Relaciones

Álgebra y Geometría Analítica I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

20 de mayo de 2024

Producto cartesiano de dos conjuntos no vacíos

Recordemos que dados dos conjuntos A y B, un par ordenado es un objeto de la forma (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$. El elemento a es la primera componente de (a, b) y b es la segunda componente de (a, b).
Observar que si (a, b) y (c, d) son pares ordenados, entonces $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

Definición

Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano de A y B y lo indicaremos con $A \times B$ al conjunto formado por los pares ordenados (a, b) tales que a es un elemento del conjunto A y b es un elemento del conjunto B.
Con las notaciones usuales de la teoría de conjuntos esto se escribe como:
$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, \ b \in B\}$.

Ejemplo: $A = \{1, 2\} \quad B = \{x, y, z\}$

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}$$

.

$$B \times A = \{(x, 1), (y, 1), (z, 1), (x, 2), (y, 2), (z, 2)\}$$

.

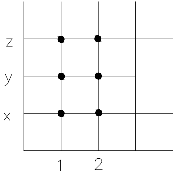
- Si $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$ entonces $A \times B = \emptyset$.
- En general, $A \times B \neq B \times A$.
- Si A y B finitos, $|A \times B| = |B \times A| = |A|.|B|$.
- Si $A = \mathbb{R} = B, \quad A \times B = \mathbb{R}^2$.
- $A \times B$ representado por pares ordenados, y/o con gráficos cartesianos.

Ejemplo de Producto Cartesiano

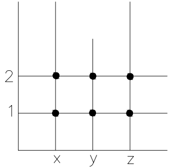
$A = \{1, 2\}$ y $B = \{x, y, z\}$

$C = [1, 3)$ y $D = \{3, 4\}$ $\quad A \times C = \{(x, 3), (x, 4) \mid 1 \leq x < 3\}$

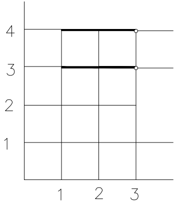
$E = [2, 3)$ y $F[1, 3]$



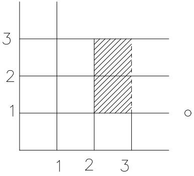
A x B



B x A



[1, 3) x {3,4}



[2, 3) x [1,3]

Teorema (1)

Dados A, B y C conjuntos , se tiene:

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$
4. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Demostración.

1. $(x, y) \in A \times (B \cap C)$ si y solo si $x \in A \wedge y \in (B \cap C)$ si y solo si $[x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C]$ si y solo si $[x \in A \wedge y \in B] \wedge [x \in A \wedge y \in C]$ si y solo si $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in (A \times C)$ si y solo si $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

Demostración del Teorema (cont.)

4. $(x, y) \in (A \cup B) \times C$ si y solo si $x \in (A \cup B) \ \wedge \ y \in C$ si y solo si

$[x \in A \ \vee \ x \in B] \wedge y \in C$ si y solo si $[x \in A \ \wedge \ y \in C \ ] \vee [\ x \in B \ \ \wedge y \in C]$ si y solo si

$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

Queda como ejercicio la prueba de 2 y 3 $\square$

Relación binaria entre dos conjuntos

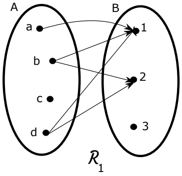
Definición

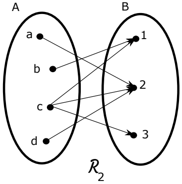
Dados dos conjuntos A y B, llamaremos relación de A en B a un subconjunto del producto cartesiano de A y B y lo indicaremos con $\mathcal{R}$.

Dada $\mathcal{R}$ una relación de A en B, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, y

si $(a, b) \in \mathcal{R}$ se escribe $a\mathcal{R}b$ si $(a, b) \notin \mathcal{R}$ se escribe $a\not\mathcal{R}b$.

$A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, consideremos las relaciones de A en B:
$\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (d, 1), (d, 2)\}$ y
$\mathcal{R}_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 2)\}$





Cuando $A = B$, se dice que $\mathcal{R}$ es una *relación en A*.

Dominio, Conjunto imagen de una relación $\mathcal{R}$

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de A en B,

- el DOMINIO de $\mathcal{R}$ es el conjunto

$$Dom(\mathcal{R}) = \{a \in A \mid (a,b) \in \mathcal{R} \ \text{, para algún } \ b \in B\}$$

- CONJUNTO IMAGEN de $\mathcal{R}$ al conjunto

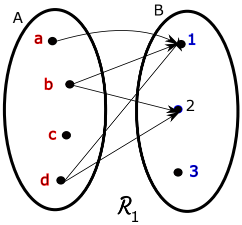
$$Im(\mathcal{R}) = \{b \in B \mid (a,b) \in \mathcal{R} \ \text{, para algún } \ a \in A\}$$

.

Observamos que $Dom(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}$ y $Im((\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{B}$.

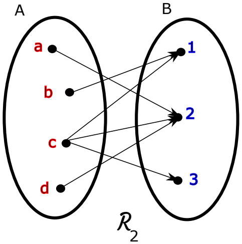
Ejemplo de Dominio y Conjunto imagen de una relación

$A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, consideremos las relaciones de A en B:
$\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (d, 1), (d, 2)\}$ y
$\mathcal{R}_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 2)\}$



$Dom(\mathcal{R}_1) = \{a, b, d\}$

$Im(\mathcal{R}_1) = \{1, 2\}$



$Dom(\mathcal{R}_2) = \{a, b, c, d\}$

$Im(\mathcal{R}_2) = \{1,2,3\}$

Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un elemento por una relación $\mathcal{R}$

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de A en B, $a \in A$ y $b \in B$

- el Conjunto imagen de a por $\mathcal{R}$ es el conjunto

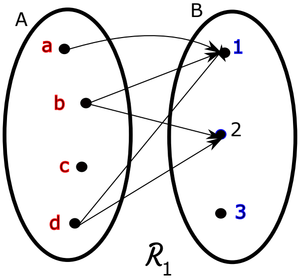
$$\mathcal{R}(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

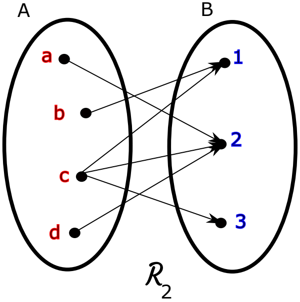
- el conjunto pre-imagen de b por $\mathcal{R}$ es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(b) = \{a \in A \mid (a, b) \in \mathcal{R}\}$$

.

Ejemplo de Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un elemento





$\mathcal{R}_1(b) = \{1, 2\}$

$\mathcal{R}_2(b) = \{1\}$

$\mathcal{R}_1^{-1}(1) = \{a, b, d\}$

$\mathcal{R}_2^{-1}(1) = \{b, c\}$

$\mathcal{R}_1^{-1}(3) = \{\ \}$

$\mathcal{R}_2^{-1}(2) = \{a, c, d\}$

Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un subconjunto por una relación $\mathcal{R}$

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de A en B, $X \subseteq A$ y $Y \subseteq B$.

- el Conjunto imagen de X por $\mathcal{R}$ es el conjunto

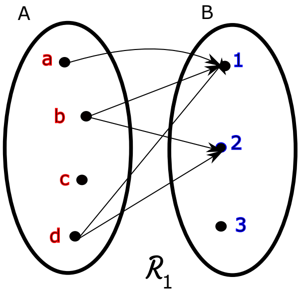
$$\mathcal{R}(X) = \{b \in B \mid (x, b) \in \mathcal{R} \ \text{, para algun } \ x \in X\}$$

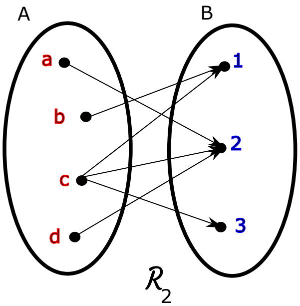
- el conjunto pre-imagen de Y por $\mathcal{R}$ es el conjunto

$$\mathcal{R}^{-1}(Y) = \{a \in A \mid (a, y) \in \mathcal{R} \text{ , para algun } y \in Y \ \}$$

.

Ejemplo de Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un subconjunto





$\mathcal{R}_1(\{a,b\}) = \{1, 2\}$

$\mathcal{R}_1^{-1}(\{ 1, 3 \}) = \{a, b, d\}$

$\mathcal{R}_1^{-1}(\{ 2, 3 \}) = \{b, d \}$

$\mathcal{R}_2(\{ b, d \}) = \{1, 2\}$

$\mathcal{R}_2^{-1}(\{ 1,3 \}) = \{b, c\}$

$\mathcal{R}_2^{-1}(\{1, 2 \}) = \{a, b, c, d \}$

Ejemplos.. Conjunto imagen y conjunto pre-imagen de un conjunto

$A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 20\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} | 0 \leq x \leq 26\}$, $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}_1$ relaciones de A en B.

- $x\mathcal{R}_1 y \iff y = x^2$.

  $\mathcal{R}_1 = \{(0,0),(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$.

  $Dom(\mathcal{R}_1) = \{0,1,2,3,4,5\}$ $\quad Im(\mathcal{R}_1) = \{0,1,4,9,16,25\}$.

  $\mathcal{R}_1(\{3,6,9\}) = \{9\}$ $\quad \mathcal{R}_1^{-1}(\{y \in B \mid y \text{ es par }\}) = \{0,2,4\}$.

- $x\mathcal{R}\, y \iff 3.x = y$.

  $Dom(\mathcal{R}) = \{x \in A \mid 0 \leq x \leq 8\}$ $\quad Im(\mathcal{R}) = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24\}$.

  $\mathcal{R}(\{3,6,9\}) = \{9,18\}$ $\quad \mathcal{R}^{-1}(\{y \in B \mid y \text{ es par }\}) = \{0,2,4,6,8\}$.

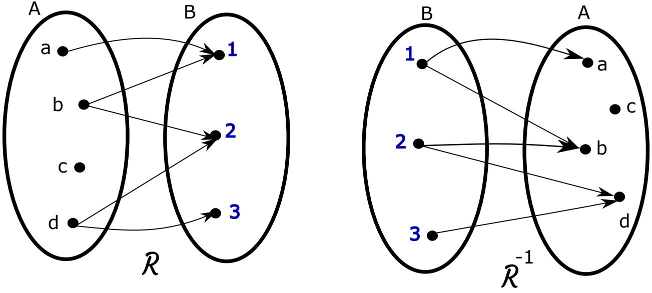
Relación inversa de una relación $\mathcal{R}$

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de A en B, definimos la relación INVERSA de $\mathcal{R}$ como la relación de B en A, notada $\mathcal{R}^{-1}$ dada por :

$$y\,\mathcal{R}^{-1}\,x \quad \text{si y solo si} \quad x\,\mathcal{R}\,y$$

es decir $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \mathcal{R}\}$.



Relación inversa de una relación $\mathcal{R}$

Dada $\mathcal{R}$, una relación de A en B,

- $\mathcal{R}^{-1}$ es la relación INVERSA de $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}^{-1}(b)$ es la pre-imagen de $b \in B$ a traves de la relación $\mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}^{-1}(Y)$ es la pre-imagen del subconjunto $Y \subseteq B$ a traves de la relación $\mathcal{R}$.

Teorema

Si $\mathcal{R}$ es una relación de un conjunto A en un conjunto B, entonces $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$

Demostración.

$a(\mathcal{R}^{-1})^{-1}b$ si y solo si $b\,\mathcal{R}^{-1}a$ si y solo si $a\mathcal{R}b$ $\square$

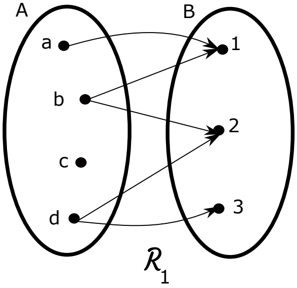
Composición de dos relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$

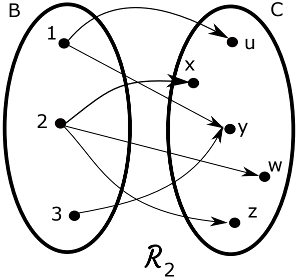
Definición

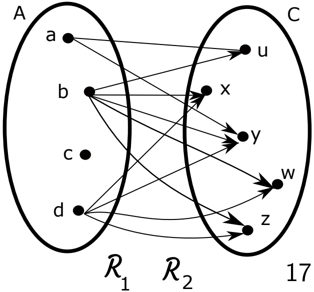
Dadas $\mathcal{R}$, una relación de A en B, $\mathcal{S}$, una relación de B en C, la relación composición de $\mathcal{R}$ con $\mathcal{S}$ es la relación de A en C dada por la ley:

$$x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})y \quad \text{si y solo si} \quad \exists\, u \in B \mid x\mathcal{R}u \ \wedge \ u\mathcal{S}y$$

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{(x, y) \in A \times C \mid (x, u) \in \mathcal{R},\ (u, y) \in \mathcal{S} \quad \text{para algÃºn} \quad u \in B\}$$







Teorema sobre composición de relaciones

Teorema

Dadas $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, con $\mathcal{R}$ una relación de A en B, $\mathcal{S}$, una relación de B en C, $\mathcal{T}$, una relación de C en D, entonces

- *la composición de relaciones es asociativa,* $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
- $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$

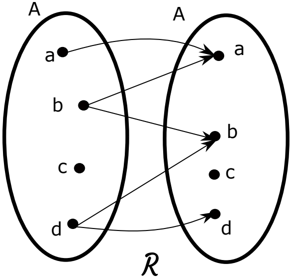
La composición de relaciones NO es conmutativa, vemos un ejemplo:

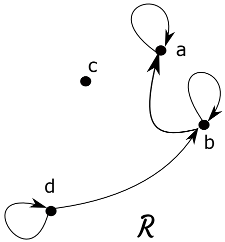
$A = \{1, 2, 3, 4\} = B = C \quad \mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \in A \times B$ y
$\mathcal{S} = \{(1, 4), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \in B \times C$.

Observemos que $(1, 4) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, y $(1, 4) \notin \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$

Propiedades de una relación definida en un conjunto

A partir de ahora vamos a enfocarnos solamente en relaciones de un conjunto en si mismo, es decir, para un conjunto A trabajaremos con relaciones en A.
Si A es finito, la representación de $\mathcal{R}$ se puede hacer en un diagrama de este tipo:

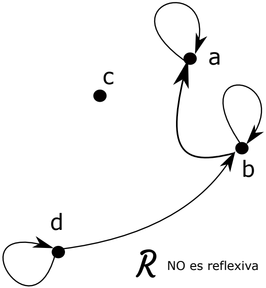


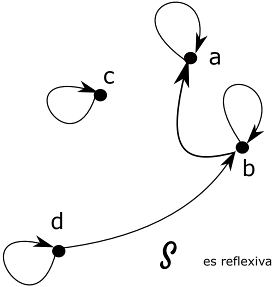


Cuando $A = B$, se dice que la *relación en* A.

Relacion en A con propiedad reflexiva

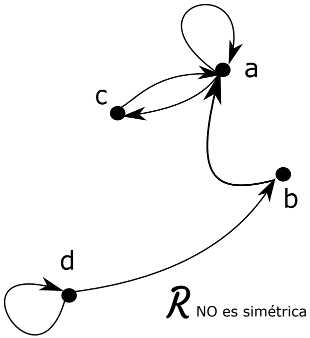
$\mathcal{R}$ es REFLEXIVA si $\forall a \in A \ \ , (a, a) \in \mathcal{R}$

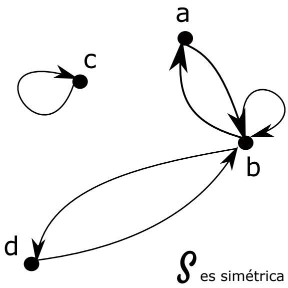




Relacion en A con propiedad simétrica

$\mathcal{R}$ es SIMETRICA si $\forall a, b \in A, \;\; (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$





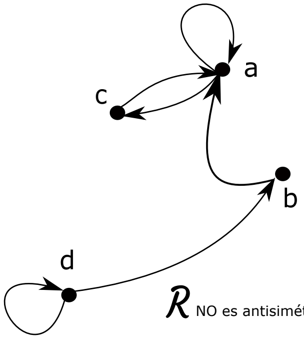
Relacion en A con propiedad antisimétrica

$\mathcal{R}$ es ANTISIMÉTRICA si $\forall a, b \in A, a \neq b\ \ [(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}]$.

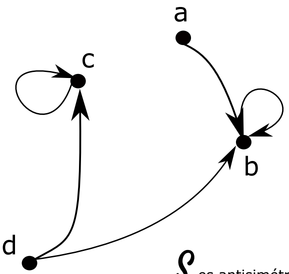
$\mathcal{R}$ es antisimétrica si

$$\forall a, b \in A,\ \ [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow a = b$$

.



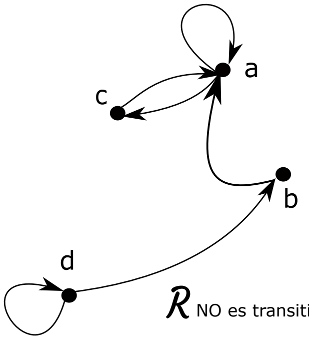
$\mathcal{R}$ NO es antisimétrica



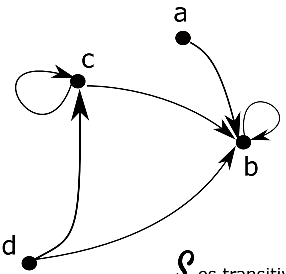
$\mathcal{S}$ es antisimétrica

Relacion en A con propiedad transitiva

$\mathcal{R}$ es TRANSITIVA si $\forall a, b, c \in A,\ \ [(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}] \ \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}.$



$\mathcal{R}$ NO es transitiva



$\mathcal{S}$ es transitiva

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación en A, diremos que es:

- $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA si $\forall a \in A \ ,(a,a) \in \mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$ es SIMÉTRICA si $\forall a, b \in A, \ \ (a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$.
- $\mathcal{R}$ es ANTISIMÉTRICA si $\forall a, b \in A, \ a \neq b \, [(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \notin \mathcal{R}]$.
- $\mathcal{R}$ es TRANSITIVA si $\forall a, b, c \in A, \ \ [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,c) \in \mathcal{R}] \ \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$.

Una forma equivalente de definir una $\mathcal{R}$ ANTISIMÉTRICA es:

$$\forall a, b \in A, \quad [(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow a = b$$

.

Ejemplos de una relación definida en un conjunto

Dada $\mathcal{R}$, una relación en A, analicemos que propiedades se verifican...

1. $a\mathcal{R}_1 b \Leftrightarrow a = b$ es decir, $\mathcal{R}_1 = \{(a,a) \ : a \in A\}$
   $\mathcal{R}_1$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.
2. $A = \mathbb{R}$, donde $a\mathcal{R}_2 b \Leftrightarrow a < b$ es decir, la relacion 'menor que' usual en $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{R}_2$ es NO reflexiva, NO simétrica, antisimétrica y transitiva.
3. $A = \mathbb{Z}$, donde $a\mathcal{R}_3 b \Leftrightarrow a - b$ es múltiplo de 3
   $\mathcal{R}_3$ es reflexiva, simétrica, NO antisimétrica y transitiva.
4. A un conjunto y la relación en $\mathcal{P}(A)$ definida por $X\mathcal{R}_4 Y \Leftrightarrow X \subseteq Y$.$\mathcal{R}_3$ es reflexiva, NO simétrica, antisimétrica y transitiva.
5. A el conjunto de rectas en plano xy y la relación $\mathcal{R}$ en A definida por $r\mathcal{R}t \Leftrightarrow r \perp t$.

   ....

Relaciones de Orden

Definición

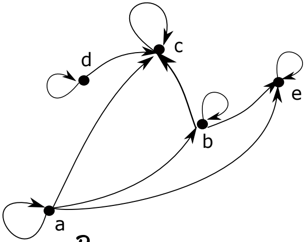
Dada $\mathcal{R}$, una relación en A, diremos que es una relación de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden en A, al par $(A, \mathcal{R})$ se le dice que es un conjunto ordenado, y es usual notar $x \prec y$ cuando $(x, y) \in \mathcal{R}$ y decir que x precede a y, o que x es anterior a y.

Dados $x, y \in A$ se dirá que x e y son comparables si $x \prec y$ o $y \prec x$. En caso contrario, x e y son no comparables.

Diagrama de Hasse

Diagrama de un conjunto ordenado finito (Diagrama de Hasse) Para facilitar su comprensión, se acuerda la siguiente convención: no se dibujan las flechas correspondientes a $a \prec a$ ni la flecha $a \prec c$ cuando existe un b tal que $a \prec b$ y $b \prec c$ y estas flechas están dibujadas. Además, si $a \prec b$ se dibuja a abajo de b.



$\mathcal{R}$ relación de orden

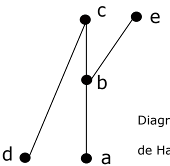


Diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$

Ejemplos de relaciones de Orden

- La relación $\subseteq$ en $\mathcal{P}(A)$ para algún conjunto A.

A={1,2,3}

$\left(\mathcal{P}(\mathrm{A}), \subseteq\right)$

relación de orden contenido o igual en P(A)

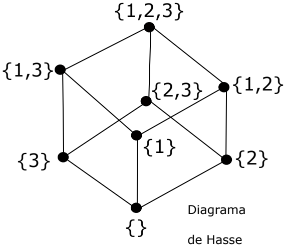


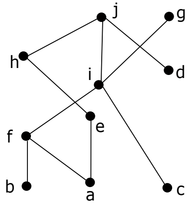
Diagrama de Hasse

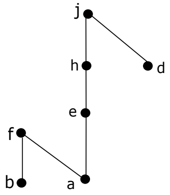
- La relación $\leq$ usual en $\mathbb{R}$. (análogo la relación $\geq$).

Orden Inducido en un subconjunto

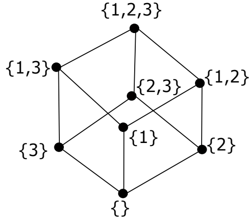
Definición

Sean (A, R) un conjunto ordenado y $S \subseteq A$. El *orden inducido por R en S* es $R_S = R \cap (S \times S)$, es decir, si $x, y \in S$, xR_Sy si y solo si xRy.
Un conjunto ordenado (S, R_S) es un *subconjunto ordenado de (A, R)* si $S \subseteq A$ y $R_S = \{(x, y) \in S \times S \mid (x, y) \in R\}$.

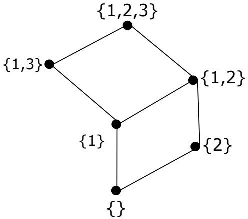




S={a,b,e,d,f,h,j,}



A={1,2,3} $\left(\mathcal{P}(A), \subseteq\right)$



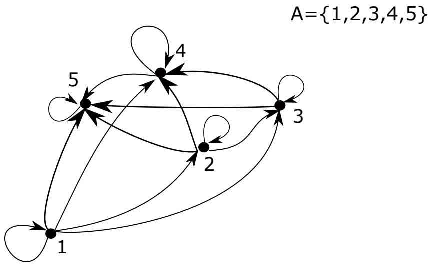
S={{},{1},{2},{1,2},{1,3}{1,2,3}}

Orden lineal o total

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación en A, diremos que es una relación de orden total si todo par de elementos son comparables.

Su diagrama es de la forma :



$\mathcal{R}$ relación de orden menor o igual

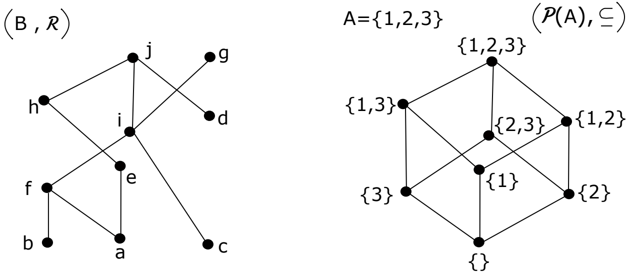
Diagrama de Hasse de $\mathcal{R}$

Elementos minimales y maximales de un Orden

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de orden en A, diremos que

1. $a \in A$ es un elemento minimal del Orden si $\forall\, x \in A:\; x \prec a$ se tiene que $x = a$.
2. $a \in A$ es un elemento maximal del Orden si $\forall\, x \in A:\; a \prec x$ se tiene que $x = a$.



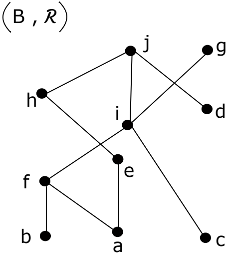
Minimales de $(B, \mathcal{R}) = \{a, b, c, d\}$. Maximales de $(B, \mathcal{R}) = \{j, g\}$.
Minimales de $(\mathcal{P}(A), \subseteq) = \{\emptyset\}$, Maximales de $(\mathcal{P}(A), \subseteq) = \{A\}$.

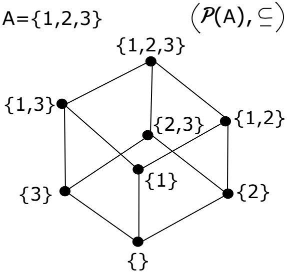
Elementos mínimos y máximos de un Orden

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de orden en A, diremos que

1. $a \in A$ es un elemento mínimo del orden si todo $\forall\, x \in A$ tal que $a \prec x$.
2. $a \in A$ es un elemento máximo del orden si todo $\forall\, x \in A$ tal que $x \prec a$.





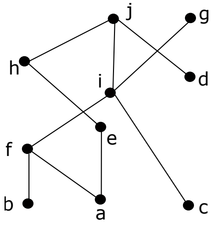
$(B, \mathcal{R}) = \{a, b, c, d\}$ no tiene máximo, ni mínimo.
$(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ tiene máximo: A, y tiene mínimo: $\{\ \}$.

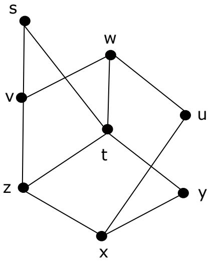
Cotas inferiores y superiores de un Orden

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de orden en A y $S \subseteq A$ diremos que

1. a es una cota inferior de S en el orden si todo $\forall\ x \in S$ se tiene que $a \prec x$.
2. a es una cota superior de S en el orden si todo $\forall\ x \in S$ tal que se tiene que $x \prec a$.





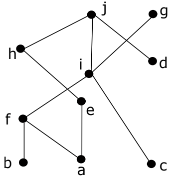
$S = \{f, e\}$ Cota superior de $S \to \{j\}$ y Cota inferior de $S\to \{a\}$
$S' = \{v, z, t\}$ Cota superior de S' $\to \{s, w\}$ y Cota inferior de $S'\to \{z, x\}$

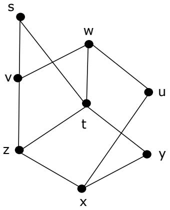
Ínfimo y supremo de un Orden

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación de orden en A y $S \subseteq A$ diremos que

1. x^* es el ínfimo de S si es la máxima cota inferior de S, es decir, $\forall\, x \in S,\, x^* \prec x$ y si $y \prec x$ $\forall x \in S$ entonces $y \prec x^*$.
2. y^* es el supremo de S si es la mínima cota superior de S en el orden, es decir, $\forall\, x \in S,\, x \prec y^*$ y si $x \prec y$ $\forall x \in S,$ entonces $y^* \prec y$.





$S = \{f, e\}$ Cota sup. de $S \rightarrow \{j\}$ =Supr. y Cota inf. de $S \rightarrow \{a\}$ =Inf.
$S' = \{v, z, t\}$Cota sup. de $S' \rightarrow \{s, w\}$, $\nexists$ Supr. y Cota inf. de $S' \rightarrow \{z, x\}$, Inf$\rightarrow z$

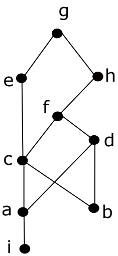
Observaciones

Dado $(A, \mathcal{R})$ conjunto parcialmente ordenado, con A conjunto finito. Entonces

i) Existe un elemento minimal y un elemento maximal de $\mathcal{R}$.
Supongamos $A = \{a_i\}_{i=1,\cdots n}$.
Si no existe $x \in A - \{a_1\}$ tal que $x \prec a_1$, se tiene que a_1 es minimal.En caso contrario, si existe $x \prec a_1$, analizo este elemento x que renombro a_2.
Si no existe $x \in A - \{a_1, a_2\}$ tal que $x \prec a_2$, se tiene que a_2 es minimal.En caso contrario, si existe $y \prec a_2$, analizo este elemento y que renombro a_3.
Este procedimiento, a lo sumo se podrá hacer n veces, y termina al hallar un minimal de $\mathcal{R}$.

ii) Si $\mathcal{R}$ tiene un elemento mínimo (máximo), es único.
Supongamos m_1 y m_2 mínimos de $\mathcal{R}$.
Como m_1 es mínimo, $m_1 \prec x$ para todo $x \in A$. En particular, $m_1 \prec m_2$.
Como m_2 es mínimo, $m_2 \prec x$ para todo $x \in A$. En particular, $m_2 \prec m_1$.
Luego, $m_1 = m_2$.

Ejemplos



S	C. Superiores	Supremo	C.Inferiores	Ínfimo
$\{f, c, d\}$	f, g, h	f	a, b, i	$\nexists$
$\{c, e, f, g\}$	g	g	c, b, a, i	c
$\{i, a, b\}$	c, d, e, f, g, h	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
$\{a, b, c, d\}$	f, h, g	f	$\nexists$	$\nexists$

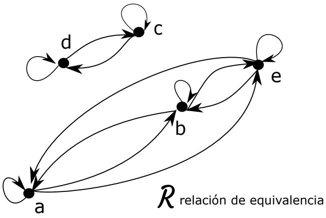
Relaciones de Equivalencia

Definición

Dada $\mathcal{R}$, una relación en A, diremos que es una relación de Equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en A, es usual notar $x \sim y$ cuando $(x, y) \in \mathcal{R}$ y decir que x es equivalente a y.

Dados $x \in A$ se define la clase de equivalencia de x al conjunto $\mathcal{R}(x)$ y se lo nota $[x]$. Es decir, $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in A \mid (y, x) \in \mathcal{R}\}$.



Ejemplos de relaciones de Equivalencia

1. La relación definida en $\mathbb{R}$ donde $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.
2. A las rectas del plano xy, la relación $\mathcal{R}$ en A definida por $r\mathcal{R}t \ \Leftrightarrow \ r \| t$.
3. Para un $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, la relación "congruencia módulo m" está definida de la siguiente manera: $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ es múltiplo de m.
   - Reflexiva: si $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0$. Como 0 es múltiplo de m, $x \sim x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.
   - Simétrica: si $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $x \sim y$, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $x - y = k_1 \cdot m$.
     Luego $y - x = -k_1 \cdot m$.
     Esto nos dice que $\exists \ k_2 = -k_1 \mid y - x = k_2 \cdot m$ $\qquad y \sim x$.
   - Transitiva: si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, tales que $x \sim y$ y $y \sim z$ $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tales que $x - y = k_1 \cdot m$ y $y - z = k_2 \cdot m$. Luego $x - z = x - y + y - z = k_1 \cdot m + k_2 \cdot m = (k_1 + k_2) \cdot m$, v.d $x - z$ es múltiplo de m, $x \sim z$.

Teorema sobre clases de equivalencia

Dados $x \in A$ se define la clase de equivalencia de x al conjunto $\mathcal{R}(x)$ y se lo nota $[x]$.
Es decir, $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in \mathcal{R}\} = \{y \in A \mid (y, x) \in \mathcal{R}\}$.

Teorema

Dada $\mathcal{R}$, una relación de equivalencia en A, con $a, b \in A$.

1. $[a] \neq \emptyset$
2. $(a, b) \in R$ *si y sólo si* $[a] = [b]$.
3. $(a, b) \notin R$ *si y sólo si* $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Demostración.

Para ver que (1) es cierto, es suficiente observar que $a \in [a]$ ya que R es reflexiva.

(2) Sean ahora $a, b \in A$ tales que $(a, b) \in R$. Si $x \in [a]$, por definición, $(a, x) \in R$ o, dado que R es simétrica, $(x, a) \in R$. Puesto que, por hipótesis $(a, b) \in R$ y R es transitiva, resulta $(x, b) \in R$ y por lo tanto $x \in [b]$. Esto prueba que $[a] \subseteq [b]$. La prueba de que $[b] \subseteq [a]$ es análoga.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$ tales que $[a] = [b]$. Esto implica, en particular, que $a \in [b]$ y, por definición de clases de equivalencia, $(a, b) \in R$.

(3) Finalmente, sean ahora $a, b \in A$. Si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, existe $x \in [a] \cap [b]$, por definición de clases de equivalencia, $(a, x) \in R$ y $(b, x) \in R$. Dado que R es simétrica, resulta $(a, x) \in R$ y $(x, b) \in R$, y como R es transitiva, $(a, b) \in R$.

Recíprocamente, sean ahora $a, b \in A$. Si $(a, b) \in R$, por (2) sabemos que $[a] = [b]$. En particular $a \in [a] \cap [b]$, vd, $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. $\square$

Observar que el resultado anterior nos dice que:

- Todo elemento de A pertenece a alguna clase.
- Dos clases de equivalencia, o bien son iguales, o bien son conjuntos disjuntos.

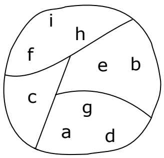
Es decir, una relación de equivalencia separa los elementos de A en conjuntos disjuntos dos a dos (las clases de equivalencias).

Definición

Dado un conjunto A, una colección de subconjutos no vacíos de A, $\mathcal{P} = \{X_1, X_2, \cdots\}$ es una partición de A si verifican

1. $i \neq j$ entonces $X_i \cap X_j = \emptyset$.
2. $\forall a \in A$ existe $X_i \in \mathcal{P}$ tal que $a \in X_i$.

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ una partición $\mathcal{P} = \{\{a, g, d\}, \{c\}, \{b, e\}, \{f, i, h\}\}$



A partir del teorema anterior, se tiene que una relación de equivalencia genera una partición del conjunto, a través de las clases de equivalencia. Además, si tenemos una partición de un conjunto, entonces existe una relación de equivalencia subyacente, como demuestra el teorema siguiente.

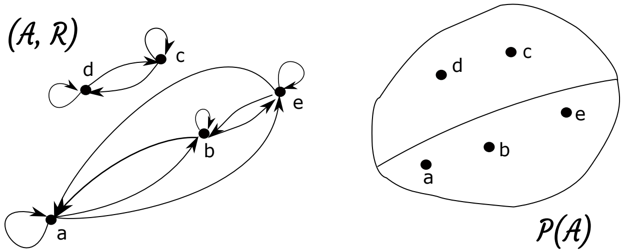
Teorema

Sea $\mathcal{P}$ una partición del conjunto A . Existe una única relación de equivalencia en A cuyas clases de equivalencia son los elementos de $\mathcal{P}$.

Demostración.

Definamos la relación R en A como sigue: $(a, b) \in R$ si y solo si existe $X_i \in \mathcal{P}$ tal que $a, b \in X_i$.
Se puede demostrar, que R es una relación de equivalencia (Ejercicio). $\square$

Conjunto cociente de una relación de equivalencia



Definición

Sea R una relación de equivalencia en un conjunto A. Llamaremos *conjunto cociente de A por R*, y lo notaremos $A|_R$, al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A definidas por R, es decir:

$$A|_R = \{[a] : a \in A\}.$$