Vectores
Recta en el Plano

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

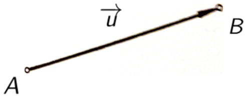
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

2024

Vectores

Definiciones

- cantidades como el *área*, el *volumen*, la *temperatura*, la *masa* y el *tiempo*, pueden caracterizarse mediante un único número real, son magnitudes escalares.
- otras, como la *fuerza* y la *velocidad*, contienen magnitud, dirección y sentido, y no pueden ser caracterizados mediante un único número real, magnitudes vectoriales,
- un vector es un segmento orientado, esto es, un par ordenado de puntos (A, B)
- se lo representa gráficamente mediante una flecha, se lo nota $\overrightarrow{AB}$ o $\overrightarrow{u}$



- A es el origen y B el extremo del vector
- vector nulo: se reduce a un punto, no es propiamente un vector, pero se acepta que sí, $\overrightarrow{0}$

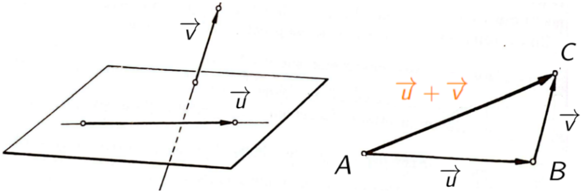
- un vector no nulo se caracteriza por su
  - dirección, dada por la recta que lo contiene o una paralela cualquiera
  - sentido, dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos)
  - módulo, igual a la longitud del segmento que define al vector, $\left|\overrightarrow{u}\right|$

$$\left|\overrightarrow{u}\right| \geq 0 \quad y \quad \left|\overrightarrow{u}\right| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

- dos vectores no nulos son iguales si tienen misma dirección, sentido y módulo.
- la igualdad caracteriza a los vectores libres
- los vectores pueden ser trasladados de manera que tengan un origen común, en ese caso, un vector y sus iguales tendrán un solo representante con origen en el punto acordado
- dos vectores son paralelos o colineales si tienen igual dirección
- dado $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, el vector $\overrightarrow{BA}$ es el opuesto a $\overrightarrow{u}$, notado $-\overrightarrow{u}$.
- si $\overrightarrow{u}$ es no nulo entonces $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{u}$ tienen igual módulo y dirección pero sentidos opuestos, el vector nulo es igual a su opuesto.

Suma de Vectores

- dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y un punto A, quedan determinados B y C / $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
- el vector $\overrightarrow{AC}$ es la la suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$.

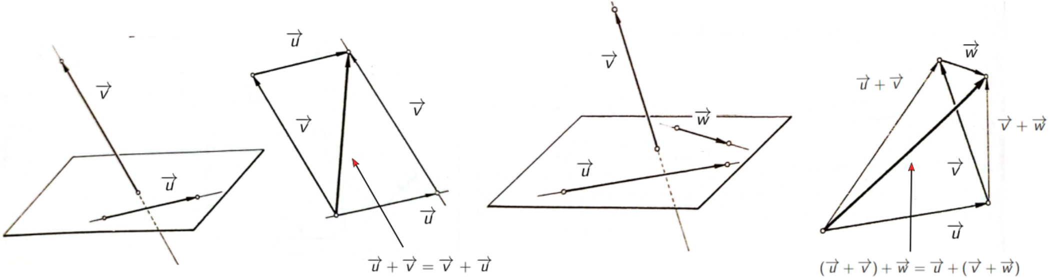


- El vector $\vec{u} + \vec{v}$ es independiente de la elección de A.
- se extiende a cualquier número de sumandos, llevando sucesivamente cada uno a continuación del precedente y uniendo, al final, el origen del primero con el extremo del último, método de la poligonal.

Teorema 1 $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}$, vectores, se tienen las propiedades para la suma

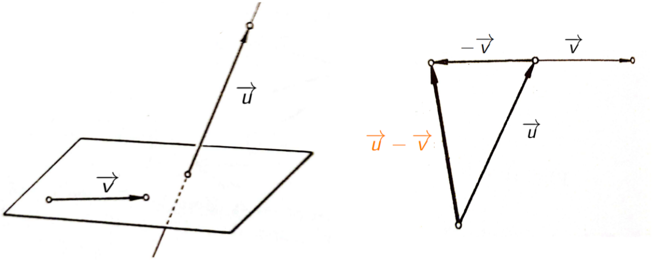
1. conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. existencia de elemento neutro: existe $\vec{0}$ / $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. existencia de elemento opuesto: dado $\vec{u}$, existe $-\vec{u}$ / $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

- propiedades 1 y 2 resoluciones gráficas, 3 y 4, inmediatas



Vector Diferencia y Producto por Escalar

- $\vec{u}$ y $\vec{v}$, vector diferencia entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



- $\vec{u}$ vector y α escalar (número real), el producto por escalar de α con $\vec{u}$, $\alpha\vec{u}$, es un vector tal que
  - $|\alpha\vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$, (luego, $\alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{O} \Rightarrow \alpha\vec{u} = \vec{0}$)
  - $\alpha\vec{u}$ tiene misma dirección y sentido que $\vec{u}$ si $\alpha > 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$
  - $\alpha\vec{u}$ tiene misma dirección y sentido opuesto que $\vec{u}$ si $\alpha < 0$ y $\vec{u} \neq \vec{0}$

Teorema 2 $\vec{u}, \vec{v}$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valen, para el producto por escalar, las propiedades

1. $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$ y $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u}$
2. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ y $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$
3. $\alpha \cdot \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$

- demostración, ejercicio

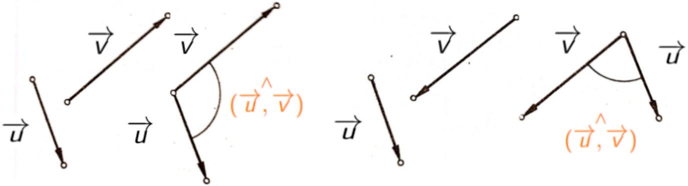
Teorema 3 $\vec{u}$ y $\vec{v}$, no nulos, entonces $\left(\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } \alpha \neq 0 \ / \ \alpha \vec{u} = \vec{v}\right)$

$\Leftarrow$) si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $\alpha \vec{u} = \vec{v}$, como $\vec{u}$ paralelo a $\alpha \vec{u}$, por definición, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos

$\Rightarrow$) si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (no nulos) son paralelos, eligiendo $\alpha = \left|\vec{v}\right| / \left|\vec{u}\right|$ si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de mismo sentido, o $\alpha = -\left|\vec{v}\right| / \left|\vec{u}\right|$ si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de sentido opuesto, queda $\alpha \vec{u} = \vec{v}$ (ejercicio, chequear)

Ángulos entre Vectores y Versores

- Dados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos, el ángulo entre ambos es el ángulo convexo determinado cuando sus orígenes se aplican en un punto común.

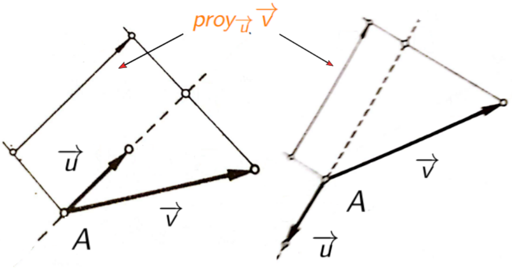


  - $0 \leq (\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v}) \leq \pi$ y $(\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{u} \hat{,} -\overrightarrow{v}) = \pi$
  - $(\overrightarrow{u} \hat{,} \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v} \hat{,} \overrightarrow{u})$ (no hay ángulos negativos entre vectores)

- versor o vector unitario, vector de módulo uno
- versor asociado a $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}_0$, versor de igual sentido que $\overrightarrow{u}$.
- $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{u_0} = \frac{1}{|\overrightarrow{u}|} \cdot \overrightarrow{u}$

Proyección de un Vector sobre otro

- $\vec{u}, \vec{v}$ no nulos y con origen en A, vector proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $proy_{\vec{u}}\vec{v}$, vector con origen en A y extremo en el punto de intersección de la recta sostén de $\vec{u}$ y la perpendicular a ella que contiene al exstremo de $\vec{v}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$, o $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $proy_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{0}$



- $v_{\vec{u}} = |\vec{v}|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, $proy_{\vec{u}}\vec{v} = v_{\vec{u}}\,\vec{u}_0$

Producto Escalar

- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ producto escalar (o producto interno) de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, número real

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{cases} |\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}| \cos(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) & \text{si} \quad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0} \text{ y } \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \\ 0 & \text{si} \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ o } \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$ y $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow \cos(\overrightarrow{u} \overset{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|}$

Teorema 4 $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valen las propiedades para el producto escalar

1. conmutativa: $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$
2. distributiva respecto de la suma: $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$
3. $\alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = (\alpha \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \overrightarrow{v})$
4. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} \geq 0$ y $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0})$

1. inmediata, notando que $\cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \cos(\overrightarrow{v} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{u})$
2. ver en documento anexo
3. sigue de observar que
   - para $\alpha > 0$: $\left|\alpha \overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\alpha \overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \alpha \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v})$
   - y para $\alpha < 0$: $\left|\alpha \overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| \cos(\alpha \overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = (-\alpha) \left|\overrightarrow{u}\right| \left|\overrightarrow{v}\right| (-\cos(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v}))$
4. si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, es claro que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$, y si fuera $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ pero $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = 0$, entonces sería $(\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{u}) = \frac{\pi}{2}$, lo cual es absurdo.

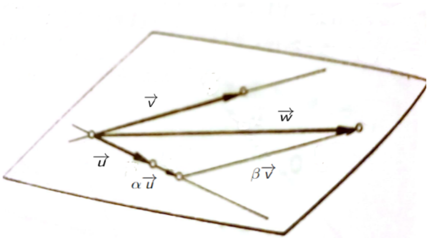
- $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ no nulos, $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow (\overrightarrow{u} \stackrel{\wedge}{,} \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$.

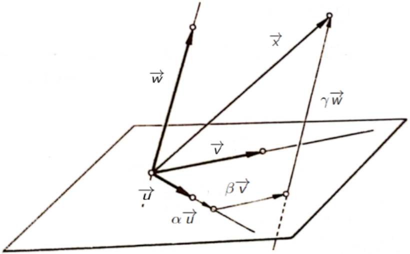
Descomposición de un Vector, Bases y Componentes

- En adelante, se distinguirán a los vectores según sean de una recta, de un plano o del espacio, siendo
  - $\mathbb{V}_1$: conjunto de los vectores de una recta.
  - $\mathbb{V}_2$: conjunto de vectores de un plano
  - $\mathbb{V}_3$: conjunto de los vectores del espacio.

1. - Fijado $\overrightarrow{u} \in \mathbb{V}_1$ no nulo, para cualquier $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{V}_1$, existe único $\alpha \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{v} = \alpha \overrightarrow{u}$
   - esa forma de escribir a $\overrightarrow{v}$ es su descomposición en la base $\{\overrightarrow{u}\}$ y α es la componente escalar de $\overrightarrow{v}$ en esa base

2. - Fijados $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in \mathbb{V}_2$ no nulos ni paralelos, cualquier $\overrightarrow{w} \in \mathbb{V}_2$ del mismo plano puede ser descompuesto según las direcciones de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$
   - existen únicos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{u} + \beta \overrightarrow{v}$
   - $\overrightarrow{w}$ es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ con los escalares α y β
   - $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ es una base para $\mathbb{V}_2$ y α y β son las componentes de $\overrightarrow{w}$ en esa base.





3. - Fijados en el espacio tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ no nulos ni paralelos a un mismo plano, si $\vec{x} \in \mathbb{V}_3$, existen únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ / $\vec{x} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$
   - $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base para $\mathbb{V}_3$, α, β y γ, componentes $\vec{x}$ en esa base

Observación: en $\mathbb{V}_2$ y $\mathbb{V}_3$ las bases son conjuntos ordenados, y con esos órdenes se enumeran a las componentes

Bases, Componentes y Combinación Lineal

1. Fijado $\vec{u}$ no nulo de $\mathbb{V}_1$, se observa una correspondencia biunívoca entre $\mathbb{V}_1$ y $\mathbb{R}$, $\{\vec{u}\}$ es una base de $\mathbb{V}_1$ y cualquier vector de $\mathbb{V}_1$ es una única combinación lineal (c.l.) de $\vec{u}$
2. Fijados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{V}_2$ no nulos ni paralelos, correspondencia biunívoca entre $\mathbb{V}_2$ y $\mathbb{R}^2$, $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es base de $\mathbb{V}_2$ y cualquier vector de $\mathbb{V}_2$ es una única c.l. de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
3. Fijados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ en $\mathbb{V}_3$ no nulos ni complanares, correspondencia biunívoca entre $\mathbb{V}_3$ y $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ base de $\mathbb{V}_3$ y todo vector de $\mathbb{V}_3$ es una única c.l. de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

- como las operaciones de suma y producto de un escalar por un vector definidas en el conjunto de los vectores geométricos ($\mathbb{V}_1$, $\mathbb{V}_2$ o $\mathbb{V}_3$), verifican las propiedades enunciadas en los **Teoremas 1 y 2** se dice que estos conjuntos, con tales operaciones, forman un espacio vectorial (e.v.) real, y al agregarle la operación de producto escalar o interno, se dice que el espacio es euclideo
- en un e.v. un conjunto es una base, si cada elemento del espacio se puede escribir de manera única como c.l. de elementos en ese conjunto, se demuestra que todas las bases de un e.v. tienen la misma cardinalidad, y a ese número se lo llama dimensión del espacio

Versores Fundamentales del Plano xy

- en el plano xy, $\overrightarrow{i}$ $\overrightarrow{j}$, versores fundamentales, versores de direcciones y sentidos de los semiejes positivos x e y
- $O(0,0)$ y $P(v_1, v_2)$, entonces $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ es el vector posición de P
- $\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j}$ y v_1 y v_2 son las componentes de $\overrightarrow{v}$ en la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$
- como par ordenado, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, y en particular, $\overrightarrow{i} = (1,0)$ y $\overrightarrow{j} = (0,1)$
- Como $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\}$ es base, para $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$, se tiene

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = v_1 \ \text{ y } \ u_2 = v_2$$

Versores Fundamentales del Espacio

- con los ejes x, y, z, $\left\{\overrightarrow{i} = (1,0,0), \overrightarrow{j} = (0,1,0), \overrightarrow{k} = (0,0,1)\right\}$, base canónica
- $P(v_1, v_2, v_3)$, queda determinado $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k} = (v_1, v_2, v_3)$.
- $(u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1, \ u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$

Teorema 5 $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vectores,

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ y $\alpha \overrightarrow{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$.
2. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

1. se orienta la parte de la suma, se dejan los detalles y la otra como ejercicio

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} &= (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}) + (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}) \\ &= \cdots = (u_1 + v_1) \overrightarrow{i} + (u_2 + v_2) \overrightarrow{j} + (u_3 + v_3) \overrightarrow{k}\end{aligned}$$

2. observando $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = 1$ y que $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = 0$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} &= (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}) \times (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}) \\ &= u_1 v_1 \left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i}\right) + u_1 v_2 \left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j}\right) + u_1 v_3 \left(\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k}\right) \\ &+ u_2 v_1 \left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i}\right) + u_2 v_2 \left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j}\right) + u_2 v_3 \left(\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k}\right) \\ &+ u_3 v_1 \left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i}\right) + u_3 v_2 \left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j}\right) + u_3 v_3 \left(\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k}\right) \\ &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.\end{aligned}$$

Una Condición de Paralelismo

- por el **Teorema 3**, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$,

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \alpha\,\vec{u} \text{ para } \alpha \neq 0 \;\Leftrightarrow\; v_1 = \alpha u_1 \,,\quad v_2 = \alpha u_2 \text{ y } v_3 = \alpha u_3,\quad \alpha \neq 0$$

Módulo de un Vector por Componentes y Cosenos Directores

- $\left|\vec{u}\right|^2 = \vec{u} \times \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \;\Rightarrow\; \left|\vec{u}\right| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
- $\vec{u} \neq \vec{0}$, los cosenos directores son las componentes del versor asociado, $\vec{u}_0$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{i}}\right) = \frac{u_1}{\left|\vec{u}\right|}\,,\quad \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{j}}\right) = \frac{u_2}{\left|\vec{u}\right|} \quad \text{y} \quad \cos\left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{k}}\right) = \frac{u_3}{\left|\vec{u}\right|}$$

- si $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (-2, 0, 4)$ y $\vec{w} = (3, 2, 5)$, entonces
  - $2\vec{u} - 3\vec{v} = (3, -1, 2) - 3\,(-2, 0, 4) = (6, -2, 4) - (-6, 0, 12) == (12, -2, -8)$
  - $\vec{u} \times \vec{w} = (3, -1, 2) \times (3, 2, 5) = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 17$
  - $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Componentes de un Vector a partir de dos Puntos

- dados $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, y el origen $O(0,0,0)$

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

$$= (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Coordenadas del Punto Medio entre dos Puntos

- $M(x, y, z)$ punto medio entre $P_1\,(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2\,(x_2, y_2, z_2)$, entonces

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_2} \;\text{ y }\; \overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2} \;\Rightarrow\; 2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2}$$

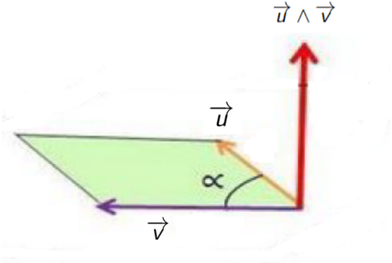
$$\Rightarrow\; 2\,(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

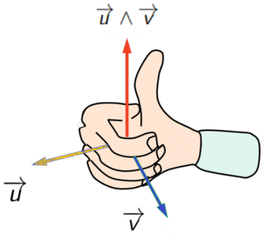
$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x - x_1) = x_2 - x_1 \\ 2(y - y_1) = y_2 - y_1 \\ 2(z - z_1) = z_2 - z_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ y = \frac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \\ x = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x = \frac{z_1 + z_2}{2} \end{array}\right.$$

Producto Vectorial

Si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{u}$, notado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es el vector

- de dirección simultáneamente perpendicular a las direcciones de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y el sentido dado por la regla de la mano derecha
- $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\mathrm{sen}(\widehat{\vec{u}\,\vec{v}})$.





Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Propiedades del Producto Vectorial

- si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos, y $\theta = (\vec{u} \overset{\wedge}{,} \vec{v})$, se obtiene otra condición de paralelismo,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| = 0 \;\Leftrightarrow\; \left|\vec{u}\right| \left|\vec{v}\right| \operatorname{sen}\theta = 0$$
$$\Leftrightarrow\; \operatorname{sen}\theta = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta = 0 \;\vee\; \theta = \pi \;\Leftrightarrow\; \vec{u} \parallel \vec{v}$$

- además $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$, $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ y $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

Teorema 6 $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, valen las propiedades para el producto vectorial

1. antisimétrica: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
2. distributivas: $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ y $\left(\vec{v} + \vec{w}\right) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
3. $\alpha\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \left(\alpha\vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \left(\alpha\vec{v}\right)$

- las demostraciones de 1 y 3 se dejan como ejercicio, la de 2 en documento anexo

Expresión del Producto Vectorial por Componentes

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (u_1 \overrightarrow{i} + u_2 \overrightarrow{j} + u_3 \overrightarrow{k}) \wedge (v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}) \\
&= u_1 v_1(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) + u_1 v_2(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) + u_1 v_3(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k}) \\
&+ u_2 v_1(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i}) + u_2 v_2(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}) + u_2 v_3(\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}) \\
&+ u_3 v_1(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i}) + u_3 v_2(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j}) + u_3 v_3(\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k}) \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\overrightarrow{i} + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\,\overrightarrow{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\overrightarrow{k} \\
&= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

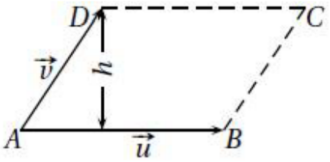
- $\overrightarrow{u} = (1, 3, -2)$ y $\overrightarrow{v} = (2, 1, 0)$, queda $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$

$$= (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 1),\ \ -(1 \cdot 0 - (-2) \cdot 2),\ (1 \cdot 1 - 3 \cdot 2)) = (2; -4; -5)$$

Interpretación del Módulo del Producto Vectorial

- El módulo del producto vectorial de dos vectores no nulos ni paralelos es igual al área del paralelogramo determinado por ambos vectores:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \wedge \vec{v}| &= |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \\ &= |\vec{u}|\,h = \text{Area}\,(ABCD) \end{aligned}$$



- se puede calcular el área de un triángulo determinado por tres puntos:

$$P_1(1,-1,2),\ P_2(5,-6,2),\ P_3(1,3,-1) \Rightarrow \overrightarrow{P_1P2} = (4,-5,0) \text{ y } \overrightarrow{P_1P_3} = (0,4,-3) \text{ y}$$

$$\text{Area}(P_1\overset{\triangle}{P_2}P_3) = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{P_1P2} \wedge \overrightarrow{P_1P3}| = \cdots = \frac{1}{2}\,|(15,12,16)| = 12,5$$

Producto Mixto

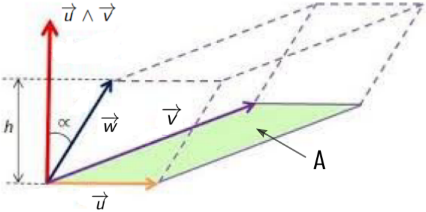
$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$, el producto escalar $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ se llama producto mixto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \times \vec{w}$ es un número real.
- el paréntesis es innecesario, pues no hay otra forma de agrupar los vectores para que la expresión tenga sentido.

Volumen de un Paralelepípedo

El volumen V del paralelepípedo determinado por los vectores (no nulos ni coplanares) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores

$$
\begin{aligned}
V = A \cdot h &= |\vec{u} \wedge \vec{v}| \left(|\vec{w}|\, |\cos\alpha|\right) \\
&= \Big|\, |\vec{u} \wedge \vec{v}|\, |\vec{w}| \cos\alpha \,\Big| = |\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}|
\end{aligned}
$$

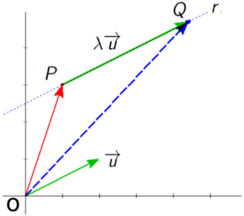


Recta en el Plano

Ecuaciones Vectorial y Paramétrica

- P punto del plano y $\overrightarrow{u}$ vector no nulo, la recta r que pasa por P en la dirección de $\overrightarrow{u}$ es el lugar geométrico de los puntos Q

$$Q \in r \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{PQ} = \lambda \overrightarrow{u}$$



- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{u}$, ecuación vectorial de la recta
- $P(x_0, y_0)$, $Q(x, y)$, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \;\rightarrow\; (x, y) = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overrightarrow{u} = (x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2)$
- ecuaciones paramétricas de r, x, y se escriben en función del parámetro λ,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases} , \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

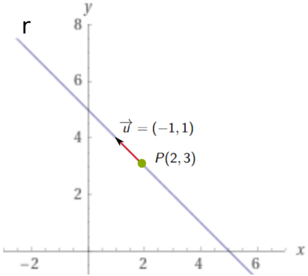
- recta r que pasa por $P(2,3)$ y es paralela a $\vec{u} = (-1,1)$,

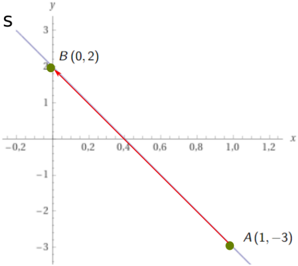
$$(x,y) = (2,3) + \lambda(-1,1) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda(-1) = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \cdot 1 = 3 + \lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejemplo

- recta s que pasa por $A(1,-3)$ y $B(0,2)$, dirección de s : $\overrightarrow{AB} = (0,2) - (1,-3) = (-1,5)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = -3 + 5\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$$





Ecuación Cartesiana

- r de dirección $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2) \neq \overrightarrow{0}$ y punto de paso $P_0\,(x_0, y_0)$,

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- si $u_1 \neq 0$ ($u_2 \neq 0$ es análogo), entonces $\lambda = \frac{x - x_0}{u_1}$ e $y = y_0 + \frac{x - x_0}{u_1} u_2$.
- $u_1 y = u_1 y_0 + (x - x_0)\, u_2 \ \Rightarrow\ u_1 y = u_1 y_0 + u_2 x - u_2 x_0$

$$\underbrace{u_2}_{=a}\, x \;+\; \underbrace{-u_1}_{=b}\, y \;+\; \underbrace{(-u_2 x_0 + u_1 y_0)}_{=c} \;=\; 0$$

- ecuación cartesiana general de la recta: $ax + by + c = 0$
- $\overrightarrow{n} = (a, b) = (u_2, -u_1)$ vector perpendicular a r

Ejemplo

- $s)\ \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \end{cases} \to \begin{cases} \frac{x+2}{3} = t \\ -y + 3 = t \end{cases} \to \frac{x+2}{3} = -y + 3 \to x + 3y - 7 = 0$
- otra manera:
  - $\overrightarrow{u} = (3; -1) \parallel s$, implica $\overrightarrow{n} = (1, 3) \perp s$, ecuación de la forma $1x + 3y + c = 0$
  - $P_0\,(-2; 3) \in s$ implica $1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + c = 0$ y luego $c = 7$

Ejemplo

- $r)\ -2x + y + 4 = 0$,
  - $Q(-1; 1) \notin r : -2 \cdot (-1) + 1 + 4 = 7 \neq 0$
  - $R(\frac{1}{2}; -3) \in r$: $-2 \cdot \frac{1}{2} + (-3) + 4 = 0$
  - $\overrightarrow{n} = (-2; 1) \perp r$, de donde $\overrightarrow{u} = (1; 2) \parallel r$, y como $R\left(\frac{1}{2}; -3\right) \in r$,

$$r)\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones Normal, Segmentaria y Explícita

- $r)\ ax + by + c = 0$ con $|(a;b)| = 1$, ecuación normal de r
- $r)\ ax + by + c = 0$, $a, b, c \neq 0$, ecuación segmentaria: $\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$
  - $A(-\frac{c}{a}, 0)$ y $B(0, -\frac{c}{b})$, intersecciones de r con ejes x e y
- $r)\ ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, y haciendo $m = -\frac{a}{b}$ y $h = -\frac{c}{b}$, ecuación explícita de $r)\ y = mx + h$
  - m, pendiente, tangente del ángulo que forma r con el semieje positivo x
  - h, ordenada al origen, r corta al eje y en $Q(0;h) \in r$
  - si $a \neq 0$, se puede explicitar a x en función de y

Ejemplo

- $r)\ 2x - y - 2 = 0$,
  - $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$ ecuación normal
  - $x - \frac{y}{2} = 1$ ecuación segmentaria, $(1, 0)$ y $(0, -2)$, intersección con los ejes
  - $y = 2 - 2x$ y $x = \frac{1}{2}y + 1$ ecuaciones explícitas

Recta por Dos Puntos

- $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, recta que contiene a P_1 y P_2
- ecuaciones paramétricas, con dirección $\overrightarrow{P_1P_2}$ y punto de paso P_1,

$$r) \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 + (x_2 - x_1)\lambda \\ x = y_1 + (y_2 - y_1)\lambda \end{array} \right. \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

- ecuación cartesiana, si $x_1 \neq x_2$, con $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y punto de paso P_1

$$r)\ y - y_1 = m(x - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- si $x_1 = x_2$, ecuación $r)\ x = x_1$

Ejemplo

- $P_1(3, 1)$ y $P_2(-2, 5)$,

$$y - 1 = \frac{5 - 1}{-2 - 3}(x - 3) = -\frac{4}{5}(x - 3) \quad \rightarrow \quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$$

Posición Relativa de dos Rectas

r_1 y r_2 rectas, o bien

- son paralelas, $r_1 \parallel r_2$, sii los vectores dirección o los normales lo son, pudiendo ser
  - coincidentes, $r_1 = r_2$, si siendo paralelas un punto de paso pertenece a la otra
  - estrictamente paralelas, $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, si no
- son secantes, vectores dirección o normales no paralelos, se intersecan en un único punto.
- ángulo entre r_1 y r_2, ángulo agudo o recto que forman, si se cortan o son coincidentes

Ejemplo

- $r)\ 2x + 3y - 1 = 0$ y $s) \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{array} \right.$
- $\overrightarrow{n_1} = (2;3) \perp r$ y $\overrightarrow{u_2} = (2;-1) \parallel s$, implica $\overrightarrow{n_2} = (1;2) \perp s$, no paralelos $\left(\frac{2}{1} \neq \frac{3}{2}\right)$
- $s)\ x + 2y - 5 = 0, \quad r \cap s \ \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{array} \right. \rightarrow \ (-9, 13)$
- ángulo $\rightarrow \arccos\left(\frac{(2,3)\times(1,2)}{\sqrt{13}\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \approx 0,124$ (en radianes)

Distancia de un Punto a una Recta

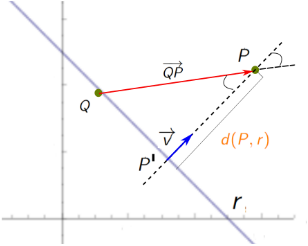
- P punto y r recta, la perpendicular a r por P, corta a r en un único punto P',
- la distancia de P a r, $d(P,r)$ es la distancia entre P' y P', $|\overrightarrow{P'P}|$

$r)\ ax + by + c = 0,\ P(x_0, y_0),\ \text{si } Q(x', y') \in r \quad \rightarrow \quad ax' + by' + c = 0$

$$d(P,r) = |\overrightarrow{QP}|\,|\cos(\vec{v}, \overrightarrow{QP})| = |\overrightarrow{QP}| \cdot \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|\,|\overrightarrow{QP}|}$$

$$= \frac{|(a,b) \times (x_0 - x', y_0 - y')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a(x_0 - x') + b(y_0 - y')|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + (-ax' - by')|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



- $r)\ ax + by + c = 0$ ecuación normal $(a^2 + b^2 = 1)$,entonces $|c| = d(O, r)$