FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría II 2024

PRÁCTICA 3: Sistemas de ecuaciones (Complementaria)

---

1. Halle (si existe) la inversa de las siguientes matrices, usando el método de eliminación de Gauss-Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Use la inversa de una matriz para resolver ambos sistemas.

$$(a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = & 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = & 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = & -2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = & 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = & 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = & -3 \end{cases}$$

3. Determine si la cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

   a) Si la matriz A puede reducirse por filas a la matriz identidad I, entonces A es no singular.

   b) Si A es una matriz cuadrada, entonces el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene una única solución.

   c) Si A, B y C son matrices tales que $BA = CA$ y A es invertible, entonces $B = C$.

4. Demuestre (¡y recuerde!) las siguientes propiedades de matrices:

   a) Si A es una matriz no sigular, entonces $(A^{-1})^{-1} = A$.

   b) Si A es una matriz invertible, entonces $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

   c) Si A es una matriz simétrica y no singular, entonces su inversa A^{-1} también es simétrica.

5. Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   En cada item, halle una matriz elemental E que verifique la igualdad dada.

   a) $EA = B$ *b*) $EA = C$ *c*) $EB = A$ *d*) $EC = A$

6. Halle la inversa de las siguientes matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; (k \neq 0)$$

7. Demuestre que la inversa de una matriz elemental también es elemental.

8. Exprese la inversa de cada una de las siguientes matrices como producto de matrices elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Exprese cada una de las siguientes matrices como producto de matrices elementales:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Determine si la cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

    a) La matriz identidad es una matriz elemental.

    b) La matriz nula es una matriz elemental.

    c) Una matriz cuadrada es no singular si puede escribirse como producto de matrices elementales.

11. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. En los que sea posible, hágalo mediante la regla de Cramer.

$$a)\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 17x_3 & = & 4 \end{array} \right. \qquad b)\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & - & 1x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & -8 \\ -1x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 8 \end{array} \right.$$

$$c)\ \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 7 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 13x_3 & = & 17 \end{array} \right.$$