Universidad Católica del Uruguay

Probabilidad y Estadística Aplicada

Tarea 1

25 de Abril de 2025

Estudiantes:
Franco Filardi (5.507.925-6)
Stefano Francolino (5.482.263-4)
Mateo Hernandez (5.565.681-8)
Agustin Pose (5.386.051-8)

Tabla de contenido

1. Metodología de trabajo

Para la resolución de la presente tarea, se adoptó una metodología que combinó análisis teórico, simulación computacional y fundamentación estadística. Las etapas del trabajo fueron las siguientes:

1. **Revisión conceptual:** Se analizaron los problemas planteados (Monty Hall, la paradoja del cumpleaños y el test médico) desde una perspectiva teórica.
2. **Modelado matemático:** Se formularon las soluciones con base en el teorema de Bayes, el principio de probabilidad condicional y el enfoque combinatorio.
3. **Simulación computacional:** Se programaron simulaciones en Python para cada escenario, utilizando estructuras repetitivas para estimar probabilidades empíricas en 100.000 ensayos.
4. **Comparación y validación:** Los resultados obtenidos por simulación fueron contrastados con los valores teóricos correspondientes.

El código fuente completo puede consultarse en el siguiente repositorio de GitHub: https://github.com/francofil/PyE_Tarea1

1. Parte 1: Problema de Monty Hall

1.1 Introducción

El problema de Monty Hall es un problema de probabilidad inspirado en un viejo concurso de televisión llamado “Let ’s Make a Deal”. El problema consiste en que un concursante tiene delante tres puertas, detrás de una de ellas hay un auto nuevo y en las otras dos hay cabras, el concursante debe adivinar en cuál puerta está el vehículo.

Sin embargo, una vez el concursante elige una de las puertas, Monty Hall (El presentador que sabe que hay detrás de cada puerta) abre una de las puertas donde haya una cabra (si las dos puertas no elegidas por el concursante tienen una cabra, Monty Hall abre una al azar) y le da la opción al concursante de cambiar la puerta que eligió por la otra puerta que está cerrada. Por ello podríamos preguntarnos ¿Cambiar de puerta puede influir en las chances del concursante de ganar el auto?

1.2 Análisis de estrategias

Para analizar el impacto de cada estrategia sobre las probabilidades de ganar el auto, se considera lo siguiente:

Estrategia sin cambio de puerta:

Si el participante decide no cambiar la puerta que eligió inicialmente, su probabilidad de ganar el auto depende únicamente de haber seleccionado correctamente desde un principio. Como hay tres puertas y sólo una contiene el auto, la probabilidad de acierto en la elección inicial es de:

$$P(Ganar\ sin\ cambiar) = \frac{1}{3}$$

Estrategia con cambio de puerta:

En caso de que el participante opte por cambiar su elección después de que Monty revele una cabra, gana si su elección inicial fue incorrecta. Como la probabilidad de haber elegido mal al comienzo es de $\frac{2}{3}$, cambiar de puerta le da la posibilidad de corregir esa elección errónea, lo que incrementa sus probabilidades de ganar a:

$$P(Ganar\ cambiando) = \frac{2}{3}$$

1.3 Simulación empírica

Para confirmar los resultados teóricos, se realizó una simulación computacional de 100.000 repeticiones. Se obtuvo una probabilidad empírica de aproximadamente 66,7% al cambiar de puerta y 33,3% al mantener la elección inicial. Estos resultados coinciden con las probabilidades teóricas previstas.

1.4 Conclusión

Comparando ambas estrategias, se observa que cambiar de puerta duplica las probabilidades de ganar el auto en comparación con mantener la elección original. Por lo tanto, desde un enfoque empírico y probabilístico, se concluye que la estrategia de cambiar de puerta es claramente preferible.

Este resultado ha sido ampliamente estudiado en el ámbito de la probabilidad, en parte porque contradice la intuición de muchas personas. Intuitivamente, luego de que el presentador revelara una de las puertas con una cabra, podría pensarse que las dos puertas restantes tienen igual probabilidad (50%) de contener el auto. Sin embargo, este razonamiento es incorrecto.

En la elección inicial, la probabilidad de haber seleccionado la puerta con el auto es de $\frac{1}{3}$, mientras que la probabilidad de haber elegido una puerta con una cabra es de $\frac{2}{3}$. Este reparto de probabilidades no se modifica cuando Monty abre una puerta con una cabra, ya que dicha acción está condicionada por su conocimiento previo.

Por lo tanto, si el participante eligió mal al principio (lo que ocurre el 66,7% de las veces), cambiar lo llevará a la puerta correcta. Si eligió bien (33,3%), cambiar lo haría perder. Por ende, cambiar de puerta otorga una probabilidad de éxito del doble que quedarse.

Este resultado ha sido confirmado por razonamientos teóricos y simulaciones computacionales, y demuestra que una correcta interpretación del problema permite superar la intuición y adoptar una estrategia óptima: cambiar siempre de puerta (Economipedia, s.f.; Coditramuntana, 2023; Tierney, 1991).

2. Parte 2: Paradoja del Cumpleaños

2.1 Introducción

La paradoja del cumpleaños plantea la siguiente cuestión: ¿cuál es la probabilidad de que, en un grupo de personas, al menos dos compartan el mismo día de cumpleaños? Aunque intuitivamente se cree que esta probabilidad es baja, los resultados matemáticos muestran que con grupos relativamente pequeños (por ejemplo, 23 personas) ya se supera el 50% de probabilidad.

Para modelar el problema se asume que todos los cumpleaños están distribuidos uniformemente entre 365 días y que nadie cumple años el 29 de febrero.

2.2 Resultados empíricos

Se realizó una simulación con 100.000 repeticiones para cada valor de m: 10, 20, 30, 40 y 50 personas. Los resultados empíricos obtenidos fueron:

- **Para m = 10:**
  - $P_{empírica} = \frac{11755}{100000} = 11,8\%$
- **Para m = 20:**
  - $P_{empírica} = \frac{41221}{100000} = 41,2\%$
- **Para m = 30:**
  - $P_{empírica} = \frac{70579}{100000} = 70,6\%$
- **Para m = 40:**
  - $P_{empírica} = \frac{89154}{100000} = 89,2\%$
- **Para m = 50:**
  - $P_{empírica} = \frac{97058}{100000} = 97,1\%$

¿Eran esperables estos resultados?

Estos resultados, aunque contraintuitivos, eran esperables desde una perspectiva estadística. A medida que el valor de aumenta, también crecen las probabilidades acumuladas de que ocurra al menos una coincidencia entre los cumpleaños. Esto se debe a que hay muchas más combinaciones posibles entre pares de personas a medida que el grupo crece.

2.3 Comparación teórica

La probabilidad teórica de que al menos dos personas compartan cumpleaños se obtiene mediante el complemento del evento en que todas tengan cumpleaños distintos:

$$P(coincidencia) = 1 - (\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \dots \frac{365-m+1}{365})$$

Esta fórmula corresponde a la conocida **paradoja del cumpleaños**, donde, contra la intuición común, las probabilidades de coincidencia aumentan rápidamente con pocos individuos.

A partir del cálculo teórico, se obtienen las siguientes probabilidades:

- Para m = 10 → 11.7%
- Para m = 20 → 41.1%
- Para m = 30 → 70.6%
- Para m = 40 → 89.1%
- Para m = 50 → 97.0%

Comparación con los resultados empíricos

Al comparar estos valores teóricos con los empíricos obtenidos en la simulación (ver Parte 3), se observa una gran similitud:

m	Probabilidad Empírica	Probabilidad Teórica
10	11.8%	11.7%
20	41.2%	41.1%
30	70.6%	70.6%
40	89.2%	89.1%
50	97.1%	97.0%

2.4 Conclusión

Al comparar los resultados empíricos con los valores teóricos, se observa una gran coincidencia. Esto confirma que las simulaciones fueron correctamente implementadas y refuerzan la idea de que, en fenómenos aleatorios, las repeticiones tienden a aproximarse a la probabilidad real (ley de los grandes números).

Además, esta paradoja muestra cómo los resultados estadísticos pueden diferir significativamente de la intuición, ya que la mayoría de las personas subestiman la probabilidad de coincidencias en grupos pequeños (Datademia, 2024; Psicología y Mente, s.f.).

3. Parte 3: Problema del test de enfermedad

3.1 Introducción

En este problema se plantea una situación médica en la que una enfermedad afecta a sólo 1 de cada 10.000 personas. Se ha desarrollado un test para detectar esta enfermedad, que posee una alta precisión, aunque no es perfecto.

- Probabilidad de falso positivo: 0,02 (2%)
- Probabilidad de falso negativo: 0,01 (1%)

Se selecciona una persona al azar en la población, se le realiza el test y el resultado es positivo. El objetivo es determinar cuál es la probabilidad de que efectivamente esa persona tenga la enfermedad, aplicando el teorema de Bayes.

3.2 Cálculo teórico

Se realizó el cálculo exacto de la probabilidad solicitada aplicando el teorema de Bayes. Debido a que estos cálculos fueron efectuados manualmente, se decidió incorporar el desarrollo en formato de imagen. A continuación se presenta dicha imagen:

Figura 1: Cálculo Teórico

$P(E) \rightarrow$ probabilidad de que una persona tenga la enfermedad: $1/10.000 = 0{,}0001$

$P(E^c) \rightarrow$ probabilidad de que NO tenga la enfermedad: $1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$

$P(\oplus | E) \rightarrow$ probabilidad de que el test de $\oplus$ dado que la persona está enferma: $0{,}99$

$P(\oplus | E^c) \rightarrow$ test $\oplus$ dado que la persona NO está enferma: $0{,}02$

$$P(E|\oplus) = \frac{P(\oplus|E) \cdot P(E)}{P(\oplus)^{*}}$$

$$P(E|\oplus) = \frac{0{,}99 \cdot 0{,}0001}{0{,}020097}$$

$$P(E|\oplus) = 0{,}0492 \sim \boxed{0{,}492\%}$$

$$^{*}\; P(\oplus) = P(\oplus|E) \cdot P(E) + P(\oplus|E^c) \cdot P(E^c)$$

$$0{,}99 \cdot 0{,}0001 + 0{,}02 \cdot 0{,}9999$$

$$0{,}000099 + 0{,}01998$$

$$P(\oplus) = 0{,}020097$$

3.3 Análisis del resultado e intuición

El resultado obtenido no es completamente intuitivo, ya que contradice la expectativa de que un test positivo garantiza casi con certeza la presencia de la enfermedad. A pesar de la alta precisión del test (99% de verdaderos positivos), la probabilidad de que una persona con resultado positivo esté realmente enferma es baja.

Esto se debe a la baja prevalencia de la enfermedad en la población. En una muestra grande, la mayoría de los positivos provienen de personas sanas debido a los falsos positivos. Por lo tanto, la proporción de positivos verdaderos es pequeña.

Este fenómeno es un ejemplo clásico de la falacia de la probabilidad base y muestra cómo una baja prevalencia puede afectar drásticamente la interpretación de un test. Aunque el test sea confiable, si la condición es muy rara, la mayoría de los positivos seguirán siendo falsos.

Este fenómeno es ampliamente tratado en estudios sobre diagnóstico médico y probabilidad condicional (AcademiaCartaBlanca, s.f.; Gaussianos, s.f.).

3.4 Conclusión

Se concluye que, en contextos con enfermedades de baja prevalencia, incluso un test con alta precisión puede arrojar una baja probabilidad de diagnóstico verdadero. Este análisis destaca la importancia de considerar las probabilidades previas en la interpretación de resultados médicos y de utilizar enfoques estadísticos rigurosos como el teorema de Bayes.

5. Conclusión general

A lo largo de esta tarea se trabajó sobre tres problemas clásicos de la probabilidad que desafían la intuición: Monty Hall, la paradoja del cumpleaños y el test de enfermedad con baja prevalencia. En todos los casos, se evidenció que el análisis estadístico y las simulaciones permiten comprender fenómenos que, a primera vista, resultan sorprendentes.

El problema de Monty Hall mostró cómo cambiar de elección puede duplicar las probabilidades de ganar. La paradoja del cumpleaños reveló cómo las coincidencias son más frecuentes de lo que se espera, y el análisis del test médico destacó la importancia de considerar la probabilidad base antes de interpretar un resultado positivo.

Estos ejemplos demuestran el poder de la probabilidad aplicada para desentrañar situaciones de la vida real y la utilidad de herramientas como el teorema de Bayes, las simulaciones por computadora y el análisis crítico de resultados.

Bibliografía

- AcademiaCartaBlanca. (s.f.). *Explicación del Teorema de Bayes: fórmula y ejemplos*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://academiacartablanca.es/blog/teorema-de-bayes-probabilidad/
- Coditramuntana. (2023, 15 de marzo). *Descubre la sorprendente Paradoja de Monty Hall y su impacto en la toma de decisiones*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://coditramuntana.com/es/blog/Paradoja-Monty-hall-impacto-en-la-toma-de-decisiones
- Datademia. (2024, 20 de marzo). *La paradoja del cumpleaños: probabilidad, datos y ciberseguridad*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://datademia.es/blog/la-paradoja-del-cumpleanos-probabilidad-datos-y-ciberseguridad
- Economipedia. (s.f.). *Problema de Monty Hall*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://economipedia.com/definiciones/problema-de-monty-hall.html
- Gaussianos. (s.f.). *Bayes y las pruebas de detección de enfermedades*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://www.gaussianos.com/bayes-y-las-pruebas-de-deteccion-de-enfermedades/
- Psicología y Mente. (s.f.). *La paradoja del cumpleaños: qué es, y cómo se explica*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://psicologiaymente.com/cultura/paradoja-cumpleanos
- Tierney, J. (1991, 21 de julio). *Behind Monty Hall's doors: Puzzle, debate and answer?* The New York Times. Recuperado de

https://www.nytimes.com/1991/07/21/us/behind-monty-hall-s-doors-puzzle-debate-and-answer.html

- Wikipedia. (2024, 2 de abril). *Paradoja del cumpleaños*. Recuperado el 22 de abril de 2025, de https://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_del_cumplea%C3%B1os
- Wikipedia contributors. (2024, 2 de abril). *Monty Hall problem*. Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem