# PRÁCTICA 6 - Relaciones, Funciones y Operaciones

## Relaciones

1. Si $U = \mathbb{N}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5\}$ y $C = \{3, 4, 7\}$, determinar los siguientes conjuntos, graficarlos como subconjuntos del plano y hallar dominio e imagen:

   *a*) $A \times B$
   *b*) $B \times A$
   *c*) $(A \times A) \cup (B \times C)$
   *d*) $(A \cup B) \times C$
   *e*) $(A \times C) \cup (B \times C)$

2. Sean $U = \mathbb{R}$, $A = [1, 2)$, $B = [2, 3]$, $C = (\frac{3}{2}, 3) \subseteq \mathbb{R}$. Determinar gráficamente en $\mathbb{R}^2$:

   *a*) $A \times C$
   *b*) $B \times C$
   *c*) $(A \cup B) \times C$
   *d*) $(A \times C) \cup (B \times C)$
   *e*) $(A \cap C) \times C$

   En cada caso determinar un punto del plano que pertenezca al conjunto dado y uno que no.

3. Sean $A, B, C, D$ subconjuntos no vacíos de un universo $U$. Demostrar que

   *a*) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$.
   *b*) $A \times B \subseteq C \times D$ si y sólo si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$.

4. *a*) ¿Para qué conjuntos $A, B \subseteq U$ se verifica $A \times B = B \times A$?
   *b*) ¿Existe alguna relación entre $P(A \times B)$ y $P(A) \times P(B)$?

5. Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ dar ejemplos de:

   *a*) Tres relaciones binarias no vacías de $A$ en $B$. Graficar $A \times B$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.
   *b*) Tres relaciones binarias no vacías en $A$. Graficar $A^2 = A \times A$ y las tres relaciones como subconjuntos del plano.

6. Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, expresar por extensión el subconjunto $R$ de $A \times B$ definido por:

   *a*) $(x, y) \in R$ si y sólo si $x+y$ es múltiplo de 3.
   *b*) $xRy$ si y sólo si $y - x$ es primo.

7. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Expresar por extensión el subconjunto $R$ de $A \times A$ definido por las relaciones siguientes:

   *a*) $(x, y) \in R$ si $x + y \leq 6$.
   *b*) $x\ R\ y$ si $x = y - 1$.

8. Esbozar la gráfica de cada una de las relaciones siguientes de $A$ en $B$ y determinar su imagen.

    *a*) $\{(x,y)/x < y \leq 0\} \quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$.
    *b*) $\{(2,1),(3,4),(1,4),(2,1),(4,4)\} \quad A = \{1,2,3,4,5\} \quad B = \{1,2,3,4\}$.
    *c*) $\{(x,y)/0 \leq x < 1, y \geq x\} \quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$.
    *d*) $\{(x,y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\} \quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$.
    *e*) $\{(x,y)/x \in \mathbb{N}, y = \sqrt{x}\} \quad A = \mathbb{N} \quad B = \mathbb{R}$.
    *f*) $\{(x,\sqrt{x}), x \in \mathbb{R}\} \quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}_0^+$.

9. Para cada una de las relaciones de los ejercicios 6 y 7 determinar $R(1)$, $R(3)$, $R^{-1}(4)$, $R^{-1}(5)$.

10. Con referencia a las relaciones del ejercicio 8, hallar:

    *a*) En (a), $R((-1,\frac{1}{2}))$, $R([-3,5])$, $R(\mathbb{Z})$, $R^{-1}([-4,2])$, $R^{-1}(\{-7\})$, $R^{-1}(\mathbb{N})$.
    *b*) En (b), $R(\{5\})$, $R(\{2,3,5\})$, $R()$, $R^{-1}(\{1,3\})$, $R^{-1}(\{1\})$, $R^{-1}()$.
    *c*) En (d), $R((5,6))$, $R([3,5])$, $R((3,5))$, $R^{-1}(\mathbb{R}_0^+)$, $R^{-1}((-4,4])$, $R^{-1}((1,\frac{12}{10}))$.

11. Sean $A$, $B$ y $C$ conjuntos, $R$ una relación de $A$ en $B$ y $S$ una relación de $B$ en $C$. Hallar, en cada caso $S \circ R$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$ sus dominios e imágenes.

    *a*) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$ y $C = \{0,1,2\}$.
    $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$, $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$
    *b*) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ y $C = \{s,t,u\}$.
    $R = \{(1,2),(1,6),(2,4),(3,4),(3,6),(3,8)\}$, $S = \{(2,u),(4,s),(4,t),(6,t),(8,u)\}$
    *c*) $A = \{a,b,c,d\}$, $B = \{s,t,u,v\}$ y $C = \{1,2,3,4,5\}$.
    $R = \{(a,s),(a,t),(c,v),(d,u)\}$, $S = \{(s,2),(t,1),(t,4),(u,3)\}$

12. Sean $A = \{1,2,4\}$, $B = \{1,3,4\}$ y sean $R = \{(1,3),(1,4),(4,4)\}$ una relación de $A$ en $B$ y $S = \{(1,1),(3,4),(3,2)\}$ una relación de $B$ en $A$. Hallar:

    *a*) $S \circ R$
    *b*) $R \circ S$
    *c*) $Dom(S \circ R)$
    *d*) $Dom(R \circ S)$
    *e*) $Im(S \circ R)$
    *f*) $Im(R \circ S)$

## Relaciones en un conjunto

13. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación $R$ definida en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, transitiva o antisimétrica. Para los casos $a, b, c, d$ y $e$ determinar $R(1)$ y $R^{-1}(1)$.

    *a*) $(x,y) \in R$ si $x = y^2$;
    *b*) $(x,y) \in R$ si $x > y$;
    *c*) $(x,y) \in R$ si $x \geq y$;
    *d*) $(x,y) \in R$ si $x + y$ es par;
    *e*) $(x,y) \in R$ si $x - y$ es impar;
    *f*) $(x,y) \in R$ si $x^3 + y^3$ es par.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Proporcionar ejemplos de relaciones en $A$ que tengan las propiedades especificadas en cada caso.

    *a*) Reflexiva, simétrica y no transitiva.
    *b*) Reflexiva, no simétrica y no antisimétrica.
    *c*) Reflexiva, antisimétrica y no transitiva.
    *d*) No reflexiva, simétrica y transitiva.

15. Sean $R_1$ y $R_2$ relaciones reflexivas en un conjunto $A$. Determinar si cada una de las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta:

    *a*) $R_1 \cup R_2$ es reflexiva;
    *b*) $R_1 \cap R_2$ es reflexiva;
    *c*) $R_1 \circ R_2$ es reflexiva.

16. Repetir el ejercicio anterior cambiando “reflexiva"por simétrica, antisimétrica o transitiva.

17. Sea $A$ un conjunto finito no vacío con $|A| = n$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

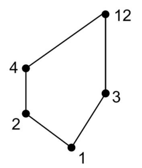
    *a*) Si $R$ es una relación reflexiva sobre $A$, entonces $|R| \geq n$.
    *b*) Si $R_1$ y $R_2$ son relaciones en $A$ y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si $R_1$ es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces $R_2$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).
    *c*) Si $R_1$ y $R_2$ son relaciones en $A$ y $R_1 \subseteq R_2$ entonces, si $R_2$ es reflexiva (simétrica, antisimétria o transitiva), entonces $R_1$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétria o transitiva).

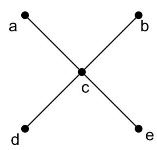
## Relaciones de orden

18. Determinar el diagrama de Hasse para el conjunto parcialmente ordenado $(P(X), \subseteq)$, con $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

19. Sea $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ y $R$ la relación en $A$ dada por $x\ R\ y$ si $x$ divide a $y$. Mostrar que es una relación de orden y trazar el diagrama de Hasse correspondiente.

20. Los siguientes son diagramas de Hasse correspondientes a un conjunto parcialmente ordenado $(A, R)$. Determinar $A$ y $R$ en cada caso.






21. Definimos en $\mathbb{C}$ la relación $z_1 R z_2$ si $|z_1| \leq |z_2|$. ¿Es una relación de orden? Determinar sus propiedades. Dado $z_0$ fijo, determinar geométricamente el conjunto $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : z\ R\ z_0\}$ y $B_2 = \{z \in \mathbb{C} : z_0\ R\ z\}$.

22. Determinar los elementos maximales, minimales, máximos y mínimos de cada una de las relaciones de los ejercicios 18, 19 y 20.

23. Sea $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(A, \subseteq)$, con $A = \mathcal{P}(X)$. Para cada uno de los siguientes subconjuntos $B$ de $A$, determine el ínfimo y el supremo de $B$.

    *a*) $B = \{\{1\}, \{2\}\}$;
    *b*) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$;
    *c*) $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$;
    *d*) $B = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
    *e*) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$;
    *f*) $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

24. Definimos en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathbb{R}$ por $x\ R\ y$ si $x - y$ es un entero par no negativo. Probar que $R$ es un orden parcial en $\mathbb{Z}$. ¿Es un orden total?

25. Dados dos conjuntos $X_1$ y $X_2$, sean $R_1$ un orden parcial en $X_1$ y $R_2$ un orden parcial sobre $X_2$. Probar que $R$ es un orden parcial en $X_1 \times X_2$, donde

$$(x_1, x_2)\ R\ (y_1, y_2) \text{ si } x_1\ R_1\ y_1 \text{ y } x_2\ R_2\ y_2.$$

26. Probar que $(\mathbb{R}, \leq)$ es totalmente ordenado. ¿Lo es $(\mathbb{R}^2, R)$, donde $R$ es la relación definida en el ejercicio 25?

27. Sea $(X, R)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq X$.

    *a*) Mostrar que $R_B = (B \times B) \cap R$ define un orden parcial en $B$.
    *b*) Mostrar que si $(X, R)$ es totalmente ordenado, entonces $(B, R_B)$ es totalmente ordenado.
    *c*) Si $(X, R)$ no es totalmente ordenado, ¿implica esto que $(B, R_B)$ no es totalmente ordenado?

28. Sea $(A, R)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $(A, R)$ es un *retículo* si dados $x, y \in A$ cualesquiera, $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$ existen en $A$.

    *a*) Mostrar que $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$ son retículos.
    *b*) Mostrar que si $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo.
    *c*) Determinar si los conjuntos parcialmente ordenados del ejercicio 20 son retículos.
    *d*) Probar que todo orden total es un retículo. ¿Es un retículo un conjunto totalmente ordenado?

29. Sean $(X_1, R_1)$, $(X_2, R_2)$ conjuntos parcialmente ordenados y consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(X_1 \times X_2, R)$ definido en el ejercicio 25. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente la respuesta.

    *a*) Si $x_0$ es un elemento maximal (o minimal) para $(X_1, R_1)$ e $y_0$ es un elemento maximal (o minimal) para $(X_2, R_2)$ entonces $(x_0, y_0)$ es un elemento maximal (o minimal) para $(X_1 \times X_2, R)$.
    *b*) Si $x_0$ es máximo (o mínimo) para $(X_1, R_1)$ e $y_0$ es un máximo (o mínimo) para $(X_2, R_2)$ entonces $(x_0, y_0)$ es un máximo (o mínimo) para $(X_1 \times X_2, R)$.
    *c*) Si $(X_1, R_1)$ y $(X_2, R_2)$ son totalmente ordenados, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es totalmente ordenado.
    *d*) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si $b_1$ es cota superior (o inferior) de $B_1$ y $b_2$ es cota superior (o inferior) de $B_2$, entonces $(b_1, b_2)$ es cota superior (o inferior) de $B_1 \times B_2$.
    *e*) Sean $B_1 \subset X_1$ y $B_2 \subset X_2$. Si $b_1$ es supremo (o ínfimo) de $B_1$ y $b_2$ es supremo (o ínfimo) de $B_2$, entonces $(b_1, b_2)$ es supremo (o ínfimo) de $B_1 \times B_2$.
    *f*) Si $(X_1, R_1)$ y $(X_2, R_2)$ son retículos, entonces $(X_1 \times X_2, R)$ es un retículo.


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

30. Sea $(A, R)$ un conjunto totalmente ordenado. Se dice que $(A, R)$ está *bien ordenado* si para todo $B \subseteq A$, con $B \neq \emptyset$, el conjunto totalmente ordenado $(B, R_B)$ definido en el ejercicio 27 tiene un elemento mínimo. Determinar si los siguientes conjuntos totalmente ordenados están bien ordenados.

    *a*) $(\mathbb{N}, \leq)$;
    *b*) $(\mathbb{Z}, \leq)$;
    *c*) $(\mathbb{Q}, \leq)$;
    *d*) $(P, \leq)$, donde $P$ es el conjunto de todos los primos;
    *e*) $(A, \leq)$, donde $A$ es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$;
    *f*) $(A, \leq)$, donde $A$ es un subconjunto no vacío finito de $\mathbb{Z}$.

**Relaciones de equivalencia**

31. Determinar si cada una de las colecciones dadas a continuación es o no una partición del conjunto $A$ dado. Justificar por qué.

    *a*) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{4, 5, 6\}$, $A_2 = \{1, 8\}$, $A_3 = \{2, 3, 7\}$.
    *b*) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A_1 = \{1, 3, 4, 7\}$, $A_2 = \{2, 6\}$, $A_3 = \{5, 8\}$.
    *c*) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{Z}$.
    *d*) $A = \mathbb{Z}$, $A_n = \{-n, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
    *e*) $A = \mathbb{R}$, $A_n = (n, n^2)$, $n \in \mathbb{Z}$.
    *f*) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$, $A_n = (n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{B\} \cup \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.
    *g*) $A = \mathbb{C}$, $A_n = \{z \in \mathbb{C} : n - 1 < z \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

32. Analizar, en cada caso, si la relación dada en el conjunto $A$ indicado es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente.

    *a*) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$.
    *b*) $A = \mathbb{Z}$, $xRy \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.
    *c*) $A = \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ fijo, $xRy \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / x - y = kp$.
    *d*) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy > 0$.
    *e*) $A = \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow xy \geq 0$.
    *f*) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $xRy \Leftrightarrow x = y$ o $x + y = 5$.

33. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y $R$ la relación de equivalencia en $A$ que induce la partición $A = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\}$. Dar $R$ por extensión y determinar $R(1)$, $R^{-1}(1)$.

34. En $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tenemos la relación de equivalencia

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

    *a*) Determinar $[1]$, $[2]$ y $[3]$.
    *b*) Determinar la partición de $A$ que induce $R$.
    *c*) Determinar $R(1)$ y $R^{-1}(2)$.

35. Mostrar que para una relación de equivalencia $R$ en $A$, para cada $x \in A$ $R(x) = R^{-1}(x) = [x]$.

36. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, donde $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$ y $A_3 = \{5\}$, definimos la relación $R$ en $A$ por

$$x \; R \; y \text{ si están en el mismo subconjunto } A_i, \text{ para algún } i \in \{1,2,3\}.$$

¿Es $R$ una relación de equivalencia?

37. Para $A = \mathbb{R}^2$ definimos $R$ en $A$ por $(x_1, y_1) \; R \; (x_2, y_2)$ si $x_1 = x_2$.

    *a*) Verificar que $R$ es una relación de equivalencia en $A$.

    *b*) Describir geométricamente las clases de equivalencia y la partición de $A$ inducida por $R$.

38. Definimos la relación $R$ en $\mathbb{N}$ por $x \; R \; y$ si $x/y = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

    *a*) Verificar que $R$ es una relación de equivalencia.

    *b*) ¿Cuántas clases distintas encontramos entre $[1]$, $[2]$, $[3]$ y $[4]$?

39. Considerar en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo $n$, esto es, $x \; R \; y$ si $x - y$ es múltiplo de $n$.

    *a*) Mostrar que $R$ es una relación de equivalencia.

    *b*) Mostrar que $R$ induce la partición $\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \cdots \cup [n-1] = \cup_{i=0}^{n-1} [i]$.

## Funciones

1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso de que lo sea, determinar su imagen:

    *a*) $\mathcal{R} = \{(x,y) \; : \; x, y \in \mathbb{Z}; \; y = x^2 + 7\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

    *b*) $\mathcal{R} = \{(x,y) \; : \; x, y \in \mathbb{R}; \; y^2 = x\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

    *c*) $\mathcal{R} = \{(x,y) \; : \; x, y \in \mathbb{R}; \; y = 3x + 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

    *d*) $\mathcal{R} = \{(x,y) \; : \; x, y \in \mathbb{Q}; \; x^2 + y^2 = 1\}, \mathcal{R}$ es una relación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$.

2. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{2,4,6,8,10,12\}$. Sea $f : A \to B$ la función dada por

$$f = \{(1,2), (2,6), (3,6), (4,8), (5,6), (6,8), (7,12)\}.$$

Determinar la preimagen de $B_1$ mediante $f$ en cada uno de los siguientes casos:

| | | |
|---|---|---|
| *a*) $B_1 = \{2\}$ | *c*) $B_1 = \{6,8\}$ | *e*) $B_1 = \{6,8,10,12\}$ |
| *b*) $B_1 = \{6\}$ | *d*) $B_1 = \{6,8,10\}$ | *f*) $B_1 = \{10,12\}$ |

3. Para cada una de las siguientes funciones, determinar $Im(f)$, $f(A)$ y $f^{-1}(B)$ para los subconjuntos $A$ y $B$ indicados:

    *a*) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 1$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{7,8,9\}$.

    *b*) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^3 - x$, $A = \{-2,-1,0,1,2\}$, $B = \{-5,-4,-3\}$.

    *c*) $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $A = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $B = [-1, 0]$.

    *d*) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 2x$, $A = \{2^{-n} \; : \; n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{4^n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$.

    *e*) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $A = [1, +\infty)$, $B = [4, 9]$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 7, & x \le 0 \\ -2x + 5, & 0 < x < 3 \\ x - 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

Determinar la preimagen mediante $f$ de cada uno de los siguientes intervalos


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

*a*) $[-5,-1]$, *b*) $[-5,0]$, *c*) $[-2,4]$, *d*) $(5,10)$, *e*) $[11,17)$.

5. Dar un ejemplo de una función $f : A \to B$ y de dos subconjuntos $A_1, A_2$ de $A$ de modo que $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$.

6. Dar, en cada caso, un ejemplo de conjuntos finitos $A$ y $B$ con $|A|, |B| \geq 4$ y una función $f$ tal que
   *a*) $f$ no sea inyectiva ni sobre.
   *b*) $f$ sea inyectiva pero no sobre.
   *c*) $f$ sea sobre pero no inyectiva.
   *d*) $f$ sea sobre e inyectiva.

7. Sea $f : A \to B$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq A$. Demostrar que si $f$ es inyectiva, entonces $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

8. Determinar si cada una de las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es inyectiva y/o sobreyectiva. En caso de que no sea sobre, determinar su imagen.
   *a*) $f(x) = x + 7$, *c*) $f(x) = 2x - 3$, *e*) $f(x) = x^2 + x$,
   *b*) $f(x) = x^2$, *d*) $f(x) = -x + 5$, *f*) $f(x) = x^3$.

9. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Se denomina *restricción* de $f$ a $A_1$ a la función $f_{|A_1} : A_1 \to B$ definida por $f_{|A_1}(x) = f(x)$ para cada $x \in A_1$.
   *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \lfloor x \rfloor$ la función parte entera. Probar que $f_{|\mathbb{Z}} = 1_{\mathbb{Z}}$ donde $1_{\mathbb{Z}}$ es la función identidad en $\mathbb{Z}$.
   *b*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(2\pi x)$. Probar que $f_{|\mathbb{Z}}$ es la función constante igual a $1$.

10. Sea $f : A \to B$ una función y $A_1 \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando adecuadamente su respuesta.
    *a*) Si $f$ es inyectiva, entonces $f_{|A_1}$ es inyectiva.
    *b*) Si $f_{|A_1}$ es inyectiva, entonces $f$ es inyectiva.
    *c*) Si $f$ es sobre, entonces $f_{|A_1}$ es sobre.
    *d*) Si $f_{|A_1}$ es sobre, entonces $f$ es sobre.

11. Si $f : A \to B$ y $g : C \to D$ son funciones, definimos $h : A \times C \to B \times D$ por $h(a, c) = (f(a), g(c))$. Demostrar que $h$ es biyectiva si y sólo si $f$ y $g$ son biyectivas.

12. Sean $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x$ y
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es par,} \\ 1 & \text{si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$
    Determinar
    *a*) $f \circ g$, *b*) $g \circ f$, *c*) $g \circ h$, *d*) $f \circ (g \circ h)$, *e*) $(f \circ g) \circ h$.

13. Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(n) = 2n$. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $f : A \to \mathbb{N}$ es la función dada por $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$, encontrar $g \circ f$.

14. Sean $S$ y $T$ conjuntos (fijos) en el universo $\mathcal{U}$ dado. Se define

$$g : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U}) \text{ por } g(A) = T \cap (S \cup A).$$

Demostrar que $g \circ g = g$.

15. Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, determinar si $f$ es invertible y, si lo es, determinar $f^{-1}$

 a) $f = \{(x, y) \,:\, 2x + 3y = 7\}$,
 b) $f = \{(x, y) \,:\, y = x^3\}$,
 c) $f = \{(x, y) \,:\, y = x^4 + x\}$.

16. Sean $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $g(x) = x^2$. Demostrar que $g \circ f = 1_{\mathbb{R}}$. Es $g = f^{-1}$ ?

17. Demostrar que $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f(x) = \sqrt{x}$ es invertible y hallar su inversa.

18. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x > 0, \\ -2x, & x \leq 0. \end{cases}$$

Demostrar que $f$ es biyectiva y hallar su inversa.

19. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demostrar que:

 a) $g \circ f : A \to C$ sobre $\Rightarrow$ g sobre.
 b) $g \circ f : A \to C$ inyectiva $\Rightarrow$ f inyectiva.

## Operaciones

1. Para $A = \{a, b, c\}$, sea $f : A \times A \to A$ la operación binaria cerrada dada en la siguiente tabla:

| $f$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $c$ |
| $b$ | $a$ | $c$ | $b$ |
| $c$ | $c$ | $b$ | $a$ |

Dé un ejemplo para mostrar que $f$ no es asociativa.

2. Defina la operación binaria cerrada $h : \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ dada por $h(a, b) = \dfrac{a}{b}$.

 a) Muestre que $h$ no es conmutativa ni asociativa.
 b) Determine si $h$ tiene algún elemento neutro.

3. Cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una operación binaria cerrada en $\mathbb{Z}$. Determine los casos en los que $f$ es conmutativa o asociativa.

 a) $f(x, y) = x + y - xy$
 b) $f(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$, el máximo entre $x$ e $y$
 c) $f(x, y) = x^{|y|}$
 d) $f(x, y) = x + y - 3$



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

4. Determine y justifique cuáles de las operaciones binarias cerradas del ejercicio anterior tienen elemento neutro.

5. Para $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$, sean $f, g : A \times A \to A$ las operaciones binarias cerradas dadas por $f(x, y) = \text{mín}\{x, y\}$ y $g(x, y) = \text{máx}\{x, y\}$.

   *a*) Determine si $f$ tiene elemento neutro.

   *b*) Determine si $g$ tiene elemento neutro.

6. Sean $A = B = \mathbb{R}$. Determine $\pi_A(D)$ y $\pi_B(D)$ para cada uno de los conjuntos siguientes $D \subseteq A \times B$.

   *a*) $D = \{(x, y) : x = y^2\}$

   *b*) $D = \{(x, y) : y = \mathsf{sen}(x)\}$

   *c*) $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$


ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119