academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

SEMANA 6

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

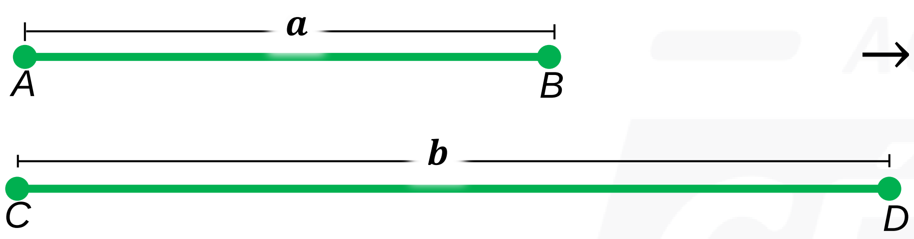
GEOMETRÍA

TEMA: PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

SEMANA 6

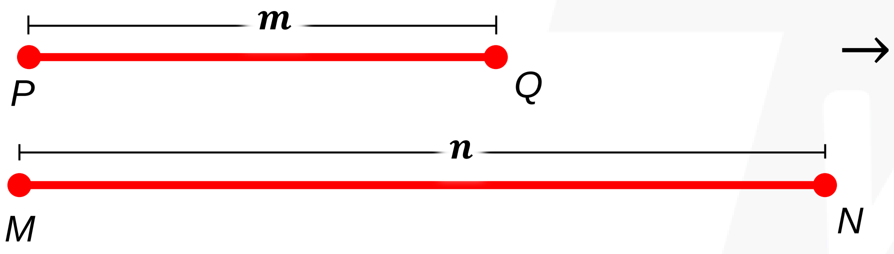
PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS.

Definimos, como razón de dos segmentos, a la comparación entre sus longitudes.



$$\rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$$

Los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están en una razón de a a b



$$\rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{m}{n}$$

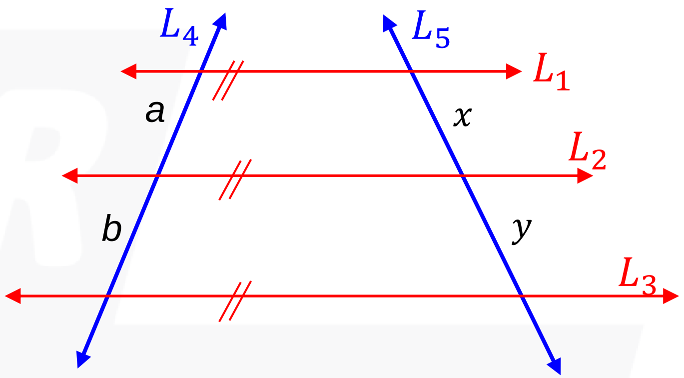
Los $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ están en una razón de m a n

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

→ Los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ por que tienen la misma razón.

TEOREMA DE THALES

Si dos rectas son intersecadas por tres o más rectas paralelas entonces estas últimas determinan segmentos proporcionales sobre las dos rectas dadas respectivamente.

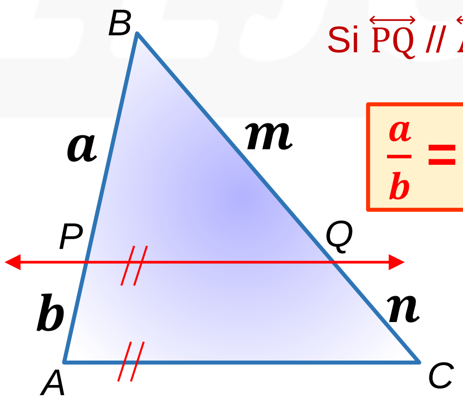


Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}} \quad \boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}}$$

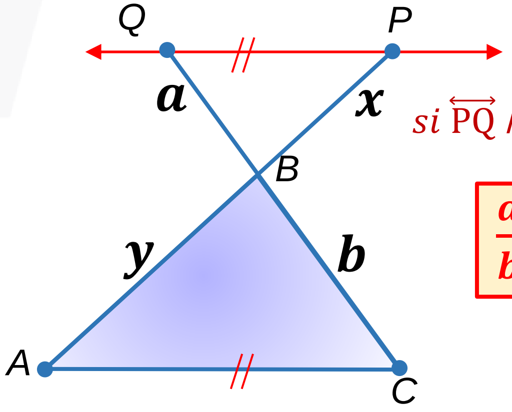
COROLARIO 1



Si $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

COROLARIO 2



si $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

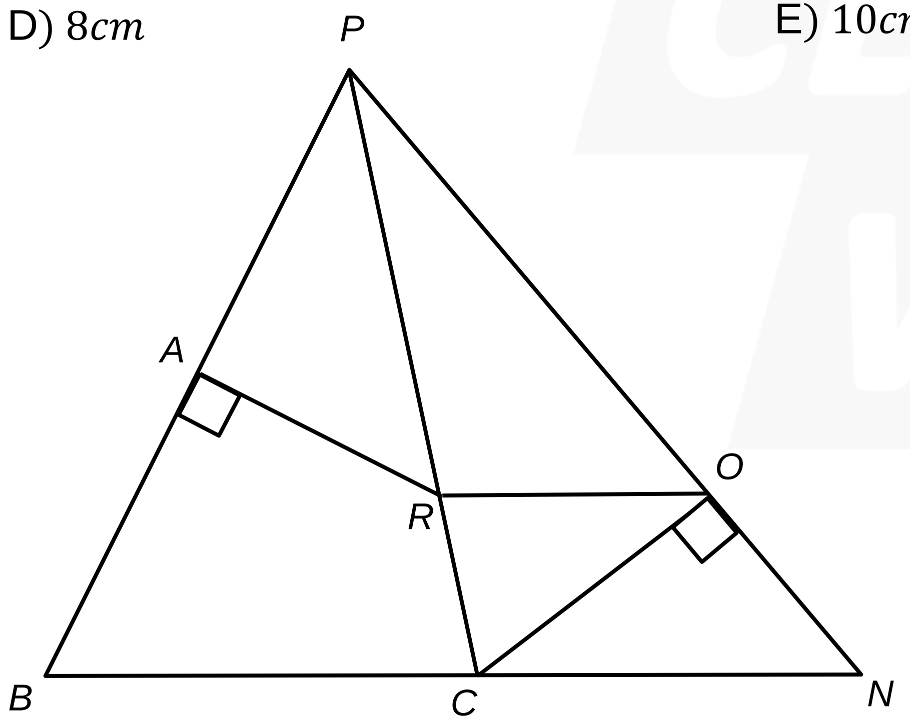
UNI

2018-II

En la figura, determine PO (en cm), tal que $\overline{PC}$ es la bisectriz interior en el triángulo BPN; m∢BNO = m∢ROP;
AP=4cm y ON=3cm.

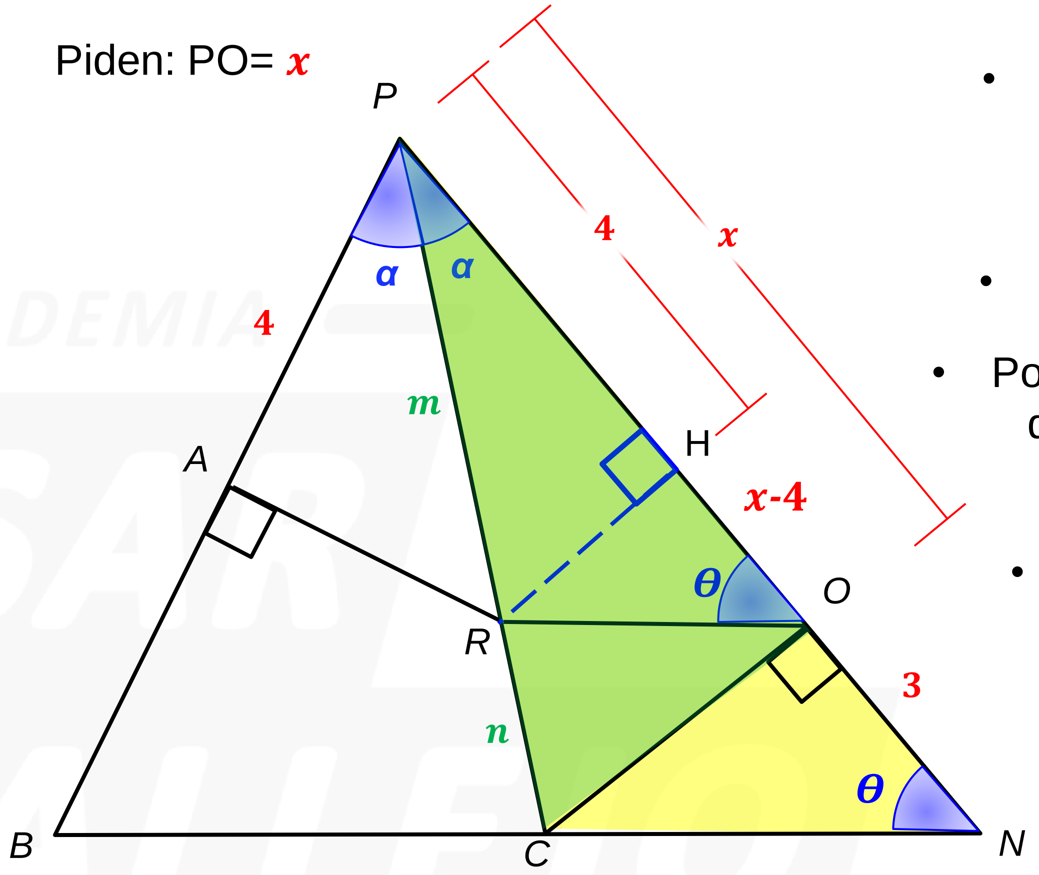
A) $2cm$ B) $4cm$ C) $6cm$

D) $8cm$ E) $10cm$



Resolución

Piden: PO= x



- ΔCPN : Por corolario

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{x}{3}}$$

- Trazamos $\overline{RH} \perp \overline{PO}$

- Por teorema de la bisectriz de un ángulo:

PA = PH = 4

- ΔCPO : Por corolario

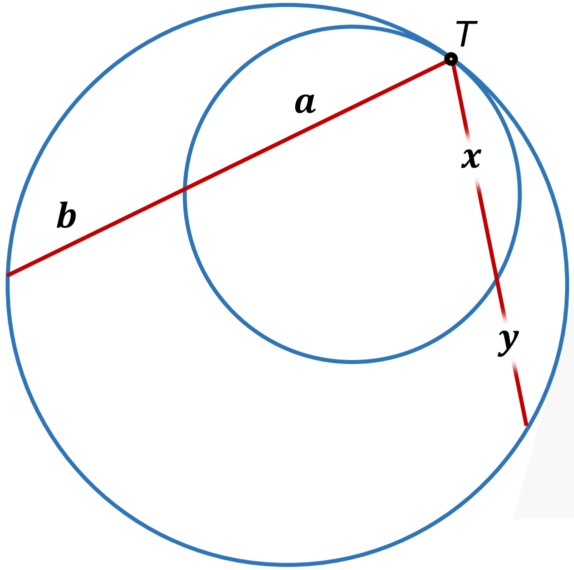
$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{4}{x-4}}$$

- Luego : $\dfrac{x}{3} = \dfrac{4}{x-4}$

$$\boxed{\therefore\ x = 6cm}$$

Clave C

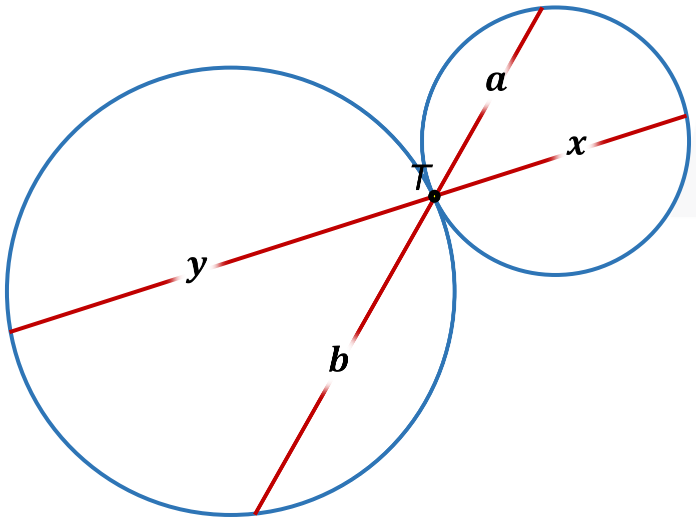
ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL COROLARIO



Si T es punto de tangencia

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{x}{y}}$$



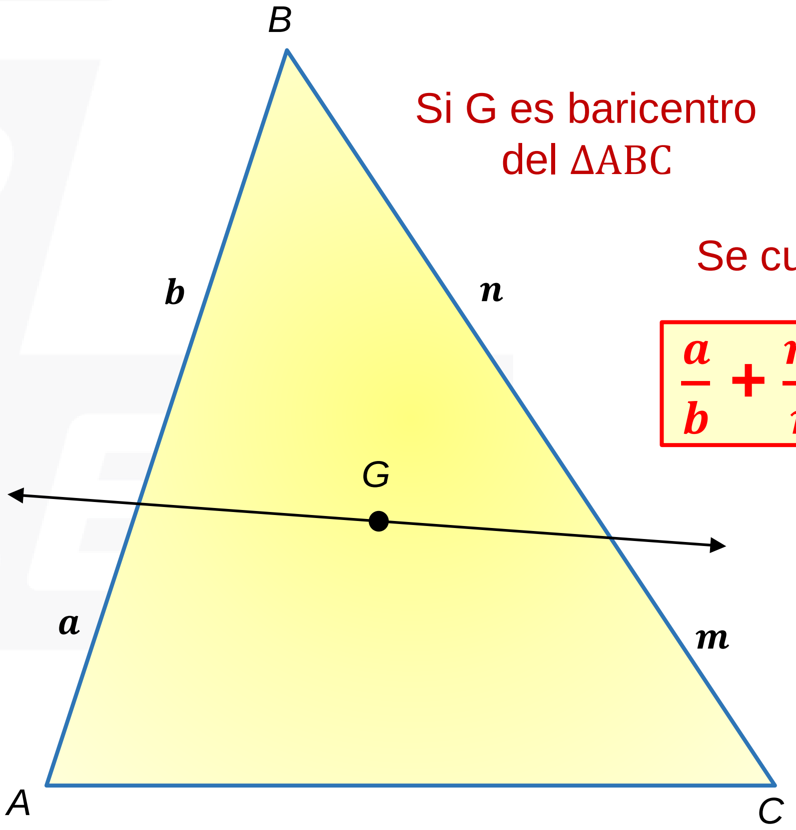
Si T es punto de tangencia

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{x}{y}}$$

Respecto al baricentro

.



Si G es baricentro del ΔABC

Se cumple

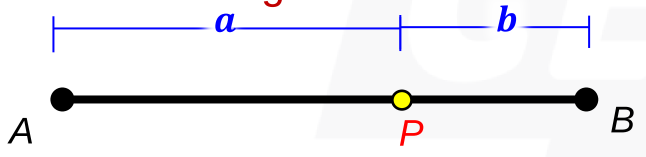
$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=1}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO RESPECTO A UN PUNTO.

Si sobre un segmento dado, o en su prolongación, ubicamos un punto, decimos que este punto determina una razón en dicho segmento.

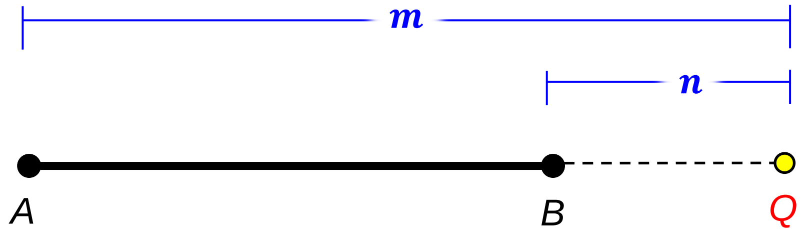
DIVISIÓN INTERNA.

$\dfrac{a}{b}$ Es la razón interna determinada por P en el segmento AB



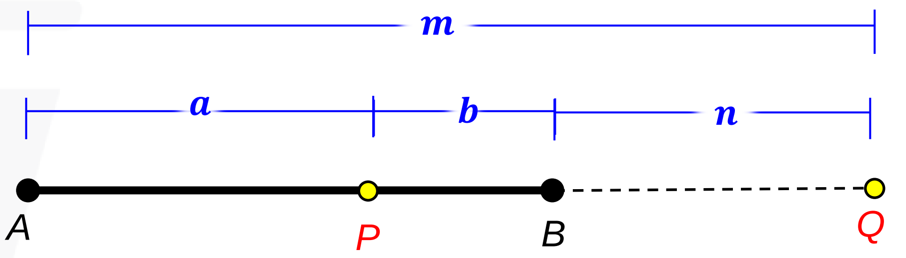
DIVISIÓN EXTERNA.

$\dfrac{m}{n}$ es la razón externa determinada por Q en el segmento AB



DIVISIÓN ARMÓNICA.

P y Q dividen armónicamente a un segmento si lo dividen interna y externamente en una misma razón :



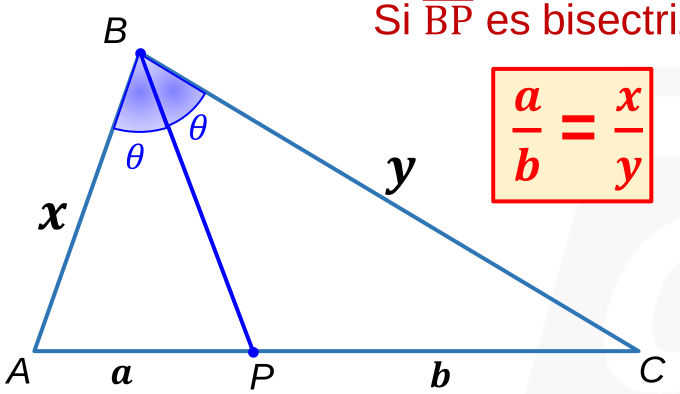
Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ $\Rightarrow$ **P y Q dividen armónicamente a $\overline{AB}$**

NOTA

- **Nota:** A,P,B y Q son puntos armónicos.
- Se dice también que *A*,*P*,*B* y *Q* forman una cuaterna armónica.

PROPORCIÓN DETERMINADA POR BISECTRICES.

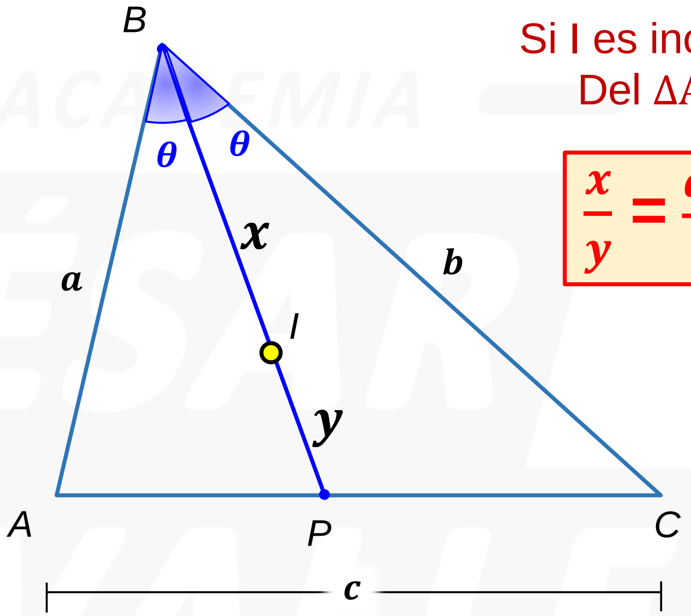
TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR.



Si $\overline{BP}$ es bisectriz

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

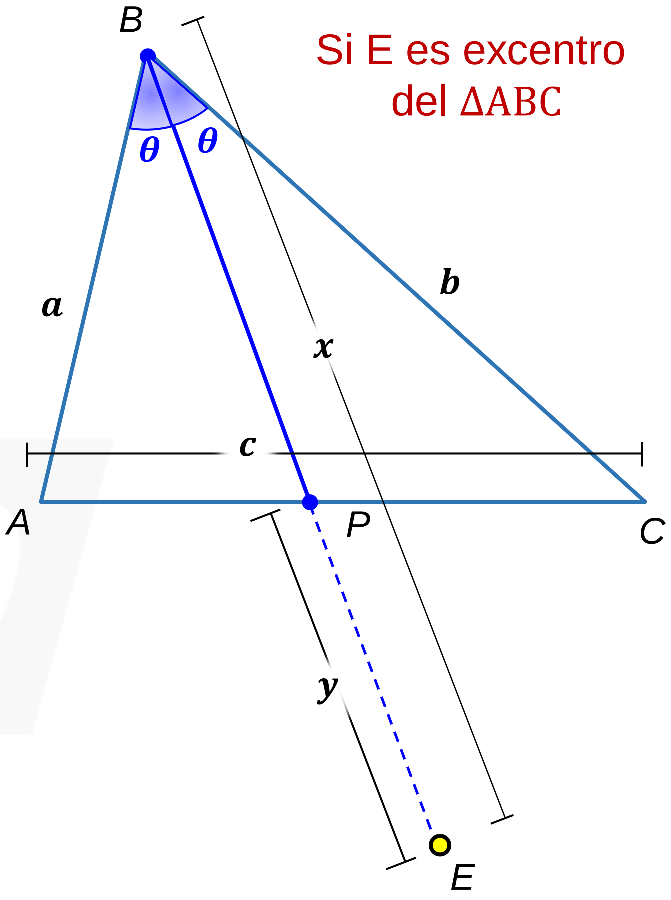
TEOREMA DEL INCENTRO.



Si I es incentro Del ΔABC

$$\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

TEOREMA DEL EXCENTRO.



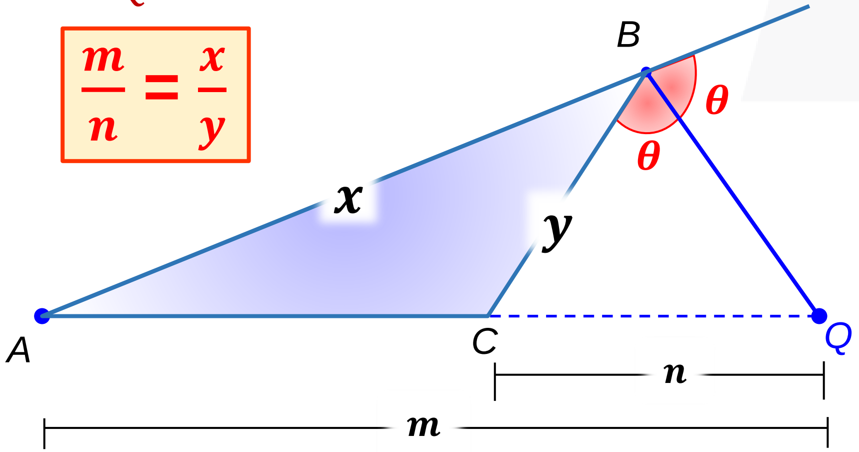
Si E es excentro del ΔABC

$$\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR.

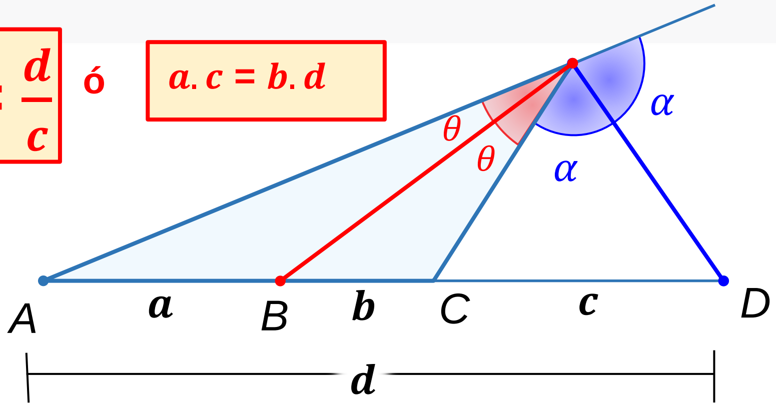
Si $\overline{BQ}$ es bisectriz

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$$



OBSERVACION:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$ ó $$a.c = b.d$$



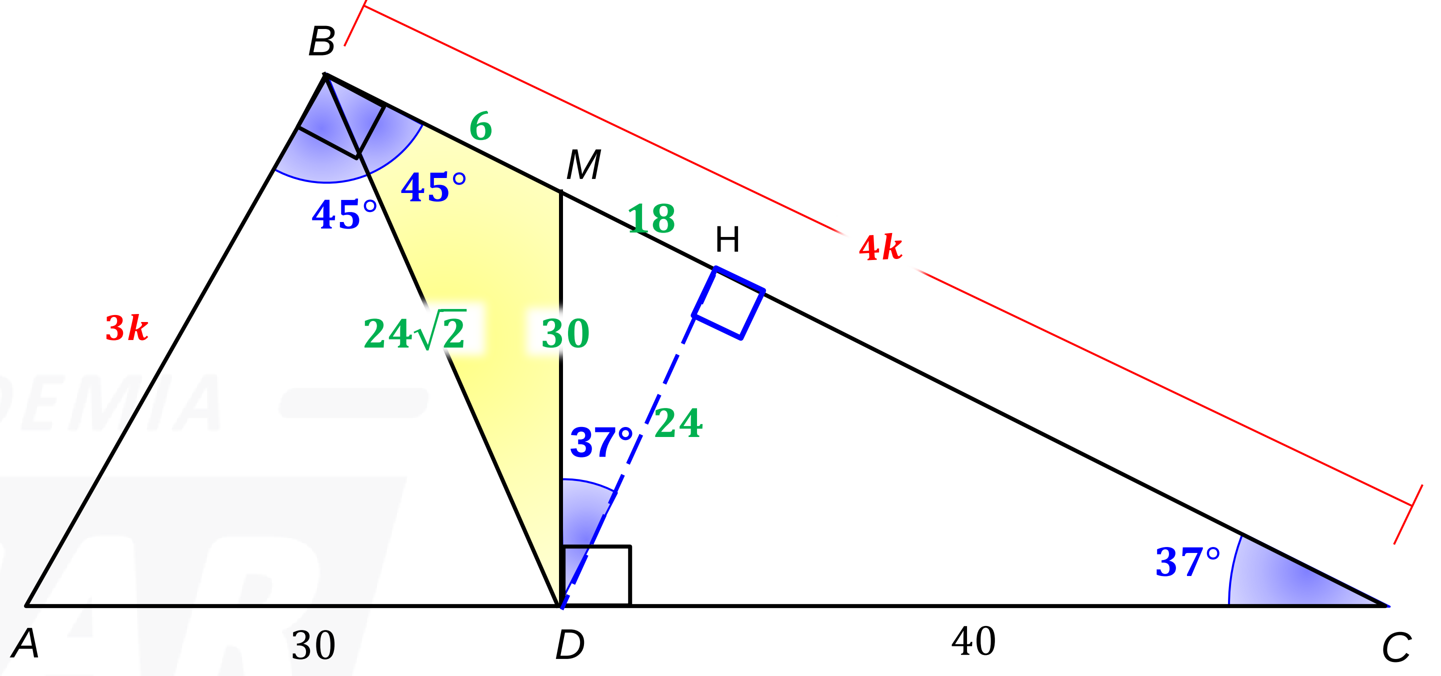
UNI

2008-I

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la bisectriz interior BD. Por D se levanta una perpendicular al segmento AC que interseca a $\overline{BC}$ en M. Si AD=30cm y DC=40cm, entonces la medida del perímetro del triángulo BMD en centímetros es:

A) $30+24\sqrt{2}$ B) $32+24\sqrt{2}$ C) $34+24\sqrt{2}$

D) $35+24\sqrt{2}$ E) $36+24\sqrt{2}$



Resolución

Piden: $2\,p_{\Delta BMD}$

- Por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{3}{4}$$

- Trazamos $\overline{DH} \perp \overline{BC}$

- Ahora aprovecharemos los triángulos notables:
  - ✓ En el ΔDHC: DH=24
  - ✓ En el ΔBHD: BD=$24\sqrt{2}$
  - ✓ En el ΔDMH: MH=18 ; luego: BM=6
  - ✓ En el ΔMHD: MD=30

- Luego : $2\,p_{\Delta BMD}=30+6+24\sqrt{2}$

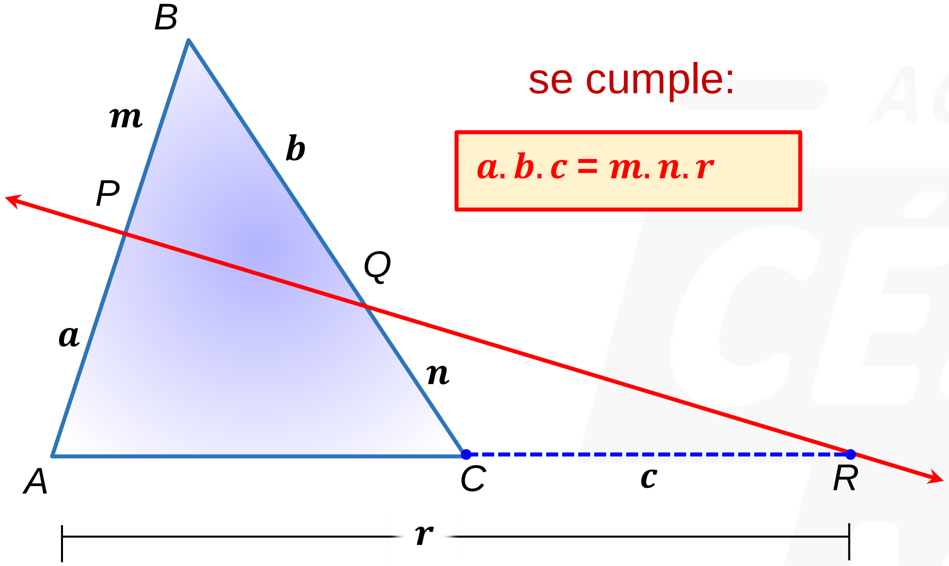
$$\therefore\ 2\,p_{\Delta BMD}=36+24\sqrt{2}$$

Clave E

TEOREMAS.

TEOREMA DE MENELAO.

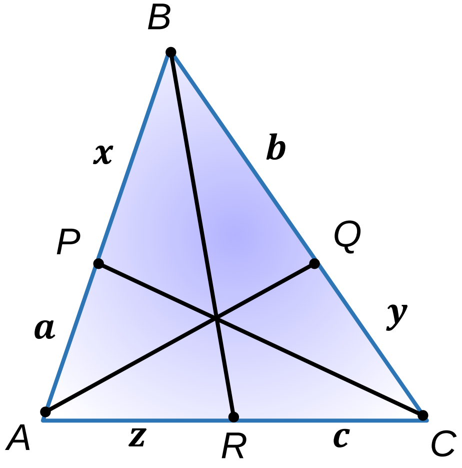
Si se traza una recta secantes a los lados.



se cumple:

$$\boxed{a.b.c = m.n.r}$$

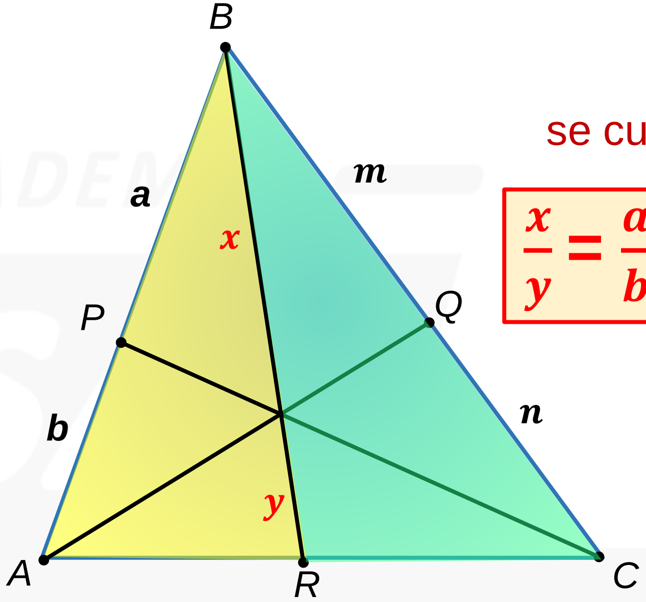
TEOREMA DE CEVA.



Si se trazan cevianas concurrentes. se cumple:

$$\boxed{a.b.c = x.y.z}$$

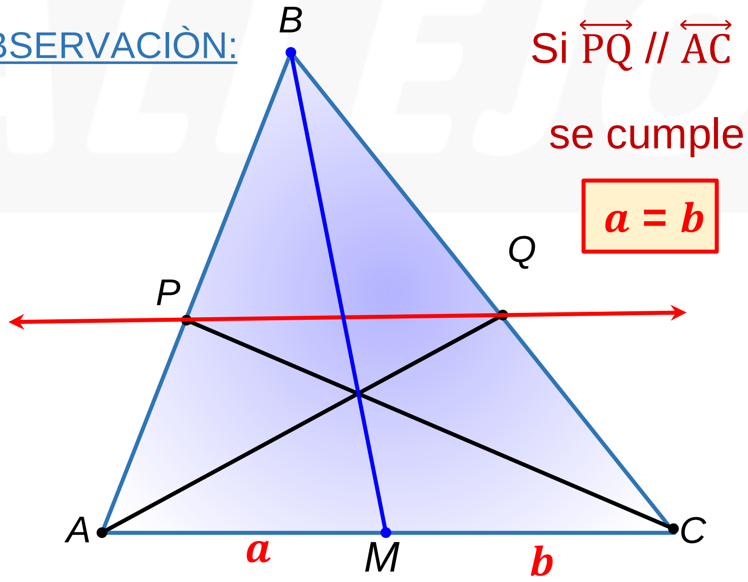
TEOREMA DE VAN AUBEL.



se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n}}$$

OBSERVACIÒN:



Si $\overleftrightarrow{PQ} \, // \, \overleftrightarrow{AC}$

se cumple:

$$\boxed{a = b}$$

Demostración

- Por teorema de Menelao

ΔABR: $b.x.(RC) = a.y.(AC)$

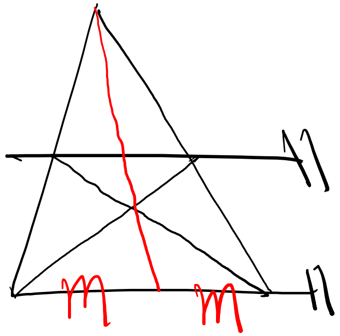
$$\Rightarrow \frac{x.(RC)}{y.(AC)} = \frac{a}{b} \quad \text{..........(I)}$$

ΔCBR: $n.x.(AR) = m.y.(AC)$

$$\Rightarrow \frac{x.(AR)}{y.(AC)} = \frac{m}{n} \quad \text{.........(II)}$$

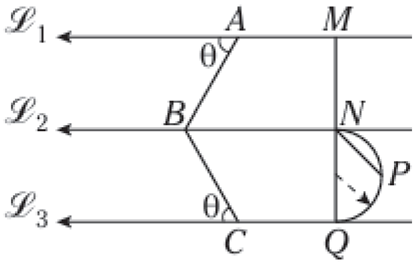
- De (I) + (II)

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n}$$

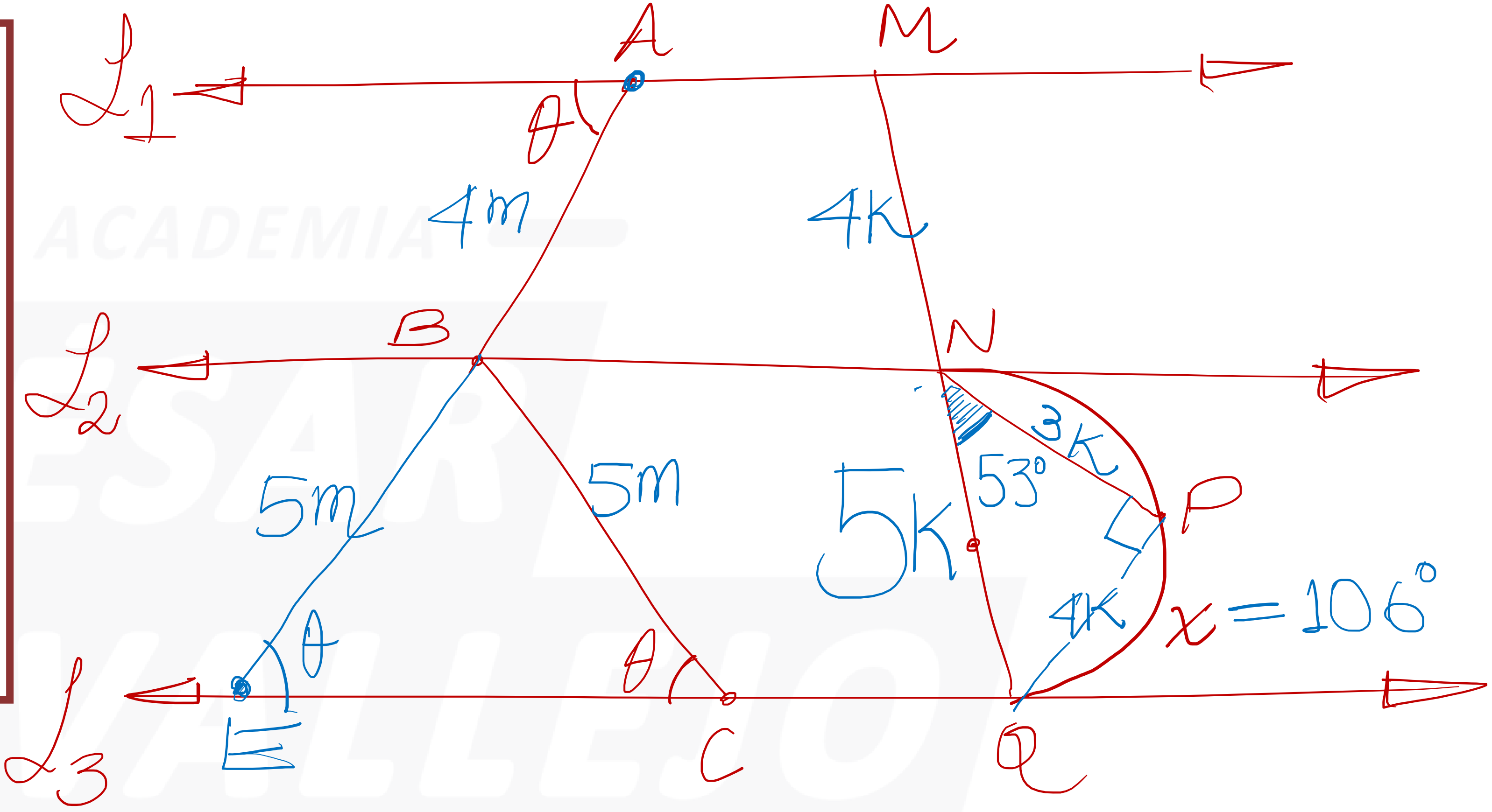


PREGUNTA 1

Según el gráfico, las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son paralelas. Si $5(AB)=4(BC)$ y $3(MN)=4(NP)$, calcule la m$\overset{\frown}{PQ}$.



A) 60°
B) 74°
C) 90°
D) 32°
E) 106°



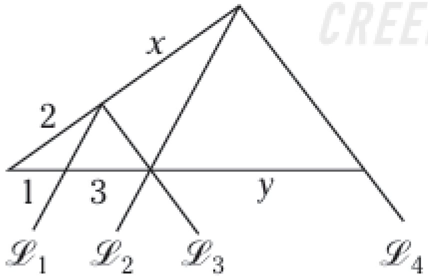
PIDEN: m$\overset{\frown}{PQ}=x$

△NPQ: Notable de 37° y 53°

∴ $\boxed{x=106°}$

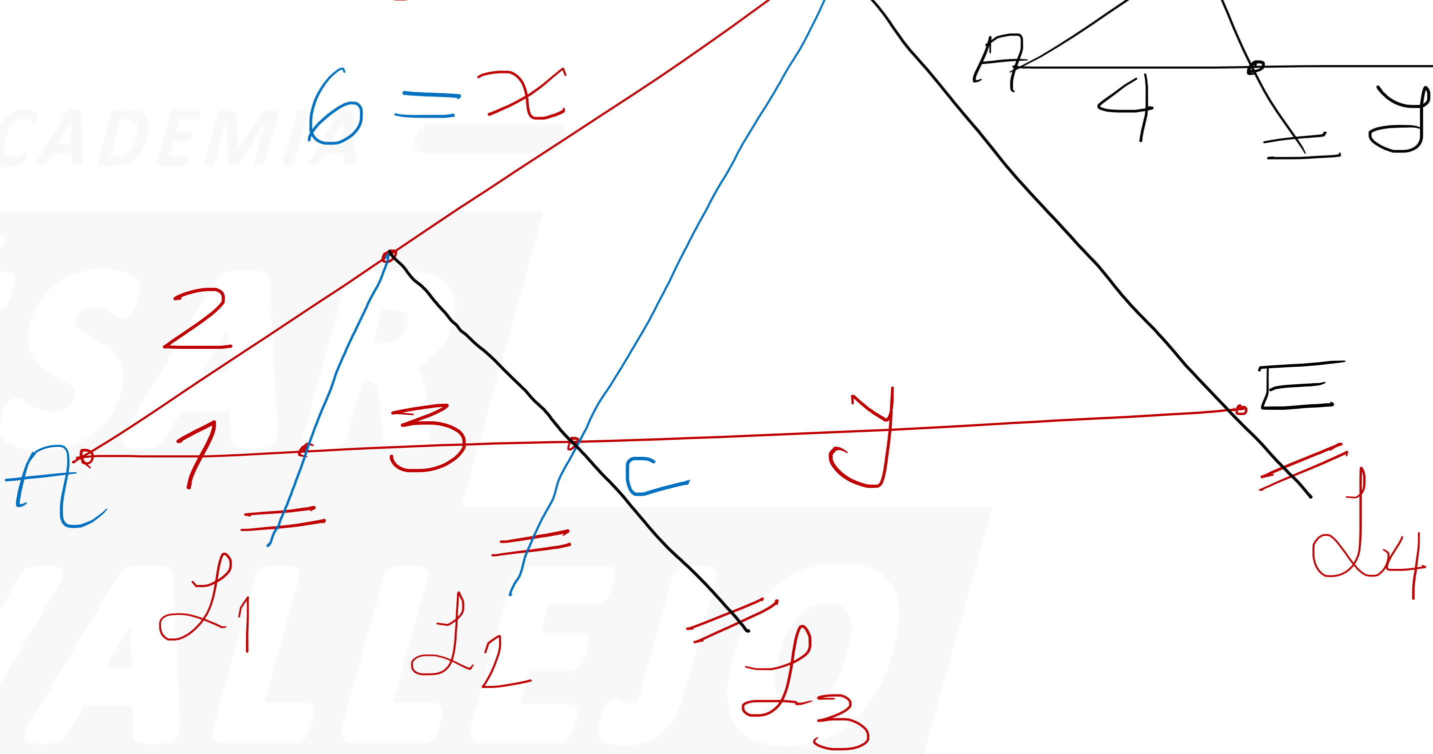
PREGUNTA 2

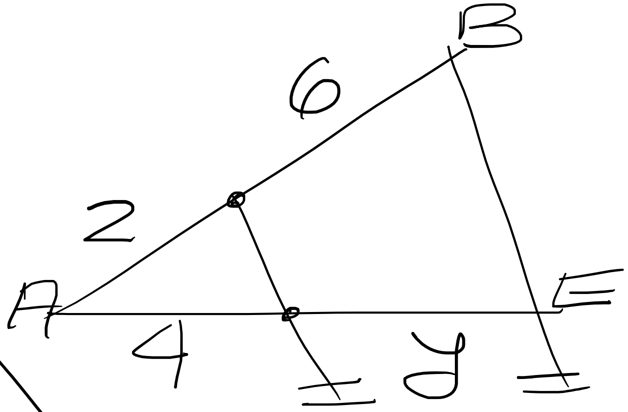
Los segmentos $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son paralelos entre sí, y los segmentos $\mathscr{L}_3$ y $\mathscr{L}_4$ también son paralelos entre sí. Halle el valor de $x+y$.



A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

PIDEN: $x+y$





- EN ABC: $\frac{1}{3} = \frac{2}{x}$

$\boxed{x = 6}$

- EN ABE: $\frac{2}{6} = \frac{4}{y}$

$\boxed{y = 12}$

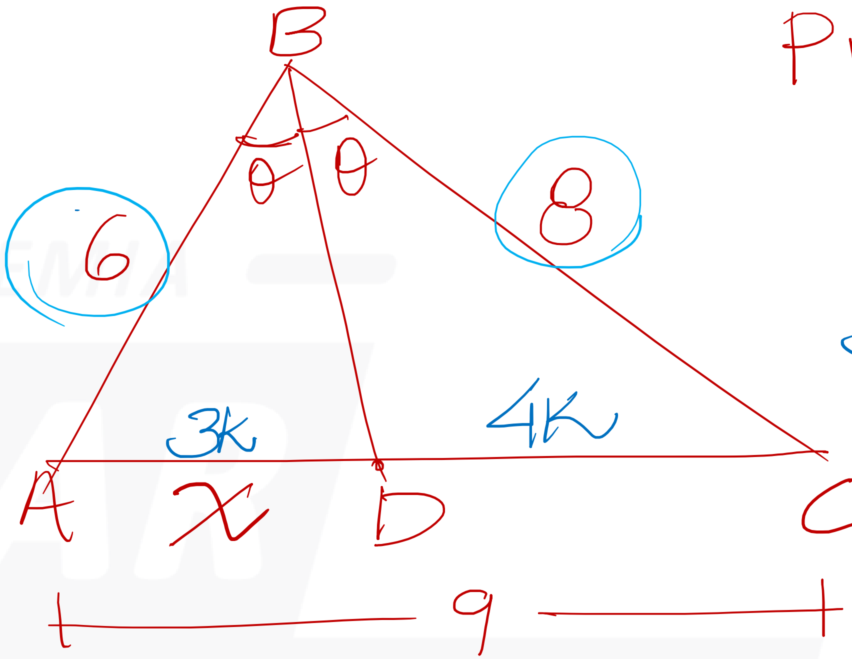
$\therefore x + y = 18$

PREGUNTA 3

En un triángulo ABC, $AB=6$, $BC=8$ y $AC=9$; se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Calcule AD.

~~A) $\frac{27}{7}$~~ B) 4 C) 3

D) 7 E) $\frac{25}{4}$



PIDEN: $x = 3K$

Pero:

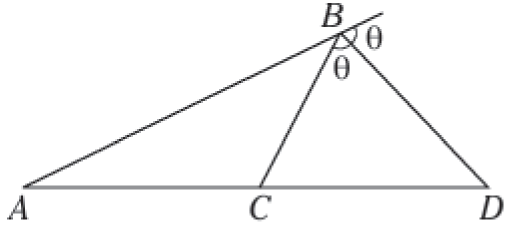
$3K + 4K = 9$

$K = \frac{9}{7}$

$\therefore \boxed{x = \frac{27}{7}}$

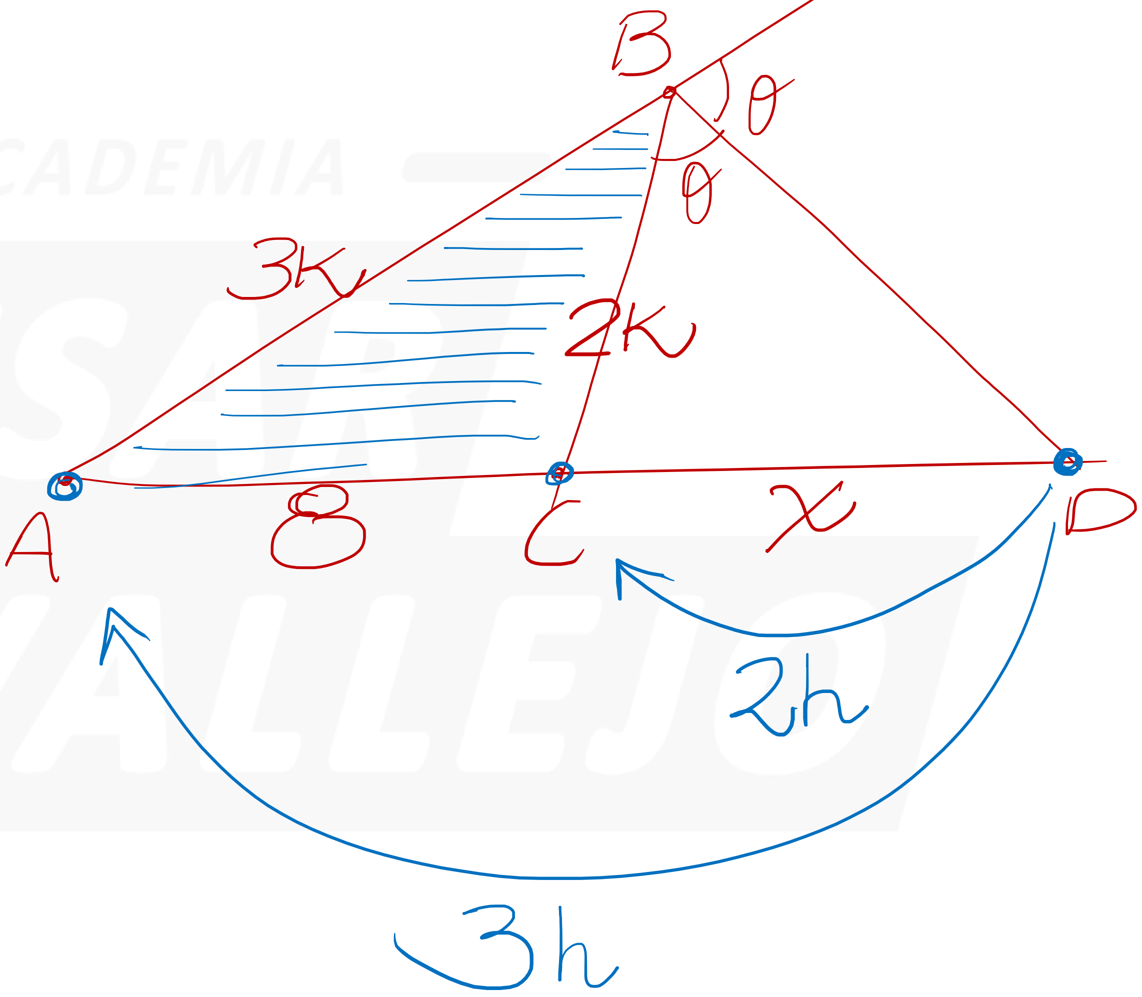
PREGUNTA 4

Del gráfico, $\boxed{AB=\frac{3}{2}(BC)}$ y $AC=8$. Calcule CD.



A) 11
B) 13
C) 8
D) 16
E) 14

PIDEN: $CD = x = 2h$

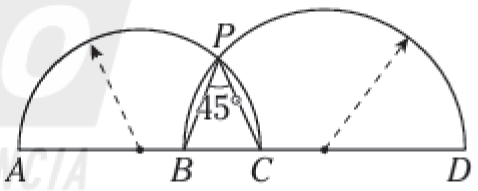


Se obs: $h = 8$

$\therefore \boxed{x = 16}$

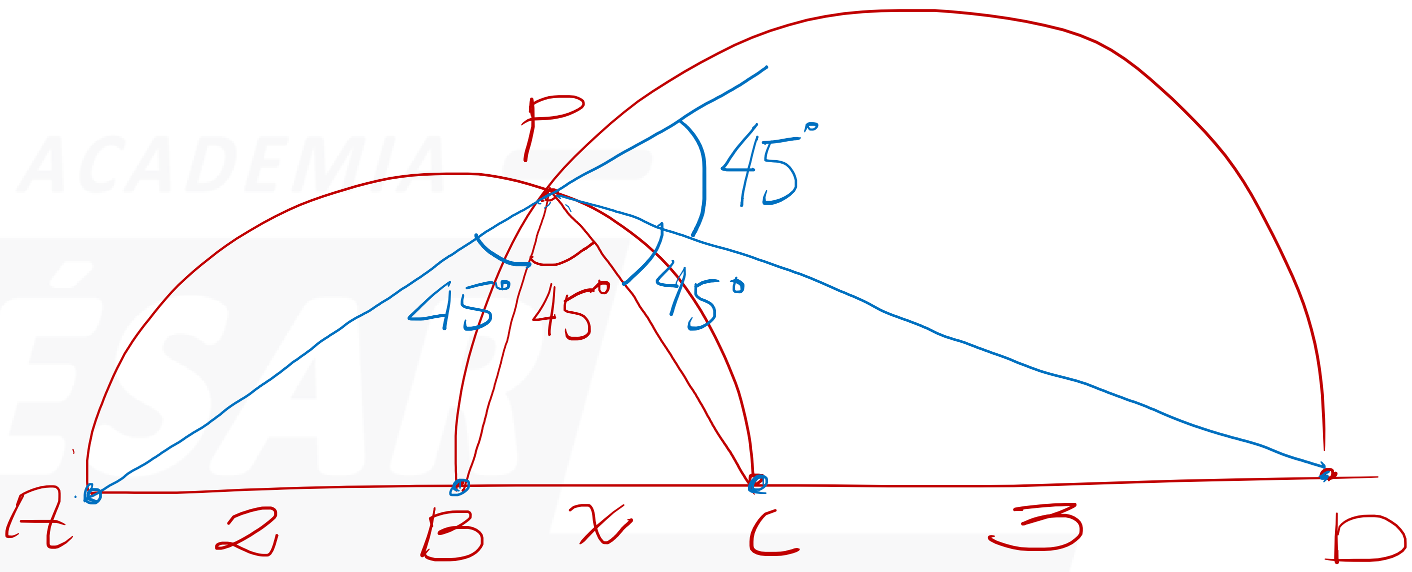
PREGUNTA 5

De acuerdo al gráfico, calcule BC si $AB=2$ y $CD=3$.

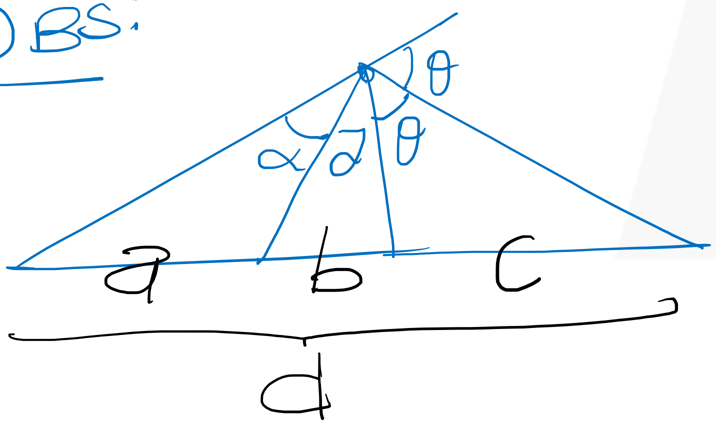


A) ~~1~~ B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

PIDEN: x



OBS:



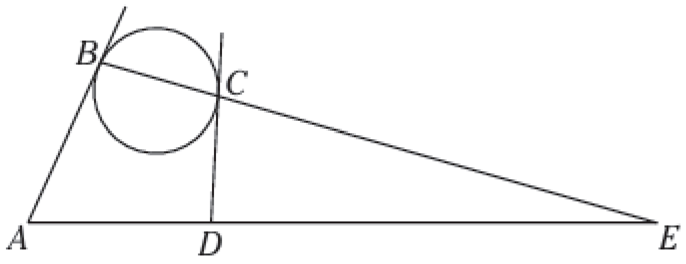
$$\boxed{ac = bd}$$

POR OBS: $2(3) = x(5+x)$

$$\therefore \underline{x = 1}$$

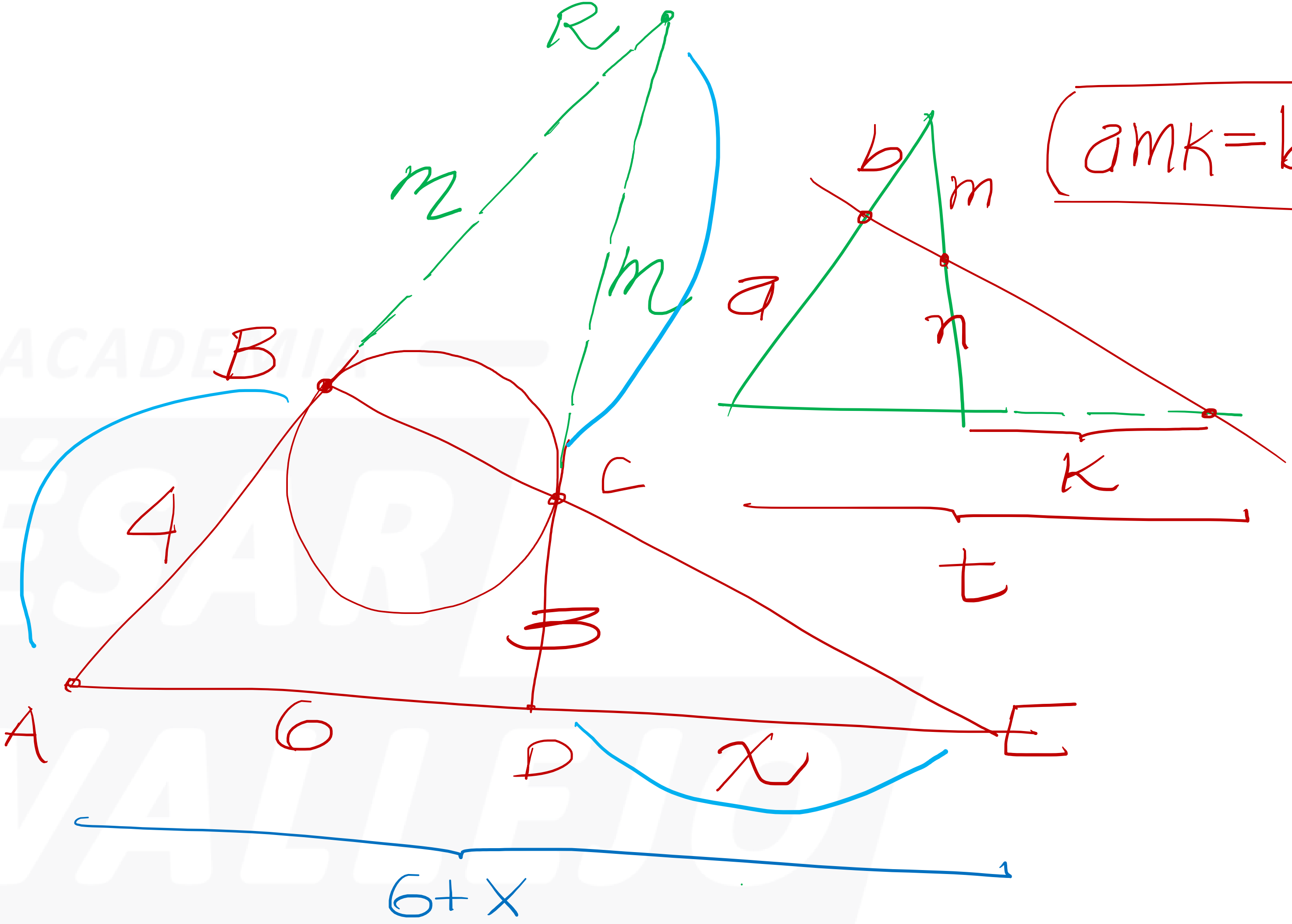
PREGUNTA 6

Si B y C son puntos de tangencia, $AD=2(CD)=6$ y $AB=4$, halle DE.



A) 12 B) 14 C) 16

D) 18 E) 24



$\boxed{amk=bnt}$

PIDEN: x

• △ARD: Teo. Menelao

$4.m.x = m.3(6+x)$

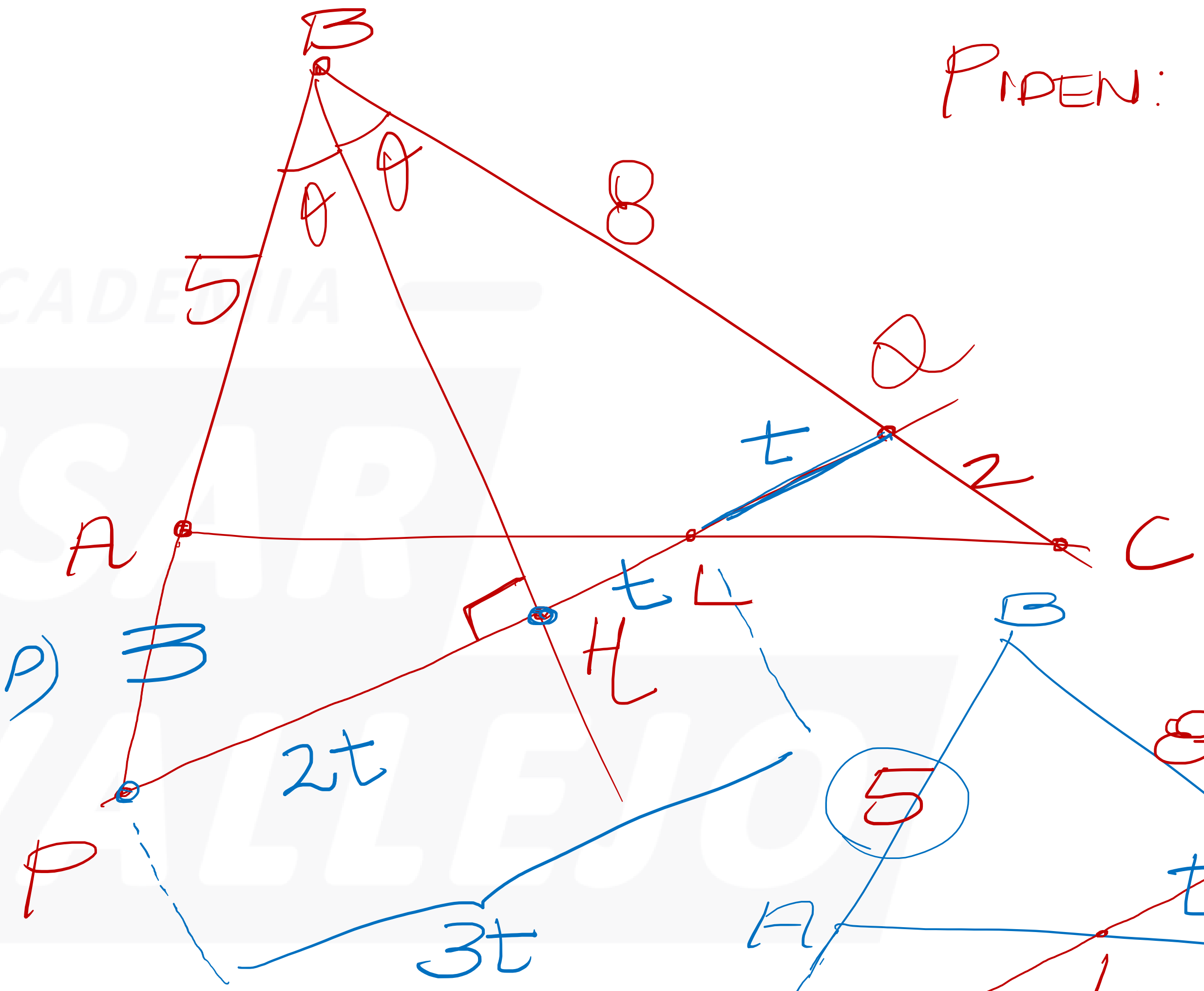
$4x = 18+3x$ $\therefore \boxed{x=18}$

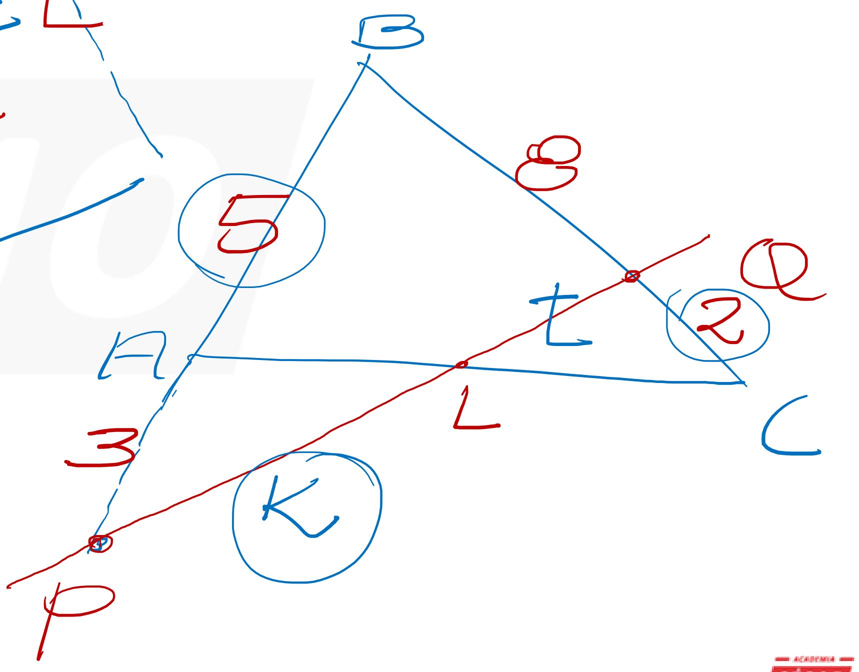
PREGUNTA 7

En un triángulo ABC, se sabe que $AB=5$, Q es un punto de $\overline{BC}$, de modo que $BQ=8$ y $QC=2$. Además P es un punto en la prolongación de $\overline{BA}$, de modo que la recta PQ resulta ser perpendicular a la bisectriz interior $\overline{BH}$ del triángulo ABC, considere que H en $\overline{PQ}$. Si dicha recta PQ interseca a $\overline{AC}$ en L, calcule HL/LQ.

~~A) 1~~ B) 2 C) 3
D) 0,3 E) 2,3

PIDEN: $\dfrac{HL}{LQ}$





- $\triangle PBQ$: ISÓSCELES $(BQ=BP)$

  $\rightarrow AP=3$

- $\triangle PBQ$: TEO MENELAO

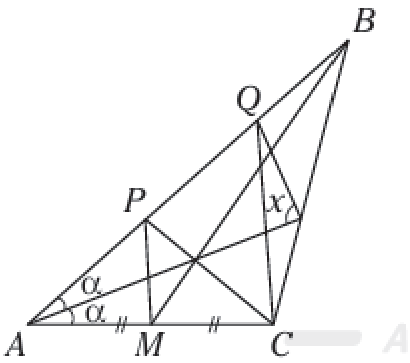
  $5 \cdot K \cdot 2 = 3 \cdot t \cdot 10$

  $K = 3t$

$\therefore \dfrac{HL}{LQ} = \dfrac{t}{t} = \boxed{1}$

PREGUNTA 8

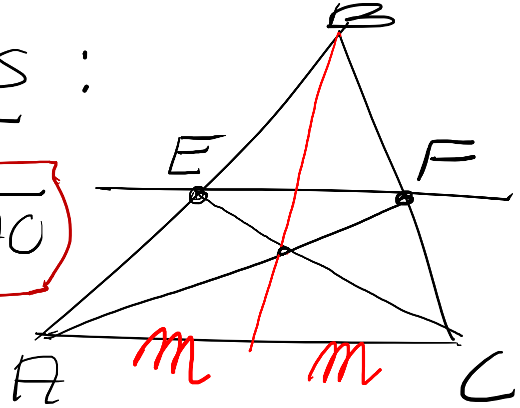
En el gráfico mostrado, $\overline{CQ} // \overline{PM}$. Calcule x.



A) 83°   B) 120°   C) 45°
D) 90°   E) 60°

OBS :

$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$



DATO : $\overline{CQ} \parallel \overline{PM}$

Piden : x

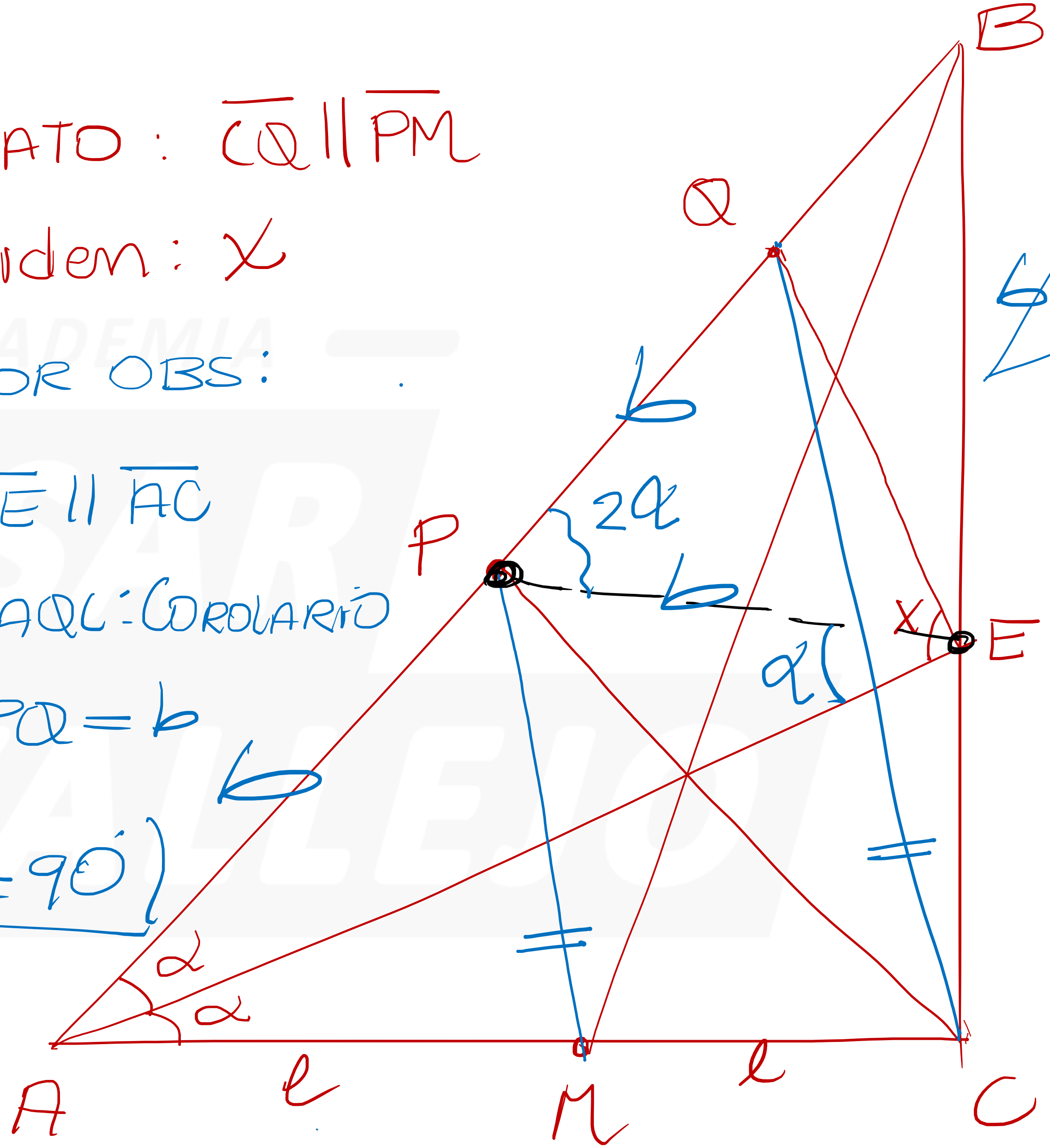
- POR OBS :

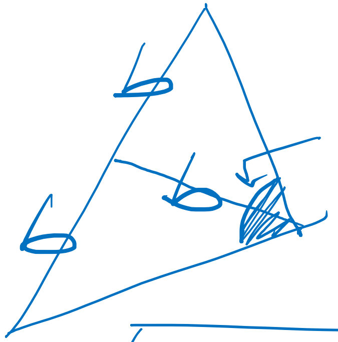
$\overline{PE} \parallel \overline{AC}$

- $\triangle AQC$: COROLARIO

$PQ = b$

$\therefore x = 90°$

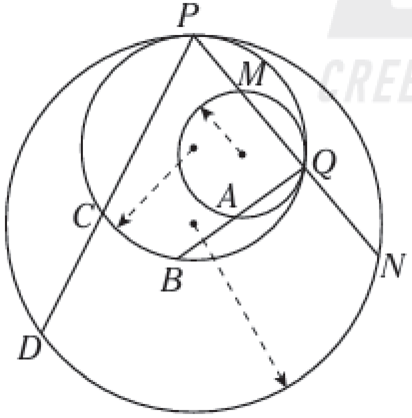




$\boxed{x = 90}$

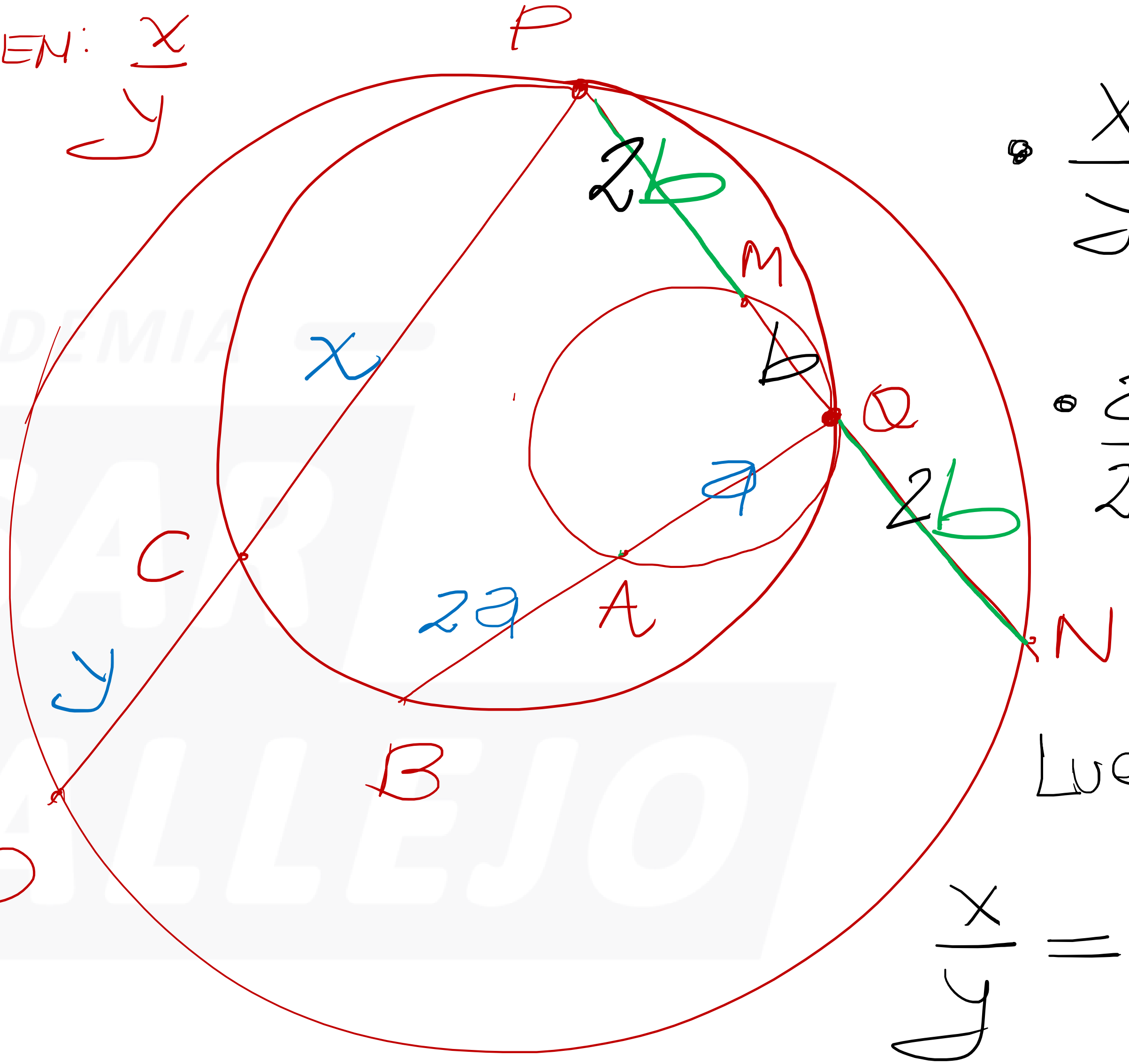
PREGUNTA 9

En el gráfico mostrado, P y Q son puntos de tangencia. Si $PM=QN$, y $AB=2AQ$, calcule PC/CD.



A) 3/5　　B) 3/2　　C) 3
D) 2/3　　E) 5/3

PIDEN: $\dfrac{x}{y}$



$\bullet\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{PQ}{QN}$

$\bullet\ \dfrac{a}{2a} = \dfrac{QM}{MP}$

Luego

$$\frac{x}{y} = \frac{3b}{2b}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{x}{y} = \frac{3}{2}}$$

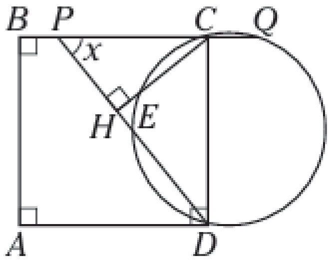
PREGUNTA 10

En un triángulo ABC, Q es un punto de $\overline{BC}$ y P un punto de $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ y $\overline{BL}$ concurren y $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{AC}$, L en $\overline{AC}$. Además $\overline{LQ}$ interseca a $\overline{CP}$ en H y la recta BH interseca a $\overline{AC}$ en T, de modo que $\overline{QT}$ es paralelo a $\overline{BL}$. Calcule QC/BQ.

A) 2 B) 1 C) 3
D) 7 E) 5

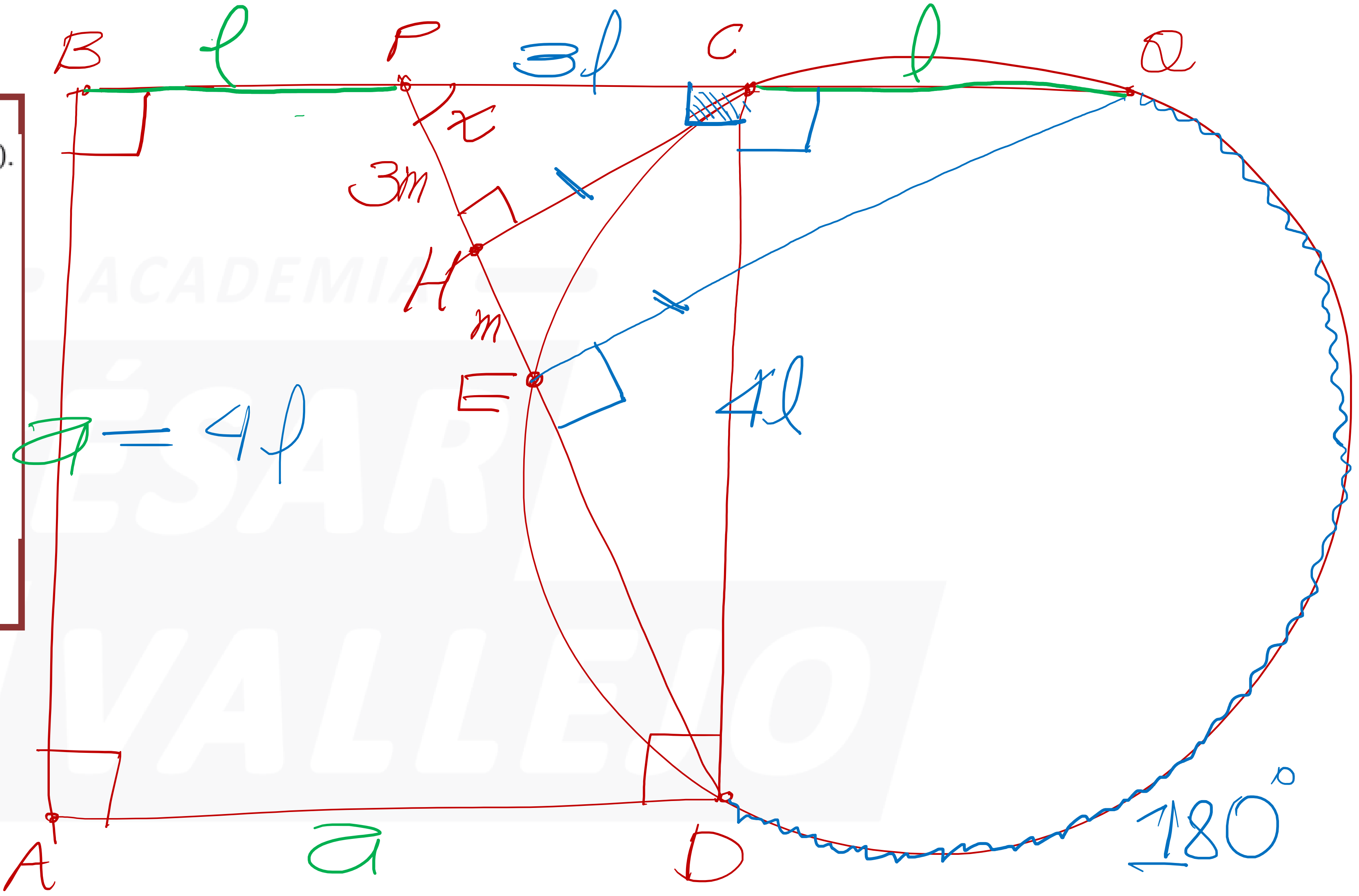
PREGUNTA 11

Según el gráfico, $BP=CQ$, $AB=AD$ y $PH=3(HE)$. Calcule x. ($E\in\overline{HD}$).



A) 37° B) 60° C) 45°

D) 74° E) 53°



PIDEN: x

COROLARIO:

$$\frac{3m}{m}=\frac{PC}{\ell}$$

$\rightarrow PC=3\ell$

• △PCD: Notable de 37° y 53°

$\therefore \boxed{x=53°}$

PREGUNTA 12

En un triángulo ABC, Q es un punto de $\overline{BC}$, de modo que $BQ=2QC$, además S es un punto de $\overline{BA}$, de modo que la recta SQ interseca a la recta CP en H donde P está en el segmento $\overline{SB}$. Si $BP=PS=2$, además se sabe que $AC=8$ y que la perpendicular a $\overline{PC}$ en H pasa por A, calcule AS.

A) 4 B) 8 C) 5

D) 6 E) 3

PREGUNTA 13

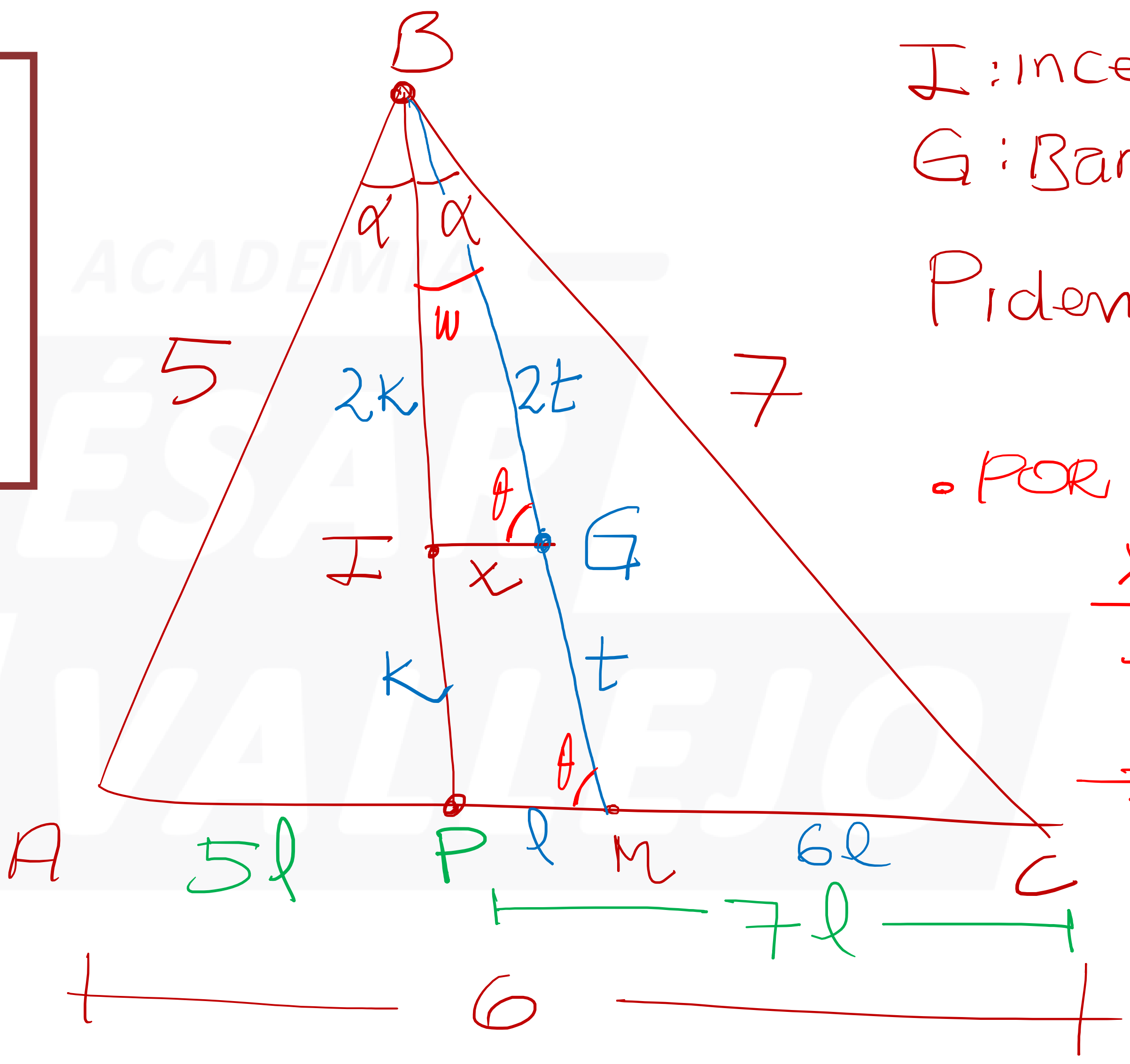
En un triángulo ABC se traza una recta secante a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$, en M, N y L, respectivamente. Si $AM=6$, $BM=3$, $BN=NC$ y $AC=8$, calcule CL.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

PREGUNTA 14

En un triángulo cuyos lados miden 5; 6 y 7, halle la longitud del segmento cuyos extremos son el incentro y baricentro de dicho triángulo inicial.

A) 1
B) 1/2
C) 1/3
D) 1/4
E) 2/3



I : incentro
G : Baricentro

Piden : x

• Teo. del incentro

$$\frac{BI}{IP} = \frac{5+7}{6}$$

$$\frac{BI}{IP} = \frac{2}{1}$$

• Pero : $\frac{BG}{GM} = \frac{2}{1} \longrightarrow \overline{IG} \parallel \overline{PM}$

• Por la N △

$$\frac{x}{\ell} = \frac{2k}{3k}$$

$$\rightarrow x = \frac{2\ell}{3}$$

• $12\ell = 6$

$2\ell = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

PREGUNTA 15

Por el incentro de un triángulo ABC se traza la recta $\mathscr{L}$, que interseca a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$, de modo que las distancias de A y C hacia $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ son 2 y 8, respectivamente. Si $\frac{AB}{5}=\frac{AC}{6}=\frac{BC}{7}$, calcule la distancia de B hacia $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 9 E) 8

PREGUNTA 16

Se sabe que P es un punto de la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$; Q un punto en la prolongación de $\overline{BA}$. Si AP es bisectriz del ángulo QPL ($L \in \overline{AB}$) y $AQ=6$, $AL=2$, calcule el radio de la semicircunferencia.

A) 12
B) 10
C) 8
D) 6
E) 3

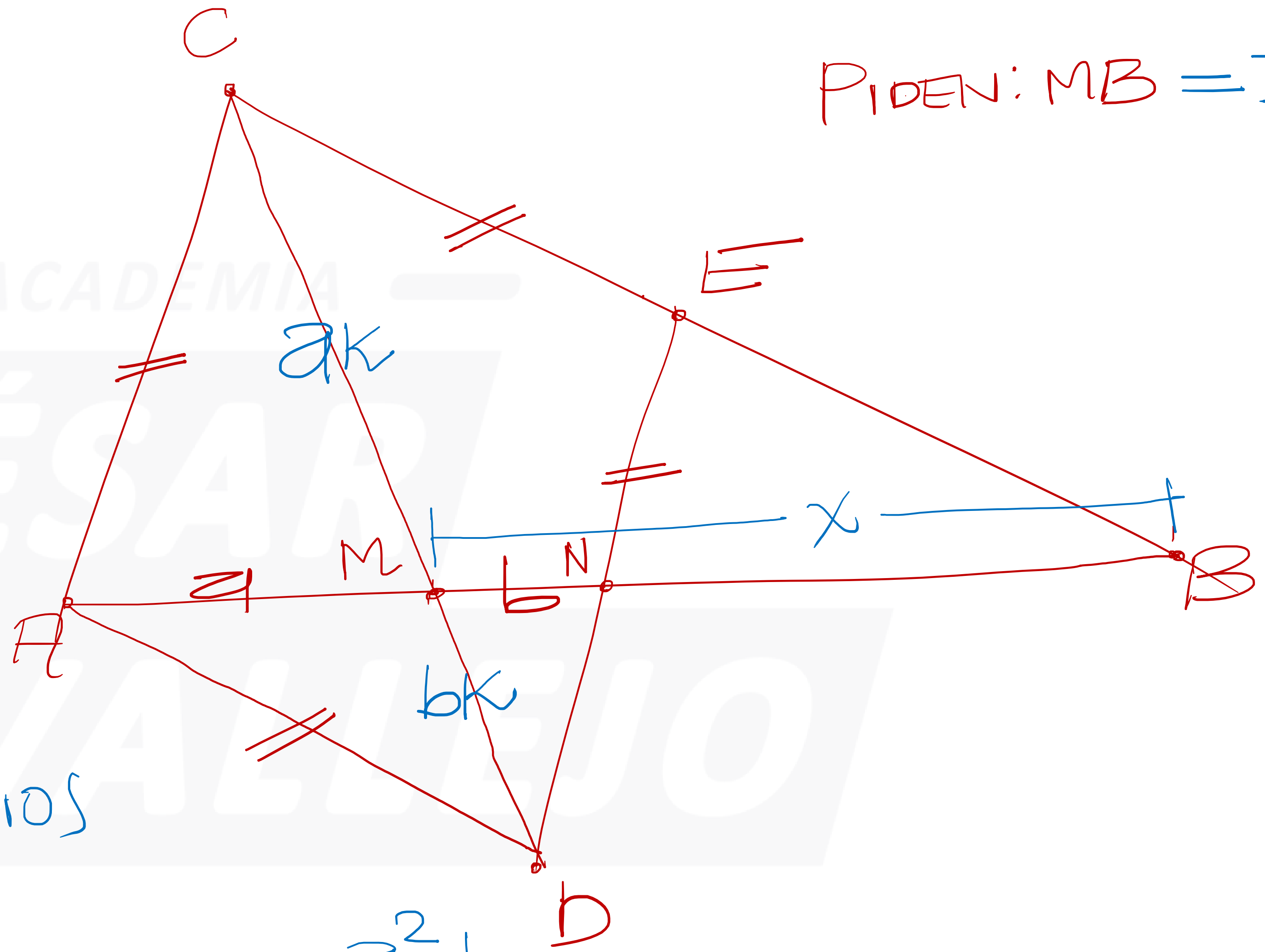
PREGUNTA 17

Se tienen dos triángulos: ACB y CDE ($E \in \overline{CB}$). $\overline{DE}//\overline{AC}$ y $\overline{EC}//\overline{DA}$; además, $\overline{AB} \cap \overline{DC} = M$ y $\overline{MB} \cap \overline{DE} = \{N\}$. Si $AM=a$ y $MN=b$, calcule MB.

A) $\dfrac{a^2}{b}$ B) $\dfrac{b^2}{a}$ C) $\dfrac{a}{b}$

D) $\dfrac{b}{a}$ E) $\sqrt{ab}$

PIDEN: $MB = x$



- $\dfrac{CM}{MD} = \dfrac{a}{b}$
- $\dfrac{x}{a} = \dfrac{ak}{bk}$

COROLARIOS

$$\therefore x = \boxed{\dfrac{a^2}{b}}$$

PREGUNTA 18

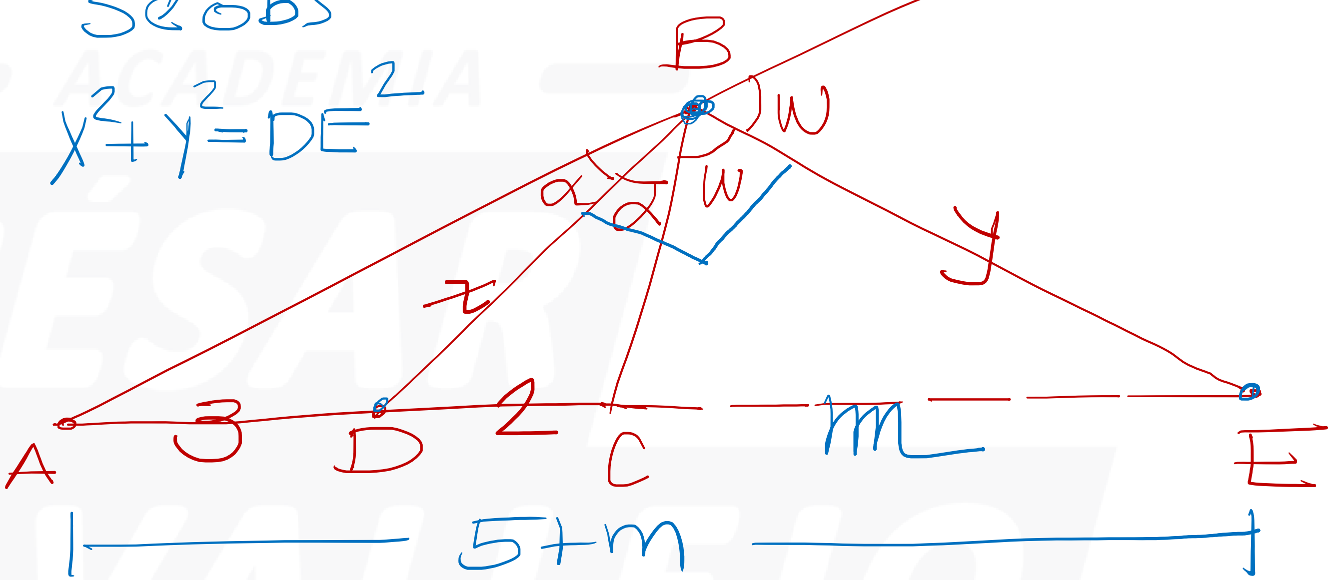
En un triángulo ABC, $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ son bisectrices interior y exterior, respectivamente. Si $AD=3$ y $CD=2$, halle $(BD)^2+(BE)^2$.

A) 25 B) 50 C) 100
D) 144 E) 225

PIDEN: x^2+y^2

Se obs

$x^2+y^2=DE^2$



Se sabe: $3\cdot m = 2(5+m)$

$3m = 10+2m$

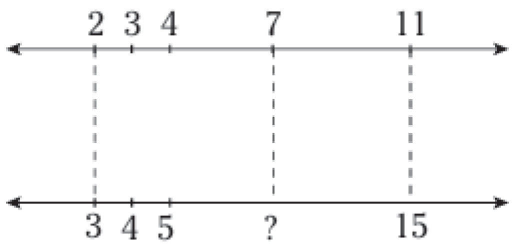
$m=10$

$\rightarrow DE = 12$

$\therefore\ x^2+y^2=144$

PREGUNTA 19

Se muestran dos rectas numércias que tienen diferentes escalas y han sido dispuestas en paralelo. Determine qué fracción corresponde al punto marcado con un signo de interrogación.



A) $\frac{29}{3}$

B) $\frac{31}{3}$

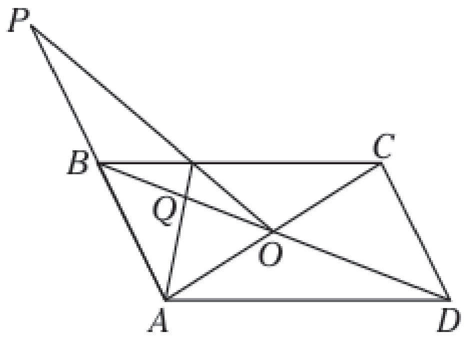
C) $\frac{49}{5}$

D) $\frac{19}{2}$

E) $\frac{20}{3}$

PREGUNTA 20

En el gráfico, $ABCD$ es un paralelogramo y $CD=3(PB)$. Calcule $\dfrac{OD}{BQ}$.



A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

PREGUNTA 21

En un $\triangle ABC$, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$, tal que $AD=CD=3$ y $BD=2$. Halle AC.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{10}$

D) $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$ E) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

PREGUNTA 22

En un triángulo acutángulo ABC, la medida del ángulo $ABC = 60°$, además se sabe que $BC > AB$ si la distancia del ortocentro al vértice B es 20. ¿Cuál será la distancia del ortocentro al lado $\overline{AC}$ si se sabe que este toma su mayor valor entero?

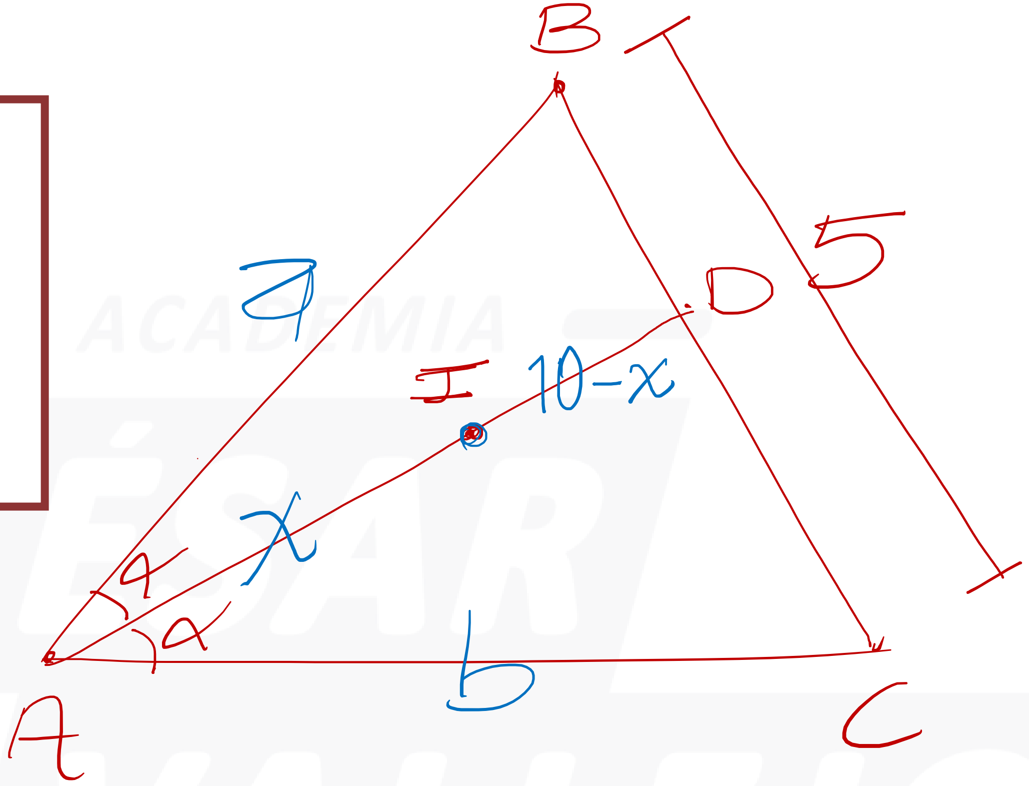
A) 10 B) 9 C) 8

D) 7 E) 6

PREGUNTA 23

En un triángulo *ABC*, el perímetro es 25 cm. Se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$ que mide 10 cm. Si $BC=5$ cm, entonces la distancia del incentro al vértice *A* es

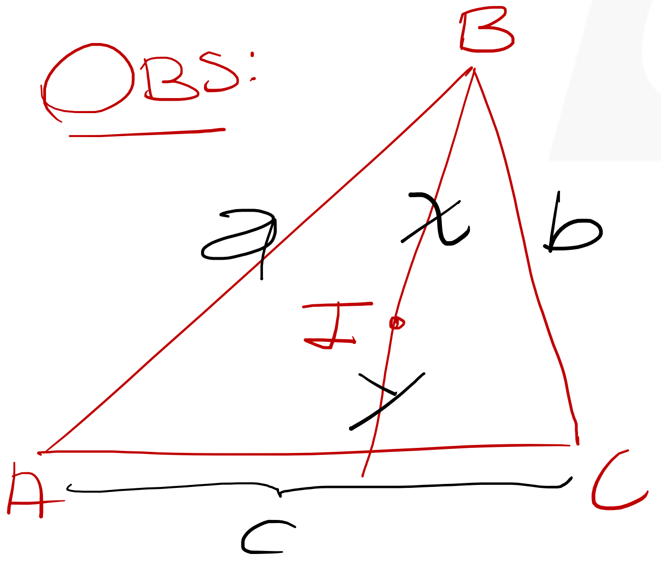
A) 7 ~~B) 8~~ C) 8,5
D) 9 E) 9,5



DATO:

- $2P_{ABC}=25$ ✓
- $AD=10$
- Piden: $IA=x$

OBS:



$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{a+b}{c}}$$

$c<a+b$

$\rightarrow y<x$

- Teo. del incentro: $\dfrac{x}{10-x}=\dfrac{a+b}{5}$
- Pero: $a+b=20$

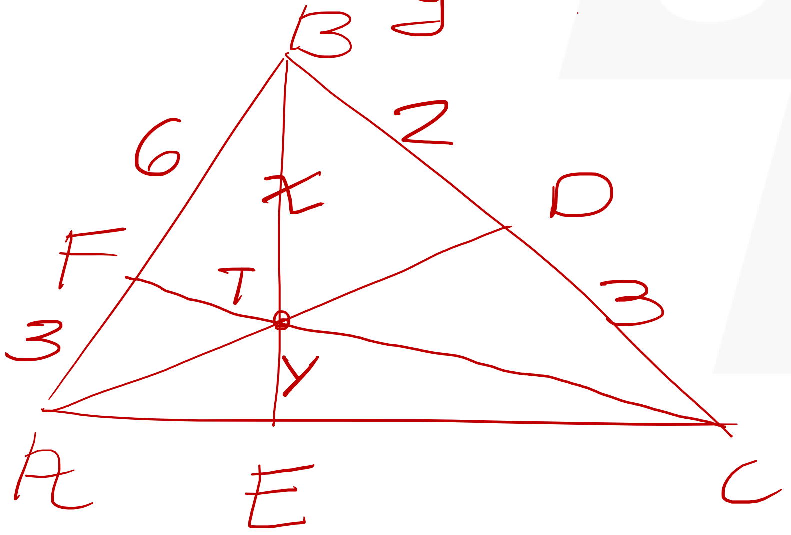
Luego: $\dfrac{x}{10-x}=4$ $\therefore\ \boxed{x=8}$

PREGUNTA 24

En un triángulo *ABC* se trazan las cevianas *AD*, *BE* y *CF* concurrentes en el punto *T*. Si $BF=6$, $FA=3$, $BD=2$ y $DC=3$, entonces BT/TE es

A) 5/2 B) 8/3 C) 8/5
D) 10/7 E) 11/4

PIDEN: $\frac{x}{y}$

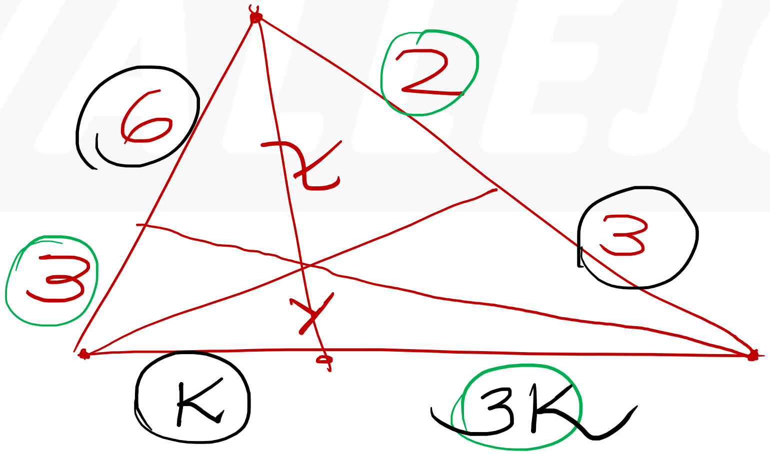


• Por teo. Van Aubel

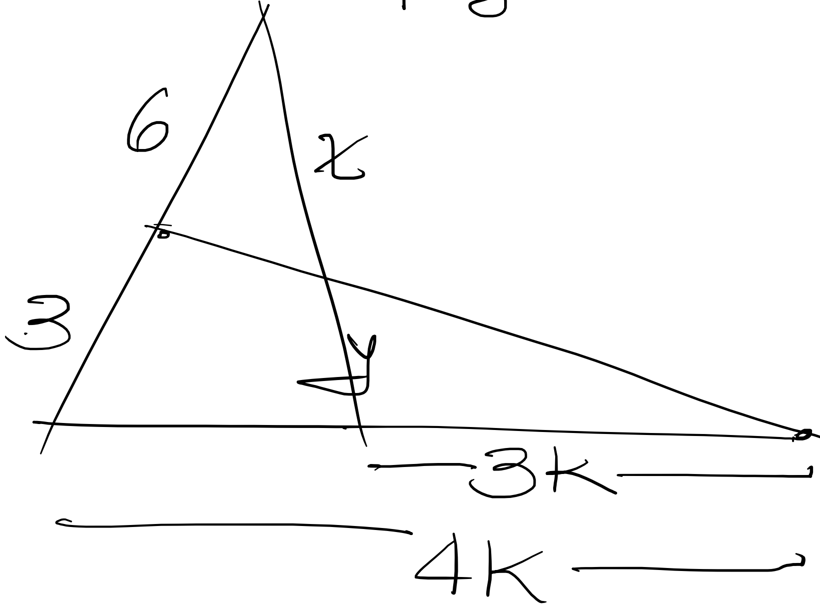
$$\frac{x}{y} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x}{y} = \frac{8}{3}}$$

• Otra forma:



• en la figura:



• Teo Menelao

$$3\cdot x\cdot 3k = 6\cdot y\cdot 4k$$

$$\therefore \boxed{\frac{x}{y} = \frac{8}{3}}$$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe