Conjuntos

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Conjuntos y pertenencia

- **Nociones primitivas:** conjunto y elemento de un conjunto. Si x es un elemento del conjunto A (o x pertenece a A), escribimos
$$x \in A.$$
- Es decir, $x \in A$ es una proposición: puede ser verdadera o falsa. Su negación $\neg(x \in A)$, es decir x no pertenece a A, la abreviaremos por
$$x \notin A.$$
- Es tradición usar la notación de letras mayúsculas

$A, B, C, \ldots, X, Y, Z, \ldots$	para conjuntos y letras minúsculas
$a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$	para los elementos de estos conjuntos.

- Esta notación no es universal. Por ejemplo, $A \in x$ tiene perfecto sentido (aunque preferimos no usar esta notación).

Ejemplo

- $A = \{4, 8, 10\}$ es un conjunto y sus elementos son 4, 8 y 10.
- $B = \{\{4\}, \{8\}, \{10\}\}$ es otro conjunto y sus elementos son $\{4\}$, $\{8\}$ y $\{10\}$.
- De hecho, valen:

$$4 \in A, \qquad 4 \in \{4\} \in B, \qquad \{4\} \notin A.$$

Igualdad de conjuntos

Empecemos por el problema más sencillo: ¿cuándo son iguales dos conjuntos?

Definición

Dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. En símbolos:

$$A = B \iff \forall x\,(x \in A \iff x \in B).$$

Definición de conjuntos por extensión

- La igualdad de conjuntos nos dice que podemos definir los conjuntos *por extensión*, listando todos los elementos del conjunto (entre llaves).
- $\{4, 8, 10\}$ es el (único) conjunto cuyos elementos son exactamente 4, 8 y 10.
- También se puede usar la definición por extensión con conjuntos infinitos, aunque esto no es muy frecuente.
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Definición por comprensión

Si A es un conjunto y $p(x)$ es una proposición abierta sobre los elementos de A, podemos formar el conjunto de los elementos x de A tales que $p(x)$ es verdadera. Este conjunto lo denotaremos por

$$\{x \in A : p(x)\}.$$

A veces también se denota $\{x \in A \mid p(x)\}$.

Definición de conjuntos por comprensión

Ahora también podemos definir un conjunto por *comprensión*, especificando alguna propiedad que caracterice unívocamente a todos sus elementos. Por ejemplo,

- $\{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k\}$ es el conjunto de los números naturales pares.
- $\{n \in \mathbb{Z} : (n-1)^2 \leq 9\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq 9\} = [-2, 4]$.

Conjuntos universales

- Utilizaremos un conjunto universal $\mathcal{U}$ del cual tomaremos todos los elementos con los que trabajaremos en un determinado contexto.
- Es importante tener claro cuál es el conjunto universal con el que estamos trabajando.
  - Por ejemplo, si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces el conjunto $\{x : 2 < x \leq 7\} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.
  - Pero si $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, entonces $\{x : 2 < x \leq 7\} = (2, 7]$ (intervalo semiabierto).
  - Si no esta claro cuál es el conjunto universal, escribir $\{x : 2 < x \leq 7\}$ es ambigüo y por tanto desaconsejado.

El conjunto vacío

Existe un conjunto $\varnothing$ que no tiene ningún elemento. Formalmente

$$\exists\, \varnothing \;\; \forall x \, (x \notin \varnothing).$$

Otras notaciones para este conjunto vacío son $\emptyset$, $\{\}$ ó 0 (en desuso). El conjunto vacío tiene la siguiente importante propiedad.

Teorema

El conjunto vacío es único. En otras palabras, si A es un conjunto sin elementos, entonces $A = \varnothing$.

Antes de demostrar nuestro primer teorema sobre conjuntos, establecemos una notación que nos será muy útil en el futuro.

Contención / Subconjuntos

Ahora vamos a definir la noción de que un conjunto esté contenido o incluido en otro.

Definición

Decimos que un conjunto A *está contenido* en un conjunto B, o que A es un *subconjunto* de B, si todo elemento de A es también un elemento de B. Usaremos la notación

$$A \subseteq B$$

para indicar que A es un subconjunto de B. En símbolos:

$$A \subseteq B \iff \forall x \, (x \in A \implies x \in B).$$

Notación

Para indicar que A no es un subconjunto de B, es decir $\neg(A \subseteq B)$, usamos la notación

$$A \not\subseteq B.$$

Definición

Decimos que un conjunto A está *contenido estrictamente* en un conjunto B si $A \subseteq B$ y $A \neq B$. O sea, A es un subconjunto de B pero B tiene más elementos que A. Para la contención estricta usaremos la notación

$$A \subset B.$$

Importante

Las notaciones $\subseteq$ y $\subset$ no son adoptadas en todos los libros de matemática. Las notaciones

- $A \subset B$ para la contención
- $A \underset{\neq}{\subseteq} B$ para la contención estricta

son también muy comunes (cuidado con el libro que lean).

Ejemplos

Consideremos los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3\} \\
B &= \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\} \\
C &= \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Se verifica que:

- $A \subset B$ y por lo tanto $A \subseteq B$
- $A \in B$
- $A \subset \mathbb{N}$
- $B \nsubseteq \mathbb{N}$

Algunas propiedades

Teorema

1. *Para todo conjunto A se tiene que $A \subseteq A$.*
2. *Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si A es un subconjunto de B y B es un subconjunto de A. En otras palabras,*

$$A = B \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)].$$

Demostración.

1. Ejercicio.
2. Para probar $\implies$ podemos reescribir el lado derecho como $(A \subseteq A) \wedge (A \subseteq A)$, lo cual sabemos que es verdadero por el ítem anterior. Para ver $\impliedby$ debemos ver que A y B tienen los mismos elementos. Si $x \in A$, como $A \subseteq B$, tenemos que $x \in B$. Análogamente, si $x \in B$, vemos que $x \in A$. Luego $A = B$. $\square$

Teorema

Sean A, B, C tres conjuntos. Se tiene:

1. *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$;*
2. *Si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$.*

Demostración.

1. Tenemos que probar que todo elemento de A es elemento de C. Sea $x \in A$, como $A \subseteq B$ concluimos que $x \in B$. Además, como $B \subseteq C$, sigue que $x \in C$, que es lo que queríamos probar.
2. Ejercicio. $\square$

Lema

Si $\varnothing$ es un conjunto vacío y A es cualquier conjunto, entonces $\varnothing \subseteq A$. Más aún, si A es un conjunto no vacío, entonces $\varnothing \subset A$.

Demostración.

Usando la definición de contención, debemos probar

$$\forall x \, (x \in \varnothing \implies x \in A)$$

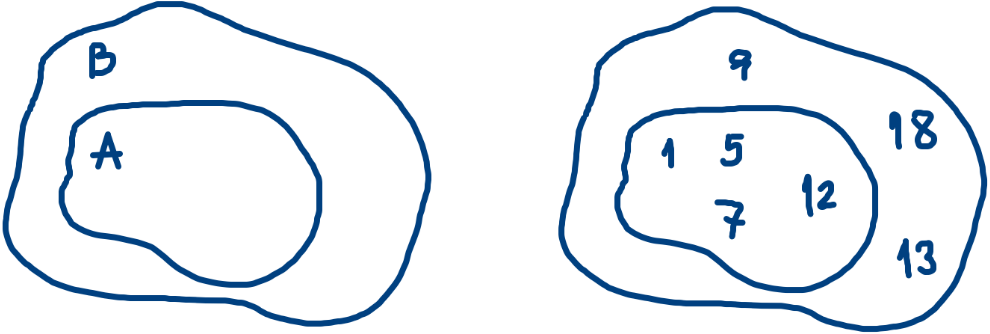
la cual es trivialmente verdadera (ya que para cada x, el antecedente de la implicación es falso). $\square$

Demostración del Teorema de Unicidad del Vacío.

Sean $\varnothing$ y $\varnothing'$ dos conjuntos vacíos. Por el lema anterior tenemos que $\varnothing \subseteq \varnothing'$ y $\varnothing' \subseteq \varnothing$. Usando el teorema de la doble contención sigue que $\varnothing = \varnothing'$. $\square$

Diagramas de Venn

A veces se usan los llamados diagramas de Venn para representar gráficamente ciertas propiedades de los conjuntos y ayudarnos a ganar intuición. Por ejemplo, la contención $A \subset B$ la dibujamos como se muestra en la figura (donde también dibujamos el ejemplo concreto en que $A = \{1, 5, 7, 12\}$ y $B = \{1, 5, 7, 9, 12, 13, 18\}$)



Cardinalidad

- Decimos que un conjunto A es *finito* si podemos contar cuántos elementos tiene y decimos que A es *infinito* si no es finito (esta es una definición informal, cuando veamos funciones podremos dar una definición precisa).
- La *cardinalidad* de un conjunto finito A se define como la cantidad de elementos de A y se denota por $|A|$.

Ejemplo

Sean

$$A = \{1, 7, 19\}, \qquad B = \{2, 5, A, 39\}, \qquad C = \mathbb{N}, \qquad D = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

- $|A| = 3$.
- $|B| = 4$. Atención $|B| \neq 6$.
- C es un conjunto infinito.
- $|D| = 5$.

Teorema

Si A y B son dos conjuntos finitos, se tiene:

1. $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$;
2. $A \subset B \implies |A| < |B|$.

Demostración (informal).

Probamos 1) y dejamos 2) como ejercicio. Si tenemos que contar los elementos del conjunto B, del cual A es subconjunto, podemos empezar contando los elementos que están en A y luego seguir con los elementos de B que no están en A. Claramente obtendremos que $|B|$ es un número mayor o igual que $|A|$. $\square$

Corolario

$|\varnothing| = 0$.

Demostración.

Ejercicio. $\square$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

- También tiene sentido hablar de la cantidad de elementos de un conjunto infinito (y comparar estas cardinalidades), pero es una teoría más complicada que no estudiaremos todavía.
- A modo de ejemplo, tratemos de pensar qué cardinalidad es más grande, ¿la de $\mathbb{N}$ o la de $\mathbb{Z}$?

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \end{array}$$

- Otros ejemplos más complicados (que no veremos en este curso):
  - $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$
  - $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$
  - $|\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

Conjunto de partes

Ejemplos

¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto $A = \{x, y, z\}$?

- Sabemos que si $B \subseteq A$, entonces $|B| \leq |A| = 3$. Esto nos dice que una buena forma de contar los subconjuntos de A es mirando los subconjuntos de 0, 1, 2 y 3 elementos.
- Subconjuntos de 0 elementos: $\varnothing$
- Subconjuntos de 1 elemento: $\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$
- Subconjuntos de 2 elementos: $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$
- Subconjuntos de 3 elementos: $\{x, y, z\}$
- Luego, A tiene $8 = 2^3$ subconjuntos.

Conjunto de partes

Si A es un conjunto, existe un conjunto $\mathscr{P}(A)$ formado exactamente por los subconjuntos de A. Este conjunto es llamado el *conjunto de partes* de A.

Observación

- Los elementos de $\mathscr{P}(A)$ **no son** elementos de A.
- Para todo A, se tiene que $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ y $A \in \mathscr{P}(A)$.

Teorema

Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^n.$$

Demostración.

Lo veremos más adelante $\square$

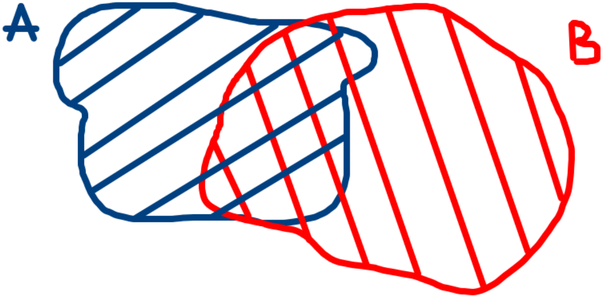
Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos

Definición

Dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto $A \cup B$, que llamaremos *la unión de A y B*, cuyos elementos son los elementos de A y B. Más formalmente,

$$\forall x \, (x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B)).$$



Teorema

Si A, B y C son conjuntos, se tienen.

1. $A = A \cup A$.
2. $A \cup B = B \cup A$.
3. $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.
4. $A \subseteq B \iff A \cup B = B$.
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Demostración.

1. Ejercicio.
2. Ejercicio.
3. Ejercicio.

Demostración (cont.)

4. Para ver $\implies$ tenemos que ver la doble contención.
   Sabemos que $B \subseteq A \cup B$ por la parte 3).
   Para probar que $A \cup B \subseteq B$ empezamos con un elemento $x \in A \cup B$.
   Si $x \in B$ ya está.
   De lo contrario $x \in A$. Pero como $A \subseteq B$, concluimos también que $x \in B$.
   Para ver $\impliedby$ tomamos $x \in A$. Como $x \in A \cup B$ y $A \cup B = B$, sigue que $x \in B$.
   Por lo tanto $A \subseteq B$.
5. Hay que probar la doble contención. Veamos que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ y dejemos como ejercicio la otra inclusión.
   Si $x \in A \cup (B \cup C)$ hay dos posibilidades:
   Caso 1: $x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.
   Caso 2: $x \in B \cup C$. También se abren dos posibilidades:
   - **Subcaso 2a:** $x \in B \implies x \in A \cup B \implies x \in (A \cup B) \cup C$.
   - **Subcaso 2b:** $x \in C \implies x \in (A \cup B) \cup C$.

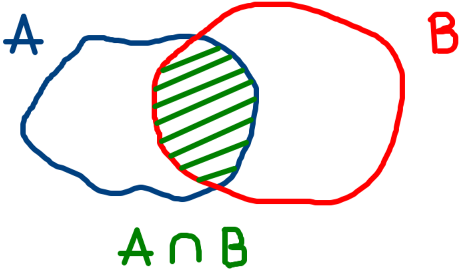
Como estudiamos todos los casos, el teorema queda demostrado. □

Intersección de conjuntos

Definición
Si A y B son dos conjuntos se define su intersección como

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\} = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}.$$

En palabras, $A \cap B$ está formado por los elementos que A y B tienen en común.



Teorema

Si A, B y C son conjuntos, se tienen.

1. $A = A \cap A$.
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$
4. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$.
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Demostración.

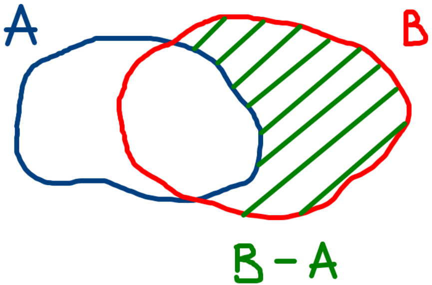
Ejercicio. $\square$

Diferencia de conjuntos

Definición

Si A y B son dos conjuntos, el *conjunto diferencia* $B - A$ está formado por los elementos de B que no están en A. En símbolos,

$$B - A = \{x \in B : x \notin A\}.$$



Notación alternativa

A veces el conjunto diferencia también se denota por

$$B \setminus A$$

Teorema

Sean A, B y C tres conjuntos. Se cumplen:

1. $A - A = \varnothing$.
2. $A - \varnothing = A$.
3. $B - A \subseteq B$. *En particular,* $\varnothing - A = \varnothing$.
4. $B - A = A - B \implies A = B$.
5. $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$.

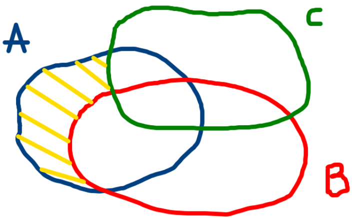
Demostración.

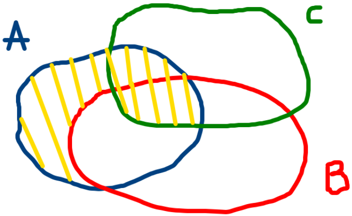
Dejamos las primeras tres como ejercicio.

4. Haremos $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
   Sea $x \in A$ y supongamos por el absurdo que $x \notin B$.
   Sigue que $x \in A - B$, pero por hipótesis $A - B = B - A$. Luego $x \in B - A$ y por ende $x \notin A$, absurdo. Por lo tanto $A \subseteq B$.
   Análogamente vemos que $B \subseteq A$.

Demostración (cont.)

5. Empezamos con un elemento $x \in (A - B) - C$.
   Tenemos que $x \in (A - B)$ y $x \notin C$.
   Esto dice que $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. En particular $x \notin B - C$.
   Concluimos que $x \in A - (B - C)$. $\square$



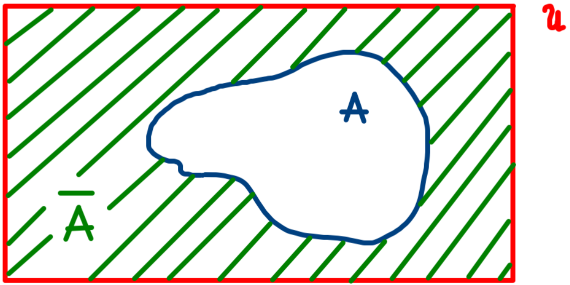


Complemento (relativo)

Definición

Dado un conjunto $A \subseteq \mathscr{U}$, definimos el complemento de A (relativo al conjunto universal $\mathscr{U}$) como el conjunto

$$\overline{A} = \mathscr{U} - A = \{x \in \mathscr{U} : x \notin A\}.$$



Otras notaciones frecuentes

- A^c
- $\complement A$
- $\complement_{\mathscr{U}} A$
- A'

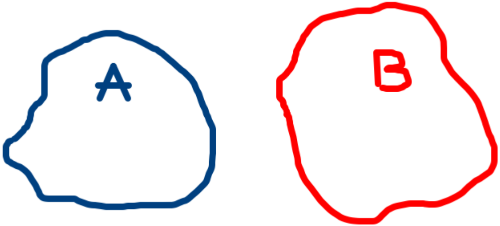
Definición

Dos conjuntos A y B se dicen *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo/Ejercicio

Dado $A \subseteq \mathscr{U}$,

- $A \cap \overline{A} = \varnothing$, es decir, A y su complemento son disjuntos.
- $A \cup \overline{A} = \mathscr{U}$.



Leyes de la teoría de conjuntos

Teorema

Dados tres conjuntos A, B, C tomados de un universo $\mathcal{U}$, se tienen:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ *(ley del doble complemento)*
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *(leyes de De Morgan)*
3. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ *(leyes conmutativas)*
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(leyes asociativas)*
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *(leyes distributivas)*
6. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$ *(leyes idempotentes)*

7. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$ (leyes de identidad)
8. $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (B \cup A) = A$ (leyes de absorción)

Demostración.

- Ejercicio (algunas pruebas ya las hicimos).
- Tratar de dibujar en cada caso el diagrama de Venn que represente cada ley de la teoría de conjuntos. $\square$

Observación

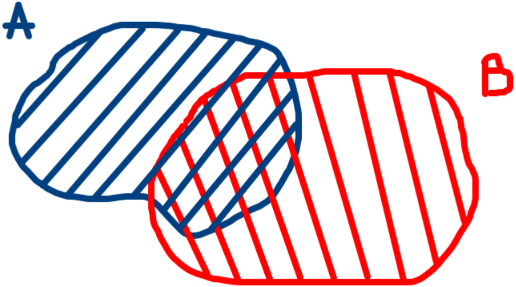
Hay una similitud muy grande entre las leyes de la teoría de conjuntos y las leyes de la lógica. Esta analogía no es casual y se estudia en materias más avanzadas.

Ejemplo

El cardinal de la unión de dos conjuntos finitos A y B se puede calcular como

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

En efecto, la cantidad de elementos en $A \cup B$ se puede obtener sumando la cantidad de elementos en A y la cantidad de elementos en B, observando que de este modo estaríamos contando dos veces los elementos de $A \cap B$, por eso tenemos que restar el término $|A \cap B|$ en la fórmula (1).



Corolario

Si A y B son dos conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

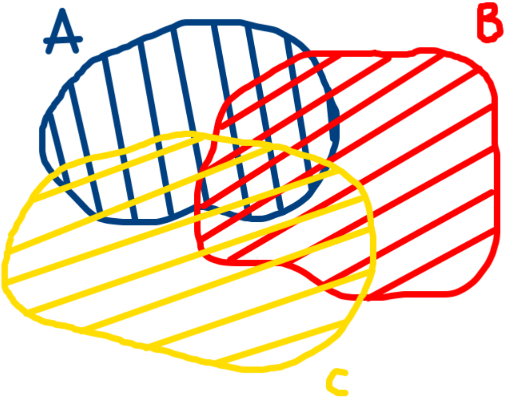
Demostración.

Sigue del ejemplo anterior, observando que como en este caso $A \cap B = \varnothing$ tenemos que $|A \cap B| = 0$. $\square$

Ejemplo

Si A, B y C son tres conjuntos finitos, entonces

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



Ejemplo (cont.)

El resultado anterior también lo podemos demostrar usando lo que ya sabemos sobre el cardinal de la unión de dos conjuntos $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$ y las leyes de la teoría de conjuntos:

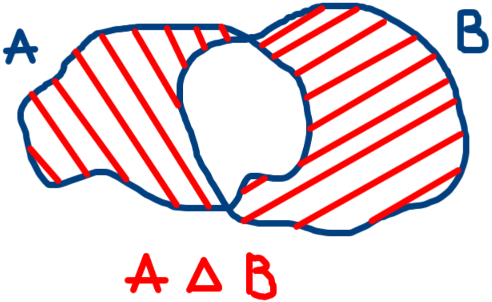
$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| \\
&= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\
&= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\
&\qquad\qquad - [|A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)|] \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}
$$

Diferencia simétrica

Definición

La *diferencia simétrica* entre los conjuntos A y B es el conjunto

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$



Teorema

Dados los conjuntos A, B y C se tiene:

1. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
3. $A \triangle B = B \triangle A$.
4. $A \triangle \varnothing = A$.
5. $A \triangle A = \varnothing$. *Más aún,* $A \triangle B = \varnothing \iff A = B$.
6. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.

Demostración.

Veamos la primera afirmación a modo de ejemplo y dejemos las demás como ejercicio para practicar. Antes de seguir con la prueba, enunciamos el siguiente resultado auxiliar (cuya demostración queda como ejercicio).

Lema

Si X *e* Y *son tomados de un conjunto universal* $\mathcal{U}$, *entonces* $X - Y = X \cap \overline{Y}$.

Demostración del Teorema (cont.)

Supongamos que $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Por un lado tenemos que

$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} (A - B) \cup (B - A) \overset{\text{Lema}}{=} (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
(A \cup B) - (A \cap B) &= (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} && \text{Lema} \\
&= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && \text{De Morgan} \\
&= [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cup [(A \cup B) \cap \overline{B}] && \text{Distr.} \\
&= [\overline{A} \cap (A \cup B)] \cup [\overline{B} \cap (A \cup B)] && \text{Conmut.} \\
&= [(\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup (\overline{B} \cap B)] && \text{Distr.} \\
&= [\varnothing \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(\overline{B} \cap A) \cup \varnothing] && \text{Clase ant.} \\
&= (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) && \text{Neutro} \\
&= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) && \text{Conmut.} \quad \square
\end{aligned}$$

¿Qué es un par ordenado?

- IMPORTANTE: los conjuntos no están ordenados: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Dicho de otro modo, si tenemos un conjunto con dos elementos $A = \{a, b\}$ no podemos saber cuál es el primer elemento y cual es el segundo elemento de A. De hecho, ni siquiera tiene sentido preguntarnos esto.
- En un par *ordenado*, importa el orden de los dos elementos.

Definición

El *par ordenado* de los elementos a y b se define como

$$(a, b)$$

Se dice que a (resp. b) es el *primer* (resp. *segundo*) elemento del par ordenado (a, b).

Notación

A veces también decimos que a (resp. b) es la *primera* (resp. *segunda*) *coordenada* del par ordenado (a, b).

Igualdad de pares ordenados

Definición

Dados a, b, c, d tenemos que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d.$$

Importante

- el par ordenado (a, b) se construye a partir de los elementos a y b;
- el primer elemento de (a, b) es a;
- el segundo elemento de (a, b) es b.

Producto cartesiano

Definición

Dados dos conjuntos A y B, el *producto cartesiano* $A \times B$ se define como el conjunto de todos los posibles pares ordenados en los cuales la primer coordenada es un elemento de A y la segunda un elemento de B:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplo

- El plano se define como el producto cartesiano de dos rectas

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

- El espacio tridimensional se puede definir como el producto cartesiano

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

  Observar que también tendría sentido definir $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. De hecho, en la práctica identificaremos $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ y simplemente usaremos *ternas ordenadas*

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- Se trabaja similarmente con $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \ldots, \mathbb{R}^n, \ldots$

Uniones e intersecciones generalizadas

Unión generalizada

Definición

Si $\mathscr{F}$ es un conjunto de conjuntos, existe un conjunto $\bigcup \mathscr{F}$, llamado la *unión de* $\mathscr{F}$, cuyos elementos son exactamente los elementos de todos los conjuntos que conforman $\mathscr{F}$. En símbolos

$$x \in \bigcup \mathscr{F} \iff \exists (A \in \mathscr{F}),\, x \in A$$

Ejemplo

$$\bigcup \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4, 5\}\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Otras notaciones

Existen notaciones más amigables para las uniones arbitrarias.

- Si $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathcal{F}$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \\ &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algún } i = 1, 2, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

- Si I es un conjunto de índices y $\mathcal{F} = \{A_i : i \in I\}$ denotamos la unión $\bigcup \mathcal{F}$ por

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in \mathcal{U} : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\}.$$

- Caso particular, cuando $I = \mathbb{N}$, se suele denotar

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$$

Importante

A veces la notación de subíndices presenta dificultades cuando recién empezamos a usarla. Hay que tener en cuenta que lo importante es el conjunto I del cual se toman los índices, y no la letra particular $i \in I$ que usemos para denotarlos. Por ejemplo, si $I = \mathbb{N}$ tenemos que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \qquad \text{etc.}$$

Ejemplo/Ejercicio

- Si A es un conjunto, entonces $\bigcup \mathscr{P}(A) = A$.
- Si $\mathscr{F}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup \mathscr{F} = \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A$.

Intersecciones arbitrarias

Análogamente a la uniones arbitrarias, podemos definir la intersección arbitraria de una familia de conjuntos.

Definición

Si $\mathscr{F}$ es un conjunto de conjuntos, el conjunto $\bigcap \mathscr{F}$, llamado *la intersección de* $\mathscr{F}$, es el conjunto cuyos elementos son exctamente los elementos que están en todos los conjuntos que conforman $\mathscr{F}$ a la vez. En símbolos

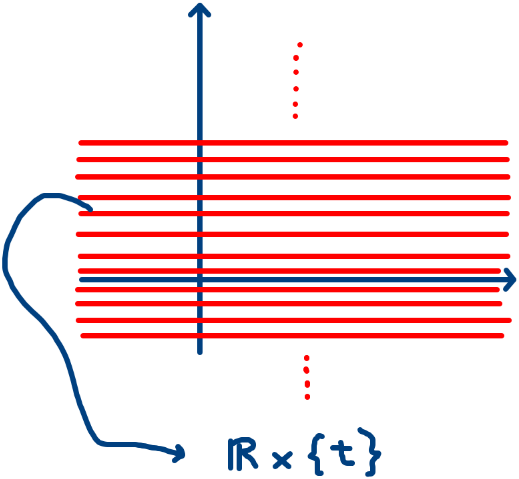
$$x \in \bigcap \mathscr{F} \iff \forall (A \in \mathscr{F}),\, x \in A.$$

Notaciones alternativas

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$.
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in \mathscr{U} : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$.

Ejemplo

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \mathbb{R} \times \{t\}$$



Ejemplo/Ejercicio

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$I_n = [-n, n] = \{x \in \mathbb{R} : -n \leq x \leq n\}.$$

Probar que,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, n] = \mathbb{R}, \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} [-n, n] = [-1, 1].$$