ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

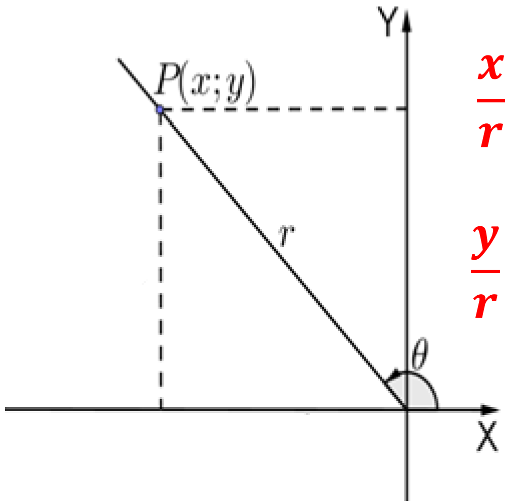
TRIGONOMETRÍA

Tema:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

IDENTIDADES PITAGÓRICAS



$$\frac{x}{r} = \cos\theta$$

$$\frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta$$

Tenemos:

$$x = r\cos\theta \;;\; y = r\operatorname{sen}\theta$$

Por definición de radio vector:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Reemplazando:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\boxed{\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta}$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\boxed{\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta}$$

$$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

IDENTIDADES POR COCIENTE

Del gráfico, por definición tenemos:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\operatorname{sen}\theta}{r\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{r\cos\theta}{r\operatorname{sen}\theta}$$

Luego:

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} \qquad \boxed{\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}$$

IDENTIDADES RECÍPROCAS

Por definición de las razones trigonométricas:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}\theta \csc\theta = 1}$$

$$\boldsymbol{\cos\theta \sec\theta = 1}$$

$$\boldsymbol{\tan\theta \cot\theta = 1}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

UNI 2014 I

Si $\tan^2\alpha = 2\tan^2 x + 1$ halle el valor de $y = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2 x$

A) $\operatorname{sen}^2\alpha$

B) $\cos^2\alpha$

C) $1 + \operatorname{sen}^2\alpha$

D) $\tan^2\alpha$

E) $1 + \cos^2\alpha$

Resolución

Piden:

$$y = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2 x$$

Del dato:

$$\sec^2\alpha - 1 = 2\tan^2 x + 1$$

$$\sec^2\alpha = 2\underbrace{(\tan^2 x + 1)}_{\sec^2 x}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x = 2\cos^2\alpha \ldots (I)$$

En lo que piden:

$$y = \cos^2\alpha + 1 - \cos^2 x$$

Reemplazando (I)

$$y = \cos^2\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha$$

$$y = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\therefore \boldsymbol{y = \operatorname{sen}^2\alpha}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

Estas identidades suelen emplearse para encontrar razones trigonométricas de ángulos desconocidos a partir de la suma o diferencia de dos ángulos notables.

IDENTIDADES BÁSICAS

$$\mathbf{sen(x \pm y) = senx \cdot cosy \pm cosx \cdot seny}$$

$$\mathbf{cos(x \pm y) = cosx \cdot cosy \mp senx \cdot seny}$$

$$\mathbf{tan(x \pm y) = \frac{tanx \pm tany}{1 \mp tanx.\,tany}}$$

Aplicación

Calcular el valor de

$$\sec 22° \sec 23° + \sqrt{2} \tan 22° \tan 23°$$

Resolución

Tenemos que $\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow \mathbf{\cos(22° + 23°) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\cos 22° \cos 23° - \operatorname{sen} 22° \operatorname{sen} 23° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cos 22° \cos 23° - \sqrt{2} \operatorname{sen} 22° \operatorname{sen} 23° = 1$$

Dividimos por $\cos 22° \cos 23°$

$$\mathbf{\sqrt{2} - \sqrt{2} \tan 22° \tan 23° = \frac{1}{\cos 22° \cos 23°}}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2} \tan 22° \tan 23° = \sec 22° \sec 23°$$

$$\therefore \boldsymbol{\sec 22° \sec 23° + \sqrt{2} \tan 22° \tan 23° = \sqrt{2}}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

$\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y$
$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2y$
$\tan x\pm\tan y=\dfrac{\operatorname{sen}(x\pm y)}{\cos x\cdot\cos y}$
$\tan(x+y)=\tan x+\tan y+\tan(x+y)\tan x\tan y$

UNI 2015 I

Al simplificar la expresión

$$\left[\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

se obtiene

A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2(2x)$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}^2(2x)$ C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}\sec(2x)$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\csc(2x)$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolución

$$E=\left[\underbrace{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}_{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$E=\left[\underbrace{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}(-2x)}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}2x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right](1-\operatorname{sen}2x)$$

$$E=-\frac{\sqrt{3}}{2}\underbrace{[1+\operatorname{sen}2x](1-\operatorname{sen}2x)}_{(1-\operatorname{sen}^2 2x)}$$

$$\therefore E=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 2x$$

PROPIEDAD I

Siendo **a** y **b** constantes reales y **x** variable Real

$$\mathbf{asenx + bcosx} = \sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}\,\mathbf{sen(x+\theta)}$$

Donde

$$\mathbf{cos\theta} = \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}} \quad \wedge \quad \mathbf{sen\theta} = \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}$$

Siendo a y b constantes reales, x variable real

$$\underbrace{-\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}_{\text{MÍNIMO}} \leq \mathbf{asenx + bcosx} \leq \underbrace{\sqrt{\mathbf{a^2+b^2}}}_{\text{MÁXIMO}}$$

Si se cumple que

$$\left(\text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 - 5 = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Hallar un valor de x

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{5\pi}{12}$ D) $\frac{\pi}{12}$ E) $\frac{7\pi}{12}$

Resolución

Sea $E = \text{sen}\,2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\Big(\underbrace{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\text{sen}\,2x + \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\cos 2x}_{\text{sen}\frac{\pi}{6}\text{sen}\,2x + \cos\frac{\pi}{6}\cos 2x}\Big)$

Entonces $E = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

Reemplazando en el dato en función de E.

$$E^2 - 5 = \frac{E}{2} \rightarrow \mathbf{2E^2 - E - 10 = 0} \rightarrow (2E-5)(E+2) = 0$$

Como $-2 \leq E \leq 2$ entonces $E = -2 \rightarrow \boldsymbol{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1}$

Luego

$$2x - \frac{\pi}{6} = \pi \qquad \therefore\ \boldsymbol{x = \frac{7\pi}{12}}$$

Aplicación

Hallar el máximo valor de

$$E = (1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$$

A) $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$ C) $3 + \sqrt{2}$

D) $1 + \sqrt{2}$ E) $2 + \sqrt{2}$

Resolución

$$E = (1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$$

$$2\mathrm{E} = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 + \cos x)$$

$$\Longrightarrow \ 2\mathrm{E} = (1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2$$

Se tiene: $-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen} x + \cos x \leq \sqrt{2}$

$$\Longrightarrow \ 2E_{MAX} = \left(1 + \sqrt{2}\right)^2$$

$$\therefore \ \boldsymbol{E_{max}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} + \sqrt{\mathbf{2}}$$

PROPIEDAD II

Si $\alpha+\beta+\theta=180^{o}$

$\Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\theta$

$\Rightarrow \cot\alpha\cot\beta + \cot\alpha\cot\theta + \cot\beta\cot\theta = 1$

PROPIEDAD III

Si $\alpha + \beta + \theta = 90°$

$\Rightarrow \cot\alpha + \cot\beta + \cot\theta = \cot\alpha\cot\beta\cot\theta$

$\Rightarrow \tan\alpha\tan\beta + \tan\alpha\tan\theta + \tan\beta\tan\theta = 1$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe