PRÁCTICA 1 - Funciones reales

1. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones o sistema de inecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

   (a) $2m - 5 \geq 15$
   (b) $-3(z-6) > 2z - 5$
   (c) $-19 \leq 3x - 5 \leq -9$
   (d) $(x-3)\sqrt{x+1} \geq 0$
   (e) $3x < \dfrac{1+6x}{2} < \dfrac{9x-8}{3}$
   (f) $x \leq x + 1 \leq x + 5$
   (g) $\begin{cases} 4x - 8 & > & -6, \\ \dfrac{x}{2} + 2 & > & 0. \end{cases}$
   (h) $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{3}{x-1} < 0$
   (i) $\dfrac{4x-3}{3-x} > 0$
   (j) $|x-4| < 1.$
   (k) $|x+2| \geq 1.$
   (l) $\left|x^2 - 3x - 2\right| \leq 2.$
   (m) $\dfrac{3}{|3x+1|} \leq 2.$
   (n) $\dfrac{|5x-5|}{|x+1|} \leq 0.$

2. (a) Expresar el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función de la longitud del lado del mismo.
   (b) Expresar la longitud del lado l de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del mismo. Expresar el perímetro y el área del cuadrado como una función de la longitud d de su diagonal.
   (c) Un recipiente prismático de almacenamiento, sin tapa, tiene $10m^3$ de volumen. La longitud de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta $\$100$ por metro cuadrado, y el de los lados $\$60$ por metro cuadrado. Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base e indicar su dominio.

3. Dada la función

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = |x+5| + |x-2|, \end{array}$$

   (a) Calcular $g(0)$, $g(4)$, $g(-5)$, $g(t+2)$.
   (b) ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = 0$?

4. Describir el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Calcular el valor de la función en los puntos indicados en cada caso:

   (a) $f_3(x) = \begin{cases} 2x+1 & -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 3, \end{cases} \qquad x = -1, x = 0, x = 2.$
   (b) $f_4(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x = 2, x = \frac{2}{3}, x = \sqrt{2}.$
   (c) $f_5(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+2}, \qquad x = 0, x = -3$

5. Siempre que sea posible, encontrar la ley y el dominio de las funciones definidas en cada ítem. En caso de no ser posible, decir por qué. Además, calcular los valores de las funciones definidas en $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

   (a) Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, se desea definir $h(x) = f^2(x)$ y $k(x) = \frac{f}{g}(x)$

   (b) Dadas $f(x) = \sqrt{3x+8}$ y $g(x) = \sqrt{9-2x}$, se desea definir $h(x) = (f+g)(x)$ y $k(x) = \frac{g}{f}(x)$

6. Considerar las funciones

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}, \ (x \neq 0)$$

   (a) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$, hallar el dominio y simplificar la expresión de la ley de cada una de las funciones

$$g_i(h) = \frac{f_i(3+h) - f_i(3)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

   (b) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$ recién definidas, simplificar el valor de la expresión

$$\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

7. Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

   (a) $f_1(x) = |x-1|$. (b) $f_2(x) = |x| + |x-1|$. (c) $f_3(x) = |x| - 1$.

8. Considerar las siguientes funciones:

$$f_1(x) = 4x - 2, \quad f_2(x) = x^3 - x, \quad f_3(x) = \sqrt{x}, \quad f_4(x) = 2, \quad f_5(x) = 1 - x^2 - x.$$

   (a) Determinar gráfica y analíticamente si las funciones reales dadas son o no inyectivas. (*Para el análisis gráfico se puede hacer uso del software GeoGebra.*)

   (b) Determinar analíticamente si las funciones reales dadas son o no sobreyectivas, considerando que en todos los casos el codominio es el conjunto de los números reales[1].

9. Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad.

   (a) $f_1(x) = 4$.

   (b) $f_2(x) = x^2 + x$.

   (c) $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

   (d) $f_5(x) = x^3 - x$.

10. Dada la función $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x-1|$, se define la función $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ par y tal que para todo $x \in [0, 2]$ sea $g(x) = f(x)$.

   (a) Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus dominios y recorridos.

   (b) Encontrar la ley de la función g.

11. (a) Mostrar que, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico, la única función $f : A \to \mathbb{R}$ que es par e impar simultáneamente es la función nula.

[1]Para el estudio de la función f_2 puede hacer uso del siguiente resultado: todo polinomio a coeficientes reales de grado impar tiene al menos una raíz real.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

(b) Siendo p_1, p_2 dos funciones pares e i_1, i_2 dos funciones impares definidas en A, determinar, de ser posible, la paridad en cada uno de los siguientes casos:

I. $f_1 = p_1 + p_2$.
II. $f_2 = p_1 + i_1$.
III. $f_3 = i_1 + i_2$.
IV. $f_4 = p_1 p_2$.
V. $f_5 = p_1 i_1$.
VI. $f_6 = i_1 i_2$.

(c) Sea f una función dada, con dominio simétrico.

I. Demostrar que la funciones p e i, que tienen el mismo dominio que f y están definidas por

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \ , \quad \text{e} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

son una función par y una función impar respectivamente.

II. Verificar que $f(x) = p(x) + i(x)$.

III. Mostrar que, si puede descomponerse a la función f como

$$f(x) = p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x) \ ,$$

con p_1, p_2 pares e i_1, i_2 impares, entonces, necesariamente,

$$p_1 = p_2 \ , \quad \text{e} \quad i_1 = i_2 \ .$$

Luego, una función f de dominio simétrico siempre puede escribirse como la suma de una función par con una impar, y esta representación es única.

(d) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 3$, hallar su descomposición como la suma de una función par p con una impar i y representar gráficamente las tres funciones f, p e i.

12. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones.

(a) $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x^2 + 2x + 1$.

(b) $f_2 : [2, 7] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = |x - 1| + 1$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -1, \\ 1, & -1 \le x < 1, \\ x, & x \ge 1. \end{cases}$

13. Obtenga la ley de cada una de las siguientes funciones lineales.

(a) La gráfica de f_1 pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(2, 0)$.

(b) La gráfica de f_2 es paralela al eje de las abscisas y pasa por el punto $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

(c) La gráfica de f_3 corta al eje x en el punto de abscisa 3 y forma con éste un ángulo de $\frac{\pi}{3}$.

14. ¿Cuánto debe valer el número real k para que el punto $(-1, 2)$ se encuentre en la gráfica de la función lineal $f(x) = \dfrac{kx + 1}{k + 2}$?

15. (a) A partir de la gráfica de la función valor absoluto representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

$$f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{donde} \ f_1(x) = |x + 1|, \qquad f_2 \colon [-2, 3] \to \mathbb{R} \ \text{donde} \ f_2(x) = 1 - |x|.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

(b) A partir de la gráfica de la función f_2 del ítem anterior, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

I. $f_3(x) = f_2(x-1)$. II. $f_4(x) = |f_2(x)|$. III. $f_5(x) = f_2(-x)$.

(c) Utilizando las gráficas de las funciones $\{f_i : i = 1, ..., 5\}$ obtenidas en (a) y (b) indicar, para cada una:

I. Los conjuntos $A_i = \{x \in \mathbb{R} \colon f_i(x) = 0\}$ y $B_i = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 < f_i(x) \leq 5\}$.

II. Los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

16. (a) A partir de la gráfica de la función cuadrática, $f(x) = x^2$, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes.

I. $f_1(x) = (x-3)^2 + 1$

II. $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$

III. $f_3(x) = |x^2 + x - 6|$

(b) Utilizar las representaciones gráficas de f_2 y f_3 para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:

I. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.

II. $\dfrac{x^2 + x - 6}{-x^2 + 4x - 3} \geq 0$.

17. A partir de la gráfica de la función parte entera, representar gráficamente las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{2}[x]$. (b) $f_2(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$. (c) $f_3(x) = [x] + \frac{1}{2}$. (d) $f_4(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

18. (a) A partir de la gráfica de la función homográfica $f(x) = \frac{1}{x}$, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes e indicar cuáles son (si existen) sus asíntotas horizontales y verticales.

I. $f_1(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$

II. $f_2(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

III. $f_3(x) = -\dfrac{4x+1}{4x-1}$

(b) Determinar los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f_1(x) < 3\}\ , \qquad y \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) \geq 1\}.$$

19. Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso dominio e imagen.

(a) $f_1(x) = 2\cos(x+5)$.

(b) $f_2(x) = 3 - \tan(x)$.

(c) $f_3(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3$.

(d) $f_4(x) = \operatorname{sen}(1 - 2\pi x)$.

(e) $f_5(x) = |3\cos(x)|$.

(f) $f_6(x) = |\tan(x) - 1| + 1$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

20. Hallar el período de las siguientes funciones reales.

    (a) $f_1(x) = \tan(\pi x)$.
    (b) $f_2(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x)$.

21. Siempre que sea posible, en cada uno de los siguientes ítems encontrar la función compuesta de f con g y la función compuesta de g con f. Señalar cuál es el dominio y la imagen de cada función involucrada (vale decir, de f, de g y de las compuestas).

    (a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
    (b) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ y $g(x) = x^2 - 1$.
    (c) $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x}$.

22. Dadas las siguientes funciones:

    $$f_1(x) = x^2 + 3 \text{ si } x \leq 0, \qquad f_2(x) = \frac{x-2}{x+2} \text{ si } x > -2, \qquad f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

    Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se pide:

    (a) Demostrar que la función f_i es inyectiva.
    (b) Simbolizando con g_i la inversa de la función f_i, describir su dominio.
    (c) Hallar una expresión para obtener $g_i(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g_i.
    (d) A partir de la gráfica de la función f_i, representar gráficamente la función g_i.

23. Encontrar la función inversa (si existe) y representar aproximadamente un gráfico de f y de f^{-1} en tal caso.

    (a) $f(x) = x^2$, $x \geq 0$
    (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$
    (c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

24. A partir de la gráfica de la función logarítmica o la función exponencial, según corresponda, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes:

    (a) $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f_1(x) = 3 + \log_2(3x)$
    (b) $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f_2(x) = -3\log_{10}(x)$
    (c) $f_3 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f_3(x) = \log_2 |x|$
    (d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_4(x) = -5^x + 1$.
    (e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_5(x) = 3^{2x}$.
    (f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_6(x) = e^{-x} - 1$.

    (a) En cada caso indicar si la función es o no biyectiva, y diga cómo deben ser el dominio y el codominio para que lo sea.
    (b) Para cada una de las funciones biyectivas halladas, encuentre la función inversa.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

25. Hallar dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

    (a) $f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

    (b) $f_2(x) = \arctan\left|\frac{x-1}{3}\right|$..

26. Demostrar las siguientes "identidades hiperbólicas".

    (a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

    (b) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

    (c) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

    Con lo demostrado anteriormente, deducir identidades hiperbólicas para $\operatorname{senh}(2x)$ y $\cosh(2x)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119