vivió durante la "era axiomática" de las matemáticas y llegó a ser uno de los principales representantes de esa corriente. La definición de un espacio vectorial tuvo sus orígenes en la lectura que hizo Peano de los trabajos de Grassmann. Introdujo algunas notaciones matemáticas que se usan hoy como el símbolo $\in$, que significa *pertenece a*, *está en*, o *es un miembro de*.

4.1 Subespacios de $\mathbf{R}^n$

Objetivos del estudiante para esta sección

1. Saber qué es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.
2. Conocer qué son las bases y cómo investigarlas.

En esta sección describiremos los conceptos fundamentales de *subespacio* y *base* en $\mathbf{R}^n$. Ésta es una preparación para los conceptos abstractos correspondientes de las secciones 4.2 y 4.3. Estos temas deben dominarse mediante un estudio cuidadoso y con la práctica.

Subespacios de $\mathbf{R}^n$

DEFINICIÓN (Subespacio de $\mathbf{R}^n$)

Un subconjunto V no vacío de $\mathbf{R}^n$ se llama **subespacio (vectorial o lineal)** de $\mathbf{R}^n$ si satisface las siguientes propiedades.

1. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V.
2. Si c es cualquier escalar y $\mathbf{u}$ está en V, entonces $c\mathbf{u}$ está en V.

Las propiedades 1 y 2 implican que cualquier combinación lineal de elementos de V también está en V. Si un conjunto S no vacío de $\mathbf{R}^n$ satisface la parte 1 de la definición, se dice que S es **cerrado bajo** (o **respecto a**) **la suma (vectorial).** Si S cumple la parte 2, se dice que S es **cerrado bajo** (o **respecto a**) **la multiplicación por escalares.** Así, un subespacio de $\mathbf{R}^n$ es un subconjunto cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación por escalares.

Todo subespacio V de $\mathbf{R}^n$ contiene al vector cero $\mathbf{0}$. (V es no vacío, de modo que tiene al menos un elemento, por ejemplo $\mathbf{u}$. Pero entonces $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ está en V, según la parte 2 de la definición.)

■ EJEMPLO 1 $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{R}^n$ son subespacios de $\mathbf{R}^n$.

EXPLICACIÓN $\{\mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ porque

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad \text{y} \quad c\mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ para toda } c \in \mathbf{R}$$

$\mathbf{R}^n$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ porque la suma de dos vectores n cualesquiera es un vector n, y cualquier múltiplo escalar de un vector n es de nuevo un vector n. □

$\{\mathbf{0}\}$ también se llama **subespacio cero** de $\mathbf{R}^n$. $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{R}^n$ son **subespacios triviales** de $\mathbf{R}^n$.

■ EJEMPLO 2

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \right\}$$

es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.

EXPLICACIÓN V es no vacío, porque contiene al vector cero (suponiendo que $x = y = 0$). La suma de dos vectores en V,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

también está en V. Así, se aplica la parte 1 de la definición. Cualquier múltiplo escalar de un vector en V

$$c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx \\ cy \\ 0 \end{bmatrix}$$

también está en V. Entonces se aplica la parte 2 de la definición. Por consiguiente, es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.

■ EJEMPLO 3 $V = \{(x, y, x + y), x, y \in \mathbf{R}\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$. □

EXPLICACIÓN V es no vacío. (¿Por qué?) Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, x_1 + y_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, x_2 + y_2)$ cualesquiera elementos de V y sea c cualquier escalar. Entonces

$$(x_1, y_1, x_1 + y_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2))$$

y

$$c(x_1, y_1, x_1 + y_1) = (cx_1, cy_1, (cx_1) + (cy_1))$$

Por consiguiente, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, c\mathbf{v}_1 \in V$. Entonces, V es un subespacio de $\mathbf{R}^3$. □

■ EJEMPLO 4 ¿Es el conjunto

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x + 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbf{R} \right\}$$

un subespacio de $\mathbf{R}^2$?

RESPUESTA No, el vector cero no está en T, porque si $\begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces $x = 0$ y $x + 1 = 0$, lo cual es un sistema inconsistente. (También puede demostrarse con facilidad que T no es cerrado bajo la suma o la multiplicación por escalar.) ☐

■ EJEMPLO 5 Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están en $\mathbf{R}^n$. Demuestre que Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.

SOLUCIÓN Sea $V = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2, \mathbf{v}_2, c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$. Por tanto, V es no vacío, porque contiene a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Entonces hay escalares c_1, c_2 y d_1, d_2 tales que $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2$. Así,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2$$

Por consiguiente $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$, y V es cerrado bajo la suma. También, para cualquier escalar c,

$$c\mathbf{u} = c(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = (cc_1)\mathbf{v}_1 + (cc_2)\mathbf{v}_2$$

Esto demuestra que $c\mathbf{u} \in V$. Por tanto, V es cerrado bajo la multiplicación por escalar, y entonces es un subespacio de $\mathbf{R}^n$. ☐

El teorema siguiente nos permitirá generalizar, de acuerdo con el teorema 10 de la sección 2.3.

TEOREMA 1

> Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores n, entonces Gen$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.

■ EJEMPLO 6 Toda línea l que pase por el origen en $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) es un subespacio de $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) (figura 4.1).

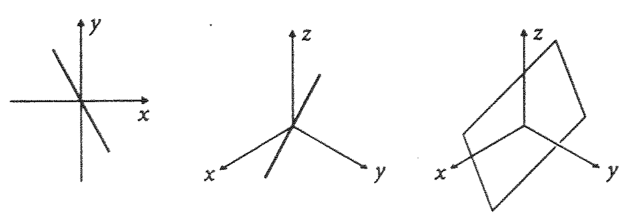

Figura 4.1 Las rectas y los planos que pasan por el origen son subespacios.

SOLUCIÓN Sea $\mathbf{u}$ un vector 2 no cero en l. Entonces $l = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$, como vimos en la sección 2.3. Pero Gen$\{\mathbf{u}\}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^2$, de acuerdo con el teorema 1. De igual manera puede demostrarse que una línea l en $\mathbf{R}^3$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$. ☐

■ EJEMPLO 7 Todo plano $\mathcal{P}$ que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbf{R}^3$ (figura. 4.1).

SOLUCIÓN Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathcal{P}$ tales que no sean colineales. Entonces $\mathcal{P} = \text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, de acuerdo con la sección 2.3. En consecuencia, $\mathcal{P}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, según el teorema 1.

Observe que las rectas y los planos que no pasan por el origen (figura 4.2) **no** son subespacios. (¿Por qué?)

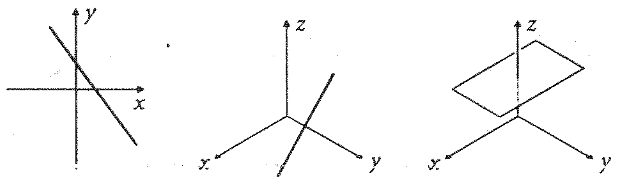

Figura 4.2 Las rectas y los planos que no pasan por el origen no son subespacios.

Con frecuencia se demuestra que V es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ escribiéndolo en forma del generador de un conjunto de vectores.

■ EJEMPLO 8 ¿Es el conjunto

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a - 3b \\ 2a + b \\ a \end{bmatrix},\ a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

un subespacio de $\mathbf{R}^3$?

RESPUESTA Sí, porque

$$\begin{bmatrix} a - 3b \\ 2a + b \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vemos que $V = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Por consiguiente, V es un subespacio de $\mathbf{R}^3$, según el teorema 1.

Base de un subespacio de $\mathbf{R}^n$

En este párrafo presentaremos el concepto fundamental de una base de un subespacio de $\mathbf{R}^n$. Las bases son conjuntos muy privilegiados de vectores. Son linealmente independientes y al mismo tiempo conjuntos generadores. La elección y uso de una base de un subespacio se parece a la elección y uso de un marco de coordenadas en el plano o en el espacio. Con frecuencia, una elección ingeniosa de las coordenadas (o de la base) ayuda a simplificar un cálculo que de otro modo sería complicado.

DEFINICIÓN

(Base)

Un subconjunto no vacío $\mathcal{B}$ de un subespacio V no cero de $\mathbf{R}^n$ es una **base** de V si

1. $\mathcal{B}$ es linealmente independiente;
2. $\mathcal{B}$ genera a V.

Véanse las figuras 4.3 y 4.4.

También se acostumbra decir que el *conjunto vacío* es la única base del subespacio cero $\{\mathbf{0}\}$.

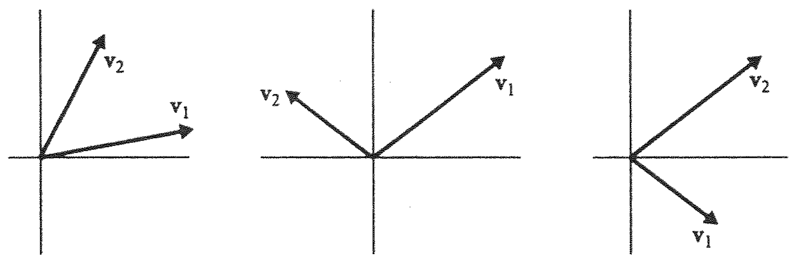

Figura 4.3 Algunas bases del plano.

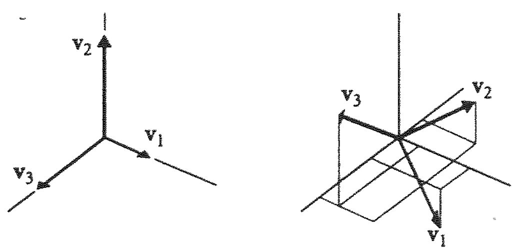

Figura 4.4 Bases del espacio.

■ EJEMPLO 9 Demuestre que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es una base de $\mathbf{R}^n$, a la cual se llama **base estándar** o **base normal** de $\mathbf{R}^n$.

SOLUCIÓN De acuerdo con los ejemplos 24 (sección 2.3) y 35 (sección 2.4), $\mathcal{B}$ genera a $\mathbf{R}^n$ y es linealmente independiente. Por consiguiente, es una base de $\mathbf{R}^n$. ☐

■ EJEMPLO 10 Compruebe que

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbf{R}^3$.

SOLUCIÓN Primero es necesario demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y que genera a $\mathbf{R}^3$. Sea A la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$. Como

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

vemos que cada columna de A es una columna pivote; y por tanto, las columnas de A son linealmente independientes, de acuerdo con el teorema 12 de la sección 2.4. También, cada renglón de A tiene una posición pivote. Por consiguiente, las columnas de A generan a $\mathbf{R}^3$, de acuerdo con el teorema 2 de la sección 2.1. □

Los ejemplos 9 y 10 demuestran que un subespacio puede tener varias bases.

■ EJEMPLO 11 ¿Es el conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ una base en $\mathbf{R}^3$? ¿Es S una base del subespacio $V = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^3$?

RESPUESTA S es linealmente independiente, porque todas las columnas de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ son pivote. S no es una base de $\mathbf{R}^3$ porque A tiene 3 renglones y sólo 2 pivotes, de modo que S no genera a $\mathbf{R}^3$. Por otra parte, S genera al menor espacio V porque

$$(x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$$

Por consiguiente, S *sí es* una base de V. □

■ EJEMPLO 12 ¿Es el conjunto $T = \{(1, 1, 1), (2, 1, -1), (1, 0, -2)\}$ una base de $\mathbf{R}^3$?

RESPUESTA No, puesto que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, T no es linealmente independiente (3 columnas y sólo 2 pivotes). En realidad T ni siquiera genera a $\mathbf{R}^3$ (3 renglones, sólo 2 pivotes). □

■ EJEMPLO 13 ¿Es el conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ una base en $\mathbf{R}^3$?

RESPUESTA No, porque S es linealmente dependiente. □

■ EJEMPLO 14 Demuestre que el conjunto $\mathcal{B} = \{(2, 1, -1, 1), (1, 0, -2, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ es una base del subespacio $V = \{(2x + y, x, -x - 2y, x + y + z), x, y, z \in \mathbf{R}\}$ de $\mathbf{R}^4$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$(2x + y, x, -x - 2y, x + y + z) = x(2, 1, -1, 1) + y(1, 0, -2, 1) + z(0, 0, 0, 1)$$

vemos que V es generado por $\mathcal{B}$. Dejamos al lector la demostración de que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. En consecuencia, $\mathcal{B}$ es una base de V. □

Coordenadas con respecto a la base

En este párrafo, V es un subespacio no cero de $\mathbf{R}^n$.

TEOREMA 2

> **(Unicidad de coordenadas)**
>
> Un subconjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de V es una base de V si y sólo si para cada vector $\mathbf{v}$ en V hay escalares **únicos** $c_1, \ldots, c_k$ tales que
>
> $$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Por consiguiente, $\mathcal{B}$ genera a V, y cada vector $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de vectores en $\mathcal{B}$. También, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. En consecuencia, la representación de $\mathbf{v}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ es única, de acuerdo con el teorema 16 de la sección 2.4.

De manera inversa, sea $\mathcal{B}$ tal que todo vector $\mathbf{v}$ se escribe en la única forma como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$. Por tanto, $\mathcal{B}$ genera a V. Ahora, sea $d_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ para algunos escalares $d_1, \ldots, d_k$. Como $0\mathbf{v}_1 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, la unicidad supuesta de la representación implica que $d_1 = \cdots = d_k = 0$. Por consiguiente, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, y entonces $\mathcal{B}$ es una base de V. $\square$

Los escalares únicos $c_1, \ldots, c_k$ que expresan al vector $\mathbf{v} \in V$ como la combinación lineal de una base $\mathcal{B}$ de V se llaman **coordenadas de v respecto a $\mathcal{B}$**. El vector cuyos componentes son $c_1, \ldots, c_k$ se llama **vector de coordenadas de v con respecto a $\mathcal{B}$** y se representa con $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

■ EJEMPLO 15 Determine las coordenadas y el vector de coordenadas de $\mathbf{v} = (4, 0, -4)$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, -1), (0, 1, 2), (-2, 1, 0)\}$ de $\mathbf{R}^3$.

SOLUCIÓN El hecho de que $\mathcal{B}$ sea una base de $\mathbf{R}^3$ se verificó en el ejemplo 10. Ahora se necesitan escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c^3\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$. Al resolver el sistema correspondiente se obtienen $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ y $c_3 = -1$. Por consiguiente, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\square$

■ EJEMPLO 16 Encuentre las coordenadas de $\mathbf{v} = (3, -2, 0)$ en el subespacio $V = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbf{R}\}$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ de V.

SOLUCIÓN Como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

■ EJEMPLO 17 Si $\mathbf{v}$ es cualquier vector n y $\mathcal{B}$ es la base estándar de $\mathbf{R}^n$, compruebe que

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$$

SOLUCIÓN Se deja como ejercicio.

Ejercicios 4.1

Subespacios

En los ejercicios 1 a 10, demuestre que los conjuntos dados de vectores n son subespacios de $\mathbf{R}^n$.

1. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$
2. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ 2a+b \end{bmatrix}; a, b \in \mathbf{R} \right\}$
3. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -2a \end{bmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$
4. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a-c \\ b+c \\ 5c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$
5. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a-b \\ b-c \\ c-d \\ d-a \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$
6. El conjunto de todos los vectores 3 cuyos primero y último componente son cero.
7. El conjunto de todos los vectores 4 cuyos primeros tres componentes son cero.
8. El conjunto de todos los múltipos de $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ por un escalar.
9. El conjunto de todas las combinaciones lineales de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$
10. Gen $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

En los ejercicios 11 a 29 determine si los conjuntos dados de vectores n son subespacios de $\mathbf{R}^n$.

11. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$
12. $\left\{ \begin{bmatrix} a+1 \\ a \end{bmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$
13. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a + b \leq 2, a, b \in \mathbf{R} \right\}$
14. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a^2 + b^2 = 1, a, b \in \mathbf{R} \right\}$
15. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a \leq 1, b \geq 1, a, b \in \mathbf{R} \right\}$
16. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a \leq b, a, b \in \mathbf{R} \right\}$
17. $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, a = -3b, a, b \in \mathbf{R} \right\}$

18. $\left\{\begin{bmatrix} a+1 \\ a+b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbf{R}\right\}$

19. $\left\{\begin{bmatrix} a-1 \\ 2a+1 \end{bmatrix}, a, b \in \mathbf{R}\right\}$

20. El conjunto de todos los vectores 3 cuyos dos primeros componentes son iguales.
21. El conjunto de todos los vectores 4 cuyos dos últimos componentes son iguales.
22. El conjunto de todos los vectores 3 cuyo primer componente es el doble del segundo.
23. El conjunto de todos los vectores 2 en el primer cuadrante.
24. El conjunto de todos los vectores 2 en el cuarto cuadrante.
25. El conjunto de todos los vectores 3 en el primer octante.
26. La recta determinada por los puntos cuyas coordenadas son $(1, 0)$, $(0, 1)$.
27. La recta determinada por los puntos cuyas coordenadas son $(-1, -1)$, $(1, 1)$.
28. El plano determinado por los puntos cuyas coordenadas son $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$.
29. El plano determinado por los puntos cuyas coordenadas son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$.
30. Sean V_1 y V_2 subespacios de $\mathbf{R}^n$. Demuestre que la intersección $V_1 \cap V_2$ también es un subespacio de $\mathbf{R}^n$.
31. Sean V_1 y V_2 dos planos que pasan por el origen en $\mathbf{R}^3$. Explique, geométricamente, por qué $V_1 \cap V_2$ es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.
32. Sean $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores n. Demuestre que Gen$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el mínimo subespacio de $\mathbf{R}^n$ que contiene al conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. (*Sugerencia:* Si V es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ que contiene a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, demuestre que Gen$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq V$.)

Bases

En los ejercicios 33 a 39 determine si los conjuntos dados de vectores n son bases de $\mathbf{R}^n$.

33. $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

34. $\left\{\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

35. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

36. $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

37. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

38. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

39. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$

En los ejercicios 40 a 44 determine una base para los subespacios descritos.

40. El subespacio V de $\mathbf{R}^2$ del ejercicio 1
41. El subespacio V de $\mathbf{R}^2$ del ejercicio 2
42. El subespacio V de $\mathbf{R}^3$ del ejercicio 3
43. El subespacio V de $\mathbf{R}^3$ del ejercicio 4
44. El subespacio V de $\mathbf{R}^4$ del ejercicio 5

En los ejercicios 45 a 49 determine *mediante inspección* si los conjuntos dados de vectores n son bases de $\mathbf{R}^n$.

45. $\left\{\begin{bmatrix} 71 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 25 \\ 34 \end{bmatrix}\right\}$

46. $\left\{\begin{bmatrix} 75 \\ -45 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -150 \\ 90 \end{bmatrix}\right\}$

47. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

48. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

49. $\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

En los ejercicios 50 a 53 determine si las columnas de las matrices de $m \times n$ forman bases de $\mathbf{R}^m$.

50. a. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

51. a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

52. a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 \\ -5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

53. a. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

54. Calcule una base para $V = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}$.

55. Encuentre una base para $V = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$.

56. Determine una base para

V = Gen

57. Obtenga una base para

$$V = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}\right\}$$

58. Determine una base para

$$V = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

59. Compruebe que todo subespacio V de $\mathbf{R}^n$ tiene una base $\mathcal{B}$ formada por una cantidad finita de vectores.
(*Sugerencia:* Sea $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ en V. Si Gen$\{\mathbf{v}_1\} = V$, haga que $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1\}$ y deténgase. En caso contrario, escoja un $\mathbf{v}_2 \in V$ que no esté en Gen$\{\mathbf{v}_1\}$. Entonces, demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente, y continúe.)

Coordenadas

En los ejercicios 60 a 62 determine el vector n, $\mathbf{x}$, dando una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ y el vector n de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$.

60. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

61. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

62. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}, [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

En los ejercicios 63 a 67 determine el vector n de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, dando una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{x}$.

63. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 17 \\ 4 \end{bmatrix}$

64. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 17 \end{bmatrix}$

65. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$

66. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$,

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$

67. $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7a + 3b \\ a - b \end{bmatrix}$

68. Si $\mathcal{B}$ es una base de un subespacio V de $\mathbf{R}^n$ y están $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ en V, demuestre cada una de las siguientes afirmaciones.

a. $\mathbf{v}$ en V es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ si y sólo si $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ es una combinación lineal de $[\mathbf{v}_1]_{\mathrm{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}}$.

b. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $\{[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}}\}$ es linealmente dependiente.

c. $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\{[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\mathbf{v}_k]_{\mathcal{B}}\}$ lo es también.

4.2 Espacios vectoriales

Objetivos del estudiante para esta sección

1. Estudiar y practicar las definiciones de espacio y subespacio vectorial.
2. Elaborar los detalles de los ejemplos en la sección.