ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Funciones reales y gráfica de funciones I

Semana 05

Docente: Gustavo Poma Quiroz

1. Calcule el dominio de la función

$$f_{(x)}=\sqrt{\frac{x-2}{5-x}}+\sqrt[3]{\frac{x-7}{x-4}}$$

A) $[2; 3\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

B) $[2; 3\rangle \cup \langle 3; 4\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

C) $\langle 2; 4\rangle \cup \langle 4; 5]$

D) $[2; 4\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

E) $[2; 4\rangle \cup \langle 4; 5]$

Resolución

$CVA = Dom f = ?$

$\frac{x-2}{5-x} \geq 0 \quad \wedge \quad 5-x \neq 0 \quad \wedge \quad x-4 \neq 0$

$x \neq 5 \quad \wedge \quad x \neq 4$

$(5-x)(x-2) \geq 0$ $\times(-1)$

$(x-5)(x-2) \leq 0$

Pc: 5; 2

$x \in [2; 5]$

$Dom f = [2; 4\rangle \cup \langle 4; 5\rangle$

2. Calcule la suma de elementos enteros que no pertenecen al dominio de g si

$$g_{(x)}=\frac{x^2-4}{x-1}+\sqrt[4]{\frac{x+3}{x|x|}}$$

A) -4
B) -3
C) -2
D) 0
E) 1

Resolución

3. Determine el Dom$f$ ∩ Ran$f$ si

$$f_{(x)}=\sqrt{8+2x-x^2}-2$$

A) [−3; 1] B) [−2; 3] C) [−2; 2]

D) [−2; 1] E) [−2; 4]

Resolución

•) Dom$f$: $8+2x-x^2\geq 0$

$0\geq x^2-2x-8$

$0\geq (x-4)(x+2)$

Pc: $4;-2$

$x\in[-2;4]=\text{Dom}f$.

Recordar

$\overset{(-)}{a}<x<\overset{(+)}{b}$

$\rightarrow 0\leq x^2<\text{Máx}\{a^2;b^2\}$

•) Ran$f$:

Complet. ■

$f(x)=\sqrt{-(x^2-2x+1-1)+8}-2$

$=\sqrt{-(x-1)^2+9}-2$

Como: $-2\leq x\leq 4$) -1

$-3\leq x-1\leq 3$) $(\ )^2$

$0\leq (x-1)^2\leq 9$) $x(-1)$

$0\geq -(x-1)^2\geq -9$) $+9$

$9\geq -(x-1)^2+9\geq 0$) $\sqrt{\ }$

$3\geq \sqrt{\ \ }\geq 0$) -2

$1\geq f(x)\geq -2$

Ran$f=[-2;1]$

∴ Dom$f$ ∩ Ran$f$

$=[-2;1]$

también

$f(x)=y=\sqrt{-(x-1)^2+9}-2$

$0\leq y+2=\sqrt{-(x-1)^2+9}$

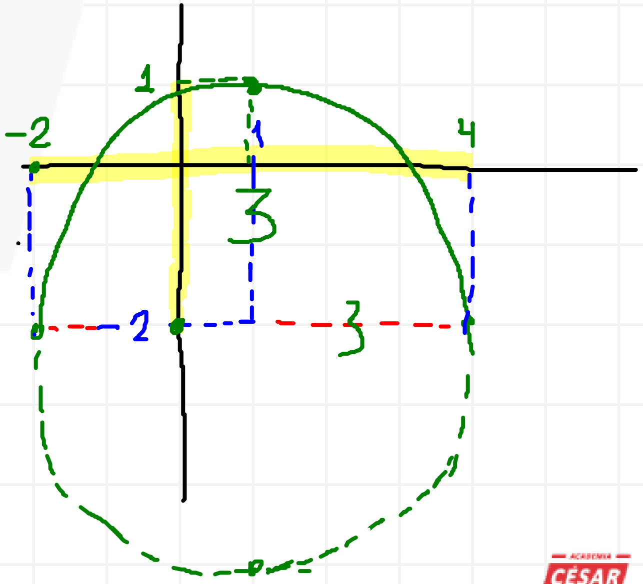
$(y+2)^2+(x-1)^2=9=3^2$

centro: $(1;-2)$

radio: $r=3$

$\rightarrow y+2\geq 0$

$y\geq -2$



4. Considere la siguiente función f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_{(x)}=\underset{(-)}{a}x^2+bx+3$; $a<0$, $b>0$.

Si $\operatorname{Ran}(f)=\langle -\infty; 2b]$, halle el valor de $\frac{12a-b^2}{ab}$.

A) -4 ~~B)~~ 8 C) 12

D) 6 E) -8

Resolución

Como: $\operatorname{Ran}f = \langle -\infty; \overset{K.}{\overbrace{2b}} \rangle$; $V=(h;K)$

• $K=f(h)=\underbrace{f\left(-\frac{b}{2a}\right)=2b}$

$a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2+b\left(\frac{-b}{2a}\right)+3=2b$

$\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2\cdot 2}{2a\cdot 2}+3=2b$

$\Rightarrow -\frac{b^2}{4a}+3=2b \quad \Big\} \times(4a)$

$-b^2+12a=8ab$

$\therefore \frac{12a-b^2}{ab}=8$

5. Dada las funciones

$F_{(x)}=x^2-4x+6$

$g_{(x)}=mx+2$

Determine los valores reales de m para que las gráficas siempre se intersequen.

A) $\langle -\infty; 0] \cup [8; +\infty\rangle$

B) $\langle 0; +\infty\rangle \cup [-8; 0]$

C) $\langle -\infty; -8] \cup [0; +\infty\rangle$

D) $\langle -8; 0\rangle$

E) $\langle -\infty; 2] \cup [8; +\infty\rangle$

Resolución

Por dato

Como las gráficas siempre se intersectan

$\Rightarrow \quad F(x) = g(x)$

$x^2-4x+6 = mx+2$

$\underbrace{x^2-(4+m)x+4}_{\Delta \geq 0}=0$

2 sol. = 2 puntos corte, $\Delta > 0$

1 sol. = 1 punto corte. $\Delta = 0$

$[-(4+m)]^2-4(1)(4) \geq 0$

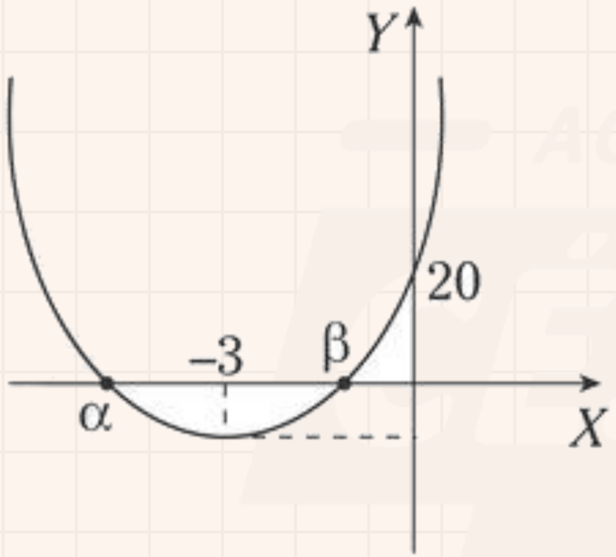
$\cancel{16}+8m+m^2-\cancel{16} \geq 0$

$m(m+8) \geq 0$

Pc: $0 ; -8$

$\therefore m \in \langle -\infty; -8] \cup [0; +\infty\rangle$

6. Dada la gráfica de la función cuadrática $P_{(x)}$.



Si $\alpha^2+\beta^2=26$, halle $P_{(6)}$.

A) 308 B) 240 C) 200
D) 100 E) 120

Resolución

7. Dada las funciones

$$f_{(x)}=\frac{1}{2}(x-2)^2+4 \rightarrow V=(2;4)$$

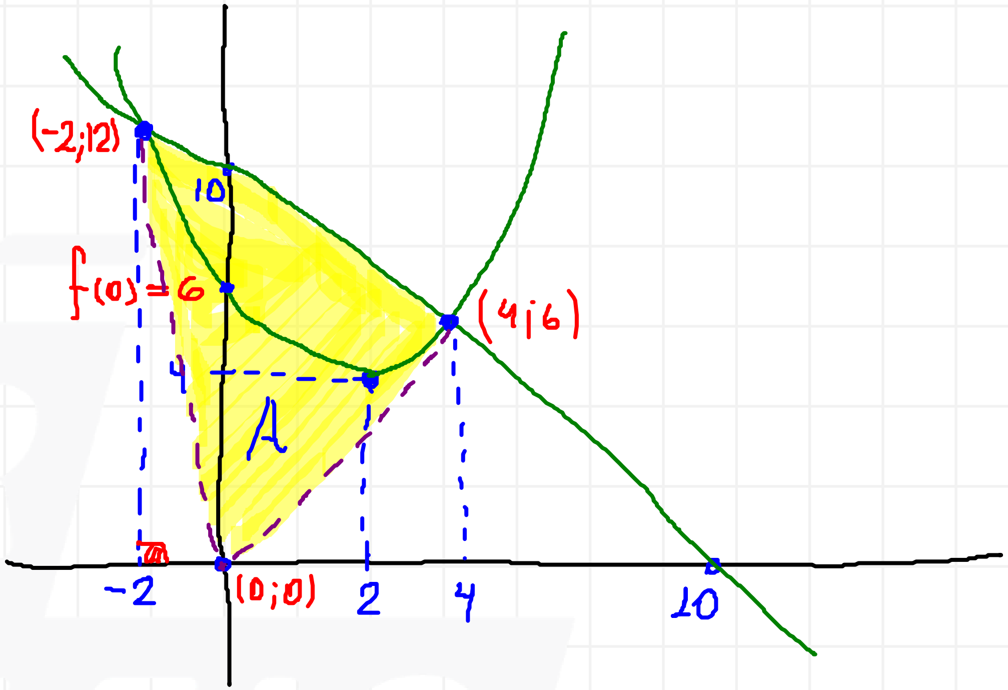
$$g_{(x)}=-x+10$$

Calcule el área de la región triangular que se forma al unir los puntos de intercepto de las gráficas de las funciones y el origen de coordenadas.

A) 60 u^2 B) 15 u^2 C) 40 u^2

D) 30 u^2 E) 20 u^2

Resolución



$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 6\\ -2 & 12\\ 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|0+48+0-(0-12+0)\right|$$

$$=\frac{1}{2}|60|=\boxed{30u^2}$$

8. Determine el área encerrada por las gráficas de las funciones

$$f_{(x)}=a-\frac{a}{2b}\cdot x \quad \wedge \quad g_{(x)}=a+\frac{a}{b}\cdot x$$

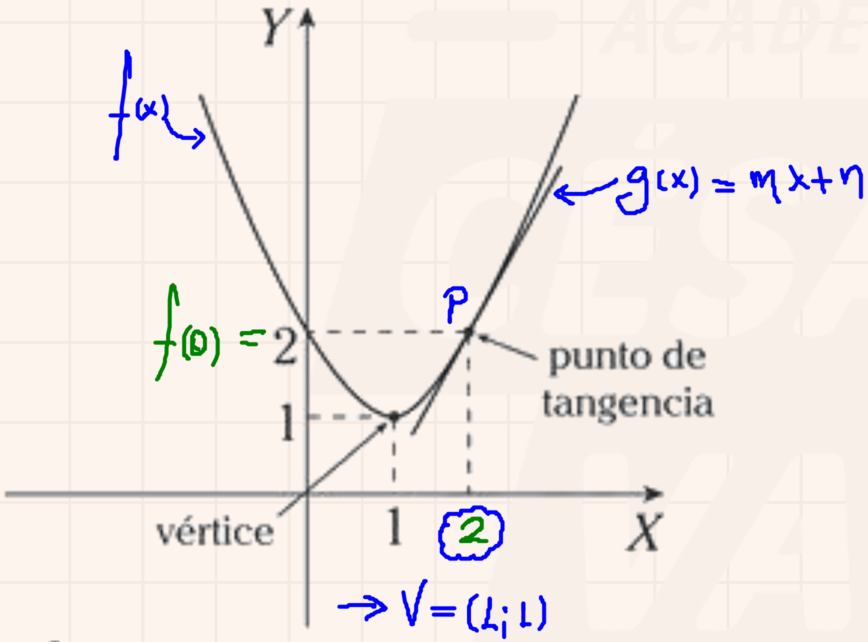
además $a>0$; $b>0$ y el eje x.

A) $2ab$ B) $\frac{2}{3}ab$ C) ab

D) $\frac{1}{2}ab$ E) $\frac{3}{2}ab$

Resolución

9. Determine la ecuación de la recta que es tangente a la parábola, tal como se muestra.



A) $y-2x=3$

B) $x-2y=2$

C) $2x+y=2$

D) $2x-3y=2$

E) $2x-y=2$

Resolución

• Para f: $f(x)=a(x-h)^2+k$

$f(x)=a(x-1)^2+1$

$x=0$: $f(0)=a(-1)^2+1=2 \rightarrow a=1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2+1$

En P: $f(x)=g(x)$; reemp: $P=(2;2)$ en $g(x)$

$(x-1)^2+1=mx+n$ $\qquad \rightarrow g(2)=2m+n=2$

$\underbrace{x^2-(2+m)x+2-n=0}$ $\qquad 2m=2-n$

$\Delta=0$ $\qquad n=-2$

$[-(2+m)]^2-4(1)(\underbrace{2-n}_{2m})=0$

$4+4m+m^2-8m=0$

$m^2-4m+4=0$

$(m-2)^2=0$

$m=2$

∴ reempl. en g.

$g(x)=y=2x-2$

$\boxed{2=2x-y}$

10. Determine el dominio de

$$f_{(x)}=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}+\sqrt[3]{x-4}$$

A) [4; 7]
B) [2; 7]
C) [2; 4]
D) [1; 7]
E) [4; 8]

Resolución

11. Determine el complemento del dominio de la siguiente función:

$$k_{(x)}=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-3}{x-4}}+\sqrt{\frac{x-5}{x-7}}$$

A) $\langle 1; 2] \cup \langle 3; 4] \cup \langle 5; 7]$

B) $\langle 1; 0\rangle \cup [3; 4\rangle$

C) $\langle 3; 4\rangle \cup \langle 5; 7]$

D) $\langle 0; 1\rangle \cup \langle 3; 7]$

E) $\langle 0; 1\rangle \cup \langle 5; 7]$

Resolución

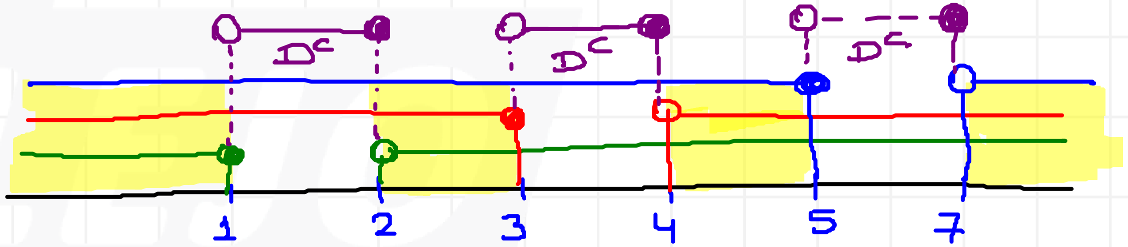
Dom f.

$\frac{x-1}{x-2} \geq 0 \wedge \frac{x-3}{x-4} \geq 0 \wedge \frac{x-5}{x-7} \geq 0 \wedge$ $x \neq 2$, $x \neq 4$, $x \neq 7$

$(x-2)(x-1) \geq 0 \wedge (x-4)(x-3) \geq 0 \wedge (x-7)(x-5) \geq 0$

Pc: 2; 1 — Pc: 4; 3 — Pc: 7; 5

$x \in \langle -\infty; 1] \cup \langle 2; +\infty\rangle$ — $x \in \langle -\infty; 3] \cup \langle 4; +\infty\rangle$ — $x \in \langle -\infty; 5] \cup \langle 7; +\infty\rangle$



$\therefore (\mathrm{Dom} f)^c = \langle 1; 2] \cup \langle 3; 4] \cup \langle 5; 7]$

12. Determine la intersección de los rangos de las siguientes funciones:

$f_{(x)}=x^2-x+1;\ x\in\mathbb{R}$

$g_{(x)}=x^2-x+1;\ x\in\langle 1;+\infty\rangle$

A) $\langle 1;\ 2\rangle$

B) $\left[\frac{3}{4};+\infty\right\rangle$

C) $\langle 1;+\infty\rangle$

D) $\langle 2;+\infty\rangle$

E) $\langle 0;+\infty\rangle$

Resolución

13. Determine el rango de la siguiente función:

$$A_{(x)} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 4x + \frac{4}{x} + 9;\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

~~A)~~ $[3; +\infty\rangle$ B) $[16; +\infty\rangle$ C) $[9; +\infty\rangle$

D) $\langle 9; +\infty\rangle$ E) $\langle 3; +\infty\rangle$

Resolución

$$A(x) = \underbrace{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2}_{T.C.P} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 7$$

$$= \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4}_{T.C.P} + 3$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^2 + 3$$

Luego: $\left(x + \frac{1}{x} + 2\right)^2 \geq 0$ $\quad +3$

$A(x) \geq 3$

$\text{Ran} f = [3; +\infty\rangle$

14. Si el dominio de la función $G_{(x)}$ es el intervalo $[-2;10]$, $\cancel{a\neq 0}$ halle el rango de G.

$$G_{(x)}=\cancel{\sqrt{a-|x-b|}}\longrightarrow \sqrt{6-|x-4|}$$

~~Considere el dominio el conjunto mayor posible.~~

A) $\langle 0;4\rangle$ B) $\langle 0;2\rangle$ C) $[0;4]$

D) $[0;8]$ E) $\left[0;\sqrt{6}\right]$

Resolución

15. Determine el área que encierra las gráficas de las funciones siguientes:

$f_{(x)}=x+2$

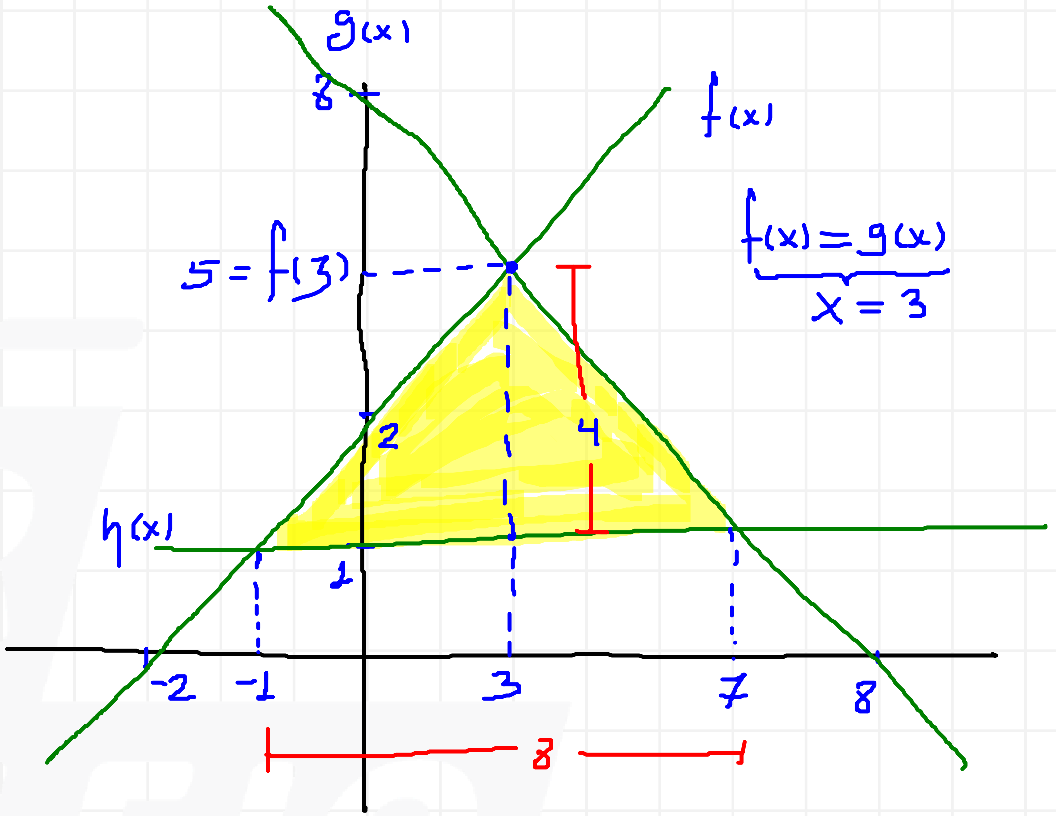
$g_{(x)}=8-x$

$h_{(x)}=1$

A) $15\ u^2$ B) $18\ u^2$ C) $16\ u^2$

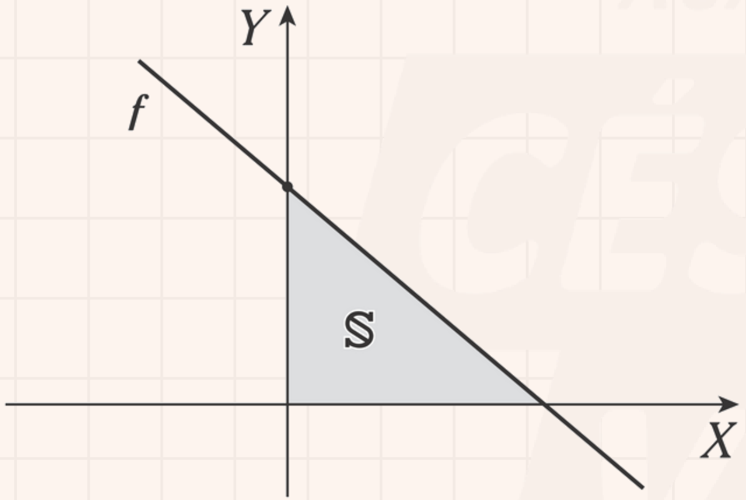
D) $12\ u^2$ E) $8\ u^2$

Resolución



$$A_{\Delta}=\frac{8(4)}{2}=16u^2$$

16. Calcule el valor de $\mathbb{S}$ que representa el área limitada por $f_{(x)}=ax+b$ y los ejes cartesianos, como se muestra.



A) $-\dfrac{a^2}{b}$ B) $\dfrac{a^2}{b}$ C) $\dfrac{b^2}{2a}$

D) $\dfrac{ab}{2}$ E) $-\dfrac{b^2}{2a}$

Resolución

17. Grafique las funciones

$f_{(x)}=x^2-x-6$ y $g_{(x)}=-x^2+2x$

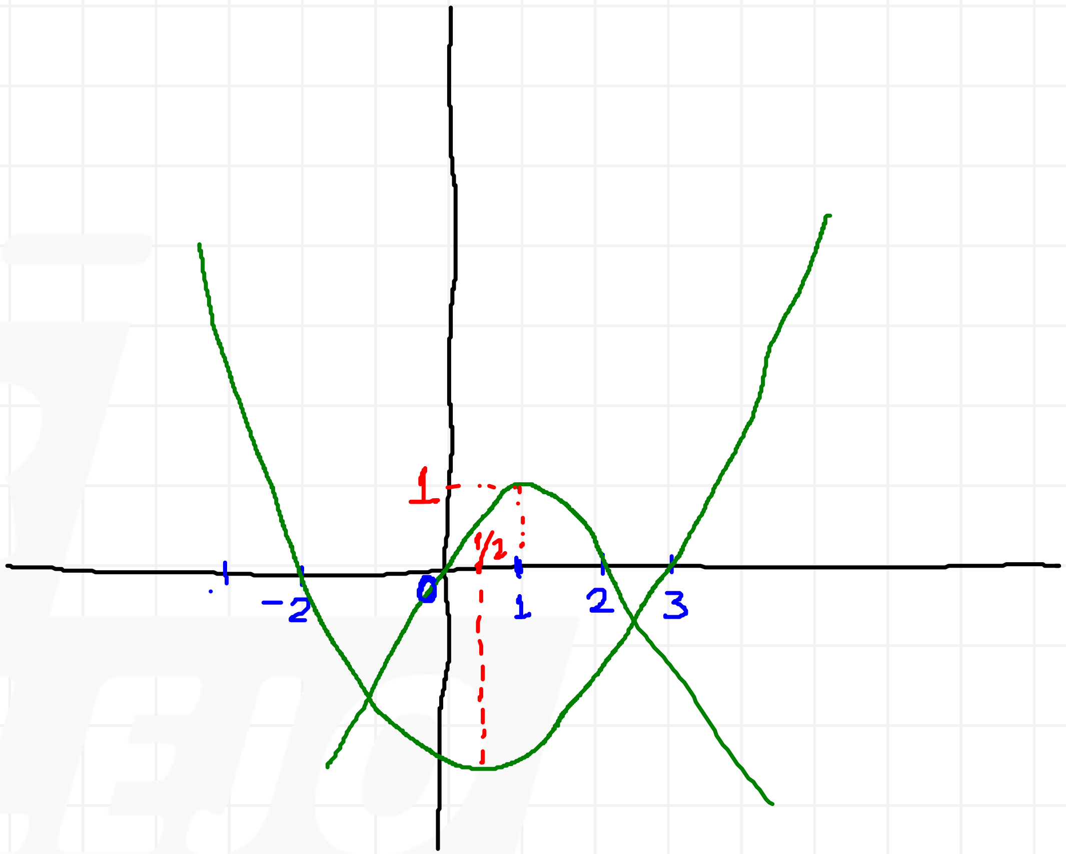
Resolución

$f(x)=(x-3)(x+2)$

raíces: $3;-2$

$g(x)=-x(x-2)$

raíces: $0;2$

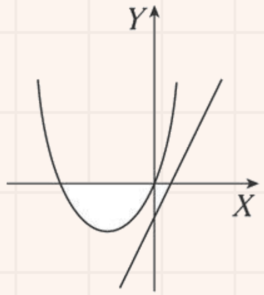


clave (A)

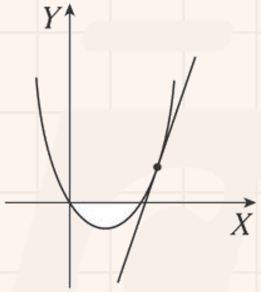
18. Grafiquemos las siguientes funciones en el mismo plano cartesiano.

$f_{(x)}=x^2+2x \wedge g_{(x)}=4x-1$

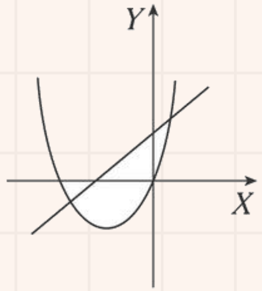
A)



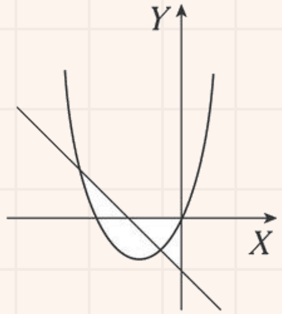
B)



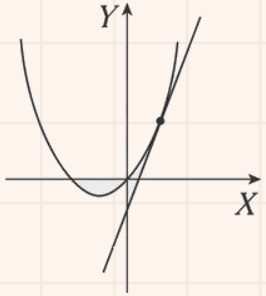
C)



D)



E)



Resolución

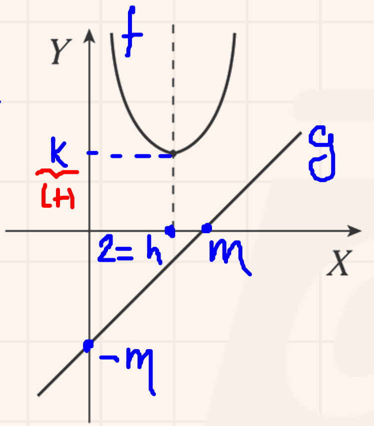
19. Dada la gráfica de las funciones

$f_{(x)}=x^2-4x+b \wedge g_{(x)}=x-m$

$h = -\frac{b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)}$

$= 2$

$K = f(2) = \underbrace{b-4}_{(+)}$



Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones:

I. $m>2$ ..... (V)

II. $b>4$ ..... (V)

III. $b+m>\frac{25}{4}$ ... (V)

A) VVV B) FVV C) FFF

D) FFV E) VVF

Resolución

- De la gráfica

$\rightarrow m>2$

$\rightarrow k = b-4 > 0 \rightarrow b>4$

Si hacemos que

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2-4x+b = x-m$$

$$\underbrace{x^2-5x+b+m=0}$$

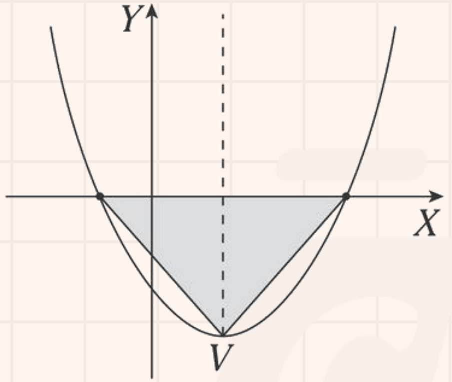
$$\Delta<0$$

$$(-5)^2-4(1)(b+m)<0$$

$$25<4(b+m)$$

$$\frac{25}{4}<b+m$$

20. Al graficar la función $f_{(x)}=x^2-2ax+b$, se obtiene



Calcule el área de la región sombreada.

A) $(b-a^2)\sqrt{a^2-b}$

B) $2(a^2-b)\sqrt{a^2-b}$

C) $(a^2-b)\sqrt{a^2-b}$

D) $\dfrac{(a^2-b)\sqrt{a^2-b}}{2}$

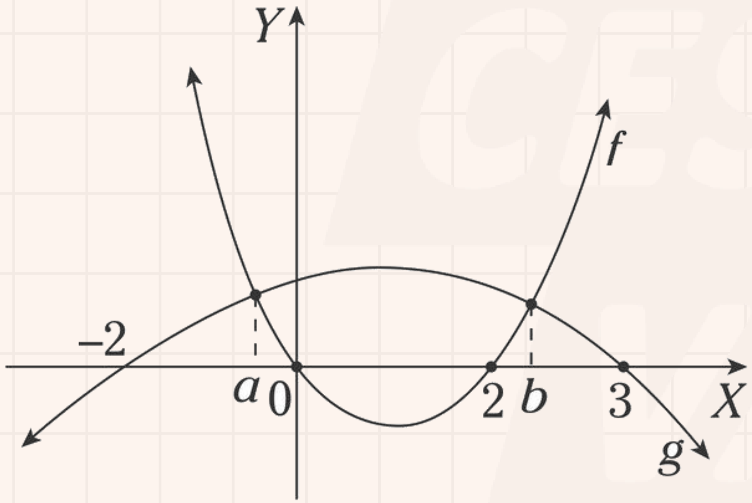
E) $(a^2+b)\sqrt{a^2-b}$

Resolución

21. Se tiene que f y g representan las funciones cuadráticas

$f_{(x)}=x^2+mx+n$ y $g_{(x)}=-x^2+px+q$,

cuya gráfica se muestra.

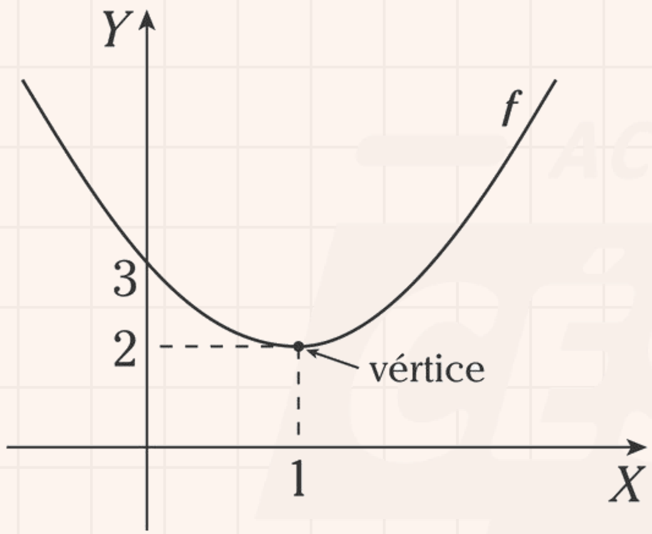


Determine $N=a+b$.

A) 3/2 B) 1 C) 2
D) – 1/2 E) – 1

Resolución

22. Sea f una función cuadrática



Resuelva la inecuación

$$(|x|-3)(f_{(x)}-2)\left(f_{(x)}-\frac{\pi}{2}\right)<0$$

A) $\langle -3; 3\rangle$

B) $\langle -3; 3\rangle-\{1\}$

C) $\mathbb{R}$

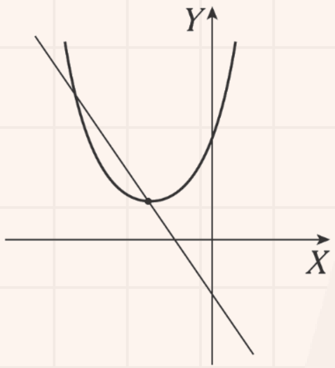
D) $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 1; 3\rangle$

E) $\langle -3; 1\rangle$

Resolución

23. Dada la gráfica de las funciones

$f_{(x)}=x^2+bx+c \wedge g_{(x)}=x+m$



Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) respecto de las siguientes proposiciones.

I. $c>\dfrac{b^2}{4}$

II. $cm<0$

III. $b^2-2b>4c-4m-1$

A) FFF
B) VVF
C) FVV
D) VFV
E) VVV

Resolución

24. Determine el dominio de la función.

$$f_{(x)}=\sqrt{\sqrt{2+x-x^2}-1-x}$$

A) $[-1;2]$

B) $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$

C) $[-1;0]$

D) $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

E) $[-2;1]$

Resolución

ÁLGEBRA

Funciones reales y gráfica de funciones I

Semana 05

Docente: Gustavo Poma Quiroz

1. Determine el dominio de la siguiente función

$$f_{(x)} = \sqrt[4]{24+2x-x^2} + \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-4}$$

A) $\langle -4; 6]$
B) $\langle -4; 6\rangle - \{4\}$
C) $[-4; 4\rangle \cup \langle 4; 6]$
D) $[-6; 4] - \{4\}$
E) $[-4; 4\rangle \cup \langle 4; 6]$

Resolución

2. Sea f: $[-1; 3\rangle \to \mathbb{R}$, definido por $f_{(x)}=-x^2+4x-6$. Determine su rango.

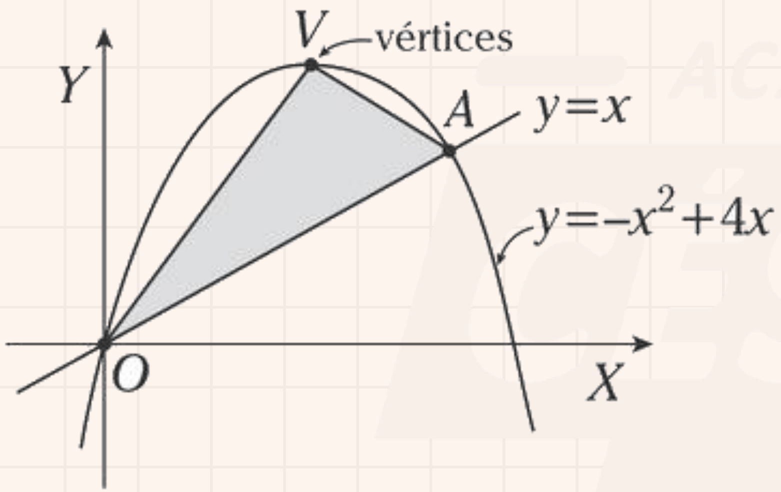
A) $[-11; -2]$
B) $\langle -11; 2]$
C) $\langle -1; 7]$
D) $\langle 1; 11]$
E) $\langle -13; 0]$

Resolución

$$f_{(x)} = -(\underbrace{x^2-4x+4}_{}-4)-6$$
$$= -(x-2)^2-2$$

Como: $-1 \leq x < 3$

3. Determine el área de la región triangular OVA, cuya gráfica es



A) $6\ u^2$

B) $8\ u^2$

C) $10\ u^2$

D) $5\ u^2$

E) $3\ u^2$

Resolución

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe