RESOLUCIÓN PRIMER EXAMEN PARCIAL

Ejercicio Tema 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 5/2 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -2 \\ -9/4 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

hallar, si es posible, una matriz X que verifique la ecuación matricial

$$CBX + A = 5\, D^{-1}X \; .$$

Primero, observemos que $\det(D) = 5$, por lo que D tiene inversa y, recordando que la matriz inversa es igual a la adjunta por el recíproco del determinante, vale

$$5\, D^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, operando en la ecuación, se tiene

$$CBX + A = 5\, D^{-1}X \Leftrightarrow A = 5\, D^{-1}X - CBX \Leftrightarrow A = \left(5\, D^{-1} - CB\right) X.$$

Cuando $\left(5\, D^{-1} - CB\right)$ tenga inversa, se podrá despejar X premultiplicando dicha inversa a ambos lados de la igualdad.

$$CB = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -9/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

$$5\, D^{-1} - CB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante no nulo, luego se puede calcular su inversa.

$$\left(5\, D^{-1} - CB\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$X = \left(5\, D^{-1} - CB\right)^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio Tema 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 5/2 & 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

hallar, si es posible, una matriz X que verifique la ecuación matricial

$$2\, A^{-1}X - C = DBX \; .$$

Primero, observemos que $\det(A) = 2$, por lo que A tiene inversa y, recordando que la matriz inversa es igual a la adjunta por el recíproco del determinante, vale

$$2\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Luego, operando en la ecuación, se tiene

$$2\ A^{-1}X - C = DBX \Leftrightarrow 2\ A^{-1}X - DBX = C \Leftrightarrow \left(2\ A^{-1} - DB\right) X = C.$$

Cuando $\left(2\ A^{-1} - DB\right)$ tenga inversa, se podrá despejar X premultiplicando dicha inversa a ambos lados de la igualdad.

$$DB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -{}^{7}\!/_{2} & {}^{3}\!/_{2} \end{pmatrix}.$$

$$2\ A^{-1} - DB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -{}^{1}\!/_{2} & {}^{3}\!/_{2} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene determinante no nulo, luego se puede calcular su inversa.

$$\left(2\ A^{-1} - DB\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$X = \left(2\ A^{-1} - DB\right)^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio. Tema 1 Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

-a- Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A es una matriz simétrica, entonces B^tAB es una matriz simétrica.

-b- $det(M) = 2(abc)^2$, donde
$$M = \begin{pmatrix} ab & 2ac & 8a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{pmatrix}.$$

-a- (Verdadero) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A una matriz simétrica, entonces sabemos que $A^t = A$.

Por otro lado, $B^tAB \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ahora analicemos la matriz traspuesta. Utilizando la propiedad asociativa del producto matricial (1), la propiedad de la transpuesta respecto del producto (2), la propiedad de que la transpuesta de la traspuesta vuelve a ser la matriz original (3) y el hecho de que A es simétrica (4), se tiene

$$(B^tAB)^t \overset{(1)}{=} \left(B^t(AB)\right)^t \overset{(2)}{=} (AB)^t(B^t)^t \overset{(2-3)}{=} (B^tA^t)B \overset{(4)}{=} B^tAB\ .$$

Por lo tanto la matriz B^tAB es una matriz simétrica.

-b- (Falso) Considerando los valores $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$, se tiene

$$M = \begin{pmatrix} ab & 2ac & 8a^2 \\ 2b^2 & bc & ab \\ 2bc & c^2 & 2ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego, desarrollando el determinante por la primera fila, resulta

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 8\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 8\cdot 0 = -3 \neq 2 = 2(abc)^2.$$

Ejercicio. Tema 2 Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

-a- $det(M) = -3(abc)^2$, donde
$$M = \begin{pmatrix} 2c^2 & bc & 2a^2 \\ b^2 & -ba & a^2 \\ 2bc & b^2 & 3ba \end{pmatrix}.$$

-b- Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices antisimétricas, entonces B^tAB es una matriz antisimétrica.

-a- (Falso) Considerando los valores $a = 1$, $b = 1$ y $c = 0$, se tiene
$$M = \begin{pmatrix} 2c^2 & bc & 2a^2 \\ b^2 & -ba & a^2 \\ 2bc & b^2 & 3ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego, desarrollando el determinante por la primera columna, resulta
$$\det(M) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2 \neq 0 = -3(abc)^2.$$

-b- (Verdadero) Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y A una matriz antisimétrica, entonces sabemos que $A^t = -A$.
Por otro lado, $B^tAB \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ahora analicemos la matriz transpuesta. Utilizando la propiedad asociativa del producto matricial (1), la propiedad de la transpuesta respecto del producto (2), la propiedad de que la transpuesta de la traspuesta vuelve a ser la matriz original (3) y el hecho de que A es antisimétrica (4) , se tiene
$$(B^tAB)^t \overset{(1)}{=} \left(B^t(AB)\right)^t \overset{(2)}{=} (AB)^t(B^t)^t \overset{(2-3)}{=} (B^tA^t)B \overset{(4)}{=} B^t(-A)B = -B^tAB\ .$$

Por lo tanto la matriz B^tAB es una matriz antisimétrica.

Ejercicio Tema 1. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ en el siguiente sistema de ecuaciones.
$$\begin{cases} x + \lambda y + z = 1 \\ x + y + \lambda z = \lambda^2 \\ \lambda x + y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Hallar todos los valores de λ de manera que el sistema tenga única solución, todos los valores para que tenga infinitas soluciones y todos los valores para que no tenga solución.

(b) Para $\lambda = 1$, dar el conjunto solución del sistema correspondiente.

(a) Primero resolvemos el sistema, para esto construimos la matriz de coeficientes y trabajamos con operaciones por filas.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{F_2 - F_1} \\ \xrightarrow{F_3 - \lambda F_1} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-(1+\lambda)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) & (1-\lambda)(2+2\lambda+\lambda^2) \end{array}\right)$$

Luego la última fila está asociada a la ecuación

$$(1-\lambda)(2+\lambda)z = (1-\lambda)(2+2\lambda+\lambda^2)$$

Y como $2+2\lambda+\lambda^2 = 0$ no tiene soluciones reales, obtenemos los siguientes:

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2$ el sistema tiene única solución.
- Si $\lambda = 1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $\lambda = -2$, el sistema no tiene solución.

(b) Si $\lambda = 1$, la matriz de coeficientes asociada al sistema es equivalente por filas a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir que el conjunto solución del sistema, es el conjunto de soluciones de la ecuación $x+y+z=1$. Despejando x de la ecuación nos queda

$$Sol = \{(1-y-z, y, z) \;:\; y, z \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio Tema 2. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - \lambda z = \lambda^2 \\ -\lambda x + y + z = 1 \\ x - \lambda y + z = 1 \end{cases}$$

(a) Hallar todos los valores de λ de manera que el sistema tenga única solución, todos los valores para que tenga infinitas soluciones y todos los valores para que no tenga solución.

(b) Para $\lambda = -1$, dar el conjunto solución del sistema correspondiente.

(a) Primero resolvemos el sistema, para esto construimos la matriz de coeficientes y trabajamos con operaciones por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & \lambda^2 \\ -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3-F_1}{\xrightarrow{F_2+\lambda F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda^3 \\ 0 & -\lambda-1 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\lambda & -\lambda^2 \\ 0 & 1+\lambda & 1-\lambda^2 & 1+\lambda^3 \\ 0 & 0 & (1+\lambda)(2-\lambda) & (1+\lambda)(2-2\lambda+\lambda^2) \end{array}\right)$$

Luego la última fila está asociada a la ecuación

$$(1+\lambda)(2-\lambda)z = (1+\lambda)(2-2\lambda+\lambda^2)$$

Y como $2-2\lambda+\lambda^2 = 0$ no tiene soluciones reales, obtenemos los siguientes:

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2$ el sistema tiene única solución.
- Si $\lambda = -1$ el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si $\lambda = 2$, el sistema no tiene solución.

(b) Si $\lambda = -1$, la matriz de coeficientes asociada al sistema es equivalente por filas a la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir que el conjunto solución del sistema, es el conjunto de soluciones de la ecuación $x+y-z=1$. Despejando x de la ecuación nos queda

$$Sol = \{(1-y+z, y, z) \,:\, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Ejercicio Ali Baba tiene una granja con una manada de 30 animales, 12 son camellos, 8 son cabras y el resto ovejas. Ahmed, el sheik de los Cuarenta Ladrones, una noche sin luna roba 5 animales sin saber qué son.

-a- ¿De cuántas maneras distintas (haciendo distinguible cada animal) pudo ocurrir que exactamente 3 de los animales robados sean camellos?

-b- Al llegar a sus tierras Ahmed, con los 5 animales robados, tiene para distribuir entre ellos 15 porciones de alimentos (porciones todas iguales). ¿Cuántas formas tiene de distribuir las porciones entre los animales robados, de tal manera que cada uno de ellos reciba al menos una porción?

-a- Si bien se tienen que considerar los subconjuntos de cinco elementos, se pide que exactamente tres sean camellos. Luego, se puede descomponer en dos etapas: una en la que se eligen los tres camellos y otra en la que se toman dos animales que no sean camellos. Así, para utilizar la regla del producto es necesario conocer cuántas opciones se tienen en cada etapa.

Como se tienen 12 camellos para robar, el número combinatorio $\binom{12}{3}$ nos dice la cantidad de formas distintas de robar tres camellos.

Por otro lado, se tienen 18 animales que no son camellos. Luego, $\binom{18}{2}$ nos dice la cantidad de formas posibles de robar dos animales de los otros.

$$\binom{12}{3} \cdot \binom{18}{2} = \frac{12!}{3!\,(12-3)!} \cdot \frac{18!}{2!\,(18-2)!} = \frac{12\ 11\ 10}{3\ 2\ 1} \cdot \frac{18\ 17}{2\ 1} = 18 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 10.$$

Por lo tanto, se tienen 33660 maneras distintas de robar cinco animales en donde exactamente tres sean camellos.

-b- Para darles de comer a los cinco animales robados, primero se puede considerar las cinco porciones necesarias para que cada uno reciba por lo menos una. Luego, quedan diez para repartir ya sin condiciones o restricciones.

Si se representa con $\clubsuit$ a una porción de alimento, la tarea del reparto se puede pensar como una disposición lineal de diez $\clubsuit$ y cuatro barras $|$, donde los $\clubsuit$ a la izquierdea de la primera barra serán las porciones para el primer animal, los que se encuentren entre la primera y la segunda, las porciones para el segundo animal y así sucesivamente. Por ejemplo. en la siguiente disposición el primer animal recibe una ración extra y el último ninguna,

$$\clubsuit|\clubsuit\clubsuit\clubsuit\clubsuit|\clubsuit\clubsuit\clubsuit|\clubsuit\clubsuit|$$

Entonces, puesto que tenemos diez elementos de un tipo y cuatro de otro, conseguimos

$$\frac{(10+4)!}{10!\ 4!} = \frac{14\ 13\ 12\ 11}{4\ 3\ 2} = 7\ 13\ 11.$$

Por lo tanto, tenemos 1001 formas posibles para distribuir las porciones de alimento.

Ejercicio

-a- Dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, definir la matriz adjunta de A, $\mathrm{Adj}(A)$.

-b- Llamando $B = \mathrm{Adj}(A)$, demostrar que $(AB)_{ii} = \det(A)$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

-a- Para la matriz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, el cofactor i, j es

$$C_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j),$$

donde $A(i|j)$ es la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene sacando la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz A.

La matriz $C = (C_{ij})$ es la matriz de los cofactores de A.

La matriz adjunta de A es la matriz transpuesta de C, es decir, la transpuesta de la matriz de los cofactores de A. Entonces en el lugar i, j de $\mathrm{adj}A$ está el cofactor j, i de A:

$$(\mathrm{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(A(j|i)\right).$$

-b- Sea $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ y $B = \mathrm{Adj}(A)$ con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calculamos $(AB)_{ii}$

$$(AB)_{ii} \underset{\text{def. } A\cdot B}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{ki} \underset{\text{def. } B}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(\mathrm{adj}(A))_{ki} \underset{\text{def. adj}(A)}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i}\det\left(A(i|k)\right)$$

Luego, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i}\det\left(A(i|k)\right)$ es el determinante de la matriz A calculado por la fila i. Es decir, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i}\det\left(A(i|k)\right) = \det(A)$. Por lo tanto, $(AB)_{ii} = \det(A) \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.