FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9) 2025

UNIDAD 2: TRANSFORMACIONES LINEALES

1. Transformaciones lineales

El corazón del álgebra lineal son las transformaciones lineales. Es lo más importante y será nuestro objeto de estudio por el resto de la asignatura. Una transformación lineal es una función entre ev's que respeta la estructura de ev. Ya conocemos funciones que son tl. Vamos a ver cómo las definimos y caracterizamos.

Definición 1 *$(V, +, \cdot)$ y $(W, \oplus, \odot)$ dos F-ev. $T : V \to W$ función se dice que es una* ***transformación lineal*** *(tl) si:*

1. *$T(u + v) = T(u) \oplus T(v)\ \forall\, u, v \in V$, (preserva la suma)*
2. *$T(\alpha \cdot u) = \alpha \odot T(u)\ \forall\, \alpha \in F, u \in V$. (preserva el producto por escalar)*

Very Important 1 *Ambos espacios deben estar definidos sobre el* ***mismo*** *cuerpo. Cuando se sobreentiende no será necesario escribirlo.*

Cuando se sobreentiende, ambas operaciones suma y producto por escalar serán denotadas con los mismos símbolos: $+$ y $\cdot$.

Ejercicios 1
1. *Si $T : V \to W$ tl ents. $T(\overline{0}_V) = \overline{0}_W$.*
2. *Si $T : V \to W$ tl sii $\forall \alpha, \beta \in F$, $\forall u, v \in V$, $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$.*
3. *Si $T : V \to W$ tl ents. preserva cl: para $\alpha_i \in F$, $v_i \in V$,*

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

Conocemos muchisisísimas funciones que son tl y otras muchisisisísimas que no lo son. Veremos algunos ejemplos. **Recordatorio:** siempre que veamos ejemplos queda como EJERCICIO desarrollarlos.

Ejemplos 1
1. ***Transformación nula***: *V, W F-ev. $T_0 : V \to W$ definida por $T(v) = \overline{0}_W$ pt $v \in V$ es una tl.*
2. ***Transformación identidad***: *V F-ev. $id : V \to V$ definida por $T(v) = v$ pt $v \in V$ es una tl.*
3. ***VERY VERY MUY MUCHO IMPORTANT EXAMPLE: Transformación definida a partir de una matriz***: *Sean $A \in F^{m\times n}$, $T_A : F^n \to F^m$ definida por $T_A(x) = Ax$ es una tl. Más aún, veremos que toda tl $F^n \to F^m$ está definida a partir de una matriz.*
4. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tq $D(p(x)) = p'(x)$ transformación* ***derivación*** *es una tl en el espacio de polinomios.*
5. *$C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua$\}$, $I : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ transformación* ***integración****, definida por $I(f(x)) = \int_0^x f(y)dy$ es una tl en el espacio de funciones continuas.*
6. ***Shifts*** *$L : F^\infty \to F^\infty$ definida por $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ es una tl en el espacio de sucesiones.*

$R: F^\infty \to F^\infty$ definida por $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ es una tl en el espacio de sucesiones.

7. ***Rotaciones en** $\mathbb{R}^2$: sea $\alpha \in \mathbb{R}$ un ángulo, definimos la transformación rotación en el plano como la transformación matricial $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida a partir de la matriz $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Luego T_α es tl. En coordenadas: $T_\alpha(x, y) = A(x, y) = (\cos\alpha x - \sin\alpha y, \sin\alpha x + \cos\alpha y)$.*

8. ***Proyecciones canónicas**: $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $\pi_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ es una tl.*

9. *HAY FUNCIONES QUE NO SON TL. Por ejemplo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sin(x)$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$.*

La siguiente proposición nos dice que la imagen por una tl de un sev es un sev, y que la preimagen por una tl de un sev también es un sev.

Proposición 1 *$T : V \to W$ tl. Ents.*

1. *Si $S \subset V$ sev ents. $T(S) \subset W$ sev.*
2. *Si $R \subset W$ sev ents. $T^{-1}(R) \subset V$ sev.*

Demostración:

1. Si $\alpha, \beta \in F$ y $w_1, w_2 \in T(S)$ ents. existen $v_1, v_2 \in S$ tq $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Veamos que $\alpha w_1 + \beta w_2 \in T(S)$. En efecto, $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in T(S)$ puesto que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in S$ al ser S sev.
2. Si $\alpha, \beta \in F$ y $v_1, v_2 \in T^{-1}(R)$ ents. existen $w_1, w_2 \in R$ tq $T(v_1) = w_1$ y $T(v_2) = w_2$. Veamos que $\alpha v_1 + \beta v_2 \in T^{-1}(R)$, esto es, que $T(\alpha v_1 + \beta v_2) \in R$. En efecto, $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 \in R$ puesto que R sev.

$\square$

Very Important 2 ***Una tl queda unívocamente determinada por sus valores en una base.***

Este resultado es fundamental. Lo veremos, por simplicidad, sólo en el caso finito.

Proposición 2 *V, W dos F-ev con V finito dimensional. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y sean $w_1, \dots, w_n \in W$. Entonces $\exists!$ tl $T : V \to W$ tq $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \dots, n$.*

Demostración: Veamos existencia. Esto implica definir la función T, ver que está bien definida, y que es lineal. Para eso haremos uso de la base B: sea entonces $T : V \to W$ definida para $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ como $T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$. Veamos que T es lineal. En efecto, si $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $u = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, y $\alpha, \beta \in F$, entonces $\alpha v + \beta u = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n$ (¿porqué?), de donde

$$\begin{aligned} T(\alpha v + \beta u) =& (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)w_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)w_n \\ =& \alpha\alpha_1 w_1 + \beta\beta_1 w_1 + \cdots + \alpha\alpha_n w_n + \beta\beta_n w_n \\ =& \alpha(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) + \cdots + \beta(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) \\ =& \alpha T(v) + \beta T(u). \end{aligned}$$

Veamos unicidad. Supongamos que hay una función $\tilde{T} : V \to W$ tq $\tilde{T}(v_i) = w_i$. Entonces para $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ tenemos que $T(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \cdots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) = \tilde{T}(v)$. Luego $T = \tilde{T}$.

$\square$

2. Núcleo e Imagen de una tl

Vamos a estudiar ahora dos importantes sev asociados a una tl, que además nos darán información sobre la tl y la estructura de ev de ambos dominio y codominio.

Las tl se nombran de acuerdo a las características como función:

Definición 2 *$T : V \to W$ tl. Decimos que:*

1. *T es un **monomorfismo** si T es inyectiva.*
2. *T es un **epimorfismo** si T es sobreyectiva.*
3. *T es un **isomorfismo** si T es biyectiva.*
4. *T es un **endomorfismo** si $V = W$.*
5. *T es un **automorfismo** si $V = W$ y T es biyectiva.*

Observaciones 1 *T automorfismo sii T endomorfismo e isomorfismo.*

Desafío 1 *Buscar 2 ejemplos de cada una de las definiciones anteriores.*

El núcleo de una transformación lineal

Definición 3 *$T : V \to W$ tl. Llamamos **núcleo** o **kernel** de T al conjunto $\ker(T) = Nu(T) = T^{-1}(\overline{0}) = \{v \in V : T(v) = \overline{0}\}$.*

Desafío 2 *Justificar porqué podemos asegurar que $\ker(T)$ es un sev de V.*

Ejemplos 2

1. *Si $o : V \to W$ es la tl nula, $\ker(o) = V$.*
2. *$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y, z) = 2x + 3y + z$ tl (¿porqué podemos dar esta definición?). $\ker(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0\}$ es un plano por el origen.*
3. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ transformación derivación. $\ker(D)$ son los polinomios constantes.*

Very Important 3 *¡¡El **núcleo** de una tl nos sirve para caracterizar los **monomorfismos**!!*

Proposición 3 *$T : V \to W$ tl. T monomorfismo sii $\ker(T) = \{\overline{0}\}$.*

Demostración: $=>$) T monomorfismo, o sea, T tl inyectiva. Veamos que si $v \in \ker(T)$ ents $v = \overline{0}$. En efecto, como $v \in \ker(T)$, $T(v) = \overline{0}$, además $T(\overline{0}) = \overline{0}$ y T inyectiva, de donde debe ser $v = \overline{0}$.

$<=$) $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Veamos que si $u, v \in V$ son tq $T(u) = T(v)$ ents $u = v$. En efecto, sean $u, v \in V$ tq $T(u) = T(v)$. Ents. $T(u) - T(v) = \overline{0}$, de donde $T(u - v) = \overline{0}$. Luego, $u - v = \overline{0}$ y por lo tanto $u = v$.

□

La imagen de una transformación lineal

Definición 4 *$T : V \to W$ tl. Llamamos **imagen** o **recorrido** de T al conjunto $Im(T) = T(V) = \{T(v) \in W : v \in V\}$.*

Desafío 3 *Justificar porqué podemos asegurar que $Im(T)$ es un sev de W.*

Ejemplos 3

1. *Si $\overline{o} : V \to W$ es la tl nula, $Im(\overline{o}) = \{\overline{0}\}$.*
2. *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (2x, 5y, x + y)$ tl (¿porqué podemos dar esta definición?).*

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(2x, 5y, x + y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(2, 0, 1) + y(0, 5, 1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= span\{(2, 0, 1), (0, 5, 1)\}. \end{aligned}$$

3. *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ transformación derivación. $Im(D) = \mathbb{R}[x]$.*

Very Important 4 *¡¡La **imagen** de una tl nos sirve para caracterizar los **epimorfismos**!!*

Ejercicio 1 ***Proposición 4*** *$T : V \to W$ tl. T epimorfismo sii $Im(T) = W$.*

El Teorema de la Dimensión

Si un Teorema además de tener status de Teorema (así, con mayúsculas) *además* tiene nombre, es obviamente importante y carne de parcial, recuperatorio, final, formulario de . Así que le prestamos extra atención.

Definición 5 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional, llamamos:*

1. ***nulidad** de T a la dimensión de su núcleo: $nul(T) = dim(\ker(T))$,*
2. ***rango** de T a la dimensión de su imagen: $ran(T) = dim(Im(T))$.*

De las proposiciones anteriores sigue que:

Corolario 1
1. *T monomorfismo sii $nul(T) = 0$,*
2. *T epimorfismo sii $ran(T) = dim(W)$.*

Teorema 1 (Teorema de la dimensión) *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional,*

$$ran(T) + nul(T) = dim(V).$$

Demostración: Sea $nul(T) = k$ y $B_k = \{v_1, \dots, v_k\}$ base de $\ker(T)$. Completamos B_k a una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V. Veamos que $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ es base de $Im(T)$.

Puesto que B es base de V, sabemos que $span\{T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} = Im(T)$.

Como $T(v_1) = \cdots = T(v_k) = \overline{0}$, sigue que $span\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\} = Im(T)$. Veamos que no sólo generan sino que también son li.

Planteamos para $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in F$ la cl $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \overline{0}$.

Aplicando T tenemos que $\alpha_{k+1}T(v_{k+1}) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \overline{0}$ de donde $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in \ker(T)$.

Como B_k es base de $\ker(T)$, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ tq $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, de donde $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k - \alpha_{k+1}v_{k+1} - \cdots - \alpha_n v_n = \overline{0}$. Como B es base de V, $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n = 0$.

Así, $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ base de T. Luego, $k + (n - (k+1)) = n$, esto es,

$$nul(T) + ran(T) = dim(V).$$

$\square$

Veamos dos corolarios:

Corolario 2 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional con $dim(V) > dim(W)$. Entonces T no puede ser monomorfismo.*

Demostración: Si T monomorfismo, $\ker(T) = \{\overline{0}\}$. Como $Im(T) \subset W$ sev, $dim(Im(T)) \leq dim(W)$, luego $dim(\ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T)) > 0$, lo cual es una contradicción. Luego T no puede ser un monomorfismo.

$\square$

Corolario 3 *$T : V \to W$ tl. Si V finito dimensional con $dim(V) < dim(W)$. Entonces T no puede ser epimorfismo.*

Demostración: Tenemos que $dim(Im(T)) = dim(V) - nul(T) \leq dim(V) < dim(W)$, luego $Im(T) \subsetneq W$.

$\square$

3. El espacio L(V,W)

Vamos a definir y estudiar un ev importantísimo: el espacio de las tl de V en W, que denotaremos por $L(V,W)$. La estructura de ev con la cual dotaremos a este espacio se basará en las estructuras de ev de V y W. El caso $V=W$ tendrá un poco más de estructura, y el caso $W=F$ tiene nombre (o sea, ¡¡es re importante!!).

Ejercicio 2 ***Proposición 5*** *V,W F-ev. $T,S:V\to W$ tl, $\lambda\in F$. Ents.:*

1. *$T+S:V\to W$ definida para $v\in V$ por $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$ es una tl.*
2. *$\lambda T:V\to W$ definida para $v\in V$ por $(\lambda T)(v)=\lambda T(v)$ es una tl.*

Definición 6 *V,W F-ev. Llamamos $L(V,W)$ al conjunto de todas las tl de V en W.*

Teorema 2 *$(L(V,W),+,\cdot)$ es un F-ev.*

Demostración:

Desafío 4 *Hacer la demostración completa. Sí, hay que probar los 10 axiomas. En realidad ahora sólo 8 (porqué?). Ayuda: usar las estructuras de ev de V y W.*

□

Observaciones 2
1. *El vector nulo del espacio $L(V,W)$ es la transformación nula.*
2. *Por si no lo dijimos antes: TODO se basa en las estructuras de F-ev de V y W.*
3. *$L(V,W)$ se llama* ***el espacio de las transformaciones F-lineales de V en W.****.*
4. *Cuando es importante destacar el cuerpo, se denota $L_F(V,W)$. Cuando F se sobreentiende, prescindimos del subíndice.*
5. *Caso V,W finito dimensionales: será el que nos ocupe más en este curso. Tanto que arracamos con un teorema fuerte.*

El teorema que sigue no tiene nombre pero tiene status de Very Important Theorem. La prueba ES DIFÍCIL, no nos vamos a engañar. Pero vamos de a poquito. Trataremos de indicar cuándo se pone áspera la cosa, así prestamos más atención.

Very Important Theorem 1 *V,W F-ev finito dimensionales, con $dimV=n$ y $dimW=m$. Ents. $L(V,W)$ es finito dimensional y $dimL(V,W)=nm$.*

Demostración: Sean $B_V=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $B_W=\{w_1,\dots,w_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Vamos a definir una base para $L(V,W)$. Recordemos que una tl está unívocamente determinada por los valores que asuma en una base de su dominio. Como además queremos probar que su dimensión es mn, sabemos que necesitamos definir mn funciones de $L(V,W)$.

Definiremos cada una de ellas dando el valor que asumen en la base de V: pc $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$ definimos

$$E_{ij}(v_k)=\delta_{ik}w_j,$$

donde δ_{ik} es la función Delta de Kronecker: $\delta_{ik}=0$ si $i\neq k$ y $\delta_{ik}=1$ si $i=k$. Veamos que $B:=\{E_{ij}:i=1,\dots,n,j=1,\dots,m\}$ es base de $L(V,W)$.

—ATENCIÓN AHORA: si no entendimos bien lo anterior, volver a leer el razonamiento, una vez comprendido, avanzar.

1) Veamos que $span(B)=L(V,W)$. Sea $T:V\to W$ tl. Pc $k=1,\dots,n$, puesto que $T(v_k)\in W$, existen $a_{kj}\in F$ tq $T(v_k)=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{kj}w_j$. Luego, puesto que $a_{kj}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{ik}$ (¿porqué?)

$$T(v_k)=\sum_{j=1}^{m}a_{kj}w_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{ik}\right)w_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\delta_{ik}w_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}E_{ij}(v_k),$$

de donde $T = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, vd, $T \in span(B)$.

2) Veamos que B es li. Si $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = o$ (la transformación nula), en particular tenemos que pt $k = 1, \ldots, n$, $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_{ij}(v_k) = o(v_k) = \overline{0}_W$, luego $\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta_{ik}w_j = \sum_{j=1}^{m} a_{kj}w_j = \overline{0}_W$ pt $k = 1, \ldots, n$. Como los w_j son li, sigue que $a_{kj} = 0$ pt $j = 1, \ldots, m$, pt $k = 1, \ldots, n$.

□

Tenemos otra operación definida entre tl.

Proposición 6 *U, V, W F-ev's. $T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$. Ents. $S \circ T \in L(U, W)$.*

Demostración: $S \circ T : U \to W$. Veamos que es tl: $(S \circ T)(\alpha u + \beta v) = S(T(\alpha u + \beta v)) = S(\alpha T(u) + \beta T(v)) = \alpha(S(T(u)) + \beta(S(T(v)) = \alpha(S \circ T)(u) + \beta(S \circ T)(v)$.

□

Observaciones 3 *En el caso particular que $V = W$, escribimos $L(V) := L(V, V)$ y las $T \in L(V)$ se llaman **operadores lineales**. Luego, para $S, T \in L(V)$, $S \circ T \in L(V)$.*

La operación composición de funciones en este caso la interpretamos como un *producto* en $L(V)$, y a veces escribimos directamente $ST := S \circ T$. Podemos deducir varias propieadades para este producto.

Desafío 5 *Probar las propiedades enunciadas en la siguiente Proposición:*

Proposición 7 *V F-ev. $T, T_1, T_2, T_3 \in L(V)$, $\lambda \in F$. Ents.*

1. *Asociativa: $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$.*
2. *Existencia de neutro: $id_V \in L(V)$ es tq $id_V T = T id_V = T$.*
3. *Distributivas con respecto a la suma: $T_1(T_2 + T_3) = T_1T_2 + T_1T_3$ y $(T_1 + T_2)T_3 = T_1T_3 + T_2T_3$.*
4. *Propiedad asociativa de los productos: $\lambda(T_1T_2) = (\lambda T_1)T_2 = T_1(\lambda T_2)$.*

Observaciones 4

1. *Decimos que $(L(V), +, \cdot, \circ)$ es un $F-$álgebra asociativa con identidad.*
2. *La asociatividad para la composici ón de transformaciones lineales vale más generalmente.*

   Desafío 6 *Enunciar y demostrar para $T_1 \in L(U, V)$, $T_2 \in L(V, W)$ y $T_3 \in L(W, Z)$.*
3. *La composición de funciones en general no es conmutativa.*

Ejercicios 2

1. *Sean $A, B \in F^{n\times n}$ y consideramos las tl $T_A, T_B : F^n \to F^n$ definidas a partir de las matrices. Probar que $T_A \circ T_B = T_{AB}$. En general, $T_AT_B \neq T_BT_A$.*
2. *$V = \mathbb{R}[x]$, $D \in L(\mathbb{R}[x])$ operador derivación, $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Probar que T es lineal. Aquí $DT \neq TD$, es decir, la composición de funciones en general NO es conmutativa.*
3. *$L : F^\infty \to F^\infty$ shift a izquierda. No es inyectiva puesto que $L(0, x_2, x_3, \ldots) = L(1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Luego, como función, no es invertible.*

Si $T \in L(V)$, no necesariamente existe $S \in L(V)$ tq $TS = ST = id_V$, y si existe en principio nada indica que sea lineal. Por suerte las cosas funcionan bien y podremos probarlo. Veamos entonces todo esto:

Definición 7 *$T : V \to W$ función es **invertible** si existe $S : W \to V$ tq $Ts = id_W$ y $ST = id_V$.*

Ejercicios 3 *Las siguientes afirmaciones, si no son conocidas, completar los detalles. Si ya están claras quizás no haga falta.*

1. *Si T es invertible, su inversa es única, y la denotamos por T^{-1}. .*
2. *T invertible sii T inyectiva y sobreyectiva.*

3. *Si $T \in L(V,W)$ invertible, para $v \in V$ $\exists! w \in W$ tq $T(v) = w$.*

4. *Si $T \in L(V,W)$ invertible, para $w \in W$ $\exists! v \in V$ tq $T^{-1}(w) = v$.*

El siguiente teorema es el que nos asegura que si una tl es invertible, su inversa también es una tl.

Teorema 3 *V, W F-ev. $T \in L(V,W)$ invertible, ents. $T^{-1} \in L(W,V)$.*

Ejercicio 3 *Demostrar el Teorema. Falta ver que T^{-1} es lineal.*

Y finalmente, el último teorema nos dice que el producto de funciones invertibles es invertible, y nos da su inversa.

Teorema 4 *U, V, W F-ev. Si $T \in L(U,V)$ invertible y $S \in L(V,W)$ invertible, entonces $ST \in L(U,W)$ invertible y $(ST)^{-1} = T^1 S^{-1} \in L(W,U)$.*

Ejercicio 4 *Demostrar el Teorema.*

Ejercicio 5 *Sea $A \in F^{n\times n}$ una matriz invertible, y consideremos la tl asociada a esta matriz $T_A : F^n \to F^n$. Entonces T_A invertible y su inversa es $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.*

4. Coordenadas y Cambio de base

En un ev V finito dimensional, digamos $dimV = n$, si tenemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bastarán n escalares para determinar cualquier vector: si $v \in V$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Si consideramos la base con un *orden* entre sus n vectores, cada vector de V queda unívocamente determinado por una n-upla, esto es, un elemento de F^n.

Definición 8 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Una* ***base ordenada*** *es un subconjunto B de n vectores de V que es base y en el cual hemos fijado un orden sucesivo entre sus elementos. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $v \in V$ se escribe como $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, el vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ se llama* ***vector de coordenadas de*** *v y lo denotamos $[v]_B$.*

ATENCIÓN: ESTAREMOS DENOTANDO VECTORES FILA, Y EN LOS CASOS QUE PRECISEMOS EXPLÍCITAMENTE CONSIDERAR VECTORES COLUMNA PONDREMOS EL SUPRAÍNDICE ^{t}.

Ejemplos 4

1. *$V = \mathbb{R}_4[x]$, sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ la base canónica. Si $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$, ents $[p(x)]_B = (-1, 0, 3, 1)$. Si $B_1 = \{x^3, x^2, x, 1\}$ base (cuál es la diferencia con la base canónica??), ents $[p(x)]_{B_1} = (1, 3, 0, -1)$. Observemos que es importante el orden que definamos en nuestra base.*

2. *$V = R^3$, B base canónica. Si $v = (1,2,3)$ ents $[v]_B = (1,2,3)$. Si $B' = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ (verificar que B' es base), ¿cómo hallamos $[v]_{B'}$?*

Vamos a definir ahora un concepto fundamental: los ev isomorfos, que desde el punto de vista de la estructura algebraica, serán indistinguibles. Para nosotrxs será una noción de *igualdad*, y nos permitirá trabajar de igual manera con distintos ev's, aunque la naturaleza de sus elementos sea diferente.

Definición 9 *V, W F-ev se dicen* ***isomorfos*** *si existe $T : V \to W$ isomorfismo. Se anota $V \overset{T}{\simeq} W$.*

Ejercicio 6 *Probar la siguiente proposición:*

Proposición 8 *En la clase de los F-ev, el isomorfismo es una relación de equivalencia.*

El siguiente teorema es fundamental, nos dice lo que venimos anunciando: ¡¡¡todo es $\mathbb{R}^n$!!!

Very Important Theorem 2 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Ents. $V \simeq F^n$.*

Demostración:

Fijamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Definimos $T : V \to F^n$ como la función que a $v \in V$ le asigna su vector de coordenadas: $T(v) = [v]_B$. T es un isomorfimo. EJERCICIO!

$\square$

Dadas dos bases en un F-ev V, cada vector $v \in V$ tiene asociado dos vectores de coordenadas. Veamos que ambos vectores se relacionan a través de una matriz.

Ejemplo 1 *$V = \mathbb{R}^3$, $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canónica, $B_2 = \{w_1 = (1,1,1,), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,0,0)\}$. Sea $v = (3,4,5) = 3e_1 + 4e_2 + 5e_3$. Observemos que $e_1 = w_3$, $e_2 = w_2 - w_3$, $e_3 = w_1 - w_2$, o lo que es lo mismo, $[e_1]_{B_2} = (0,0,1)$, $[e_2]_{B_2} = (0,1,-1)$ y $[e_3]_{B_2} = (1,-1,0)$. Luego, $v = 3w_3 + 4(w_2 - w_3) + 5(w_1 - w_2) = 5w_1 - w_2 - w_3$. Así, $[v]_{B_1} = (3,4,5)$ y $[v]_{B_2} = (5,-1,1)$. En general, si $v = (x,y,z)$, $[v]_{B_1} = (x,y,z)$ y $[v]_{B_2} = zw_1 + (y-z)w_2 + (x-y)w_3$.*

Pero veamos esto de otra forma: consideremos la matriz C cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los vectores de la base B_1 expresasdos en la base B_2:

$$C = \left([e_1]^t_{B_2}, [e_2]^t_{B_2}, [e_3]^t_{B_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si $v = (x,y,z)$,

$$C[v]^t_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix} = [v]^t_{B_1}.$$

El ejemplo anterior es bien general: es una definición y un teorema.

Teorema 5 *V F-ev finito dimensional con $dimV = n$. Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bases de V. Sea $C = (c_{ij})$ la matriz cuyas entradas c_{ij} están definidas por: para cada $j = 1, \ldots, n$ sean $c_{1j}, \ldots, c_{nj} \in F$ tales que $v_j = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{nj}w_n$. Es decir, $[v_j]_{B_2} = (c_{1j}, \ldots, c_{nj})$ y*

$$C = \left([v_1]^t_{B_2}, \ldots, [v_n]^t_{B_2}\right) = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ents. pc $v \in V$,

$$C[v]^t_{B_1} = [v]^t_{B_2}. \tag{1}$$

*C se llama **matriz de cambio de base de** B_1 **a** B_2.*

Demostración: Sea $v \in V$ con $[v]_{B_1} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Veamos que $\beta_i := \left(C \cdot [v]^t_{B_1}\right)_i$, $i = 1, \ldots, n$ son los escalares tq $[v]_{B_2} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$. En efecto, $\beta_i = \left(C \cdot [v]^t_{B_1}\right)_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = c_{i1}\alpha_1 + \cdots + c_{in}\alpha_n$, luego

$$\begin{aligned} \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n =& (c_{11}\alpha_1 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)w_1 + \cdots + (c_{n1}\alpha_1 + \cdots + c_{nn}\alpha_n)w_n \\ =& \alpha_1(c_{11}w_1 + \cdots + c_{n1}w_n) + \cdots + \alpha_n(c_{1n}w_1 + \cdots + c_{nn}w_n) \\ =& \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = v, \end{aligned}$$

de donde por unicidad de escritura tenemos que $[v]_{B_2} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

□

De la siguiente proposición un poco más general se deducirá la unicidad de la matriz de cambio de base:

Proposición 9 *$A, A' \in F^{n\times n}$ tq $Ax = A'x$ pt $x \in F^n$. Ents. $A = A'$.*

Demostración: Sea $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica de F^n. Ents.

$$(Ae_j)_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(e_j)_k = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij},$$

y análogamente $(A'e_j)_i = A'_{ij}$, luego $A_{ij} = A'_{ij}$ pt i pt j.

□

Corolario 4 *La matriz de cambio de base es la única matriz que verifica* (1).

Cuando sea necesario referenciar a las bases involucradas, anotaremos $C_{B_1B_2}$ o $C_{B_1\to B_2}$.

Corolario 5 *V F-ev. B_1, B_2, B_3 bases de V. Ents:*

1. $C_{B_1\to B_3} = C_{B_2\to B_3}C_{B_1\to B_2}$.
2. $C_{B_2\to B_1} = (C_{B_1\to B_2})^{-1}$.

Demostración:

1. **Desafío 7** *Completar esta prueba. Ayuda: unicidad.*
2. **Desafío 8** *Completar esta prueba. Probar primero que $C_{B_1\to B_2}$ es invertible y luego ver la igualdad. Ayuda: la matriz $C_{B_1\to B_2}$ es invertible pues si no lo fuera el sistema $C_{B_1\to B_2}X = 0$ tendría soluciones no triviales (concluír de aquí).*

□

Veamos dos proposiciones más.

La primera nos dice que toda matriz invertible es un cambio de base.

Proposición 10 *Si $A \in F^{n\times n}$ invertible existen bases B_1 y B_2 de F^n tq $A = C_{B_1B_2}$.*

Desafío 9 *Completar la demostración:* ***Demostración:*** *Sean $A = (a_{ij})$, B_1 la base canónica de F^n y $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ con $w_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{nj}e_n$. B_2 es base y $A = C_{B_1B_2}$........................*

□

La segunda nos dice que si tenemos una base y una matriz invertible, existen sendas bases B_1 y B_2 de modo tal que A cambia B_1 a nuestra base B y que A cambia nuestra base B a B_2, respectivamente.

Proposición 11 *Si $A \in F^{n\times n}$ invertible y B base de F^n entonces:*

1. *$\exists B_1$ base de F^n tq $A = C_{B_1B}$.*
2. *$\exists B_2$ base de F^n tq $A = C_{BB_2}$.*

Demostración:

1. **Desafío 10** *Completar esta demostración. Ayuda: idem proposición anterior poniendo B en lugar de la base canónica.*
2. **Desafío 11** *Ayuda: del item anterior, usar proposición para A^{-1} y B, existe B_2 tq $A^{-1} = C_{B_2B_1}$ luego $A = (C_{B_2B})^{-1} = C_{BB_2}$.*

□

Veremos mil ejemplos en el laboratorio y en el práctico!

5. Matriz de una transformación lineal

Hemos visto:

- Si $A \in F^{n\times n}$ entonces $T_A : F^n \to F^n$ dada por $T_A(x) = Ax$ es una tl. (Recordar que para que sea exacta la definición deberíamos poner $(Ax^t)^t$, pero lo denotamos Ax para no ensuciar la notación).
- Una tl queda unívocamente determinada a partir de los valores que asume en una base del dominio.
- Todo ev de dimensión finita es isomorfo a F^n.

Veamos ahora cómo todos estos resultados nos permitirán representar a cualquier tl como una transformación matricial (¡¡¡siempre que estemos en dimensión finita!!!).

Definición 10 *V, W F-ev finito dimensionales con $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V y $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Sea $T \in L(V, W)$. Llamamos* ***matriz de T respecto de las bases B_1 y B_2*** *a la matriz $[T]_{B_1B_2} := (a_{ij}) \in F^{m\times n}$ cuyas entradas a_{ij} están definidas por: para cada $j = 1, \dots, n$ sean $a_{1j}, \dots, c_{nj} \in F$ tales que $T(v_j) = c_{1j}w_1 + \cdots + c_{nj}w_n$. Esto es, la matriz cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los transformados de la base B_1 de V por T en la base B_2 de W:*

Reemplazar las "a" por "c"

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]^t_{B_2} & [T(v_2)]^t_{B_2} & \dots & [T(v_n)]^t_{B_2} \end{pmatrix}.$$

Ejemplos 5

1. *$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, x + 3y)$. T tl. Sean B_1, B_2 bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Ents. $T(1, 0, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 3)$ y $T(0, 0, 1) = (-1, 0)$. Luego, $[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Así, podemos calcular $T(1, 1, 1) = (1+2\cdot 1-1, 1+3\cdot 1) = (3, 4)$ o hacer el producto matricial*

$$[T]_{B_1B_2}[(1, 1, 1)]^t_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = [(3, 4)]^t_{B_2}.$$

   En el próximo teorema (que es un very important theorem) vamos a ver que esto sucede en general.

2. ***Very Important 5*** *Si T transformación matricial definida a partir de una matriz $A \in F^{m\times n}$ y B_1, B_2 bases de F^n y F^m, respectivamente, ents. $[T_A]_{B_1B_2} = A$.*

3. ***Very Important 6*** *Si V F-ev finito dimensional con B_1, B_2 bases de V, ents $[id_V]_{B_1B_2} = C_{B_1B_2}$, es decir, la matriz de la transformación identidad respecto de las dos bases dadas es la matriz de cambio de base.*

El siguiente teorema nos justifica lo que afirmamos al principio: toda tl entre espacios finitos se corresponde con una matriz (que dependerá de la elección de las bases).

Very Important Theorem 3 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente. $T \in L(V, W)$. Ents. para cada $v \in V$ tenemos que*

$$[T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} = [T(v)]^t_{B_2}.$$

Demostración: Sea $v \in V$ con $[v]_{B_1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Recordemos que el producto entre una matriz y un vector columna puede escribirse como la cl de las columnas de la matriz con coeficientes las entradas del vector: si $A = (a_{ij})$ y $x = (x_1, \dots, x_n)$ ents $Ax = Col_1(A)x_1 + \cdots + Col_2(A)x_n$. Trasladando a nuestro caso tenemos que

$$\begin{aligned} [T]_{B_1B_2}[v]^t_{B_1} &= \alpha_1[T(v_1)]_{B_2} + \cdots + \alpha_n[T(v_n)]_{B_2} \\ &= [\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)]_{B_2} \\ &= [T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)]_{B_2} \\ &= [T(v)]_{B_2}. \end{aligned}$$

$\square$

Del teorema se desprende el abuso de notación que muchas veces hacemos al obviar los paréntesis: muchas veces escribimos Tv en lugar de $T(v)$, en analogía con el producto matricial, aunque se trate de una transformación lineal entre espacios abstractos, pues ésta se reduce a un producto entre una matriz y un vector. IMPORTANTE: siempre recordar que esto sucede en dimensión finita, aunque igualmente usaremos esta notación en dimensión infinita.

Ejemplo 2 *Sea* $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 3}$ *definida según: si* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $T(p(x)) = \begin{pmatrix} a_0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 3a_2 & 4a_3 \end{pmatrix}$. *Es una tl (EJERCICIO). Sean* $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ *base canónica ordenada de* $\mathbb{R}_3[x]$ *y* $B_2 = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$ *base canónica ordenada de* $\mathbb{R}^{2\times 3}$. *Tenemos que los vectores de coordenadas son* $[p(x)]_{B_1} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ *y* $[T(p(x))]_{B_2} = (a_0, 2a_1, 0, 0, 3a_2, 4a_3)$. *Evaluamos los elementos de la base* B_1 *y escribimos su transformado en la base* B_2: $T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11}$, $T(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{12}$, $T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{22}$ *y* $T(x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E_{23}$. *Observemos ahora que siendo* $dim\,\mathbb{R}_3[x] = 4$ *y* $dim\,\mathbb{R}^{2\times 3} = 6$, *tenemos que* $[T]_{B_1B_2}$ *es una matriz* 6×4:

$$[T]_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

luego

$$[T]_{B_1B_2}[p(x)]^t_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 3a_2 \\ 4a_3 \end{pmatrix} = [T(p(x))]^t_{B_2}.$$

Como consecuencias del teorema tenemos, como *seguramente ya intuíamos* que $L(V, W)$ es isomorfo al espacio de matrices $dimV \times dimW$ (¡¡recordemos nuevamente que todo esto es en dimensión finita!!):

Corolario 6 V, W *F-ev finito dimensionales. Fijadas* B_1, B_2 *bases de* V *y* W, *respectivamente, la función* $\varphi : L(V, W) \to F^{m\times n}$ *tal que* $\varphi(T) = [T]_{B_1B_2}$ *es isomorfismo de ev.*

Demostración: Sean $B_1 = \{v_1 \ldots, v_2\}$ y $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$.

Veamos primero que ϕ es lineal. Sean $\alpha, \beta \in F$, $S, T \in L(V, W)$. Calculemos las columnas de $[\alpha T + \beta S]_{B_1 B_2}$: para $j \in \{1, \ldots, n\}$, $[(\alpha T + \beta S)(v_j)]_{B_2} = [\alpha T(v_j) + \beta S(v_j)]_{B_2} = \alpha [T(v_j)]_{B_2} + \beta [S(v_j)]_{B_2}$. Luego, $[\alpha T + \beta S]_{B_1 B_2} = \alpha [T]_{B_1 B_2} + \beta [S]_{B_1 B_2}$, de donde $\varphi(\alpha T + \beta S) = \alpha \varphi(T) + \beta \varphi(S)$.

Para ver que es un isomorfismo, basta ver que es inyectiva o sobreyectiva (porqué?). Igualmente veamos ambas, pues puede ser instructivo.

Para ver que es inyectiva, puesto que hemos probado que es lineal, debemos calcular su núcleo: si la matriz asociada a una tl es la matriz nula, significa que sus columnas son todas iguales al vector nulo, luego las imagenes de todos los vectores de la base del dominio son el vector nulo, es decir, la tl buscada es la transformación nula.

Para ver que es sobreyectiva, basta con tomar una matriz y definirse adecuadamente la tl en las bases.

Desafío 12 *Completar y desarrollar la prueba de sobreyectividad.*

□

La linealidad es tan intersante que la escribiremos aparte en un corolario:

Corolario 7 *V, W F-ev finito dimensionales. Fijadas B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente, para $\alpha, \beta \in F$, $S, T \in L(V, W)$ tenemos que $[\alpha T + \beta S]_{B_1 B_2} = \alpha [T]_{B_1 B_2} + \beta [S]_{B_1 B_2}$.*

Veamos qué pasa con la matriz de la composición de funciones:

Proposición 12 *U, V, W F-ev finito dimensionales con bases B_1, B_2, B_3, respectivamente, y $T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$ ents $[ST]_{B_1 B_3} = [S]_{B_2 B_3} [T]_{B_1 B_2}$.*

Demostración: Miremos las dimensiones: si $dimU = r$, $dimV = n$ y $dimW = m$, entonces $[ST]_{B_1 B_3} \in F^{m \times r}$, $[S]_{B_2 B_3} \in F^{m \times n}$ y $[T]_{B_1 B_2} \in F^{n \times r}$. Usaremos que si $Ax = A'x$ para todo x entonces $A = A'$:

$$[S]_{B_2 B_3} [T]_{B_1 B_2} [v]^t_{B_1} = [S]_{B_2 B_3} [T(v)]^t_{B_2} = [(ST)(v)]^t_{B_3} = [ST]_{B_1 B_3} [v]^t_{B_1}.$$

□

De la proposición desprendemos varios corolarios muy ilustrativos:

Corolario 8 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B_2 bases de V y W, respectivamente, $T \in L(V, W)$ isomorfismo. Entonces $[T^{-1}]_{B_2 B_1} = ([T]_{B_1 B_2})^{-1}$.*

Ejercicio 7 *Probar el siguiente corolario:*

Corolario 9 *V, W F-ev finito dimensionales con B_1, B'_1 bases de V y B_2, B'_2 bases de W, $T \in L(V, W)$. Entonces $[T]_{B'_1 B'_2} = C_{B_2 B'_2} [T]_{B_2 B_1} C_{B'_1 B_1}$, donde $C_{BB'}$ es la matriz de cambio de bases (en las bases correspondientes).*

B_1B_2

Demostración: *... Ayuda: considerar $T = id_W \circ T \circ id_V$.*

□

Cuando T es un endomorfismo y consideramos la misma base B en dominio y codominio, simplemente escribimos $[T]_B$.

Corolario 10 *V F-ev finito dimensional, B, B' bases de V, $T \in L(V)$. Entonces $[T]_{B'} = C_{BB'} [T]_B C_{B'B} = (C_{B'B})^{-1} [T]_B C_{B'B}$.*

Este tipo de expresiones matriciales tienen gran importancia: nos dan una relación de equivalencia entre matrices. La siguiente definición es very important.

Definición 11 *Dos matrices cuadradas A y B de tamaño $n \times n$ se dicen **semejantes** si existe una matriz P de tamaño $n \times n$ invertible tal que $B = P^{-1} A P$.*

Desafío 13 *Probar la siguiente proposición:*

Proposición 13 *La semejanza es una relación de equivalencia en las matrices $F^{n \times n}$.*

El siguiente ejemplo ilustra un poco la importancia de tener matrices semejantes:

Ejemplo 3 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *y sea* $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *la tl asociada a la matriz* A*. Entonces, en la base canónica tenemos que* $T(1,0,0) = (1,0,0)$*,* $T(0,1,0) = (2,0,1)$ *y* $T(0,0,1) = (3,2,1)$*. Si* P *es la matriz* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *entonces* $P^{-1}AP$ *es la matriz diagonal* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*. Si pensamos a* P *como una matriz de cambio de base (porqué podemos hacer esto?), de la base canónica digamos a una base* $B = \{v_1, v_2, v_3\}$*, concluímos que para la transformación* T_A *existe una base (la base* B'*) donde la matriz asociada a* T *es diagonal:* $[T_A(v_1)]_B = -[v_1]_B^t = -(1,0,0)^t$*,* $[T_A(v_2)]_B = [v_2]_B^t = (0,1,0)^t$ *y* $[T_A(v_3)]_B = 2[v_3]_B^t = 2(0,0,1)^t$*. La importancia de tener una matriz diagonal es la sencillez de su expresión, de la cual por ejemplo se desprende a simple vista que* T *es un isomorfismo (porqué?), y aprenderemos a deducir muchas otras cosas. Estas ideas serán centrales en la segunda parte de la asignatura.*

6. El espacio dual

El **espacio dual** V^* de un F-ev dado V se define muy sencillamente: $V^* := L(V, F)$, es decir, es el conjunto de transformaciones lineales de V en F. Más aún, como hemos visto, es un F-ev. Sus elementos de llaman **covectores** o **1-formas**.

El concepto de covectores aparece en la física al asociar a un vector un escalar. Por ejemplo, dada una viga, si consideramos trozos de igual longitud, cada trozo de viga (vector) tiene un peso (escalar). Muchos ejemplos más podemos construir de la física observando que una integral de línea es una 1-forma. En efecto, podemos pensar en el trabajo al moverse en un campo conservativo: a cada cambio de posición (vector) se le asocia el trabajo involucrado (escalar). Si observamos que las integrales dobles, triples, múltiples se obtienen a partir de las de línea (1-formas), anidadas, vemos cómo las 1-formas modelizan muchos más aspectos físicos, geométricos y analíticos. Pero no sólo eso. Los escalares, vectores, las matrices, las 1-formas son ejemplos de **tensores**, y conforman la base del álgebra multilineal (donde, por ejemplo, hacen su aparición estructuras como los *arrays*, que podemos pensar como *multimatrices*). Para que nos hagamos una idea, un tensor será un objeto algebraico que es independiente del sistema de coordenadas. Así es como a las aplicaciones (además del interés matemático en sí) a áreas como la físicas se le agregan aplicaciones a la ciencia de la computación, y dentro de éstas, y bastante recientemente, al desarrollo de redes neuronales (entre otras!).

Definición 12 *V F-ev. Llamamos* ***espacio dual de*** V *al* F*-ev*

$$V^* = L(V, F) = \{\varphi : V \to F : \varphi \text{ transformación lineal}\}.$$

Si $dim(V) = n < \infty$, dadas B base de V y B' base de F (como F-ev, cuál podría ser, por ejemplo?), sabemos que $V^* = L(V, F) \simeq F^{n\times 1}$, luego $dim(V^*) = n = dim(V)$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 4 $V = \mathbb{R}^3$*,* $V^* = (\mathbb{R}^3)^* = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \varphi \text{ transformación lineal}\}$*.*

Definimos para $i = 1, 2, 3$ $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$*. Así,* $\varphi_i \in (\mathbb{R}^3)^*$ *y más aún,* $span\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = (\mathbb{R}^3)^*$*.*

Proposición 14 *V F-ev,* $dim(V) = n$*,* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *base de* V*. Ents. existe una única base* $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *de* V^* *tal que* $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$*,* $i, j = 1, \ldots, n$*. Llamamos a* B^* ***base de*** V^* ***dual de*** B*, o simplemente* ***base dual****.*

Demostración: P.c. $i = 1, \ldots, n$ definimos $\varphi_i : V \to F$ en la base B como $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Sabemos que cada φ_i está bien definida (o sea, $\varphi_i \in V^*$) y es la única que asume estos valores en la base. Por otro lado, puesto que $dim(V^*) = n$, veamos que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es li. En efecto, consideremos $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$. Evaluando esta tl en los vectores de la base, sigue que $a_i = 0$ pc $i = 1, \ldots, n$. Lueo B^* es base.

□

Ejemplo 5 *1. En el ejemplo anterior se trataba de la base dual.*

2. $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1,1), (1,-1)\}$. Hallar B^*. Solución: $\varphi_1(x,y) = \frac{x+y}{2}$ y $\varphi_2(x,y) = \frac{x-y}{2}$.

Dadas una base B de un F-ev V de $dim(V) = n$, y B^* su base dual, es fácil obtener las coordenadas de un vector de V en B y las de un vector de V^* en B^*. En efecto: sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Luego,

- $v \in V$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$. P.c. $1 \leq j \leq n$, $\varphi_j(v) = \alpha_j$. Luego, $[v]_B = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$.
- $\varphi \in V^*$, $\varphi = \beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n$, $\beta_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$. P.c. $1 \leq j \leq n$, $\varphi(v_j) = \beta_j$. Luego, $[\varphi]_{B^*} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$.

Ejemplo 6 *En el ejemplo anterior, $v = (5,7) \in \mathbb{R}^2$, luego $[v]_B = (6,-1)$ y $\varphi(x,y) = 5x + 3y \in (\mathbb{R}^3)^*$, $[\varphi]_{B^*} = (8,2)$.*

Dada una base B de V obtuvimos una única base B^* de V^*. También tenemos que si B_1 base de V^*, existe una única base B de V tq $B^* = B_1$:

Proposición 15 *V F-ev, $dim(V) = n$, V^* su dual. Sea $B_1 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base de V^*. Ents. existe única B base de V tq $B^* = B_1$.*

Demostración: Sean $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de V y B_2^* su base dual. Tenemos que pc $i = 1, \ldots, n$, $[\varphi_i]_{B_2^*} = (\varphi_i(w_1), \ldots, \varphi_i(w_n))$. Luego consideramos la matriz cuyas filas son $[\varphi_1]_{B_2^*}, \ldots [\varphi_1]_{B_2^*}$ (que son vectores li de F^n):

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \varphi_1(w_2) & \ldots & \varphi_1(w_n) \\ \varphi_2(w_1) & \varphi_2(w_2) & \ldots & \varphi_2(w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \varphi_n(w_2) & \ldots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix},$$

y sea $A = M^{-1}$. Así,

$$\delta_{ij} = (I_n)_{ij} = (MA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(w_k)A_{kj} = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} A_{kj}w_k\right).$$

Definimos entonces $v_j := \sum_{k=1}^{n} A_{kj}w_k$ de modo que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Veamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conj. li: si $\alpha_1 v_a + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ entonces

$$0 = \varphi_i(0) = \alpha_1\varphi_i(v_1) + \cdots + \alpha_n\varphi_i(v_n) = \alpha_i.$$

Luego $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ es la base buscada.

La unicidad sigue de lo siguiente: si $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es otra tal base (es decir, $B^* = B'^* = B_1$). Entonces $[u_i]_B = (\varphi_1(u_i), \ldots, \varphi_1(u_i)) = e_i = [u_i]_{B'}$.

□

Ejemplo 7 *$V = \mathbb{R}_2[x]$, $V^* = (\mathbb{R}_2[x])^* = \{\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R} : \varphi$ tl$\}$. Definimos $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \in (\mathbb{R}_2[x])^*$ según: $\epsilon_0(p(x)) = p(0)$, $\epsilon_1(p(x)) = p(1)$ y $\epsilon_2(p(x)) = p(2)$. Veamos que $B_1 = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ es base de*

$(\mathbb{R}_2[x])^*$. Como $dim(\mathbb{R}_2[x])^* = 3$, veamos que es li. Consideremos $\alpha_0\epsilon_0 + \alpha_1\epsilon_1 + \alpha_2\epsilon_2 = 0$. Entonces p.t. $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha_0\epsilon_0(p(x)) + \alpha_1\epsilon_1(p(x)) + \alpha_2\epsilon_2(p(x)) = 0$, de donde $\alpha_0 p(0) + \alpha_1 p(1) + \alpha_2 p(2) = 0$. Si $p(x) = (x-1)(x-2)$ sigue que $\alpha_0 = 0$, si $p(x) = x(x-1)$ sigue que $\alpha_1 = 0$ y si $p(x) = x(x-2)$ sigue que $\alpha_2 = 0$. Luego B_1 es base. Buscamos B base de $\mathbb{R}_2[x]$ tq $B^* = B$. Es decir, buscamos $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ tq $\epsilon_0(p_0) = 1$, $\epsilon_1(p_0) = 1$ y $\epsilon_2(p_0) = 1$, ... Luego $p_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$ y análogamente $p_1(x) = -x(x-1)$,$p_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$.

Estudiaremos ahora el *anulador* o *aniquilador* de un sev:

Definición 13 *V F-ev, $U \subset V$ sev. El **anulador** de U es el sev del dual V^* definido por*

$$U^0 := \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0, \forall\, u \in U\} = \{\varphi \in V^* : U \subset ker(\varphi)\}.$$

Desafío 14 *Probar que U^* es, en efecto, un sev de V^*.*

Para dimensión finita, tenemos el siguiente resultado en cuanto a dimensiones:

Proposición 16 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev. Entonces*

$$dim(U) + dim(U^0) = n = dim(V).$$

Demostración: Consideremos $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de U. Completamos a una base de V:

$B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ y sea $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base dual. Entonces para $1 \leq j \leq r$ y $r+1 \leq i \leq n$, $\varphi_i(v_j) = 0$. Luego, $\varphi_i \in U^0$.

Además, $\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\} \subset U^*$ es un conjunto li, veamos que es generador. En efecto, si $\varphi \in U^0$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i$. Como para cada $1 \leq j \leq n$, $\varphi(v_j) = \beta_j$ y puesto que $\varphi \in U^0$ y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de U, sigue que $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. Luego $\varphi \in span\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$, luego es base de U^0.

Sigue que $dim(U) + dim(U^0) = n = dim(V)$.

□

Ejemplo 8 *$U = span\{(1,1,1),(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Para hallar una base de U^0, completamos a una base de V: $B = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$ y consideramos su base dual $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Luego, $\{\varphi_3\}$ es una base de U^0. EJERCICIO: $\varphi_3(x,y,z) = x - z$.*

En la siguiente proposición vemos cómo recuperamos un sev a partir de su anulador:

Proposición 17 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev. Entonces*

$$U = \{v \in V : \varphi(v) = 0,\ \forall\, \varphi \in U^0\}.$$

Demostración: Sea $W = \{v \in V : \varphi(v) = 0,\ \forall\, \varphi \in U^0\}$. Veamos que $U = W$.

- $\subset$) $v \in U$. Luego $\varphi \in U^0$, luego $\varphi(v) = 0$. Como es para todo $\varphi \in U^0$, sigue que $v \in W$.
- $\supset$) $v \in W$. Supongamos que $v \notin U$ (hence $v \neq 0$). Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U. Luego, $\{v_1, \ldots, v_r, v\}$ es un conjunto li. Completamos a una base de V: $B = \{v_1, \ldots, v_r, v, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$. Como $\varphi_{r+1}(v_1) = \cdots = \varphi_{r+1}(v_r) = 0$, de donde $\varphi_{r+1} \in U^0$. Y como $v \in W$ sigue que $\varphi_{r+1}(v) = 0$, pero por construcción $\varphi_{r+1}(v) = 1$, contradicción. Luego $v \in U$ de donde $W \subset U$ y por lo tanto $U = W$.

□

Ejemplo 9 *En el ejemplo anterior, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda\varphi_3(x,y,z) = 0, \lambda \in F\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$.*

Corolario 11 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev, $B_1 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ base de U^0. Entonces*

$$U = \{v \in V : \varphi_1(v) = 0, \ldots \varphi_r(v) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{r} ker(\varphi_i).$$

Finalmente,

Proposición 18 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U, W \subset V$ sev. Ents.*

- $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$,
- $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

Demostración:

- $\varphi \in V^*$.

$$\begin{aligned}\varphi \in (U+W)^0 &\iff \varphi(u+w) = 0\ \forall u \in U, \forall w \in W \\ &\iff \varphi(u) = 0\ \forall u \in U, \varphi(w) = 0, \forall w \in W \qquad \text{(EJERCICIO)} \\ &\iff \varphi \in U^0 \cap W^0.\end{aligned}$$

- Si $\varphi \in U^0 + W^0$, $\varphi = \varphi_U + \varphi_W$ con $\varphi_U \in U^0$ y $\varphi_W \in W^0$. Luego p.c. $v \in U \cap W$, $\varphi(v) = \varphi_U(v) + \varphi_W(v) = 0 + 0 = 0$, de donde $\varphi \in (U \cap W)^0$. Por lo tanto $U^0 + W^0 \subset (U \cap W)^0$. Tenemos por otro lado que

$$\begin{aligned}dim(U^0 + W^0) =& dim(U^0) + dim(W^0) - dim(U^0 \cap W^0) \\ =& dim(U^0) + dim(W^0) - dim(U+W)^0 \\ =& n - dim(U) + n - dim(W) - (n - dim(U+W)) \\ =& n - (dim(U) + dim(W) - dim(U+W)) \\ =& n - dim(U \cap W) = dim(U \cap W)^0,\end{aligned}$$

luego $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

□

Terminamos la sección con el concepto de aplicación dual, o pullback, que aparece en la geometría y el álgebra multilineal.

Definición 14 *$T \in L(V, W)$ la* ***aplicación dual*** *es la aplicación $T^* \in L(W^*, V^*)$ definida para $\varphi \in W^*$ por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$.*

La aplicación dual T^* está bien definida, es decir, es una tl.

Ejemplo 10 *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definida por $\varphi(p(x)) = p(3)$. Luego, $D^*(p(x))\varphi = \varphi \circ D(p(x)) = \varphi(p'(x)) = p'(3)$. Sea $\psi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definida por $\psi(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$. Luego, $D^*(p(x))\psi = \psi \circ D(p(x)) = \psi(p'(x)) = \int_0^1 p'(x)dx = p(1) - p(0)$.*

Desafío 15 ***El álgebra de aplicaciones duales.*** *Probar las siguientes proposiciones:*

- *$S, T \in L(V, W)$, $\alpha, \beta \in F$, entonces $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$.*
- *$T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*