo 5.20.3 que NO es un conjunto generador.

Observación 5.22. Sea un conjunto $\beta = \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s\}$ de vectores de $\mathbb{F}^n$ que es una base. Como los vectores $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_s$ deben ser LI, y el máximo de vectores LI que hay en $\mathbb{F}^n$ es n, debe ser $s \leq n$. Como además los vectores deben generar $\mathbb{F}^n$, el mínimo de vectores necesarios es n, luego $s \geq n$. Deducimos que $s = n$, luego toda base de $\mathbb{F}^n$ debe tener exactamente n vectores.

Definición 5.23. La *dimensión* del espacio vectorial $\mathbb{F}^n$ es el cardinal de sus bases, es decir, n.