Funciones

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

5 de junio de 2024

Definiciones Básicas

Dados A y B conjuntos no vacíos, una función de A en B es una relación de A en B que verifica que cada elemento de A es primera componente de exactamente un par ordenado de la relación. Lo notamos $f : A \to B$ En otras palabras

Definición

la relación f de A en B es función si:

1. Para cada $a \in A$ existe $b \in B$ tal que (a, b) está en la relación.
2. No puede haber dos pares (a, b_1) y (a, b_2) con $b_1 \neq b_2$ en la relación.

Podemos escribir $f(a) = b$ para indicar que la *imagen* de $a \in A$ es el elemento $b \in B$.
Como la función f es una relación de A en B, es un subconjunto de $A \times B$.
Diremos que el dominio de f es A y el codominio de f es B.
Escribimos Dom(f) y Codom(f) respectivamente.

Ejemplo

Ejemplo

- Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{w, x, y, z\}$ sea $f = \{(1, w), (2, x), (3, x)\}$
  Notemos que f cumple con las condiciones para ser función.
  Podemos escribir $f : A \to B$ con $f(1) = w, f(2) = x$ y $f(3) = x$.
  En este caso $f(A) = \{w, x\}$.
  Cuantas funciones distintas se pueden definir de A en B?
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 7$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x|$

Función inyectiva

Decimos que una función $f : A \to B$ es inyectiva si cada elemento de B es segunda componente de a lo sumo un par ordenado de la relación.

$$\boxed{f \text{ es inyectiva si } \forall a_1, a_2 \in A,\ \ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.}$$

Ejemplo

- En el ejemplo anterior $f(2) = f(3)$ y por lo tanto f NO inyectiva
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3x + 7$ es inyectiva:$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x|$ NO es inyectiva, ya que por ejemplo, $1 \neq -1$ y sin embargo $|-1| = |1|$.
- Para $A = \{a, b, c\}$ sea $s : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{N}$ tal que $s(X) = |X| + 1$. Es inyectiva?

Conjunto imagen de un subconjunto a través de una función

Si $f : A \to B$ es función, es una relación, y si $A_1 \subseteq A$ el conjunto imágen de A_1 por f es: $f(A_1) = \{b \in B : f(a) = b \text{ para algun } a \in A_1\}$.

Ejemplo

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{w, x, y, z\}, f : A \to B$,
  $f = \{(1, w), (2, x), (3, y), (4, z), (5, y)\}$ entonces
  $f(\{1, 2\}) = \{w, x\}$, $f(\{2, 3, 5\}) = \{x, y\}$ y $f(\{5\}) = \{y\}$
- $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $h(x, y) = 2x + 3y$ verifica que $Im(h) = \mathbb{Z}$.
  $Im(h) \subseteq \mathbb{Z}$.
  Dado $z \in \mathbb{Z}$ existe $(-z, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $h(-z, z) = 2(-z) + 3z = z$. Esto prueba $\mathbb{Z} \subseteq Im(h)$

Teorema

Sea $f : A \to B, \quad A_1, A_2 \subseteq A$ *entonces*

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Demostración.

1. $\Rightarrow$) Sea $y \in f(A_1 \cup A_2)$, luego $\exists x \in A_1 \cup A_2 : y = f(x)$. Es decir, $x \in A_1$ o $x \in A_2$, tal que $y = f(x)$ y en consecuencia $y \in f(A_1)$ o $y \in f(A_2)$, vale decir, $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.Queda probado que $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$.

   $\Leftarrow$) Si $z \in f(A_1) \cup f(A_2)$, $z \in f(A_1) \vee z \in f(A_2)$. Luego $\exists x \in A_1 : z = f(x) \vee \exists x \in A_2 : z = f(x)$, es decir, $\exists x \in A_1 \cup A_2 \ : \ z = f(x)$, v.d $z \in f(A_1 \cup A_2)$. Queda probado que $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$.
2. Hacerla!!

$\square$

Ejemplo

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = |x|$ $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, -1\}$ $A_1 \cap A_2 = \{0\}$
$g(A_1) = \{0, 1\} = g(A_2)$, $g(A_1 \cap A_2) \neq g(A_1) \cap g(A_2)$

Teorema

Sea $f : A \to B$, $\forall X_1, X_2 \subseteq A$, $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2) \iff f$ *es inyectiva*

Demostración.

$\Leftarrow$) Por el teorema anterior, para cualquier $X_1, X_2 \subseteq A$, $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
Ahora veamos la otra contención:
$y \in f(X_1) \cap f(X_2) \Rightarrow y \in f(X_1) \wedge y \in f(X_2) \Rightarrow \exists x_1 \in X_1 : y = f(x_1) \wedge \exists x_2 \in X_2 : y = f(x_2)$. Entonces $y = f(x_1) = f(x_2)$.Como f inyectiva $x_1 = x_2 \in X_1 \cap X_2$, y es decir,
$y \in f(X_1 \cap X_2)$.

Demostración del Teorema (cont.)

$\Rightarrow$) Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Debemos probar que $x_1 = x_2$. Definimos $X_1 = \{x_1\}$ y $X_2 = \{x_2\}$. Por lo tanto, $f(X_1) = \{f(x_1)\} y\ f(X_2) = \{f(x_2)\}$. Por hipotesis, $f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2)$. Si fuera $x_1 \neq x_2, X_1 \cap X_2 = \emptyset$ y se contradice la hipótesis. Por lo tanto, $x_1 = x_2$, y $f(X_1) \cap f(X_2) = \{f(x_1)\}$. probando la inyectividad de f, ya que mostramos que

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

. $\square$

Restricción y extensión de una función

Definición

Sea $f : A \to B$,

- Para $A_1 \subseteq A$ la restricción de f a A_1, es la función $f|_{A_1} : A_1 \to B$ tal que
  $$f|_{A_1}(a) = f(a) \ si \ a \in A_1$$
- *Para* $A \subseteq A_2$ una extensión de f a A_2 es una funión , $g : A_2 \to B$ tal que $g(a) = f(a)$ si $a \in A$

Ejemplo

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{N}$, $A_1 = \{2, 3, 5\}$ y $A_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$,
$f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9)\}$

- $f|_{A_1} = \{(2, 3), (3, 5), (3, 9)\}$
- $g : A_2 \to \mathbb{N}$ $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (6, 11), (10, 19)\}$ es UNA extensión de f a A_2.
- $h : A_2 \to \mathbb{N} : h = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (6, 9), (10, 8)\}$ es OTRA extensión de f a A_2

Conjunto pre-imagen de un conjunto a través de una función

Definición

Dada una función $f : A \to B$ y $B_1 \subseteq B$, la preimagen de B_1 por medio de f, notada como $f^{-1}(B_1)$, es el conjunto $f^{-1}(B_1) = \{x \in A : \exists b \in B_1 \text{ , con } f(x) = b\}$

Ejemplo

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 5$

- Si $B = \{0\}$ entonces $f^{-1}(B) = \emptyset$.
- Si $B = [5, +\infty)$ entonces $f^{-1}(B) = \mathbb{Z}$.
- Si $B = [6, 10]$ entonces $f^{-1}(B) = \{1, -1, -2, 2\}$. (Verificarlo)

Sobre el conjunto preimagen de un conjunto a través de una función

Teorema

Sea la función $f : A \to B, \quad B_1,\ B_2 \subseteq B$ *entonces:*

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}(\overline{B_1}) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

Demostración.

1. Sea $x \in A$. $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \iff f(x) \in B_1 \cup B_2 \quad \iff x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \iff x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
2. Ejercicio
3. Sea $a \in A$.
   $a \in f^{-1}(\overline{B_1}) \Leftrightarrow f(a) \in \overline{B_1} \Leftrightarrow f(a) \notin B_1 \Leftrightarrow a \notin f^{-1}(B_1) \Leftrightarrow a \in \overline{f^{-1}(B_1)}$.

$\square$

Funciones suryectivas (sobreyectivas)

Definición

Decimos que la función $f : A \to B$ es suryectiva si cada elemento de B es segunda componente de al menos un par ordenado de la relación función.
$f(A) = Im(f) = B$.

$$\boxed{f \text{ es sobreyectiva si } \forall y \in B,\ \exists x \in A : f(x) = y.}$$

Ejemplo

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B\{a, b, c, d\}, f = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, c)\}$
   $Im(f) = \{a, c, d\}$. No es sobre ya que $\exists b \in B$ que no tiene preimagen.
2. *Si* $g = \{(1, d), (2, b), (3, c), (4, a)\}$ *con los mismos* A *y* B,
   $Im(g) = B$, *es decir,* g *es suryectiva*
3. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{w\}$ *cualquier función de* A *en* B *es suryecitva.*
   Ninguna función de B *en* A *es suryectiva*

Funciones biyectivas

Definición

Una función es biyectiva si es inyectiva y suryectiva.

Ejemplo

1. *La función del Ejemplo 1. anterior NO es biyectiva ya que no es suryectiva*
2. *La funcion del Ejemplo 2. anterior es biyectiva ya que además de ser suryectiva es inyectiva (verificarlo)*
3. $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $h(x, y) = 2x + 3y$, *vimos que* $h(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, *luego es suryectiva. Es inyectiva?*

   $$h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2) \Rightarrow 2x_1 + 3y_1 = 2x_2 + 3y_2 \Rightarrow 2(x_1 - x_2) = 3(y_2 - y_1)$$

   Que podemos decir?
   Si tomamos $(3, 0)$ *y* $(0, 2)$ *la igualdad se cumple y los pares ordenados son distintos. NO es inyectiva. NO es biyectiva*

Composición de dos funciones

Definición

Sean f y g dos funciones tales que $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$.
Se define la composición de g con f y se la nota $g \circ f$ a la funcion que verifica:

$$Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) : f(x) \in Dom(g)\}$$
$$\text{y tal que } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ para todo } x \in Dom(g \circ f).$$

Bajo la condición $Im(f) \cap Dom(g) \neq \emptyset$ decimos que la *composición de g con f es posible ya que su dominio es no vacio.*

Existen funciones para las cuales $g \circ f$ esta bien definida y que $f \circ g$ no lo está.
Existen funciones para las cuales es posibles ambas composiciones y son distinas.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \; f(x) = |x|$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : \; g(x) = -x$.
Entonces $g \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- : \; g \circ f(x) = -|x| \quad f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : \; f \circ g(x) = |-x|$.
La composición de funciones NO es conmutativa.

Asociatividad de la composición de funciones

Teorema

La composición de funciones es asociativa

Demostración.

Supongamos que $f : A \to B, \;\; g : B \to C, \;\; h : C \to D$. En este caso son posibles las siguientes composiciones (verificarlo): $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$, ambas composiciones tienen como dominio a A y codominio a D.
Ademas,
$((h \circ g) o\, f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = (h \circ (g \circ f))(x)$ para cualquier $x \in A$.

$\square$

Ejemplo

Si $f : A \to A$ la composición $f \circ f$ es posible y se nota f^2.
Recursivamente $f^n = f \circ f^{n-1}$ para $n \geq 2$.

Teorema

Teorema

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ inyectivas (suryectiva) entonces $g\ o\ f : A \to C$ es inyectiva (suryectiva).

Demostración.

Veamos si f y g son inyectivas, $g \circ f$ también lo es.
Dados $a_1, a_2 \in A$:

$$(g\ o\ f)(a_1) = (g\ o\ f)(a_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(por def)}} g(f(a_1)) = g(f(a_2)) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(g es iny)}} f(a_1) = f(a_2) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{(f es iny)}} a_1 = a_2.$$

Para la suryectividad: dado $c \in C$ sabemos por ser g suryectiva, $\exists b \in B\ :\ g(b) = c$.
Dado ESE elemento b por la suryectividad de f, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.
Por lo tanto, dado $c \in C$, existe $a \in A$ tal que $g(f(a)) = g(b) = c$ $\square$

Función inversible

Definición

Una función $f : A \to B$ es inversible si existe una función $g : B \to A$ tal que
$g \circ f = id_A \quad y \quad f \circ g = id_B$.

Si f es inversible, g también lo es.

Teorema

Si $f : A \to B$ es inversible y $g : B \to A$ es una inversa de f, entonces es la única.

Demostración.

Supongamos que existen dos funciones $g : B \to A$ y $h : B \to A$ tales que

$$h \circ f = id_A \text{ y } f \circ h = id_B,$$
$$g \circ f = id_A \text{ y } f \circ g = id_B.$$

Entonces si $b \in B$, $\quad h(b) = h(id_B(b)) = (h \circ id_B)(b) = [h \circ (f \circ g)](b) =$
$[(h \circ f) \circ g](b) = (id_A \circ g)(b) = g(b) \quad \therefore \; h = g$ $\square$

Si f inversible, la inversa de f tiene una notación propia por su unicidad: f^{-1}.

f es inversible $\iff$ f es biyectiva

Teorema

Dada la función $f : A \to B$, f es inversible si y solo si f es biyectiva.

Demostración.

$\Rightarrow$)

f inyectiva?

Sean a_1, a_2 tales que $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) \Rightarrow a_1 = a_2$ $\surd$

f es suryectiva? Dado $b \in B$ ¿$\exists\ a \in A\ :\ f(a) = b$?

$f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$. Ahora $f^{-1}(b)$ existe para cualquier elemento $b \in B$ y $f^{-1}(b) \in A$. es decir $\exists\ a \in A\ :\ f(a) = b$. $\surd$

$\Leftarrow$)

Como f es suryectiva, defino $g : B \to A$ así: $b \in B$ le asigna $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Por la inyectividad de f, g es función.

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) \underset{def\ g}{=} a = id_A(a)$ $\surd$

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) \underset{def\ g}{=} f(a) = b = id_B(b)$ $\surd$

$\therefore$ g esta bien definida y verifica las condiciones de la inversa de f. $\square$

Función inversa de una composición de funciones inversibles

Teorema

Si $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *son inversibles entonces* $g \circ f$ *es inversible y* $(g\ o\ f)^{-1} = f^{-1}\ o\ g^{-1}$.

Demostración.

Como al composición de funciones biyectivas es biyectiva, $g \circ f$ es inversible.
Solo resta verificar que LA inversa de $g \circ f$ es $f^{-1} \circ g^{-1}$. Para ello:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ (id_B) \circ f = (f^{-1} \circ id_B) \circ f = f^{-1} \circ f = id_A.$$

Análoga la otra composición. □

Recordar definición de preimagen y contrastar con función inversa. La preimagen siempre existe, es un conjunto. La función inversa (cuando existe) es una FUNCIÓN.

Teorema

$f : A \to B, A$ y B finitos, $|A| = |B|$. Entonces son equivalentes:

A) *f inyectiva;*

B) *f suryectiva;*

C) *f inversible;*

Demostración.

Ya sabemos que $C) \Leftrightarrow A) \wedge B)$.
Si probamos que $A) \Leftrightarrow B)$ complementamos la demostración.
Supongamos que f no es inyectiva y que vale $B)$. Entonces existen $a_1 \neq a_2$ tales que $f(a_1) = f(a_2)$. Con lo cual $|A| > |f(A)| = |B|$.Contradicción.
Si suponemos que f no es suryectiva y que vale $A)$, $|f(A)| < |B|$ pero como es inyectiva y A es finito, $|A| = |f(A)|$ teniendo entonces que $|A| = |f(A)| < |B| = |A|$.
Contradicción. $\square$

Funciones especiales: Operaciones

Definición

Dados A y B no vacios, una función $f : A \times A \to B$ es una operación binaria en A. Si ademas, $Im(f) \subseteq A$ la operación es cerrada en A.
Si $g : A \to A$ entonces g es una operacion monaria (unaria) en A.

Ejemplo

- $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(a, b) = a - b$ es una operacion binaria cerrada en $\mathbb{Z}$
- $q : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}$ tal que $g(a, b) = a - b$ es una operacion en $\mathbb{Z}$ que NO es cerrada. Ya que $\exists (3, 7) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que $g(3, 7) \notin \mathbb{Z}^+$.
- $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $h(a) = \frac{1}{a}$ es una operacion monaria en $\mathbb{R}^+$

Operaciones conmutativas y asociativas

Ejemplo

Dado un conjunto universal $\mathcal{U}$ consideramos

- $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $f(A, B) = A \cup B$. f es una operacion cerrada binaria
- $g : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tal que $g(A) = \overline{A}$ es una operacion monaria.

Definición

Dada la operacion binaria $f : A \times A \to B$ en A, diremos que

- f es conmutativa si $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$ para todo $(a_1, a_2) \in A \times A$.
- Si f es cerrada, entonces f es asociativa si $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$ para todo $a, b, c \in A$.

Vamos comunmente a usar una notación mas 'parecida' a una operación. Por ejemplo, si $f : A \times A \to B$ operación binaria en A notaremos $f(a, b) = a \otimes b$. Entonces la asociatividad es más amigable $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ para todo $a, b, c \in A$.

Ejemplo

- *Ya probamos que la operación unión de conjuntos es asociativa y conmutativa.*
- Sea $h : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $h(a, b) = a|b|$ es cerrada.
  Es asociativa? Es conmutativa?
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(a, b) = \lceil a + b \rceil$.
  Verificar que es cerrada y conmutativa
  No es asociativa. Basta considerar $a = 0,2,\ \ b = 1,5$ *y* $c = 2,6$.

Elemento neutro de una operación

Definición

Dada $f : A \times A \to A$ operaciones binarias en A (Obviamente cerrada). Decimos que la operación posee neutro si existe $a_0 \in A$ tal que $f(a, a_0) = f(a_0, a) = a$ para todo $a \in A$.

En la notación más usual escribimos $a \otimes a_0 = a_0 \otimes a = a$ para todo $a \in A$. Para mostrar que una operación posee neutro, exhibimos un elemento que cumple con la definición... EXISTENCIA! Es único?

Ejemplo

- *La operacion unión de conjuntos posee neutro. El conjunto* $\emptyset$
- *La operación intersección de conjuntos? El conjunto* $\mathcal{U}$ *tal que en* $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ *este definida la operación*
- *En* $\mathbb{Z}$ *la operación* $a \otimes b = a - b$ *(la resta en* $\mathbb{Z}$*) posee neutro?*
  NO.Como se prueba?
- Si $A = \{1, 2, ..., 7\}$ definimos $g : A \times A \to A$ tal que $g(a, b) = \min\{a, b\}$.
  Es conmutativa?
  Es asociativa?
  Posee neutro? Si. El numero $7 \in A$ es tal que
  $$g(a, 7) = \min\{a, 7\} = a$$
  ya que $a \in A$ verifica $a \leq 7$.

Unicidad del neutro

Teorema

Si $f : A \times A \to A$ posee neutro, este es unico.

Demostración.

Supongamos que $f(a, b) = a \otimes b$ y sean $x, y \in A$ elementos neutros.
Entonces:

$$a \otimes x = x \otimes a = a \qquad \forall a \in A$$
$$a \otimes y = y \otimes a = a \qquad \forall a \in A$$

Como y es neutro, en particular para $x \in A$ se tiene que $x \otimes y = y \otimes x = x$
pero si consideramos ahora que x neutro, para $y \in A$ tenemos $x \otimes y = y \otimes x = y$

$$\therefore \quad x = x \otimes y = y \otimes x = y$$

Probando asi que $x = y$. $\square$

Elemento inverso

Definición

Dada $f : A \times A \to A$ operación binaria en A (obviamente cerrada). Si f posee neutro $x \in A$, decimos que la operación posee inversos si para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ tal que $f(a, a') = x$

Ejemplo

Sea la operacion definida en $A = \{0, 1, 3\}$ dada por la siguiente tabla:

$\otimes$	0	1	3
0	1	3	0
1	3	0	1
3	0	1	3

Notemos que podemos ver la conmutatividad de la forma de la tabla, lo mismo que la existencia de neutro y de inverso.Es conmutativa y 3 es neutro. Todos los elementos poseen inverso, por ejemplo, 1 es inverso de 0.

Unicidad de inversos

Es otra forma de presentar las funciones que definen operaciones es por su "tabla de valores".

Teorema

Si $f : A \times A \to A$ es una operación asociativa, con elemento neutro $x^* \in A$ y que posee inversos. Entonces, cada elemento posee un único inverso.

Demostración.

Supongamos que $a \in A$ posee dos elementos inversos, a_1 y a_2 y notemos con $f(a, b) = a \bigstar b$. Entonces:

$$a_1 = a_1 \bigstar x^* = a_1 \bigstar (a \bigstar a_2) = (a_1 \bigstar a) \bigstar a_2 = x^* \bigstar a_2 = a_2$$

$\square$