FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)
2025

UNIDAD 3: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERNO

1. Los cuatro espacios fundamentales

Importante: *sólo por este párrafo* trabajaremos exclusivamente con ev de dimensión finita.

Además, para no errarle, consideraremos todos los vectores como columnas. Si en algún momento no dan las dimensiones, tener en cuenta que se toma el transpuesto.

Revisaremos muchos conceptos que conocemos hasta ahora, los relacionaremos e introduciremos algunos nuevos para darle una nueva mirada a todo lo aprendido.

Para fijar ideas, consideraremos:

- V F-ev con $dim_F V = n$, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Sabemos que existe un isomorfismo $V \simeq F^n$ tal que $v \to [v]_{B_V} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ si $v = \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n$.
- W F-ev con $dim_F W = m$, $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$ base de W. Sabemos que existe un isomorfismo $W \simeq F^m$ tal que $w \to [w]_{B_W} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ si $w = \beta_1 w_1 + \dots \beta_m w_m$.
- Como $L(V, W) \simeq F^{m \times n}$, si $T \in L(V, W)$ tenemos que $[T]_{B_V B_W} \in F^{m \times n}$ es tal que

$$[T]_{B_V B_W}[v]_{B_V} = [Tv]_{B_W}.$$

Escribamos ahora

$$\begin{aligned} A =& [T]_{B_V B_W} = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}, \\ \overline{x} =& [v]_{B_V} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n, \text{ y} \\ b =& [Tv]_{B_W} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{F}^m. \end{aligned}$$

Entonces,

- Para hallar $ker(T)$ (o equivalentemente, chequear si T es mono), resolvemos $[T]_{B_V B_W}[v]_{B_V} = (0, \dots, 0)^t$, es decir,

  $$A\overline{x} = \overline{0}.$$

  Y para esto aplicamos la resolución de sistemas homogéneos que aprendimos antes.

- Para calcular $Im(T)$ (y de paso chequear si T es epi), buscamos todos los $b = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{F}^m$ tal que $[T]_{B_V B_W}[v]_{B_V} = (\beta_1, \dots, \beta_m)^t$ tiene solución, es decir, tal que

  $$A\overline{x} = b$$

  tiene solución, y para esto aplicamos la resolución de sistemas generales que aprendimos antes.

1.1. El espacio columna de A

Recordemos un poquito cómo construimos la notación matricial de un sistema de ecuaciones y revisemos más detenidamente lo que mencionamos recién. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas:

$$\text{(S)} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Si ponemos $A = (a_{ij})$, $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ y $b = (b_1, \ldots, b_m)^t$, el sistema es $A\overline{x} = b$. Pero esto no es lo que queremos observar. Miremos nuevamente:

$$\begin{array}{|c|cc|c|cccc|c|cc|c|}
\hline
a_{11} & x_1 & + & a_{12} & x_2 & + & \ldots & + & a_{1n} & x_n & = & b_1, \\
a_{21} & x_1 & + & a_{22} & x_2 & + & \ldots & + & a_{2n} & x_n & = & b_2, \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & x_1 & + & a_{m2} & x_2 & + & \ldots & + & a_{mn} & x_n & = & b_m. \\
\hline
\uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & & & & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
col_1(A) & x_1 & + & col_2(A) & x_2 & + & \ldots & + & col_n(A) & x_n & = & b.
\end{array}$$

Es decir, b es una combinación lineal de las columnas de A. Y el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A es el span de las columnas de A.

Así, para calcular $Im(T)$ (y de paso chequear si T es epi), buscamos todos los $b \in \mathbb{F}^m$ tales que $A\overline{x} = b$ tiene solución, esto es todos los $b \in< \{col_1(A), \ldots, col_n(A)\} >$. Esto último nos dice que $Im(T) =< \{col_1(A), \ldots, col_n(A)\} >$.

MORALEJA: El espacio generado por las columnas de A es RE importante. Tiene nombre y todo:

Definición 1 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ llamamos espacio columna de A al conjunto*

$$C(A) :=< \{col_1(A), \ldots, col_n(A)\} > .$$

$C(A)$ es un sev de $\mathbb{F}^m$.

Con esta definición sigue que $A\overline{x} = b$ es compatible sii $b \in C(A)$.

1.2. El espacio nulo de A

Con la notación anterior, para hallar $ker(T)$ (o equivalentemente, chequear si T es mono), tenemos que ver si $A\overline{x} = \overline{0}$ tiene sólo la solución trivial, es decir, ver si las columnas de A son li. Podemos decir algunas cosas más:

- El sistema $A\overline{x} = \overline{0}$ siempre tiene solución, siempre es compatible. En términos de transformaciones lineales esto nos dice que $T\overline{0}_V = \overline{0}_W$.

- Si A es cuadrada e invertible, la única solución es la trivial. En términos de transformaciones lineales, tenemos que $dimV = dimW$, T mono y luego iso.

- Si A no es invertible (aún en el caso que A sea cuadrada), hay soluciones no triviales, lo que implica que T no será monomorfismo.

Definición 2 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ llamamos espacio nulo de A al conjunto*

$$N(A) = \{\overline{x} \in \mathbb{F}^n : A\overline{x} = \overline{0}\}.$$

$N(A)$ es un sev de $\mathbb{F}^n$.

Así, $\overline{x} \in N(A)$ sii $v \in ker(T)$ donde $[v]_{B_V} = \overline{x}$.

1.3. Escalonando A

En resumen, hemos definido dos espacios asociados a una matriz $C(A)$ y $N(A)$ que tienen interpretación a nivel de transformaciones lineales como los espacios imagen y núcleo asociados a ella. Todo siempre que tengamos bases fijas para dominio y codominio. El siguiente cuadro es el que tenemos que tener en mente:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{F}^n & \longleftrightarrow & V, & \qquad\qquad & \mathbb{F}^m & \longleftrightarrow & W, \\ & & & & & & \\ N(A) & \longleftrightarrow & ker(T), & & C(A) & \longleftrightarrow & Im(T). \end{array}$$

Pero más aún, como ya hemos visto, para resolver sistemas recurrimos a escalonar estas matrices. Veamos cómo se traduce ésto en términos de transformaciones lineales.

Volvamos a nuestro sistema y recordemos las operaciones entre ecuaciones:

$$\text{(S)} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- ESCALAMIENTO (la llamamos Tipo 1): multiplicar la i-ésima ecuación por un escalar no nulo $\alpha \in \mathbb{F}$:

$$\text{(S')} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ \alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

- ELIMINACIÓN (la llamamos Tipo 2): sumar a la i-ésima ecuación un múltiplo por un escalar no nulo $\alpha \in \mathbb{F}$ de la k-ésima ecuación:

$$
\text{(S')} \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\vdots \\
(a_{i1} + \alpha a_{k1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{k2})x_2 + \cdots + (a_{in} + \alpha a_{kn})x_n = (b_i + \alpha b_k), \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

- INTERCAMBIO (la llamamos Tipo 3): intercambiar la i-ésima ecuación por la k-ésima:

$$
\text{(S')} \begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\vdots \\
\alpha a_{k1}x_1 + \alpha a_{k2}x_2 + \cdots + \alpha a_{kn}x_n = \alpha b_k, \\
\vdots \\
\alpha a_{i1}x_1 + \alpha a_{i2}x_2 + \cdots + \alpha a_{in}x_n = \alpha b_i, \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{cases}
$$

Efectuar cualquiera de estas operaciones produce un sistema de ecuaciones equivalentes (**recordar que esto significa que el conjunto solución es el mismo**).

A nivel matricial, esto lo implementamos a partir de las operaciones elementales de filas. Dado un sistema (S) $A\overline{x} = b$, sabemos que las operaciones elementales por fila e pueden describirse a partir de matrices elementales E de modo que el sistema (S') $e(A)x = e(b)$ es equivalente. Para hallar las matrices E simplemente efectuamos la operación a la matriz identidad: $E = e(Id_m)$. Tenemos así que:

- ESCALAMIENTO:

$$
E = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \\ \end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

- ELIMINACIÓN:

$$E = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & & & \text{col i} & & \text{col } k & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \text{fila } k \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

- INTERCAMBIO:

$$E = \begin{array}{rc} & \begin{matrix} & & & \text{col i} & & \text{col } k & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{fila } i \\ \\ \text{fila } k \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Todas estas matrices E son invertibles. Entonces si definimos $S \in L(W)$ tal que $[S]_{B_W} = E$, resulta que S es un automorfismo de W.

Si partimos de una matriz A y **usamos sólo operaciones de eliminación**, podemos llevarla a una matriz U en forma de escalón (algoritmo de eliminación de Gauss), luego aplicamos más operaciones de eliminación para llevarla a una matriz R en forma de escalón reducida (aquí es cuando el algoritmo se llama de Gauss-Jordan).

Supongamos que llevamos a cabo la eliminación de *Gauss* efectuando las operaciones de eliminación dadas por las matrices $E_1, \ldots, E_k$. Llamemos directamente $E = E_1 \ldots E_k$ y sea S el automorfismo resultante. Tenemos que $U = EA$, luego hemos obtenido una nueva transformación lineal $T' = S \circ T \in L(V, W)$.

Las matrices A, U y R son de tamaño $m \times n$. Hemos visto que la cantidad de pivots que obtenemos en U más la cantidad de variables libres nos dan la cantidad de columnas de A. Es decir, **ya conocíamos** el Teorema de la Dimensión!! En efecto:

- Las columnas de U que contienen pivots son li. Esto se interpreta fácilmente pensando que cada columna de U que contiene un pivot aporta una componente más, de modo que será li con las anteriores. La cantidad de columnas pivots es entonces la dimensión del espacio $C(U)$, que deberá ser la misma dimensión que $C(A)$ puesto que los conjuntos solución de ambos sistemas son iguales.

- Más aún, como S es un automorfismo, las columnas de A correspondientes a las columnas de U que contienen pivots, también son li.

- Ahora bien, tenemos que $ran(T) = dim(Im(T)) = dim(C(A)) = dim(C(U)) = \#$pivots.

- Además, la cantidad de variables libres que tenemos nos indica la dimensión del kernel de T, pues para hallarlo debíamos resolver el sistema homogéneo $A\overline{x} = \overline{0}$. Es decir, $\#$variables libres $= nul(T)$.

- Finalmente, puesto que $n = \#$columnas de $A = \#$pivots $+ \#$variables libres, resulta que $dimV = ran(T) + nul(T)$.

Definición 3 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ llamamos rango de A al entero $ran(A) = dim(C(A))$. Si $r = ran(A)$, entonces $dim(N(A)) = n - r$.*

1.4. Los espacios que faltan

Definición 4 *Dada una matriz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ llamamos:*

- ***espacio fila de** A al espacio generado por las filas de A, que es lo mismo que el espacio columna de A^t. El espacio fila $C(A^t)$ es un sev de $\mathbb{F}^n$,*
- ***espacio nulo a izquierda de** A al espacio nulo de A^t. El espacio nulo a izquierda $N(A^t)$ es un sev de $\mathbb{F}^m$.*

El espacio nulo a izquierda recibe su nombre de la siguiente observación: si planteamos la ecuación matricial $A^t\overline{y} = \overline{0}$ que lo describe, y la transponemos, tenemos que $\overline{y}^tA = \overline{0}^t$, es decir, estamos resolviendo un sistema homogéneo para el cual la incógnita multiplica a izquierda a la matriz A, es decir, la anula a izquierda.

Las dimensiones resultan: $dim(C(A^t)) = dim(C(A)) = ran(A) = r$, $dim(N(A)) = n-r$, $dim(N(A^t)) = m - r$.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 1 *Calculemos los cuatro espacios fundamentales (y sus dimensiones) asociados a la matriz A dada por:*

1.
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Escalonando esta matriz aplicando sólo operaciones de eliminación obtenemos una matriz U como la siguiente (recordar que la forma de escalón de una matriz no es única, sí lo es la reducida):

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

U tiene pivots en las columnas 1, 2 y 3, que son li. Luego, el espacio columna de A está generado por esas mismas tres columnas que son li. Pero más aún, dado que $C(A)$ es sev de $\mathbb{R}^3$, si tenemos tres generadores li (una base), debe ser todo $\mathbb{R}^3$. De paso, sigue que el rango de A es 3, y decimos que el rango es total.

Para hallar $N(A)$ debemos resolver $Ax = 0$, pero ya que tenemos U, sigamos reduciendo utilizando operaciones de eliminación hasta llegar a R, la forma de escalón reducida:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

de donde vemos claramente que $N(A) = \langle(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, 1)\rangle$, además $dimN(A) = 4 - 3 = 1$.

Para hallar $C(A^t)$, puesto que $dimC(A^t) = dimC(A) = ranA = 3$, el espacio fila de A está generado por las tres filas de A: $C(A^t) = \langle\{(2, 0, 3, -1), (1, -2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}\rangle$.

Para hallar $N(A^t)$ observamos que $dimN(A^t) = 3 - 3 = 0$, luego sigue fácilmente que $N(A^t) = \{\overline{0}\}$.

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminando obtenemos

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y la FER resulta

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

U tiene pivots en las primera y segunda columnas, luego $C(A)$ tiene por base sus columnas primera y segunda, de modo que $ranA = 2$: $C(A) = \langle\{(1, 0, -1), (1, 2, 0)\}\rangle$. De R obtenemos rápidamente $N(A) = \langle(1, -1, 1)\rangle$, que ya sabíamos que tiene dimensión 1. El espacio fila está generado por las dos primeras filas de A y el nulo a izquierda hay que calcularlo como ejercicio, también sabemos que tiene dimensión 1.

1.5. Factorización LU

Consideremos en este párrafo una matriz cuadrada A. Usando sólo operaciones de eliminación para obtener ceros debajo de la diagonal resulta en una matriz U, como hemos visto: $U = E_1 \dots E_k A$. Como cada E_k es invertible, tenemos definida la matriz $L = (E_1 \dots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \dots E_1^{-1}$, de modo tal que $A = LU$. La particularidad de estas matrices es que L es triangular inferior y U es triangular superior.

- U es triangular superior por construcción.

- L es triangular inferior puesto que es el producto de triangulares inferiores: en efecto, cada uno de sus factores es una matriz triangular inferior pues es la inversa de una matriz elemental que es triangular inferior (al ser la matriz asociada a la eliminación de un elemento debajo de la diagonal).

Esta factorización de A como producto de una matriz triangular inferior por una matriz triangular superior se conoce como **factorización LU** y es muy conocida. Una de sus múltiples aplicaciones es para resolver sistemas: si queremos resolver $A\overline{x} = b$, resolvemos primero $L\overline{y} = b$ y luego $U\overline{x} = \overline{y}$. Es claramente más sencillo resolver un sistema cuya matriz asociada es triangular.

1.6. Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$

Recordemos la definición de producto escalar en $\mathbb{R}^n$: para $u, v \in \mathbb{R}^n$, con $u = (u_1, \ldots, u_n)^t$, $v = (v_1, \ldots, v_n)^t$ (y consideraremos todo el tiempo vectores columna, salvo que en algún momento debamos hacer alguna transposición para que las dimensiones no nos traigan problemas), se define

$$u \times v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

De acuerdo a la notación matricial con la que contamos, podemos escribir de forma similar $u \times v = u^t v$. Observemos que $u \times v$ es un escalar real.

Decimos que u y v son ortogonales y denotamos $u \perp v$ si $u \times v = 0$.

El único vector que es ortogonal a todos es el vector nulo: $\overline{0} \perp v$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$. Además, el vector nulo es el único ortogonal a si mismo: si $v \perp v$ entonces $v = \overline{0}$.

Si U y V son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, decimos que son ortogonales y escribimos $U \perp V$ si $u \perp v$ para todo $u \in U$ y todo $v \in V$.

En $\mathbb{R}^3$, tenemos que $\overline{i} \perp \overline{j} \perp \overline{k} \perp \overline{i}$. Y por ejemplo, $pl(xy) \perp eje(z)$.

Aplicando estos conceptos ahora a los espacios fundamentales podemos probar el siguiente resultado para matrices reales:

Proposición 1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Entonces:*

1. *$N(A) \perp C(A^t)$ y $C(A) \perp N(A^t)$.*
2. *Más aún, $N(A) \overset{\perp}{\oplus} C(A^t) = \mathbb{R}^n$ y $N(A^t) \overset{\perp}{\oplus} C(A)$.*

Demostración:

1. Veamos primero que $N(A) \perp C(A^t)$. Sean $x \in N(A)$ e $y \in C(A^t)$. Luego $Ax = 0$ y existe x' tal que $A^t x' = y$. Entonces, $x^t y = x^t A^t x' = (Ax)^t x' = 0^t x' = 0$. Que $C(A) \perp N(A^t)$ es análogo (EJERCICIO).

2. Veamos ahora que $N(A) \overset{\perp}{\oplus} C(A^t) = \mathbb{R}^n$. Para esto, veamos primero que $N(A) \cap C(A^t) = \{\overline{0}\}$. En efecto, si $v \in N(A) \cap C(A^t)$ entonces, por el item anterior, $v \perp v$. Luego debe ser $v = \overline{0}$. La proposición sigue de observar que $dim N(A) = n - r$ y $dim C(A^t) = r$. La otra descomposición en suma directa ortogonal queda como EJERCICIO.

$\square$

2. Espacios con producto interno

El producto por escalar en $\mathbb{R}^n$ nos brindó distintas nociones geométricas: ángulos y ortogonalidad, longitudes y distancias. Las nociones geométricas nos dan herramientas para poder hacer análisis matemático.

En esta sección daremos más estructura a los espacios vectoriales: consideraremos una nueva operación, el producto interno. Se trata de comprender qué características del producto por escalar necesitamos replicar en este contexto de modo tal que podamos definir de forma análoga ángulos, ortogonalidad, longitudes y distancias. En asignaturas posteriores seguramente se verán las consecuencias geométricas y analíticas de tener espacio vectorial con producto interno.

IMPORTANTE: A lo largo de esta sección consideraremos el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. En cada caso y en cada momento habrá que tener mucho cuidado pues realmente es importante si los escalares con los que trabajamos son reales o complejos.

Aclaración: no necesariamente trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 5 *Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y sea V un $\mathbb{F}$-ev. Un* ***producto interno*** *(pi) sobre V es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ que verifica:*

1. *Si $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces:*
   a) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
   b) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.
2. *Si $u, v \in V$ entonces $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.*
3. $\langle u, u\rangle > 0$ *si* $u \neq \bar{0}$.

Si en V tenemos un pi, decimos que $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un ***espacio con producto interno****.*

Observaciones 1

1. *Si consideramos $u = v$ en (ii) tenemos $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$. Esto nos dice que, no importa si el cuerpo es real o complejo, el escalar $\langle u, u\rangle$ siempre es real. Tiene sentido entonces la condición (iii).*
2. *(i) dice que el producto interno es lineal en la primera variable. Juntando (i) y (ii), para la segunda variable resulta que:*
   a) $\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$,
   b) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v, u\rangle} = \overline{\alpha\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$.

   Es decir, en un espacio complejo el producto interno no es lineal en la segunda variable, a esta propiedad se la conoce como ***sesquilineal****. Si el espacio es real, resulta lineal en la segunda variable, y se le dice* ***bilineal****.*
3. *Si el espacio es real, (ii) dice que el producto interno es simétrico.*
4. *A veces abreviamos producto interno como pi.*
5. *Aunque resulte trivial o elemental, aclaramos la siguiente propiedad de los productos internos: $\langle u, u\rangle = 0$ sii $u \neq \bar{0}$. Esta propiedad se suele enunciar como* ***el producto interno es no genenerado****.* degenerado

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 2

1. *El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (que recordamos en la sección anterior) es un producto interno EJERCICIO. Es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.*
2. *En $\mathbb{C}^n$ el producto interno canónico se define similar: $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{C}^n$,*

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i}.$$

   EJERCICIO: Verificar que es un producto interno

3. *En $\mathbb{F}^{n\times n}$ tenemos un producto interno canónico, y lo podemos definir de dos formas (que en definitiva producen la misma fórmula, pero tienen distintas aplicaciones). En primer lugar, como $\mathbb{F}^{n\times n} \simeq \mathbb{F}^{n^2}$, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, definimos*

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

   Por otro lado, si definimos la matriz $B^* = \overline{B^t}$, es decir, la conjugada transpuesta de B, cuyas entradads son $[B^*]_{ij} = \overline{b_{ji}}$, tenemos que

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*),$$

   donde tr denota la traza de la matriz. Que estas fórmulas son iguales es sencillo: $tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}[AB^*]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[B^*]_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$. Que es un producto interno no hace falta entonces probarlo (o sí?).

4. *En el espacio $V = C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ continua\}$ de las funciones continuas definimos*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

punto

EJERCICIO: Verificar que es un producto interno. Observar que este espacio es infinito dimensional.

5. *En el espacio $V = C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{C},\ continua\}$ de las funciones continuas (recordemos que una función compleja es continua si son continuas su parte real e imaginaria como funciones reales) definimos*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

EJERCICIO: Verificar que es un producto interno

6. *En el espacio de polinomios $\mathbb{F}[x]$ podemos definir un producto interno de manera similar:*

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)\overline{q(x)}dx.$$

verificarlo

No hace falta verficarlo (porqué?).

7. *Claramente en un mismo espacio vectorial, aún sobre el mismo cuerpo, no hay un sólo producto interno. Por ejemplo, hemos definido para el espacio de polinomios, un producto interno que depende del intervalo de integración. En el ejemplo tomamos el intervalo $[0,1]$ pero podríamos haberlo hecho en un intervalo $[a,b]$.*

8. *Existen muchos productos internos no canónicos. EJERCICIO: verificar que el siguiente es un producto interno en $\mathbb{R}^2$:*

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle = xx' - xy' - yx' + 2yy'.$$

Finalmente aclaremos que en la literatura aparecen los siguientes nombres: sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno

- Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio euclídeo**.
- Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio unitario**.

3. Geometría en EV: norma, distancia y ángulos

A lo largo de esta sección consideraremos un ev V sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de los números reales o complejos.

La idea es generalizar algunos conceptos que conocemos de $\mathbb{R}^n$, que hemos definido a partir del producto escalar (que denotábamos con el símbolo $\times$) y más aún, ver que en algunos de ellos (por ejemplo la norma y la distancia) se pueden definir sin la necesidad de un producto interno. Claro que un ev con producto interno es una estructura mucho más rica, que brinda más posibilidades de cálculo. En materias sucesivas seguramente aparecerán espacios normados, espacios métricos y espacios topológicos. Por ahora simplemente los presentaremos.

3.1. Norma de un vector

punto

Definición 6 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno. La función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$ definida por $||v|| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ se llama **norma asociada al producto interno**.*

Observaciones 2 *Importante: observar que aún en el caso que el cuerpo $\mathbb{F}$ que estemos considerando sea el cuerpo de los números complejos, la función norma siempre toma como codominio los números reales. Más aún, veremos que es no negativa.*

Proposición 2 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno Ents:*

1. $||v|| \geq 0$ *para todo* $v \in V$ *(no negativa), y* $||v|| = 0$ *sii* $v = \overline{0}$ *(no degenerada).*
2. *Para* $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in V$ *tenemos que* $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ *(homogeneidad).*
3. *Para* $u, v \in V$ *tenemos que* $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ *(desigualdad triangular).*
4. *Para* $u, v \in V$ *tenemos que* $|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$ *(desigualdad de Cauchy-Schwartz).*

Demostración:

1. EJERCICIO.
2. Consideremos la norma al cuadrado, por simplicidad de cálculos. Luego tomaremos raíz cuadrada para obtener la igualdad deseada:
$$||\alpha v||^2 = \langle \alpha v, \alpha v\rangle = \alpha\langle v, \alpha v\rangle = \alpha\overline{\alpha}\langle v, v\rangle = |\alpha|^2||v||^2,$$
de donde $||\alpha v|| = |\alpha|v$.

4. Probaremos Cauchy-Schwartz antes que la triangular. Si u o v son el vector nulo, la desigualdad sigue trivialmente. Supongamos $u, v \neq \overline{0}$. Consideremos el vector $w = u - \frac{\langle u,v\rangle}{||v||^2}v$. Tenemos que:
$$\begin{aligned}
0 \leq &\langle w, w\rangle = \langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\rangle = \langle u, u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\rangle - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}\langle v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\rangle \\
=&\langle u, u\rangle - \frac{\overline{\langle u, v\rangle}}{||v||^2}\langle u, v\rangle + -\frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}\langle v, u\rangle + \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}\frac{\overline{\langle u, v\rangle}}{||v||^2}\langle v, v\rangle \\
=&||u||^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2},
\end{aligned}$$
de donde sigue $||u||^2 \cdot ||v||^2 \geq |\langle u, v\rangle|^2$, luego $|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$.

3. Para probar la desigualdad triangular primero establecemos una igualdad muy importante:
$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2. \tag{1}$$
Esta igualdad sigue de calcular $||u + v||$:
$$\begin{aligned}
||u + v||^2 =&\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u + v\rangle + \langle v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
=&||u||^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + ||v||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2.
\end{aligned}$$
Ahora bien, como $\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) \leq |\langle u, v\rangle|$, resulta de (1) y de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que
$$\begin{aligned}
||u + v||^2 \leq&||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u, v\rangle| + ||v||^2 \\
\leq&||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2,
\end{aligned}$$
de donde $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

□

Ejemplo 1 *La desigualdad de Cauchy-Schwartz en análisis: Consideremos* $V = C([a, b])$, *es decir, el espacio de las fnuciones continuas en el intervalo* $[a, b]$ *a valores reales. Si* $f, g \in C([a, b])$ *el producto interno canónico está definido por*
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$
y la norma de f *es entonces*
$$||f|| = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede definir una norma en un espacio vectorial sin necesidad de recurrir a un producto interno a partir de las tres primeras propiedades. En efecto:

Definición 7 *Sea V un $\mathbb{F}$-ev. Una norma en V es una función $N : V \to \mathbb{R}$ que verifica*

1. *$N(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ (no negativa), y $N(v) = 0$ sii $v = \overline{0}$ (no degenerada).*
2. *Para $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tenemos que $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ (homogeneidad).*
3. *Para $u, v \in V$ tenemos que $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (desigualdad triangular).*

En tal caso decimos que (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado.

producto interno

No toda norma está asociada a un espacio vectorial. Si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{F}$-ev con pi, la función $N(v) =$
v $\langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}$ es una norma según esta definición (la proposición anterior justifica esta afirmación). Pero hay normas en ev que no provienen o no están asociadas a un producto interno.El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación:

punto

Ejemplo 2 *Consideremos $V = \mathbb{R}^n$. Definimos la función $||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

esta función es una norma en $\mathbb{R}^n$ llamada norma infinito o norma del máximo. Para ver que no proviene de un producto interno aplicaremos la siguiente proposición.

Proposición 3 *(Identidades de polarización). Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno Tenemos que:*

1. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces para todo $u, v \in V$,*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2.$$

2. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ entonces para todo $u, v \in V$,*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2 + \frac{1}{4}i||u+iv||^2 - \frac{1}{4}i||u-iv||^2.$$

Demostración:

1. De la fórmula (1), puesto que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

$$||u+v||^2 \leq ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2,$$

y análogamente,

$$||u-v||^2 \leq ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2,$$

de donde

$$\frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2 = \frac{1}{4}\left(||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2)\right) - \frac{1}{4}\left(||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2\right) = \langle u, v\rangle.$$

2. De la fórmula (1), puesto que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$,

$$||u+iv||^2 \leq ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, iv\rangle) + ||iv||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\bar{i}\langle u, v\rangle) + |i|^2||v||^2$$

$\square$

Corolario 1 *Si (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado, la norma N proviene de un producto interno si la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida a partir de las identidades de polarización define un producto interno en V.*

Demostración: Esta prueba no es tan sencilla.

Desafío 1 *Probar las partes que salgan. ¿Dónde encuentra la dificultad?*

$\square$

Corolario 2 *(Ley del paralelogramo) Si (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado, y $u, v \in \mathbb{R}$ entonces*

$$N(u+v)^2 + N(u-v)^2 = 2(N(u)^2 + N(v)^2).$$

Demostración: EJERCICIO.

$\square$

3.2. Distancia

Pasemos a definir distancia entre vectores. La definición de distancia tiene consecuencias en análisis: nos permite definir bolas, luego conjuntos abiertos. Y tendrá sentido la noción de continuidad. Estas cuestiones caen en el espectro del análisis matemático, y no las estudiaremos en el curso. Sólo nos limitaremos a dar las bases algebraicas para que tenga sentido hacer análisis, geometría, etc. en espacios vectoriales abstractos.

punto

Definición 8 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno La función $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por $d(u, v) = ||u - v||$ se llama **distancia**. El valor $d(u, v)$ se llama distancia entre los vectores u y v.*

Observemos que hemos definido distancia a partir de la norma asociada al producto interno Esto es más general todavía, lo veremos luego de la siguiente proposición donde exploramos las propiedades de la distancia.

Proposición 4 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno Ents:*

1. *$d(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in V$ (no negativa),*
2. *$d(u, v) = 0$ sii $u = v$ (no degenerada),*
3. *$d(u, v) = d(v, u)$ (simetría),*
4. *Para $u, v, w \in V$ tenemos que $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (desigualdad triangular).*

Desafío 2 *Hacer la prueba de esta Proposición.*

Observemos que en las propiedades que verifica la distancia no hemos tenido en cuenta la estructura algebraica que tenemos en V (ni la suma de vectores ni el producto por escalar). Esto nos da la pauta de que una distancia se puede definir independientemente de la estructura algebraica. En efecto:

Definición 9 *Sea X un conjunto cualquiera. Una distancia o métrica en X es una función $\mu : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica*

1. *$\mu(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ (no negativa),*
2. *$\mu(x, y) = 0$ sii $x = y$ (no degenerada),*
3. *$\mu(x, y) = \mu(y, x)$ (simetría),*
4. *Para $x, y, z \in X$ tenemos que $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$ (desigualdad triangular).*

En tal caso decimos que (X, μ) es un espacio métrico.

De la definición anterior sigue inmediatamente que hay distancias que no provienen de normas. Un ejemplo es considerar un conjunto X cualquiera, y definimos la llamada *distancia discreta*: $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

3.3. Ángulos

Veamos ahora cómo damos la noción de ángulo.

ATENCIÓN: *Trabajaremos en espacios euclídeos.*

Observemos que, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, si $u, v \neq \overline{0}$, tenemos que

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$$

Ahora bien, existe un único real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$ (la unicidad sigue de que la función $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es inyectiva, al ser estrictamente monótona).

Definición 10 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $u, v \in V$ con $u, v \neq \overline{0}$. Definimos el ángulo entre u y v, y denotamos $(\widehat{u,v})$ al único real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u||\cdot||v||}$.*

Observemos que si $\langle u, v\rangle = 0$ entonces $(\widehat{u,v}) = \frac{\pi}{2}$. Este caso cobrará importancia en la siguiente sección, cuando estudiemos ortogonalidad.

Proposición 5 *(Teorema del Coseno). Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $u, v \in V$ con $u, v \neq \overline{0}$. Entonces*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| \cos(\widehat{u,v}) + ||v||^2.$$

Desafío 3 *Probar el Teorema del Coseno.*

Desafío 4 *¿Puede enunciar y demostrar el Teorema del Seno?*

3.4. Matriz asociada a un producto interno

Trabajaremos en esta sección con $\mathbb{F}$-ev con producto interno de dimensión finita. Veamos que el producto interno define una matriz (respecto de una base), y queda determinado por ella: podremos recuperar el valor del producto interno entre cualquier par de vectores utilizando adecuadamente la matriz.

Definición 11 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno de dimensión $dim_{\mathbb{F}}V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Definimos la matriz del producto interno respecto de la base B a la matriz $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B$ cuyas entradas vienen dadas por $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B = (\langle v_i, v_j\rangle) \in \mathbb{F}^{n\times n}$.*

Observaciones 3 *Las matrices asociadas a un producto interno son hermitianas o hermíticas: $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B = ([\langle\cdot,\cdot\rangle]_B)^* = \overline{([\langle\cdot,\cdot\rangle]_B)^t}$. Peeeero no necesariamente una matriz hermítica es una matriz asociada a un producto interno En efecto, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es hermítica pero no representa ningún producto interno, pues de representarlo tendríamos que $\langle v_1, v_1\rangle = 0$ y esto no puede ser (por qué?).*

Claramente, en $\mathbb{R}^n$ con el producto interno usual, la matriz del producto escalar asociada a la base canónica es la matriz identidad.

Veamos porqué es tan útil la matriz asociada a un producto interno respecto de una base:

Proposición 6 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno de dimensión $dim_{\mathbb{F}}V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V. Sea $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B$ la matriz del producto interno respecto de B. Entonces pc $u, v \in V$,*

$$\langle u, v\rangle = [u]_B[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B\overline{[v]_B^t}.$$

Demostración: En efecto, sean $u, v \in V$ con $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Luego $[u]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $[v]_B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Calculemos. Por un lado:

$$\langle u, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \langle v_i, v_j\rangle.$$

Por otro lado,

$$[u]_B[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B\overline{[v]_B^t} = [u]_B([\langle\cdot,\cdot\rangle]_B\overline{[v]_B^t}) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i[[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B\overline{[v]_B^t}]_{i1} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\langle v_i,v_j\rangle\overline{\beta_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_j}\langle v_i,v_j\rangle.$$

Queda probada la igualdad deseada.

□

4. Ortogonalidad

Vamos a trabajar con este concepto tan importante y que nos va a permitir obtener bases más amigables para trabajar.

Definición 12 *Sea $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno*

- *$u,v\in V$ se dicen **ortogonales** si $\langle u,v\rangle = 0$.*
- *$S=\{v_1,\dots,v_r\}\subset V$ se dice **ortogonal** si $\langle v_i,v_j\rangle = 0$ para todo $i,j=1,\dots,r$, $i\neq j$.*
- *$S=\{v_1,\dots,v_r\}\subset V$ se dice **ortonormal** si es ortogonal y $||v_i|| = 1$ para todo $i=1,\dots,r$.*

Ejemplos 3 *1. La base canónica de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto ortonormal.*

2. $V=\mathbb{R}^2$, $S=\{(1,1),(1,-1)\}$ es un conjunto ortogonal pero no ortonormal (EJERCICIO). El conjunto $S'=\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\}$ es ortonormal (EJERCICIO).

Sea $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}}V=n$ y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V. Si B es un conjunto ortogonal, la matriz asociada al producto interno es

$$[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B = \begin{pmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle v_2,v_2\rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle v_n,v_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||v_1||^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ||v_2||^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & ||v_n||^2 \end{pmatrix}.$$

Y si B es ortonormal, $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B = Id$. Las bases ortogonales se suelen abreviar con b.o., y las ortonormales con b.o.n.

Si B es b.o.n., el producto interno en V puede describirse en términos de coordenadas de la base B de manera similar al producto interno usual de $\mathbb{F}^n$. En efecto, si $u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$, $v=\sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i\in V$ entonces

$$\langle u,v\rangle = [u]_B[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B\overline{[v]_Bt} = [u]_B Id\overline{[v]_Bt} = [u]_B\overline{[v]_Bt} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_i}.$$

Luego también la norma se expresa de manera sencilla como en $\mathbb{F}^n$: $||u|| = \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Sigue que dada una base de un ev (de dimensión finita), existe un único producto interno tal que la base dada es bon:

Proposición 7 *Sea V un $\mathbb{F}$-ev, $dim_{\mathbb{F}}V=n$ y $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V. Entonces existe un único producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en V tal que la base B es ortonormal respecto de ese producto interno*

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: definir el producto interno a partir de la matriz $[\langle\cdot,\cdot\rangle]_B = (\langle v_i,v_j\rangle) = Id$ asociada a la base B.

□

Además, todo conjunto ortogonal de vectores no nulos resulta ser li:

Proposición 8 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \overline{0}$ pt $i = 1, \ldots, r$. Entonces S es li.*

Demostración: Veamos que la cl $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = \overline{0}$ tiene sólo la solución trivial. En efecto, pc $j = 1, \ldots, r$ tenemos que

$$0 = \langle \overline{0}, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j ||v_j||^2,$$

de donde por ser S ortogonal y todos sus vectores no nulos sigue que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Luego S es li.

□

Así, si S es un conjunto finito y ortogonal en un ev V, resulta ser una base para $W = span(S)$, y podemos calcular los coeficientes de los elementos $v \in W$ con ayuda del pi:

Proposición 9 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \overline{0}$ pt $i = 1, \ldots, r$. Sea $W = span(S)$. Si $v \in W$ ents*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2} v_j.$$

Demostración: Supongamos que $v = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j$. Calculemos los coeficientes. Para esto, consideremos pc $j = 1, \ldots, r$

$$\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j ||v_j||^2,$$

de donde $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2}$.

□

Corolario 3 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = span(S)$. Si $v \in W$ ents*

$$v = \sum_{j=1}^{r} \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Corolario 4 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $v \in V$.*

1. *Si B bo entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, v_j \rangle}{||v_j||^2} v_j$.*

2. *Si B bon entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, v_j \rangle v_j$.*

Corolario 5 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno y $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = span(S)$. Si $u, v \in W$ ents*

1. *$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle u, v_i \rangle \overline{\langle v, v_i \rangle}$.*

2. *$||u|| = \left(\sum_{i=1}^{r} |\langle u, v_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.*

4.1. Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera en un ev de dimensión finita, podemos construir una bon: este es el conocido método de ortonormalización de Gram-Schmidt. El proceso resulta en una base con una cualidad extra:

Teorema 1 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}}V = n$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Entonces existe $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bon de V tal que pt $k = 1, \ldots, n$,*

$$span\{v_1, \ldots, v_k\} = span\{w_1, \ldots, w_k\}.$$

Demostración: En primer lugar construiremos una bo $B'' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ que verifique lo indicado, luego normalizando esta base otendremos la B' buscada.

- Definimos $u_1 := v_1$. Luego $span\{v_1\} = span\{u_1\}$.
- Buscamos ahora $u_2 \in V$ tq $\langle u_1, u_2\rangle = 0$ y $span\{v_1, v_2\} = span\{u_1, u_2\}$. Para esto necesitamos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que $u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y que $\beta \neq 0$ (por qué??). Supongamos spg que $\beta \underset{=}{\neq} 1$, o sea $u_2 = \alpha v_1 + v_2$. Veamos:

  $$0 = \langle u_2, u_1\rangle = \langle \alpha v_1 + v_2, u_1\rangle = \alpha\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_2, v1\rangle,$$

  v_1

  de donde $\alpha = -\frac{\langle v_2, v_1\rangle}{||v_1||^2}$. Así,

  $$u_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{||v_1||^2} v_1$$

  verifica lo requerido.
- Procedemos a construir inductivamente: si suponemos que ya tenemos construidos $u_1, \ldots, u_r \in V$, con $r < n$, tales que
  - $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, r$, $i \neq j$,
  - $span\{v_1, \ldots, v_r\} = span\{u_1, \ldots, u_r\}$.

  Definimos entonces el vector

  $$u_{r+1} := v_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k\rangle}{||u_k||^2} u_k.$$

  Así, para $1 \leq j \leq r$,
  - Calculemos los producto interno entre el nuevo vector y los anteriores:

    $$\begin{aligned}\langle u_{r+1}, u_j\rangle =& \langle v_{r+1} - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k\rangle}{||u_k||^2} u_k, u_j\rangle = \langle v_{r+1}, u_j\rangle - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle v_{r+1}, u_k\rangle}{||u_k||^2} \langle u_k, u_j\rangle \\ =& \langle v_{r+1}, u_j\rangle - \frac{\langle v_{r+1}, u_j\rangle}{||u_j||^2}\langle u_j, u_j\rangle = 0,\end{aligned}$$

    puesto que $\langle u_j, u_k\rangle = 0$ si $k \neq j$.
  - $u_{r+1} \in span\{v_1, \ldots, v_{r+1}\}$ y $v_{r+1} \in span\{u_1, \ldots, u_{r+1}\}$ de donde ambos spans son iguales.

Así construimos hasta obtener una bon que verifica lo requerido. Para terminar basta considerar $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ donde $w_k = \frac{u_k}{||u_k||}$, $k = 1, \ldots, n$.

□

Corolario 6 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}}V = n$. Sea $U \subset V$ sev no trivial ($U \neq \{\overline{0}\}$) ents existe una bon de V que contiene una bon de U.*

Demostración: Sea $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U. Completamos a $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$, y esta base es tal que $span\{v_1, \ldots, v_r\} = span\{w_1, \ldots, w_r\}$, luego $B'_U = \{w_1, \ldots, w_r\}$es bon de U.

□

Ejemplo 3 *Sea $B = \{(1,0,i),(1,1,2+i),(0,0,1)\}$ base de $\mathbb{C}^3$. B es una base (EJERCICIO). Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos la siguiente bon:*

$$B' = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}i), (\frac{1}{\sqrt{3}}i, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{\sqrt{6}}{6}i, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}) \right\}.$$

4.2. Complemento ortogonal

punto

Definición 13 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno Sea $S \subset V$ un conjunto. Definimos el complemento ortogonal de S como el conjunto*

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \text{ para todo } s \in S\}.$$

Proposición 10 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con producto interno Sea $S \subset V$. Entonces $S^{\perp}$ es un sev de V.*

Demostración: EJERCICIO.

□

Observar que $\overline{0} \in S^{\perp}$ para todo $S \subset V$.

Ejemplo 4 *$V = \mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto $S = \{(1,1)\}$. Tenemos que*

$$S^{\perp} = \{(1,1)\}^{\perp} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x,y),(1,1) \rangle = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0\} = span\{(1,-1)\}.$$

Cuando S es además sev de V, se tiene una descomposición de V en sev ortogonales:

Proposición 11 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces:*

1. *$U \cap U^{\perp} = \{\overline{0}\}$,*
2. *$dimU + dimU^{\perp} = dimV$.*

Luego resulta $U \oplus U^{\perp} = V$.

Demostración:

1. Sea $u \in U \cap U^{\perp}$. Veamos que $u = \overline{0}$. Puesto que $u \in U$ y $u \in U^{\perp}$, resulta $\langle u, u \rangle = 0$. Luego $u = \overline{0}$.
2. Sea $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U, $r = dimU$. Completamos a una base de V: $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y obtenemos $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ bon de V tal que $B'_U = \{w_1, \ldots, w_r\}$ bon de U. Luego, $\{w_{r+1}, \ldots, w_n\}$ bon de $U^{\perp}$. En efecto: si $j > r$, $w_j \in U^{\perp}$, puesto que si tomamos $v \in spanB'_U$, $v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i$, de donde

$$\langle w_j, v \rangle = \langle w_j, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i w_i \rangle = \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_i} \langle w_j, w_i \rangle = 0,$$

por ser B' bon. Esto nos dice que $span\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} \subset U^{\perp}$. Pero como $n - dimU = n - r = dimspan\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} \leq dimU^{\perp}$ resulta $n \leq dimU + dimU^{\perp} \leq n$ (pues $U \cap U^{\perp} = \{\overline{0}\}$). Concluimos así que $span\{w_{r+1}, \ldots, w_n\} = U^{\perp}$ y $dimU + dimU^{\perp} = dimV$.

□

Ejemplos 4

$V = \mathbb{C}^3$. $S = \{(1, i, 1+i)\}$. Entonces

$$S^{\perp} = span\{(-i,1,0),(i-1,0,1)\}.$$

EJERCICIO!

$V = \mathbb{C}^4$. $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0, (1-i)x_2 + x_3 = 0\}$. Para calcular $S^{\perp}$ observamos que

- $x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0$ *es lo mismo que* $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -i, 1, -1)\rangle$ ~~y~~ $=0$
- $(1-i)x_2 + x_3 = 0$ *se puede escribir como* $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1+i, 1, 0)\rangle$. $= 0$

Entonces

$$S^\perp = span\{(1, -i, 1, -1), (0, 1+i, 1, 0)\}$$

Asociado a un sev siempre existe una función muy importante: la proyección sobre el subespacio. Cuando tenemos pi, la proyección nos dará una herramienta muy útil para las aplicaciones que estudiaremos en esta Unidad. Nos centraremos en el siguiente problema que podremos resolver:

Problema: Dado un sev U de un ev V de dimensión finita con producto interno y un punto $v \in V$, encontrar, si es posible, el punto de U que se encuentra a menor distancia de v.

Aquí es necesario interpretar qué se entiende por distancia de un punto a un conjunto. Hacemos la siguiente definición, y luego definimos la función proyección:

Definición 14 *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi, sea* $S \subset V$ *subconjunto y* $v \in \overset{V}{S}$. *Definimos la distancia de* v *a* S *como*

$$d(v, S) = inf\{d(v, s) : s \in S\} = inf\{||v - s|| : s \in S\}.$$

Definición 15 *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$. *Sea* $U \subset V$ *sev. La transformación lineal* $p_U : V \to V$ *definida por* $p_U(v) = v$ *si* $v \in U$ *y* $p_U(v) = \overline{0}$ *si* $v \in U^\perp$ *se llama* ***proyección ortogonal sobre*** U.

Observaciones 4 *En la definición anterior tenemos que interpretar que la proyección ortogonal sobre* U *así definida se extiende linealmente: esto quiere decir que, como* $V = U \oplus U^\perp$*, si* $v \in V$ *se puede escribir como* $v = u+w$*, con* $u \in U$ *y* $w \in U^\perp$*, entonces* $p_U(v) = p_U(u+w) = p_U(u)+p_U(w) = u+\overline{0} = u$.

Veamos algunas propiedades de la proyección:

1. p_U es una tl. EJERCICIO.
2. $kerP_U = U^\perp$. EJERCICIO.
3. Si $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bon de V tal que $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ bon de U, entonces
$$p_U(v) = p_U\left(\sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle p_U(v_i) = \sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle v_i.$$
4. $p_U + p_{U^\perp} = id_V$. EJERCICIO.

Estamos en condiciones de resolver el problema:

Proposición 12 *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi,* $dim_{\mathbb{F}} V = n$. *Sea* $U \subset V$ *sev. Entonces para* $v \in V$ *tenemos que*

$$d(v, U) = ||v - p_U(v)||.$$

Es decir, el punto de U más cercano a v es, como podíamos intuir, $p_U(v)$.

Demostración: Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ bon de V tq $B_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ bon de U. Sea $v \in V$, luego $v = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i$ y $p_U(v) = \sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle v_i$. Sio $u \in U$, $u = \sum_{i=1}^{r}\langle u, v_i\rangle v_i$. Luego,

$$v - u = \sum_{i=1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i - \sum_{i=1}^{r}\langle u, v_i\rangle v_i = \sum_{i=1}^{r}(\langle v, v_i\rangle - \langle u, v_i\rangle)v_i + \sum_{i=r+1}^{n}\langle v, v_i\rangle v_i, \text{ luego}$$

$$||v-u||^2 = \langle v-u, v-u\rangle = \sum_{i=1}^{r}|\langle v-u, v_i\rangle|^2 + \sum_{i=r+1}^{n}|\langle v, v_i\rangle|^2 \geq \sum_{i=r+1}^{n}|\langle v, v_i\rangle|^2,$$

y la igualdad se da sii $\sum_{i=1}^{r}|\langle v-u, v_i\rangle|^2 = 0$, es decir, si $\langle v-u, v_i\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, r$, que es lo mismo que $\langle v, v_i\rangle = \langle u, v_i\rangle$ para todo $i = 1, \ldots, r$. Es decir, para $u = \sum_{i=1}^{r}\langle u, v_i\rangle v_i = \sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle v_i = p_U(v)$. Tomando ínfimo resulta $d(v, U) = ||v - p_U(v)||$.

□

Corolario 7 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi, $dim_{\mathbb{F}}V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces para $v \in V$ tenemos que*

(v)

$$d(v, U) = ||p_{U^\perp}||.$$

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: $v = id(v) = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$.

□

Ejemplo 5 *Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $P(1, -1, 2)$ y $Q(1, 1, 2)$. Calculemos $d(P, S) = ||p_{S^\perp}(P)||$. Tenemos que $S = (span\{(2, 2, -1)\})^\perp$, de donde $\{(2, 2, -1)\}$ es una base (ortogonal) de $S^\perp$. Normalizamos y obtenemos que $\{(2/3, 2/3, -1/3)\}$ es una bon de $S^\perp$. Esto nos permite calcular $p_{S^\perp}(P)$:*

$$\begin{aligned} p_{S^\perp}(1, -1, 2) =& \langle (1, -1, 2), (2/3, 2/3, -1/3)\rangle (2/3, 2/3, -1/3) = (-4/9, -4/9, 2/9), \\ ||p_{S^\perp}(1, -1, 2)||^2 =& 4/9, \end{aligned}$$

de donde sigue que $d(P, S) = 2/3$. EJERCICIO: completar los cálculos. EJERCICIO: Calcular $d(Q, S)$.

5. Formas Bilineales

Veremos para finalizar el capítulo de Producto Interno una generalización, que será útil para muchas aplicaciones. Vimos que las transformaciones lineales nos permiten describir objetos de naturaleza lineal, como por ejemplo rectas en el plano y planos y rectas en el espacio. A partir de la noción de producto interno podemos dar una mirada geométrica a entes algebraicos, y con las formas bilineales podremos dar una descripción de objetos de naturaleza cuadrática, como por ejemplo curvas cónicas en el plano y superficies cuádricas en el espacio.

Definición 16 *Sea V un $F-$ev. Una **forma bilineal** es una aplicación $\mathcal{B} : V \times V \to F$ que es lineal en ambas variables, esto es para todos $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in F$:*

1. $\mathcal{B}(\alpha u + \beta v, w) = \alpha\mathcal{B}(u, w) + \beta\mathcal{B}(v, w)$,
2. $\mathcal{B}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha\mathcal{B}(u, w) + \beta\mathcal{B}(u, w)$.

Desafío 5 *Los productos internos reales **son** formas bilineales, no así los productos internos complejos. ¿Por qué?*

Ejemplos 5

1. *V F-ev, $T_1, T_2 \in V^*$. Definimos el producto tensorial de T_1, T_2 como $\mathcal{B} : V \times V \to F$ tal que $\mathcal{B}(u, v) = T_1(u)T_2(v)$. $\mathcal{B}$ es bilineal (EJERCICIO).*
2. ***Very Important Example 1** $A \in F^{n\times n}$, $\mathcal{B} : F^n \times F^n \to F$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = xAy^t$ es una forma bilineal (EJERCICIO).*

   una forma bilineal?
3. *$\mathcal{B} : \mathbb{R}^{\overset{2}{n}} \times \mathbb{R}^{\overset{2}{n}} \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 3x_2y_2$ es un producto interno (EJERCICIO). Ashuda-spoiler: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.*

   una forma bilineal?
4. *$\mathcal{B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\mathcal{B}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ es un producto interno (EJERCICIO). Esta forma bilineal se llama forma simpléctica y la usó hace 100 años Werner Heisenberg que luego ganó el Nobel de Física por la creación de la mecánica cuántica. En $\mathbb{C}^n$ esta forma bilineal se expresa como $\mathfrak{Im}(z\overline{w})$.*

En un espacio vectorial de dimensión finita, las formas bilineales pueden describirse matricialmente:

Definición 17 *Sea V un F-ev de dimensión finita $dimV = n$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y sea $\mathcal{B} : V \times V \to F$ una forma bilineal. La matriz de $\mathcal{B}$ en la base B es la matriz $[\mathcal{B}]_B = (\mathcal{B}(v_i, v_j)) \in F^{n\times n}$.*

Ejemplo 6 *Si B es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, en el ejemplo 3 anterior sigue que* $[\mathcal{B}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matriz de una forma bilineal en una base nos permite calcular en coordenadas:

Proposición 13 *Sea V un F-ev de dimensión finita $dim V = n$. Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y sea $\mathcal{B} : V \times V \to F$ una forma bilineal. Entonces para cada $x, y \in V$,*

$$\mathcal{B}(x, y) = [x]_B[\mathcal{B}]_B[y]^t_B.$$

Demostración: $x, y \in V$, $x = \sum_i \alpha_i v_i$, $y = \sum_j \beta_j v_j$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(x, y) =& \mathcal{B}\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_i\right) \\ =& \sum_i \alpha_i \sum_j \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j) \\ =& \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}[x]_B[\mathcal{B}]_B[y]^t_B =& (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \left(\mathcal{B}(v_i, v_j)\right) (\beta_1, \dots, \beta_n)^t \\ =& \sum_i \alpha_i \left(\sum_j \mathcal{B}(v_i, v_j)\beta_j\right) \\ =& \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \mathcal{B}(v_i, v_j).\end{aligned}$$

$\square$

Desafío 6 *Con la notación de la proposición anterior, probar que si $A \in F^{n\times n}$ es tal que para todo $x, y \in V$, $[x]_B A[y]^t_B = \mathcal{B}(x, y)$. Ayuda: calcular en los elementos de la base.*

Entonces A = [B]_B

Veremos ahora cómo cambiar la base:

Desafío 7 *Tratar de enunciar cómo sería cambiar la base ANTES de leer la siguiente proposición.*

Proposición 14 *Sea V un F-ev de dimensión finita $dim V = n$. Sean B_1, B_2 dos bases de V y sea $\mathcal{B} : V \times V \to F$ una forma bilineal. Entonces*

$$[\mathcal{B}]_{B_2} = C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}.$$

Demostración: Llamemos $A = C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}$. Veamos que $[x]_{B_2}A[y]^t_{B_2} = \mathcal{B}(x, y)$:

$$\begin{aligned}[x]_{B_2}A[y]^t_{B_2} =& [x]_{B_2}C^t_{B_2B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}C_{B_2B_1}[y]^t_{B_2} \\ =& (C_{B_2B_1}[x]_{B_2})^t[\mathcal{B}]_{B_1}(C_{B_2B_1}[y]^t_{B_2}) \\ =& [x]_{B_1}[\mathcal{B}]_{B_1}[y]^t_{B_1} = \mathcal{B}(x, y).\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 7 *Volviendo al ejemplo, si B_1 es la base canónica $B_2 = \{(1, 1), (1, 2)\}$, tenemos que* $C^t_{B_2B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $[\mathcal{B}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$.

5.1. Formas bilineales simétricas y antisimétricas

Definición 18 *Sea V un F-ev. Una forma bilineal $\mathcal{B}$ se dice*

- ***simétrica*** *si $\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x)$ para todo $x, y \in V$,*
- ***antisimétrica*** *si $\mathcal{B}(x,y) = -\mathcal{B}(y,x)$ para todo $x, y \in V$.*

Un producto interno real es una forma bilineal simétrica, claramente. Construiremos más ejemplos a partir de la siguiente proposición:

Proposición 15 *Sea V un F-ev de dimensión finita $dimV = n$. Sea B una base de V y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal. Entonces:*

- *$\mathcal{B}$ es **simétrica** sii $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica,*
- *$\mathcal{B}$ es **antisimétrica** sii $[\mathcal{B}]_B$ es antisimétrica.*

Demostración: Veamos la caracterización matricial de formas bilineales simétricas. La otra queda como

Desafío 8 *Probar la caracterización matricial de formas bilineales antisimétricas.*

Supongamos que $\mathcal{B}$ es una fbs. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces,

$$([\mathcal{B}]_B)_{ij} = \mathcal{B}(v_i, v_j) = \mathcal{B}(v_j, v_i) = ([\mathcal{B}]_B)_{ji},$$

luego la matriz $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica. Recíprocamente, si la matriz $[\mathcal{B}]_B$ es simétrica,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(x,y) =& [x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t \\
=& ([x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t)^t \\
=& [y]_B[\mathcal{B}]^t[x]_B^t \\
=& [y]_B[\mathcal{B}][x]_B^t = \mathcal{B}(y,x),
\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad sigue de que $[x]_B[\mathcal{B}][y]_B^t \in F$.

□

5.2. Formas bilineales no degeneradas

Definición 19 *Sea V un F-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica. Llamamos **núcleo** al conjunto*

$$ker(\mathcal{B}) = \{x \in V : \mathcal{B}(x,y) = 0 \,\forall\, y \in V\}.$$

*Decimos que $\mathcal{B}$ es **no degenerada** si su **núcleo** es trivial.* simétrica

Desafío 9 *¿El núcleo de una forma bilineal en V es un sev de V?*

Otra forma de enunciar la definición anterior es la siguiente: $\mathcal{B}$ es no degenerada sii no existe $x \in V$, $x \neq \overline{0}$ tal que $\mathcal{B}(x,y) = 0$ para todo $y \in V$.

Definición 20 *Sea V un F-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal antisimétrica. Decimos que $\mathcal{B}$ es **no degenerada** si $\mathcal{B}(x,y) = 0$ para todo $y \in V$ implica que $x = \overline{0}$.*

Una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada se llama *forma simpléctica.*

5.3. Formas cuadráticas

Definición 21 *Sea V un F-ev y sea $\mathcal{B}$ una forma bilineal simétrica. Se define la **forma cuadrática** $\mathcal{Q}$ asociada a $\mathcal{B}$ como $\mathcal{Q} : V \to F$ definida por $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x,x)$.*

Observaciones 5 *1. $\mathcal{Q}$ no es lineal, luego no es un elemento de V^*. Más aún,*

$$\mathcal{Q}(\alpha x + \beta y) = \alpha^2 \mathcal{Q}(x) + 2\alpha\beta\mathcal{B}(x,y) + \beta^2\mathcal{Q}(y).$$

2. *Si $F \subset \mathcal{C}$ subcuerpo, $\mathcal{B}$ queda completamente determinada por $\mathcal{Q}$. En efecto, tenemos la siguiente identidad de polarización*

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{4}\mathcal{Q}(x + y) - \frac{1}{4}\mathcal{Q}(x - y).$$

Desafío 10 *Probar la identidad de polarización.*

Ejemplos 6
- *En $V = \mathbb{R}^n$, el producto interno usual es una fbsnd y su forma cuadrática asociada es la norma al cuadrado.*
- *En $V = F^n$, si $A \in F^{n\times n}$ y $\mathcal{B}_A(x, y) := xAy^t$ tiene asociada la forma cuadrática $\mathcal{Q}_A(x) := xAx^t = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$.*
- ***Desafío 11*** *En $V = \mathbb{R}^2$ si $\mathcal{Q}(x) := ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$, hallar $\mathcal{B}$ fbs tal que $\mathcal{Q}$ es su forma cuadrática asociada (usando la identidad de polarización). Probar además que es no degenerada sii $b^2 - 4ac \neq 0$.*

  Sean $b = 0$, $a = 1$ y $c = \frac{1}{4}$. El conjunto $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{Q} = 1$ describe una elipse centrada en el origen.
- *Sea $V = C^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.*

  Sea $H = \{A \in C^{2\times 2} : A = A^*\}$ (recordemos que las $A^* = \overline{A^t}$ y si $A = A^*$ decimos que A es hermítica compleja). Si definimos $\mathcal{Q} : H \to \mathbb{R}$ por $\mathcal{Q}(A) = det(A)$, tenemos que $\mathcal{Q}$ es una forma cuadrática.

Observaciones 6 *Si $\mathcal{B}$ es una forma bilineal general, sin pedir que sea simétrica, no tenemos asociada una forma cuadrática.*

Desafío 12 *Si V es un F-ev con $F \subset \mathbb{C}$. Probar que toda forma bilineal se descompone en la suma de una forma bilineal simétrica con una antisimétrica.*

5.4. Positividad

La clasificación de las fbs reales se usan para clasificar extremos locales de funciones multivaluadas:

Definición 22 *V un $\mathbb{R}$-ev. $\mathcal{B}$ fbs. Decimos que $\mathcal{B}$ es*

- ***definida positiva*** *si $\mathbb{B}(x, x) > 0$ para todo $x \neq \overline{0}$,*
- ***semidefinida positiva*** *si $\mathbb{B}(x, x) \geq 0$ para todo $x \neq \overline{0}$,*
- ***definida negativa*** *si $\mathbb{B}(x, x) < 0$ para todo $x \neq \overline{0}$,*
- ***semidefinida negativa*** *si $\mathbb{B}(x, x) \leq 0$ para todo $x \neq \overline{0}$,*
- ***indefinida*** *si no vale ninguna de las anteriores.*

Si $F = \mathbb{R}$, una forma bilineal, definida positiva, simétrica y no degenerada es un producto interno.

Observaciones 7 *En la próxima unidad retomaremos las formas bilineales y cuadráticas, pues combinadas con los temas de la unidad próxima veremos una bellísima aplicación que nos da el marco teórico para las cuádricas y las cónicas que estudiamos en Álgebra y Geometría Analítica II.*