

# ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)

## 2025

### 1. Forma de Jordan de una transformación lineal nilpotente

Consideremos la siguiente situación:  $V$   $F$ -ev,  $T \in L(V)$  tal que  $\chi_T(X) = X^k$  p.a.  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Por Cayley-Hamilton sabemos que entonces  $m_T(X) = X^{k'}$ , con  $k' \leq k$ . Más aún,  $T$  tiene sólo un autovalor,  $\lambda = 0$ .

Así,  $T^{k''} \equiv 0$  (es decir, es la transformación nula) para algún  $k'' \in \mathbb{N}$ .

**Definición 1**  $V$   $F$ -ev,  $T \in L(V)$  se dice que es **nilpotente** si existe  $k \in \mathbb{N}$  tq  $T^k \equiv 0$ . En tal caso, si  $k = \min\{j \in \mathbb{N} : T^j \equiv 0\}$ , decimos que  $T$  es  **$k$  pasos nilpotente** y que  $k$  es el **índice de nilpotencia**.

La versión matricial es:

**Definición 2**  $A \in F^{n \times n}$  es **nilpotente** si existe  $k \in \mathbb{N}$  tq  $A^k = \mathbf{0}_{n \times n}$ . En tal caso, si  $k = \min\{j \in \mathbb{N} : A^j = \mathbf{0}_{n \times n}\}$ , decimos que  $A$  es  **$k$  pasos nilpotente** y que  $k$  es el **índice de nilpotencia**.

**Observaciones 1** En el caso finito,  $T$  nilpotente sii para cualquier base  $B$  de  $V$  se tiene que  $[T]_B$  es nilpotente.

**Lema 1**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $T \in L(V)$ . Ents.  $T$  es  $k$  pasos nilpotente sii  $m_T(X) = X^k$ .

**Demostración:**  $\Rightarrow$   $T$  es  $k$  pasos nilpotente, luego  $T^k \equiv 0$  y  $T^{k-1} \not\equiv 0$ .

Si  $p(X) = X^k$  entonces  $p(T) = T^k \equiv 0$ , luego  $m_T(X) | X^k$ , de donde  $m_T(X) = X^j$ ,  $j \leq k$ .

Si  $q(X) = X^{k-1}$  entonces  $q(T) = T^{k-1} \not\equiv 0$ .

De lo anterior sigue que  $m_T(X) = X^k$ .

$\Leftarrow$  Si  $m_T(X) = X^k$ , entonces  $T^k \equiv 0$  y  $T^{k-1} \not\equiv 0$  (por ser  $m_T$  el minimal). Luego  $T$  es  $k$  pasos nilpotente.

□

**Observaciones 2**  $gr(m_T) \leq n = \dim(V)$ , luego  $T$  nilpotente sii  $T^n \equiv 0$ .

**Proposición 1**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $T \in L(V)$   $k$  pasos nilpotente. Ents.

$$\{\bar{0}\} \subsetneq \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T^k) = V.$$

**Demostración:** -  $T$  es  $k$  pasos nilpotente, luego  $\ker(T^k) = V$ .

-  $\ker(T^j) \subset \ker(T^{j+1})$  (EJERCICIO).

- Falta ver que las inclusiones son estrictas:

Sea  $0 \leq j$ . Si  $\ker(T^j) = \ker(T^{j+1})$ , entonces  $\ker(T^{j+1}) \supset \ker(T^{j+2})$ . En efecto, si  $v \in \ker(T^{j+2})$

$$\begin{aligned} T^{j+2}v &= \bar{0} \\ T^{j+1}(Tv) &= \bar{0} \\ T^j(Tv) &= \bar{0} \text{ puesto que } \ker(T^{j+1}) = \ker(T^j), \\ T^{j+1}(v) &= \bar{0} \end{aligned}$$

luego  $v \in \ker(T^{j+1})$ . Sigue que si  $\ker(T^j) = \ker(T^{j+1})$  entonces  $\ker(T^j) = \ker(T^{j+1}) = \ker(T^{j+2})$ , y más aún  $\ker(T^i) = \ker(T^{i+1})$  p.t.  $i \geq j$ . Como  $T$  es  $k$  pasos,  $\ker(T^{k-1}) \neq V = \ker(T^k)$ . Luego  $j \geq k$ . Esto quiere decir que si alguna de las inclusiones no fuera estricta, y se diera la igualdad, es porque  $j$  es mayor o igual a  $k$ , luego no es ningún elemento de la cadena de contenciones.

□

Matricialmente, esta proposición se traduce en:

**Proposición 2**  $A \in F^{n \times n}$   $k$  pasos nilpotente. Ents.

$$\{\bar{0}\} \subsetneq N(A) \subsetneq N(A^2) \subsetneq \cdots \subsetneq N(A^k) = F^n.$$

Consideremos ahora la siguiente situación:  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$   $n$  pasos nilpotente.

Entonces  $m_T(X) = \chi_T(X) = X^n$  y  $T^{n-1} \neq 0$  existe  $v \in V$  t.q.  $T^{n-1}v \neq \bar{0}$ , luego  $v \in V \setminus \ker(T^{n-1})$ .

Como  $m_v|m_T$  debe ser  $m_v(X) = X^k$ , con  $1 \leq k \leq n$ . Y como  $T^{n-1}v \neq \bar{0}$ , debe ser  $m_v(X) = X^n$ .

Luego,  $B = \{v, Tv, T^2v, \dots, T^{n-1}v\}$  base de  $V$ . Además,

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definición 3**  $J \in F^{n \times n}$  es un bloque de Jordan nilpotente si

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que  $\text{ran}(J) = n - 1$ .

Veremos que para toda transformación lineal nilpotente en un ev de dimensión finita, existe una base donde la matriz de la transformación lineal esté formada por bloques de Jordan nilpotentes ubicados sobre la diagonal, y ceros en las demás posiciones. Más aún, veremos que esta disposición es única.

Antes de dar el resultado estableceremos un lema técnico:

**Desafío 1** El siguiente lema es un lema técnico. Es difícil de interpretarlo, y es un desafío.

**Lema 2**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Sea  $C = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$  un conjunto li tq

$$\ker(T^i) \cap \text{span}(C) = \{\bar{0}\}.$$

Entonces  $T(C)$  es li y

$$\ker(T^{i-1}) \cap \text{span}(T(C)) = \{\bar{0}\}.$$

**Demostración:** Tenemos que  $T(C) = \{Tv_1, \dots, Tv_r\}$  y  $\text{span}(T(C)) = \text{span}\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$ . Sea  $v \in \ker(T^{i-1}) \cap \text{span}(T(C))$ . Entonces  $v = \alpha_1 Tv_1 + \dots + \alpha_r Tv_r \in \ker(T^{i-1})$  y  $T^{i-1}v = \bar{0}$ . Luego  $\bar{0} = T^{i-1}v = \alpha_1 T^i v_1 + \dots + \alpha_r T^i v_r = T^i(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = T^i(w)$ , con  $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in \ker(T^i) \cap \text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \{\bar{0}\}$ , y puesto que  $\{v_1, \dots, v_r\}$  es li, sigue que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$  y por lo tanto  $v = \bar{0}$  y más aún,  $\{Tv_1, \dots, Tv_r\}$  es li.

□

**Desafío 2** El siguiente teorema es muy importante, y nos dará un algoritmo. Es muchísimo más técnico, mucho más difícil de interpretarlo, y es el mayor desafío de toda la asignatura.

**Teorema 1**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$   $k$  pasos nilpotente. Entonces existe una base  $B$  de  $V$  tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde para cada  $1 \leq i \leq r$ ,  $J_i \in F^{n_i \times n_i}$  es un bloque de Jordan nilpotente y  $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ .

Observemos que  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ .

Además, en tal caso, la base se dice **base de Jordan** y la matriz de la tl en dicha base se dice que es la **forma de Jordan** de la tl.

**Demostración.**

Como  $T$  es  $k$  pasos nilpotente,

$$\{\bar{0}\} \subsetneq \ker(T) \subsetneq \ker(T^2) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T^k) = V.$$

Vamos a construir la base buscada usando el lema anterior bajando el índice desde  $j = k$  hasta  $j = 1$ .

- Sea  $B_{k-1}$  base de  $\ker(T^{k-1})$ .

- Completamos  $B_{k-1}$  con un conjunto li  $C_k = \{v_1^{(k)}, \dots, v_{r_k}^{(k)}\} \subset \ker(T^k) = V$  de modo que  $B_{k-1} \cup C_k$  sea una base de  $\ker(T^k) = V$ . Así,

$$\ker(T^{k-1}) \oplus \text{span}(C_k) = \ker(T^k) = V.$$

- Por el lema anterior,  $T(C_k) \subset \ker(T^{k-1})$  es un conjunto li y

$$\ker(T^{k-2}) \cap T(C_k) = \{\bar{0}\}.$$

- Sea  $B_{k-2}$  base de  $\ker(T^{k-2})$ .

- Completamos  $B_{k-2}$  con un conjunto li  $C_{k-1} = T(C_k) \cup \{v_1^{(k-1)}, \dots, v_{r_{k-1}}^{(k-1)}\} \subset \ker(T^{k-1})$  de modo que  $B_{k-2} \cup C_{k-1}$  sea una base de  $\ker(T^{k-1})$ . Así,

$$\ker(T^{k-2}) \oplus \text{span}(C_{k-1}) = \ker(T^{k-1}).$$

- Luego  $\ker(T^{k-2}) \oplus \text{span}(C_{k-1}) \oplus \text{span}(C_k) = V$ .

y aplicamos el lema anterior nuevamente ...

Sea  $1 \leq j < k$ . Hagamos el paso  $j$ -ésimo de la recursión. Supongamos que ya hemos construido

$$C_{j+1} \subset \ker(T^{j+1}), \dots, C_k \subset \ker(T^k) \quad \text{tales que:}$$

- $T(C_h) \subset C_{h-1}$  p.t.  $j+2 \leq h \leq k$ ,
- $\ker(T^j) \oplus \text{span}(C_{j+1}) = \ker(T^{j+1})$ ,
- $\ker(T^j) \oplus \text{span}(C_{j+1}) \oplus \cdots \oplus \text{span}(C_k) = V$ .

Por el lema anterior,

- $T(C_{j+1}) \subset \ker(T^j)$  li y
- $\ker(T^{j-1}) \cap \text{span}(T(C_{j+1})) = \{\bar{0}\}$ .

Y proseguimos como antes:

- Sea  $B_{j-1}$  una base de  $\ker(T^{j-1})$ .
- Completamos  $B_{j-1}$  con un conjunto li  $C_j = T(C_{j+1}) \cup \{v_1^{(j)}, \dots, v_{r_j}^{(j)}\} \subset \ker(T^j)$  de modo que  $B_{j-1} \cup C_j$  sea una base de  $\ker(T^j)$ . Así,

$$\ker(T^{j-1}) \oplus \text{span}(C_j) = \ker(T^j).$$

- Luego  $\ker(T^{j-1}) \oplus \text{span}(C_j) \oplus \cdots \oplus \text{span}(C_k) = V$ .

Completando la recursión obtendremos

$$\text{span}(C_1) \oplus \cdots \oplus \text{span}(C_k) = V,$$

donde cada  $C_j$  es li,  $1 \leq j \leq k$ . Luego  $B = C_1 \cup \cdots \cup C_k$  es la base buscada.

Precisamente,

$$B = \{v_1^{(k)}, Tv_1^{(k)}, \dots, T^{k-1}v_1^{(k)}, \dots, \\ v_{r_k}^{(k)}, Tv_{r_k}^{(k)}, \dots, T^{k-1}v_{r_k}^{(k)}, \dots, \\ v_1^{(j)}, Tv_1^{(j)}, \dots, T^{j-1}v_1^{(j)}, \dots, \\ v_{r_j}^{(j)}, Tv_{r_j}^{(j)}, \dots, T^{j-1}v_{r_j}^{(j)}, \dots, \\ v_1^{(1)}, \dots, v_{r_1}^{(1)}\}.$$

Sigue que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}.$$

□

Matricialmente:

**Definición 4**  $A \in F^{n \times n}$  es una forma de Jordan nilpotente si

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix},$$

donde para cada  $1 \leq i \leq r$ ,  $J_i \in F^{n_i \times n_i}$  es un bloque de Jordan nilpotente y  $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_r$ .

El teorema dice que para toda tl nilpotente en un ev de dimensión finita, existe una base donde su matriz es una forma de Jordan nilpotente.

**Teorema 2**  $A \in F^{n \times n}$  nilpotente. Entonces  $A$  es semejante a una forma de Jordan nilpotente. Si  $B$  es una base de  $F^n$  tq  $[T_A]_B = J_A$  es una forma de Jordan nilpotente, la llamamos **base de Jordan para  $A$**  y  $J_A$  es la forma de Jordan de  $A$ .

### Ejemplos 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}.$$

Obtener una base de  $\mathbb{R}^6$  tq la matriz  $[T_A]_B = J_A$  es una forma de Jordan de  $A$ .

- Veremos a continuación la unicidad de «la» forma de Jordan.
- Podremos luego decidir si dos matrices nilpotentes son semejantes.
- Para demostrar unicidad probaremos que la cantidad de bloques de Jordan de cada tamaño que aparecen en una forma de Jordan está unívocamente determinada por la transformación lineal.

**Lema 3**  $J \in F^{m \times m}$  bloque de Jordan nilpotente. Entonces  $\text{ran}(J^i) = m - i$  p.c.  $1 \leq i \leq m$ .

**Demostración:** EJERCICIO. Inducir:  $J^i = (e_{i+1}^t \dots e_m^t \ 0 \dots 0)$ ,  $e_j$  el  $j$ -ésimo vector de la base canónica de  $F^n$ . Vale decir: elevar un bloque de Jordan nilpotente a la potencia  $i$  equivale a «bajar»  $i - 1$  lugares los unos.

Así,  $\text{ran}(J^i) = \dim(\text{span}\{e_{i+1}, \dots, e_m\}) = m - i$ .

□

**Proposición 3**  $A \in F^{n \times n}$  forma de Jordan  $k$  pasos nilpotente. Entonces el bloque de Jordan de mayor tamaño que aparece en  $A$  es  $k \times k$ . Además, p.c.  $1 \leq i \leq k - 1$  la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tamaño mayor que  $i$  que aparecen en  $A$  es  $b_i = \text{ran}(A^i) - \text{ran}(A^{i+1})$ .

En particular, la cantidad de bloques de Jordan que aparecen en  $A$  es  $b_0 = n - \text{ran}(A) = \dim(\ker(A))$ .

### Demostración.

Veamos la primera afirmación. Sea  $A$   $k$  pasos nilpotente. Entonces  $m_A(X) = X^k$ .

Sean  $J_1, \dots, J_r$  los bloques de Jordan que aparecen en  $A$ , con  $J_l \in F^{n_l \times n_l}$ ,  $1 \leq l \leq r$ ,  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ . Entonces  $m_A(X) = \text{m.c.m.}\{m_{J_1}, \dots, m_{J_r}\} = \text{m.c.m.}\{X^{n_1}, \dots, X^{n_r}\} = X^{n_1}$ .

Luego  $k = n_1$ .

P.c.  $1 \leq i \leq k$  sean:

- $c_i$ : la cantidad de bloques de Jordan nilpotente de tamaño  $i \times i$  que aparecen en  $A$ ,
- $b_i$ : la cantidad de bloques de Jordan de tamaño mayor que  $i \times i$ .

Si  $A$  está formada por  $r$  bloques de Jordan nilpotentes, entonces  $\text{ran}(A) = n - r$ . En efecto:

$$\text{ran}(A) = \sum_{i=1}^r \text{ran}(J_i) = \sum_{i=1}^r n_i - 1 = \sum_{i=1}^r n_i - \sum_{i=1}^r 1 = n - r.$$

Así,  $b_0 = r$ : la cantidad de bloques de Jordan.

Sea ahora  $1 \leq i \leq k-1$ . Por el lema anterior, si  $J \in F^{j \times j}$  es un bloque de Jordan, entonces  $J^i = 0_{j \times j}$  si  $j \leq i$  o  $\text{ran}(J^i) = j - i$  si  $j > i$ .

$$\text{Adem\'as, } \text{ran}(A^i) - \text{ran}(A^{i+1}) = \sum_{j=i+1}^k c_j(j-1) - \sum_{j=i+2}^k c_j(j-(i+1)) = \sum_{j=i+1}^k c_j = b_i.$$

□

**Corolario 1**  $A \in F^{n \times n}$  forma de Jordan  $k$  pasos nilpotente. Entonces p.c.  $1 \leq i \leq k$ , la cantidad de bloques de Jordan nilpotentes de tama\~no  $i \times i$  que aparecen en  $A$  es

$$c_i = \text{ran}(A^{i+1}) - 2\text{ran}(A^i) + \text{ran}(A^{i-1}).$$

**Demostraci\'on:** Observemos que  $c_k = b_{k-1} = \text{ran}(A^{k-1}) - \text{ran}(A^k) = \text{ran}(A^{k+1}) - 2\text{ran}(A^k) + \text{ran}(A^{k-1})$ , puesto que  $A^k = 0_{n \times n}$ .

Sea  $1 \leq i \leq k-1$ . Entonces

$$\begin{aligned} c_i &= b_{i-1} - b_i = \\ &= (\text{ran}(A^{i-1}) - \text{ran}(A^i)) - (\text{ran}(A^i) - \text{ran}(A^{i+1})) \\ &= \text{ran}(A^{i+1}) - 2\text{ran}(A^i) + \text{ran}(A^{i-1}). \end{aligned}$$

□

**Ejemplos 2** ¿Existe  $A \in \mathbb{R}^{15 \times 15}$  t.q.  $\text{ran}(A) = 10$ ,  $\text{ran}(A^4) = 3$  y  $\text{ran}(A^5) = 0$ ?

**Lema 4**  $J, J'$  formas de Jordan nilpotentes. Si  $J \sim J'$  entonces  $J = J'$ .

**Demostraci\'on:** Vimos que las cantidades de bloques de Jordan de cada tama\~no que aparecen en una forma de Jordan nilpotente dependen s\'olo de los rangos de sus potencias.

Si  $J \sim J'$  entonces p.c.  $1 \leq i \leq k$   $\text{ran}(J^i) = \text{ran}(J'^i)$ , por lo tanto tienen las mismas cantidades de bloques de Jordan de cada tama\~no, luego deben ser iguales:  $J = J'$ .

□

Sigue entonces la unicidad para formas de Jordan nilpotentes:

**Teorema 3**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$  nilpotente. Entonces existe una \\'unica forma de Jordan nilpotente  $J \in F^{n \times n}$  t.q.  $[T]_B = J$  para alguna base  $B$  de  $V$ .

**Demostraci\'on:** EJERCICIO. Ayuda:  $B, B'$  bases de  $V$  t.q.  $[T]_B = J$  y  $[T]_{B'} = J'$ . Ents.  $J \sim J'$  y usar lema anterior.

□

Matricialmente:

**Teorema 4**  $A, B \in F^{n \times n}$  nilpotentes.  $J, J'$  formas de Jordan nilpotentes t.q.  $A \sim J$  y  $B \sim J'$ . Entonces  $A \sim B$  sii  $J = J'$ .

**Demostraci\'on:** EJERCICIO.

□

**Ejemplos 3** 1.  $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  t.q.  $m_A(X) = m_B(X) = X^3$ . Veamos que  $A \sim B$ .

$$2. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}.$$

Veamos que  $A \not\sim B$ .

## 2. Forma de Jordan de una transformación lineal general

Vamos a generalizar el caso anterior, y para esto empezamos pensando en el caso en que el polinomio minimal tenga una sola raíz. Más precisamente, la situación que consideraremos primero es la siguiente:

$V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$  con  $m_T(X) = (X - \lambda)^k$ , para algún  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in F$ .

Entonces  $m_T(T) = (T - \lambda id_V)^k = 0(X)$  y  $(T - \lambda id_V)^{k-1} \neq 0(X)$ .

Esto nos dice que  $T - \lambda id_V \in L(V)$  es un endomorfismo  $k$  pasos nilpotente. Luego podemos aplicar lo estudiado en la sección anterior para asegurar que existe una base  $B$  de  $V$  tq  $[T - \lambda id_V]_B \in F^{n \times n}$  es una forma de Jordan nilpotente:

$$[T - \lambda id_V]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix} \in F^{n \times n},$$

con  $J_i \in F^{n_i \times n_i}$  bloque de Jordan nilpotente,  $1 \leq i \leq r$ , y  $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ .

Observemos que  $[T + S]_B = [T]_B + [S]_B$  (EJERCICIO!). Luego,

$$[T]_B = [T - \lambda id_V]_B + [\lambda id_V]_B,$$

con lo cual

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J(\lambda, n_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda, n_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda, n_r) \end{pmatrix} \in F^{n \times n},$$

con  $k = n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$  y para cada  $1 \leq i \leq r$ ,

$$J(\lambda, n_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

**Definición 5**  $\lambda \in F$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La matriz

$$J(\lambda, n) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

se llama bloque de Jordan asociado al autovalor  $\lambda$  de tamaño  $n$ .

**Observaciones 3**  $J(0, n)$  es un bloque de Jordan nilpotente como los que hemos definido en la sección anterior.

Buscamos una base donde la matriz del endomorfismo sea una matriz diagonal por bloques, con bloques de Jordan en la diagonal. Para ver la existencia usamos un lema técnico: descomponemos el espacio en suma directa de sev invariantes, en cada uno de los cuales el endomorfismo tiene sólo un autovalor.

Más precisamente, tenemos el siguiente Lema:

**Lema 5**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$  tq  $m_T(X) = p(X)q(X)$  con  $(p(X), q(X)) = 1$ . Entonces:

1.  $\ker(p(T))$  y  $\ker(q(T))$  son sev  $T$ -invariantes.
2.  $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$
3.  $m_{T|_{\ker(p(T))}}(X) = p(X)$  y  $m_{T|_{\ker(q(T))}}(X) = q(X)$ .

**Demostración.**

1. Veamos que  $\ker(p(T))$  es  $T$ -invariante, el otro es análogo.  $p(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$ ,  $v \in \ker(p(T))$ . Luego  $p(T)v = a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv = \bar{0}$ , de donde  $T(p(T)v) = \bar{0}$ . Veamos que  $Tv \in \ker(p(T))$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \bar{0} &= T(p(T)v) = T(a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv) \\ &= a_0Tv + a_1TTv + \dots + a_rTT^rv \\ &= a_0Tv + a_1T(Tv) + \dots + a_rT^r(Tv) = p(T)Tv, \end{aligned}$$



de donde  $Tv \in \ker(p(T))$ , luego  $\ker(p(T))$  es  $T$ -invariante.

2. Veamos que  $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$ , para esto veamos que  $\ker(p(T))$  y  $\ker(q(T))$  son disjuntos y que todo  $v \in V$  se escribe como suma de vectores de  $\ker(p(T))$  y  $\ker(q(T))$ . Como  $(p(X), q(X)) = 1$ , existen  $r(X), s(X) \in F[X]$  t.q.  $1 \equiv r(X)p(X) + s(X)q(X)$ .

Entonces  $id_V = r(T) \circ p(T) + s(T) \circ q(T)$ .

-  $v \in \ker(p(T)) \cap \ker(q(T))$ , luego  $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v) = \bar{0}$ .

-  $v \in V$ , luego  $v = id_V(v) = r(T)(p(T)v) + s(T)(q(T)v)$ . Veamos que  $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$ , y análogam. será  $s(T)(q(T)v) \in \ker(p(T))$ .

—> Recordemos que en general

$$\text{---> } (pq)(Tv) = p(T)(q(T)v) = (p(T) \circ q(T))v.$$

$$\begin{aligned} q(T)(r(T)(p(T)v)) &= (qrp)(Tv) = (rpq)(Tv) = r(T)((pq)(Tv)) \\ &= (r(T) \circ (pq)(T))v = (r(T) \circ m_T(T))v = \\ &= \bar{0}. \end{aligned}$$

Así,  $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$ , de modo que  $r(T)(p(T)v) \in \ker(q(T))$ . Análog.  $s(T)(q(T)v) \in \ker(p(T))$ .

3. Veamos finalmente que  $m_{T|_{\ker(p(T))}}(X) = p(X)$  y  $m_{T|_{\ker(q(T))}}(X) = q(X)$ .

Definimos  $T_1 = m_{T|_{\ker(p(T))}}$  y  $T_2 = m_{T|_{\ker(q(T))}}$ . Como  $V = \ker(p(T)) \oplus \ker(q(T))$ ,  $m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\}$ .

$p(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_rX^r$ ,  $v \in \ker(p(T))$ , luego

$$p(T_1)v = a_0v + a_1T_1v + \dots + a_rT_1^rv = a_0v + a_1Tv + \dots + a_rT^rv = \bar{0}.$$

Sigue que  $m_{T_1} | p$ . Análogamente  $m_{T_2} | q$ . Como  $p, q$  coprimos,  $m_{T_1}$  y  $m_{T_2}$  coprimos, de donde  $pq = m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, m_{T_2}\} = m_{T_1}m_{T_2}$  y más aún,  $p = m_{T_1}$  y  $q = m_{T_2}$ .

□

**Definición 6**  $J \in F^{n \times n}$  es una **matriz de Jordan** o una **forma de Jordan** si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_r \end{pmatrix},$$

donde p.c.  $1 \leq i \leq r$ ,  $J_i$  es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, n_1^{(i)}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, n_2^{(i)}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_i, n_{r_i}^{(i)}) \end{pmatrix},$$

con  $n_1^{(i)} \geq \dots \geq n_{r_i}^{(i)}$ , y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  para  $i \neq j$ .

Esto es, cada  $J_i$  está formado por (varios) bloques de Jordan de autovalor  $\lambda_i$  sobre la diagonal.

El siguiente teorema es el resultado de existencia de forma de Jordan.

**Teorema 5**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$  t.q.  $m_T(X)$  se factoriza linealmente sobre  $F$ . Entonces existe  $B$  base de  $V$  t.q.  $[T]_B$  es una forma de Jordan.

En tal caso  $B$  se dice **base de Jordan para  $T$**  y la matriz  $[T]_B$  **una forma de Jordan para  $T$** .

**Demostración.**

Realizaremos la prueba por inducción sobre  $n$ .

$n = 1$  es trivial.

Supongamos que el teorema es verdadero para todo  $V$  con  $\dim(V) = m < n$ . Sea  $V$   $F$ -ev con  $\dim(V) = n$  y sea  $T \in L(V)$  t.q.  $m_T(X)$  se factoriza linealmente en  $F$ .

Si  $m_T(X) = (X - \lambda)^k$  ya vimos que en este caso el teorema se verifica.

Supongamos que  $T$  tiene al menos dos autovalores distintos y sea  $\lambda = \lambda_1 \in F$  uno de los autovalores.

Entonces  $m_T(X) = (X - \lambda)^k q(X)$ , con  $gr(q) \geq 1$  y  $((X - \lambda)^k, q(X)) = 1$ .

Por el lema anterior, tenemos que  $V = \ker((T - \lambda id_V)^k) \oplus \ker(q(T))$ , y cada uno de estos sumandos es un sev  $T$ -invariante.

Además, como  $\lambda$  es autovalor (y no el único),

$$\bar{0} \subsetneq \ker((T - \lambda id_V)^k) \subsetneq V.$$

Luego,  $0 < \dim(\ker((T - \lambda id_V)^k)) < n$  y  $0 < \dim(\ker(q(T))) < n$ .

Considerando las restricciones  $T_1 : \ker((T - \lambda id_V)^k) \rightarrow \ker((T - \lambda id_V)^k)$  y  $T_2 : \ker(q(T)) \rightarrow \ker(q(T))$  sigue que, por hipótesis de inducción, existe una base  $B_1$  de  $\ker((T - \lambda id_V)^k)$  y una base  $B_2$  de  $\ker(q(T))$  t.q.  $[T_1]_{B_1} = J_1$  y  $[T_2]_{B_2} = J_2$  son formas de Jordan.

Entonces, tomando  $B = B_1 \cup B_2$  base de  $V$ , sigue que  $[T]_B = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$ .

Como  $\lambda$  es raíz del polinomio minimal  $m_{T_1}$  y no es raíz de  $m_{T_2}$ , no es raíz de  $q(X)$ , luego  $J_2$  no tiene bloques de Jordan asociados al autovalor  $\lambda$ .

Así, resulta  $[T]_B = J$  forma de Jordan.

□

En general, la construcción general la hacemos como sigue: si  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son autovalores distintos de  $T$ , y  $m_T(X) = (X - \lambda_1)^{k_1} \dots (X - \lambda_r)^{k_r}$ , tenemos que

$$V = \ker((T - \lambda_1 id_V)^{k_1}) \oplus \dots \oplus \ker((T - \lambda_r id_V)^{k_r}).$$

Podemos obtener una forma de Jordan p.c. una de las restricciones  $T_1, \dots, T_r$  a los sev invariantes  $\ker((T - \lambda_i id_V)^{k_i})$ , y obtener asimismo las bases de Jordan  $B_i$  correspondientes. Entonces  $B = B_1 \cup B_r$  es una base de Jordan de  $V$  y  $[T]_B$  es una forma de Jordan de  $T$ .

Para matrices complejas, el resultado de existencia se traduce en:

**Teorema 6**  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Entonces  $A \sim J$ ,  $J$  forma de Jordan.

**Observaciones 4** Si  $B$  base de  $F^n$  t.q.  $[T]_B$  forma de Jordan, llamamos a  $B$  **base de Jordan para  $A$**  y a  $[T]_B$  **forma de Jordan para  $A$** .

**Ejemplo 1**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ . Hallar una forma de Jordan semejante a  $A$  y una base

de Jordan.

Veamos ahora la *unicidad* de la forma de Jordan, que entenderemos siempre *unicidad salvo el orden en el que aparecen los bloques de Jordan con respecto a autovalores distintos*.

**Teorema 7**  $V$   $F$ -ev,  $\dim(V) = n$ ,  $T \in L(V)$  t.q.  $m_T(X)$  se factoriza linealmente sobre  $F$ . Entonces existe una única forma de Jordan  $J \in F^{n \times n}$ , salvo por el orden de sus bloques, t.q. para alguna base  $B$  de  $V$ ,  $[T]_B = J$ .

**Demostración.**

Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $V$  tq  $[T]_B = J \in F^{n \times n}$  forma de Jordan:

$$[T]_B = J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s) \end{pmatrix},$$

donde p.c.  $1 \leq i \leq s$ ,  $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$  denota la matriz formada por todos los bloques de Jordan de autovalor  $\lambda_i$  que aparecen en  $J$ , y  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ .

Tenemos que  $\chi_T(X) = \chi_J(X) = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{d_i}$ . Entonces  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  son los autovalores de  $T$  y p.c.  $1 \leq i \leq s$ ,  $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_T)$ .

P.c.  $1 \leq i \leq s$ ,  $m_{J_i(\lambda_i)}(X) = (X - \lambda_i)^{k_i}$  p.a.  $1 \leq k_i \leq d_i$ . Entonces  $m_T(X) = m_J(X) \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{k_i}$ , con lo que p.c.  $1 \leq i \leq s$ ,  $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_T)$ .

Sea  $\lambda$  uno de los autovalores de  $T$  y sea  $k = \text{mult}(\lambda, m_T)$ . S.p.g. supongamos que  $\lambda = \lambda_1$ . Observemos que

$$J - \lambda I_n = \begin{pmatrix} J_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2 - \lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s(\lambda_s - \lambda) \end{pmatrix},$$

de donde

$$(J - \lambda I_n)^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (J_2(\lambda_2 - \lambda))^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (J_s(\lambda_s - \lambda))^k \end{pmatrix}.$$

Puesto que  $(J_i(\lambda_i - \lambda))^k$  es inversible p.c.  $2 \leq i \leq s$ , tenemos que  $\ker((J_i(\lambda_i - \lambda))^k) = \text{span}\{e_1, \dots, e_{d_1}\}$ .

Teniendo en cuenta que  $J = [T]_B$ , resulta que  $J - \lambda I_n = [T - \lambda \text{id}_V]_B$ .

Luego,  $\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) = \text{span}\{v_1, \dots, v_{d_1}\}$ .

La restricción  $T_1 = (T - \lambda \text{id}_V)|_{\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) : \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k) \rightarrow \ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)}$  es una tl nilpotente, luego tiene una única forma de Jordan nilpotente  $J_1$  asociada.

Sea  $B_1 = \{v_1, \dots, v_{d_1}\}$  base de  $\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)$ . Observemos que

$$[T_1]_{B_1} = [T|_{\ker((T - \lambda \text{id}_V)^k)}]_{B_1} - \lambda I_{d_1} = J_1(0).$$

Como  $J_1(0)$  es una forma de Jordan nilpotente, debe ser la forma de Jordan  $J_1$  de  $T_1$ .

Así,  $J_1(\lambda_1) = J_1 + \lambda I_{d_1}$  está unívocamente determinada por  $T$  (pues ambos sev invariante y t.l. restricción sólo dependen de  $T$  y no de la base).

Haciendo lo mismo p.c.  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , resulta que  $J_i(\lambda_i) \in F^{d_i \times d_i}$  satisface  $J_i(\lambda_i) = J_i + \lambda I_{d_i}$ , donde  $d_i = \text{mult}(\lambda_i, \chi_T)$  y si  $k_i = \text{mult}(\lambda_i, m_T)$  entonces  $J_i$  es la forma de Jordan nilpotente de la restricción  $T_i = (T - \lambda_i \text{id}_V)|_{\ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i}) : \ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i}) \rightarrow \ker((T - \lambda_i \text{id}_V)^{k_i})}$ .

Por lo tanto la forma de Jordan de  $T$  está unívocamente determinada por  $T$ , salvo el orden de los bloques correspondientes a los distintos autovalores de  $T$ .

□

Matricialmente, como todo polinomio se factoriza linealmente en  $\mathbb{C}[X]$ , tenemos

**Teorema 8**  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $J_A$  y  $J_B$  formas de Jordan de  $A$  y  $B$ , respectivamente. Entonces  $A \sim B$  sii  $J_A = J_B$  (salvo el orden de los bloques).

**Demostración:** EJERCICIO.

□

**Ejemplo 2**  $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ . Veamos que  $A \sim B$  sii  $\chi_A = \chi_B$  y  $m_A = m_B$ . Veamos también que esto es falso en  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ .

### 3. Profe, ¿y ésto para qué sirve?

Hay muchísimas aplicaciones de la teoría de autovalores y autovectores, les dejo indicadas algunos ejemplos de la bibliografía por si tienen curiosidad:

En el libro de David Poole (ver bibliografía, capítulo 4 sección 6) se muestran diversos ejemplos, a saber:

- Cadenas de Markov (teoría de probabilidad),
- Crecimiento poblacional (biología, economía)
- Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales,
- Sistemas dinámicos lineales discretos,
- Relaciones de recurrencia lineal,
- Clasificación de equipos deportivos,
- Búsqueda en internet.

Observemos que para ello debe desarrollar el teorema de Perron-Frobenius.

En el libro de Jim Hefferon (ver bibliografía, capítulo 5, tópicos) se desarrollan los siguientes ejemplos:

- Estabilidad de poblaciones (en Poole se describe como crecimiento poblacional),
- Page ranking (en Poole es la búsqueda en internet),

- Oscilaciones acopladas (física),
- Recurrencia lineal.

Para ello, nuevamente desarrolla algunas cuestiones teóricas como ser el método de las potencias.

El libro de Gilbert Strang es quizás el que más aplicaciones tiene. Introduciendo el concepto de Singular Value Decomposition (SVD), en el capítulo 7, describe el estudio del procesamiento de imágenes. En el capítulo 10 el que tiene muchísimas aplicaciones. Nuevamente trabaja con las llamadas matrices de Markov, población y economía.

A modo de continuación de temas vistos en materias anteriores, vamos a ver otra aplicación: ecuación general de segundo grado en dos (cónicas) y tres variables (cuádricas). Dejo también, para quienes ya han estudiado Proba, delineada otra aplicación.

### 3.1. Curvas planas de segundo grado

Una curva plana de segundo grado responde a una ecuación cuadrática con dos variables cuya expresión es

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

donde  $a_{11}, a_{12}, a_{13}$  no se anulan simultáneamente.

- La expresión  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$  se denomina **forma cuadrática** y se la puede expresar matricialmente como

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde  $a_{21} = a_{12}$ .

- La expresión  $2a_{13}x + 2a_{23}y$  se denomina **forma lineal** y se la puede expresar matricialmente como

$$2a_{13}x + 2a_{23}y = (a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Luego, la ecuación cuadrática (1) se expresa en forma matricial como

$$(x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (a_{13}, a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0, \quad (2)$$

y si ponemos  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ,  $B = (a_{13}, a_{23})$  y  $C = a_{33}$ , la ecuación cuadrática matricial se reescribe como

$$(x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + C = 0. \quad (3)$$

Es posible hallar una matriz diagonal  $D$  semejante a  $A$

$$D = Q^{-1}AQ.$$

de modo tal que la matriz semejanza  $Q = Q_{B \rightarrow E} = C_{B \rightarrow E}$  sea una matriz ortogonal (lo que implica que  $Q^t = Q^{-1}$ ) de cambio de bases entre dos bases ortonormales  $E$  y  $B$ . Luego, si hacemos

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_E = C_{B \rightarrow E} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}_B$$

, sigue (transponiendo  $[(x, y)]_E = [(x', y')]_B Q_{B \rightarrow E}^t$ ) que:

$$(x', y') D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + BQ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + C = 0, \quad (4)$$

donde  $D = Q^t A Q$ .

Esta expresión permite eliminar el término rectangular  $xy$  y si se efectúa una traslación de ejes paralelos conveniente, se obtiene la ecuación canónica de la cónica dada.

La matriz diagonal  $D$  está formada por los autovalores asociados a la matriz  $A$ , es decir  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

reemplazando en la ecuación (4), la ecuación de la cónica queda de la forma :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0,$$

que reescribimos como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2bx' + 2cy' + d = 0. \quad (5)$$

- Si  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ , y completamos cuadrados en (5), resulta

$$\lambda_1 \left( x' + \frac{b}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y' + \frac{c}{\lambda_2} \right)^2 + K = 0.$$

Traslademos el origen de coordenadas al punto  $\left( -\frac{b}{\lambda_1}, -\frac{c}{\lambda_2} \right)$ , conservando las direcciones de los ejes: esto es, efectuar la sustitución  $x'' = x' + \frac{b}{\lambda_1}$  y  $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$ . Luego, (5) se reduce a

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + K = 0.$$

- Si  $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) = \text{sgn}(K)$ , el lugar geométrico es el conjunto vacío.
- Si  $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) \neq \text{sgn}(K)$ , el lugar geométrico es una elipse, y si además  $\lambda_1 = \lambda_2$ , se trata de una circunferencia.
- Si  $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2)$  y  $K = 0$ , el lugar geométrico es un punto.
- Si  $\text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2)$  y  $k \neq 0$ , el lugar geométrico es una hipérbola.
- Si  $\text{sgn}(\lambda_1) \neq \text{sgn}(\lambda_2)$  y  $k = 0$ , el lugar geométrico es un par de rectas coincidentes.
- Si  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ , digamos con  $\lambda_2 \neq 0$ , la ecuación (5) toma la forma

$$\lambda_2 y'^2 + 2bx' + 2cy' + d = 0.$$

- Si  $b \neq 0$ , reescribimos la ecuación como

$$\begin{aligned} \lambda_2 \left[ y'^2 + \frac{2c}{\lambda_2} y' + \frac{c^2}{\lambda_2^2} - \frac{c^2}{\lambda_2^2} \right] + 2bx' + d &= 0, \\ \lambda_2 \left[ y'^2 + \frac{2c}{\lambda_2} y' + \frac{c^2}{\lambda_2^2} \right] - \frac{c^2}{\lambda_2^2} + 2bx' + d &= 0, \\ \lambda_2 \left( y' + \frac{c}{\lambda_2} \right)^2 + 2b \left( x' + \frac{d}{2b} - \frac{c^2}{2b\lambda_2^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Trasladamos el origen de coordenadas mediante las ecuaciones  $x'' = x' + \frac{d}{2b} - \frac{c^2}{2b\lambda_2}$  y  $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$ , luego obtenemos

$$\lambda_2 y''^2 + 2bx'' = 0,$$

que representa una parábola.

- Si  $b = 0$ , reescribimos la ecuación como

$$\lambda_2 \left( y' + \frac{c}{\lambda_2} \right)^2 + d - \frac{c^2}{\lambda_2} = 0,$$

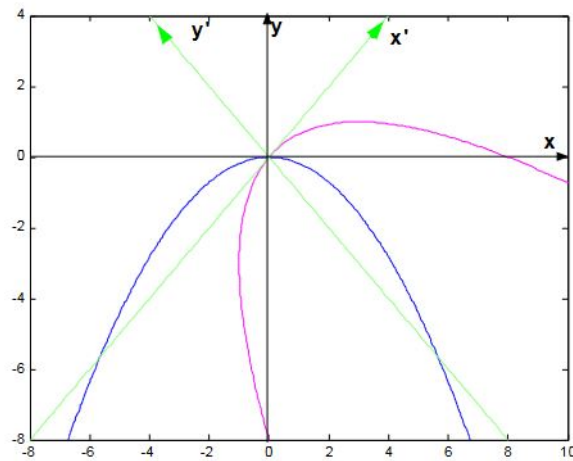
y sustituyendo  $y'' = y' + \frac{c}{\lambda_2}$  resulta

$$\lambda_2 y''^2 + K = 0,$$

donde  $K = d - \frac{c^2}{\lambda_2}$ .

- Si  $K\lambda_2 < 0$ , se obtienen dos rectas paralelas.
- Si  $K = 0$ , se obtienen dos rectas coincidentes.
- Si  $K\lambda_2 > 0$ , se obtiene el conjunto vacío.

**Ejemplo 3** Identificar el lugar geométrico  $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$ .



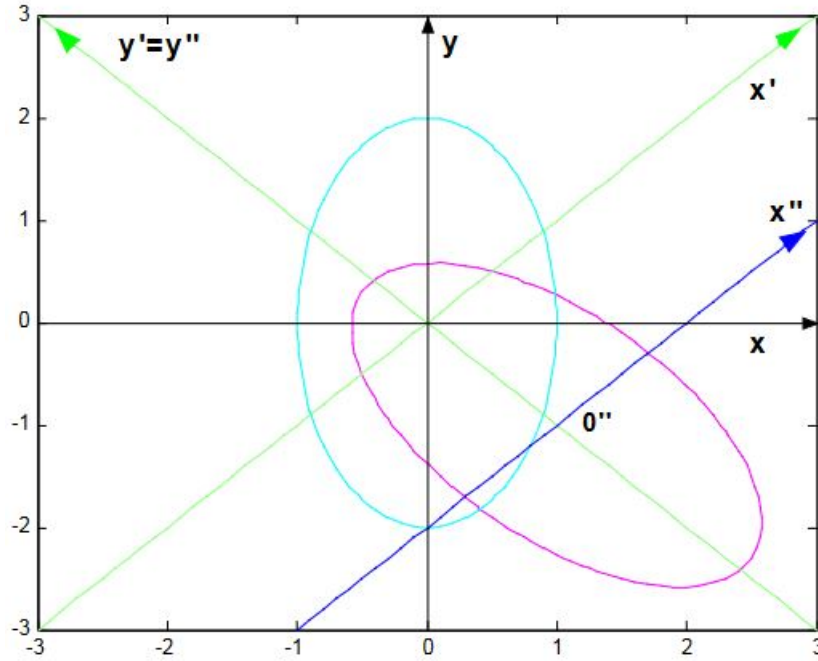
$$x''^2 = -\frac{8}{\sqrt{2}}y''.$$

## EJERCICIOS

- $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$ .
- $25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$ .

## Soluciones

- Elipse  $x''^2 + \frac{y''^2}{4} = 1$ .



- Dos rectas paralelas  $26y'^2 - 1 = 0$ .

### 3.2. Superficies cuádricas

Una superficie cuádrica responde a una ecuación cuadrática con tres variables cuya expresión es:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0,$$

donde el coeficiente de al menos un término de grado dos es distinto de cero. La ecuación anterior se puede expresar matricialmente de la siguiente forma:

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{14}, a_{24}, a_{34}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0,$$

o de otra forma,

$$(x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + C = 0.$$

Nuevamente, sea  $D$  la matriz diagonal semejante a  $A$ , por lo tanto  $D = Q^{-1}.A.Q$ , donde  $Q$  es la matriz ortogonal de cambio de bases entre dos bases ortonormales  $E$  (base canónica) y  $B$ , por lo que se puede escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_E = C_{B \rightarrow E} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B,$$

y trasponiendo

$$(x, y, z)_E = (x', y', z')_B Q_{B \rightarrow E}^t.$$



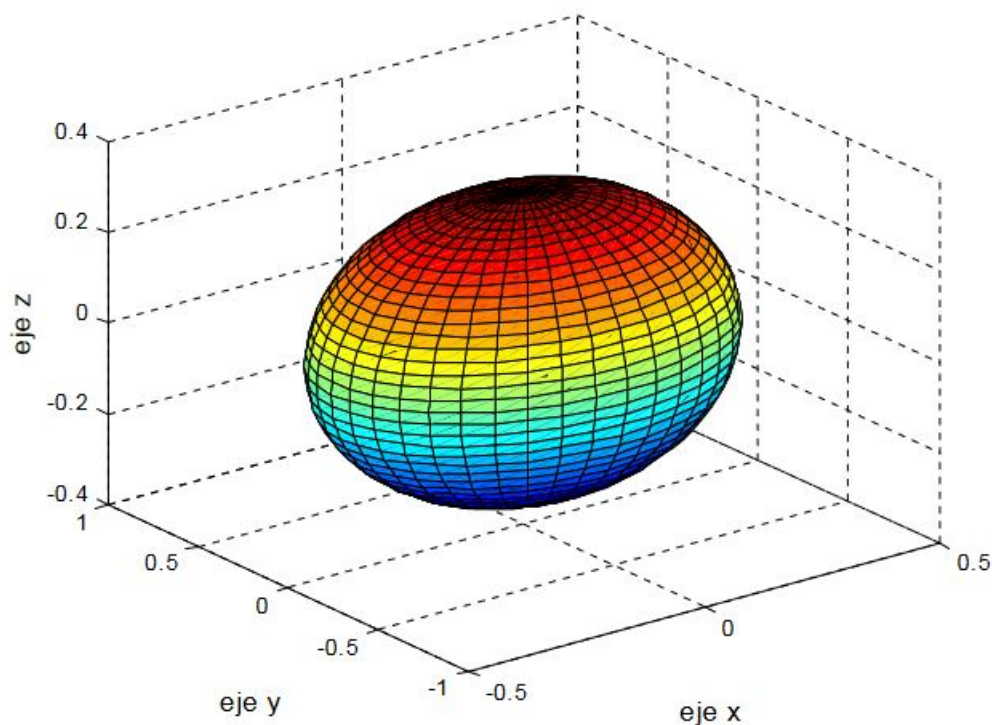
Reemplazando, obtenemos finalmente

$$(x', y', z')D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + BQ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + C = 0.$$

Esta expresión permite eliminar los términos rectangulares  $xy$ ;  $xz$  y el  $yz$ ; si se efectúa una traslación de ejes paralelos conveniente, se obtiene la ecuación canónica de la cuádrica dada. La matriz diagonal  $D$  está formada por los autovalores asociados a la matriz  $A$ . Se presenta un esquema de clasificación de las Superficies Cuádricas:

Autovalores: $\Lambda_1; \Lambda_2; \Lambda_3$	Superficie cuádrica. ( o Cuádricas degeneradas)
Todos del mismo signo.	Elipsoide.
Signos distintos.	Hiperboloide de una o dos hojas. Superficie cónica.
Uno nulo y dos del mismo signo .	Paraboloide elíptico o circular. Cilindro elíptico o circular.
Uno nulo y dos de distinto signo.	Paraboloide hiperbólico o cilindro hiperbólico.
Dos nulos.	Cilindro Parabólico o dos planos paralelos.

**Ejemplo 4** Identificar el lugar geométrico  $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 + 4xy + 4yz - 1 = 0$ .



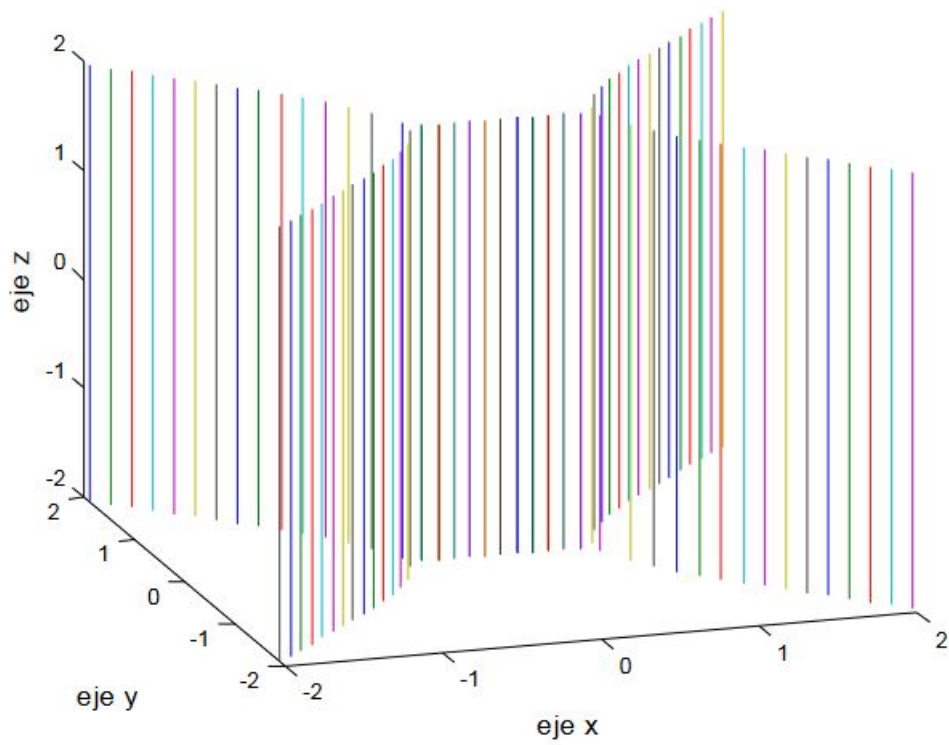
$$6x'^2 + 3y'^2 + 9z'^2 = 1.$$

## EJERCICIOS

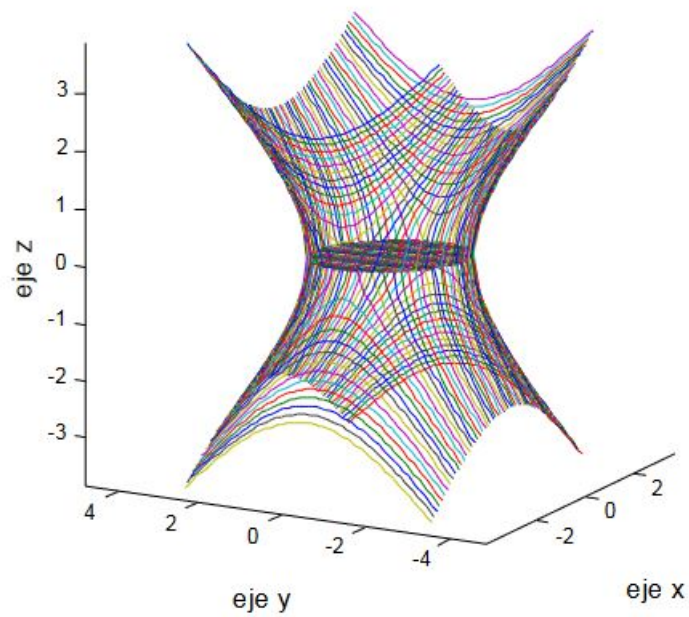
- $4xy + 4xz = 1$ .
- $x^2 + 2yz + 4x + 1 = 0$ .

## Soluciones

- Cilindro hiperbólico  $\sqrt{8}x'^2 - \sqrt{8}y'^2 - 1 = 0$ .

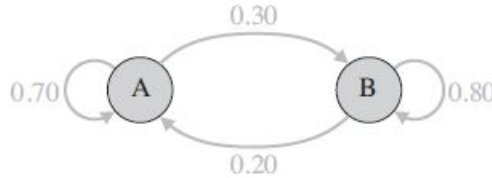


- Hiperboloide de una hoja  $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 3$ .



### 3.3. Cadenas de Markov (Probabilidad)

Un equipo de investigación de mercado realiza un estudio controlado para determinar qué dentífricos prefieren las personas. La muestra consiste de 200 personas, y a cada una se le pide probar dos marcas de dentífrico durante un periodo de varios meses. Con base en las respuestas de la encuesta, el equipo de investigación compila las siguientes estadísticas acerca de las preferencias de dentífrico. De quienes usan la marca A en cualquier mes, 70 por ciento siguen usándola el mes siguiente, mientras que 30 por ciento cambia a la marca B; de quienes usan la marca B en cualquier mes, 80 por ciento siguen usándola el mes siguiente, mientras que 20 por ciento cambian a la marca A. Estos hallazgos se resumen en la figura, en la que los porcentajes se convirtieron en decimales; se pensará en ellos como probabilidades.



La figura es un ejemplo simple de una **cadena de Markov** (finita). Representa un proceso evolutivo que consiste de un número finito de estados. En cada paso o punto en el tiempo, el proceso puede estar en cualquiera de los estados; en el paso siguiente, el proceso puede permanecer en su estado presente o cambiar a uno de los otros estados. El estado hacia donde avanza el proceso en el siguiente paso y la probabilidad de hacerlo depende solamente del estado presente y no de la historia pasada del proceso. Estas probabilidades se conocen como probabilidades de transición y se suponen constantes (esto es: la probabilidad de moverse del estado  $i$  al estado  $j$  siempre es la misma).

En el estudio de dentífricos descrito anteriormente, existen sólo dos estados (usar la marca A y usar la marca B) y las probabilidades de transición son las indicadas en la figura. Suponga que, cuando comienza el estudio, 120 personas usan la marca A y 80 personas usan la marca B. ¿Cuántas personas usarán cada marca 1 mes más tarde? ¿Y 2 meses más tarde?

Veamos. El número de usuarios de la marca A después de 1 mes será 70 por ciento de los que inicialmente usan la marca A (quienes siguen siendo leales a la marca A) más 20 por ciento de los usuarios de la marca B (quienes cambian de B a A):

$$0,70 \cdot 120 + 0,20 \cdot 80 = 100.$$

De igual modo, el número de usuarios de la marca B después de 1 mes será una combinación de quienes cambian a la marca B y quienes siguen usándola:

$$0,30 \cdot 120 + 0,80 \cdot 80 = 100.$$

Estas dos ecuaciones pueden resumirse en una sola ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0,70 & 0,20 \\ 0,30 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Esto lo resumimos con  $PX_0 = X_1$ , donde las componentes de cada vector son el número de usuarios de las marcas A y B, en ese orden, después del número de meses indicado por el subíndice.

Extendemos esta notación: sea  $X_k$  el vector cuyas componentes registran la distribución de usuarios de dentífrico después de  $k$  meses. Para determinar el número de usuarios de cada marca después de transcurridos 2 meses, simplemente aplique el mismo razonamiento comenzando con  $X_1$  en lugar de  $X_0$ :

$$X_2 = PX_1 = \begin{pmatrix} 90 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Los vectores  $X_k$  se llaman vectores de estado de la cadena de Markov, y la matriz  $P$  se llama matriz de transición. Una cadena de Markov satisface la relación

$$X_{k+1} = PX_k, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Así, es posible calcular un vector de estado arbitrario de manera iterativa una vez se conoce  $X_0$  y  $P$ . En otras palabras, una cadena de Markov está completamente determinada por sus probabilidades de transición y su estado inicial.

Para trabajar con estos datos generalmente es preciso normalizarlos, de modo de trabajar con los números relativos que usan cada marca en lugar de los números reales de usuarios de dentífrico. Es decir, convertir los datos en porcentajes o fracciones al dividir el número total de usuarios entre 200. Trabajaremos entonces con, por ejemplo

$$X_0 = \begin{pmatrix} \frac{120}{200} \\ \frac{80}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,60 \\ 0,40 \end{pmatrix}.$$

Los vectores como este, con componentes no negativos que suman 1, se llaman vectores de probabilidad.

Observemos cómo se ordenan las probabilidades de transición dentro de la matriz de transición  $P$ . Podemos considerar a las columnas como etiquetadas con los estados presente y los renglones o filas como etiquetados con los estados siguiente:

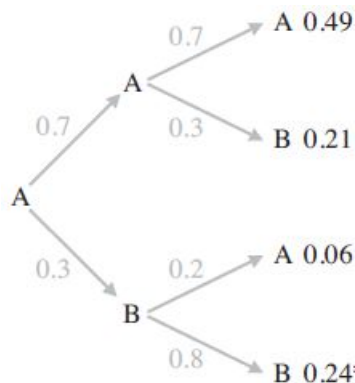
	<i>Presente</i>	
	A	B
<i>Siguiente</i>	A	$\begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \end{bmatrix}$
	B	$\begin{bmatrix} 0.30 & 0.80 \end{bmatrix}$

Las columnas de  $P$  son vectores de probabilidad; cualquier matriz cuadrada con esta propiedad se llama matriz estocástica.

Hay otra forma en que podemos describir a las cadenas de Markov. Observemos que  $X_2 = PX_1 = P^2X_0$ , y

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,30 \\ 0,45 & 0,70 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que, por ejemplo, la entrada  $[P^2]_{21} = 0,45$ . Una forma de ver de dónde provienen estas probabilidades es con el siguiente diagrama de árbol:



Existen cuatro posibles cambios de estado que pueden ocurrir durante 2 meses y corresponden a las cuatro ramas (o rutas) de longitud 2 en el árbol. Alguien que inicialmente use la marca A puede terminar usando la marca B dos meses después en dos formas diferentes: la persona puede seguir usando A después de 1 mes y luego cambiar a B (con probabilidad  $0,7 \cdot 0,3 = 0,21$ , o la persona puede

cambiar a B después de 1 mes y luego seguir con B (con probabilidad  $0,3 \cdot 0,8 = 0,24$ . La suma de estas probabilidades produce una probabilidad global de 0,45. Observe que dichos cálculos son exactamente lo que se hizo cuando se calculó  $[P^2]_{21}$ . Se tiene que  $[P^2]_{21} = 0,45$  representa la probabilidad de moverse del estado 1 (marca A) al estado 2 (marca B) en dos transiciones. Notemos que el orden de los subíndices es el inverso del que pudo suponer.

En general:

- $X_k = P^k X_0$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$
- Se puede probar que  $P^k$  es otra matriz estocástica.
- $[P^k]_{ij}$  es la probabilidad de moverse del estado  $j$  al estado  $i$  en  $k$  transiciones.

¿Qué sucederá con la distribución de usuarios de dentífrico a largo plazo? Iteremos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.50 \\ 0.50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_3 &= P\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.20 \\ 0.30 & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.45 \\ 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.425 \\ 0.575 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0.412 \\ 0.588 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 0.406 \\ 0.594 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_6 &= \begin{bmatrix} 0.403 \\ 0.597 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 0.402 \\ 0.598 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.599 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.600 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 0.600 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Parece que los vectores de estado se aproximan (o convergen) al vector  $\begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,60 \end{pmatrix}$ , lo que implica que,

a la larga, 40 por ciento de los usuarios de dentífrico en el estudio usarán la marca A y 60 por ciento usarán la marca B. De hecho, es fácil comprobar que, una vez alcanzada esta distribución, nunca cambiará.

Un vector de estado  $\mathbf{x}$  con la propiedad de que  $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$  se llama vector de estado estacionario.

En general, si  $P$  es la matriz de transición de una cadena de Markov, entonces  $P$  tiene un vector de estado estacionario  $\mathbf{x}$ . Esto es, existe un vector  $\mathbf{x}$  tal que  $P\mathbf{x} = \mathbf{x}$ . Y esto no es otra cosa que decir que  $P$  tiene 1 como autovalor.

**Proposición 4** Si  $P$  es la matriz de transición de  $n \times n$  para una cadena de Markov, entonces 1 es un autovalor de  $P$ .

Y más aún, para la mayoría de las matrices de transición, todo autovalor  $\lambda$  satisface  $|\lambda| \leq 1$  y el autovalor 1 es dominante; esto es, si  $\lambda \neq 1$ , entonces  $|\lambda| < 1$ . Una matriz se llama positiva si todas sus entradas son positivas, y una matriz cuadrada se llama regular si alguna de sus potencias es positiva.

**Proposición 5** Si  $P$  es la matriz de transición de  $n \times n$  para una cadena de Markov y  $\lambda$  es un autovalor, entonces  $|\lambda| \leq 1$ . Si además  $P$  es regular y  $\lambda \neq 1$  entonces  $|\lambda| < 1$ .