academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

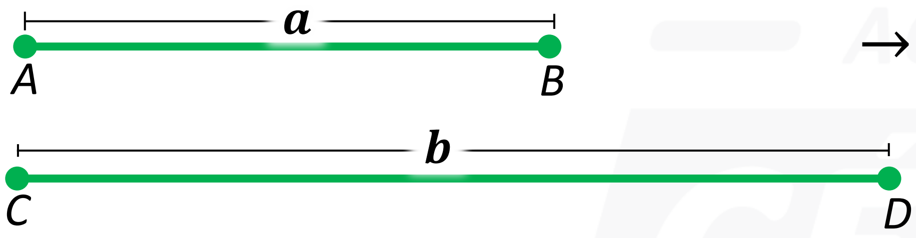
ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GEOMETRIA

Tema: Proporcionalidad de segmentos

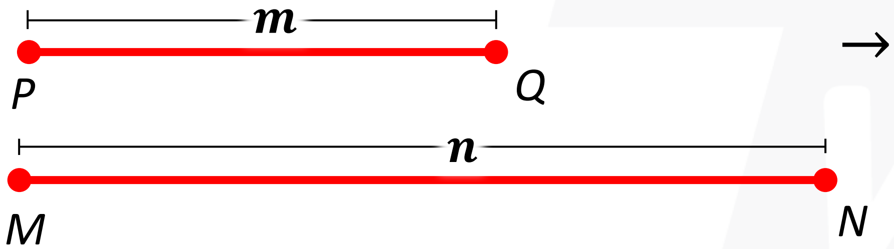
PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS.

Definimos, como razón de dos segmentos, a la comparación entre sus longitudes.



$\rightarrow \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$

Los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ están en una razón de a a b



$\rightarrow \dfrac{PQ}{MN} = \dfrac{m}{n}$

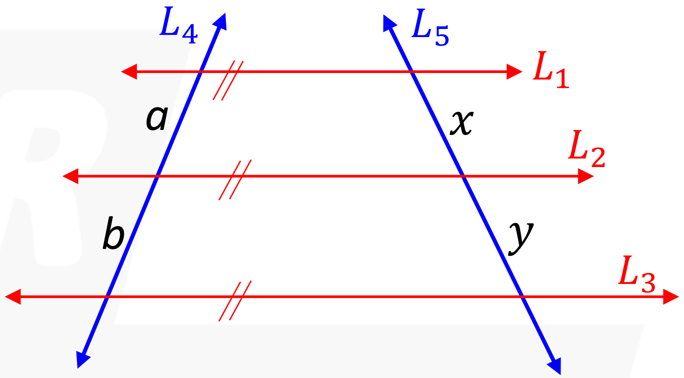
Los $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ están en una razón de m a n

$$si \quad \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

→ *Los $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ por que tienen la misma razón.*

TEOREMA DE THALES

Si dos rectas son intersecadas por tres o más rectas paralelas entonces estas últimas determinan segmentos proporcionales sobre las dos rectas dadas respectivamente.

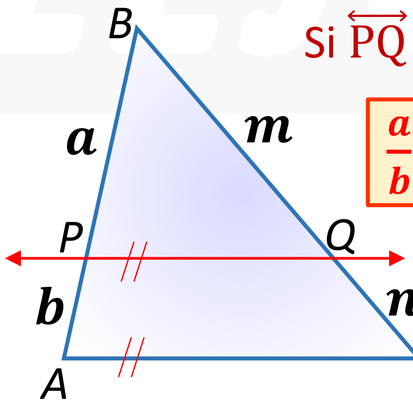


Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}} \qquad \boxed{\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}}$$

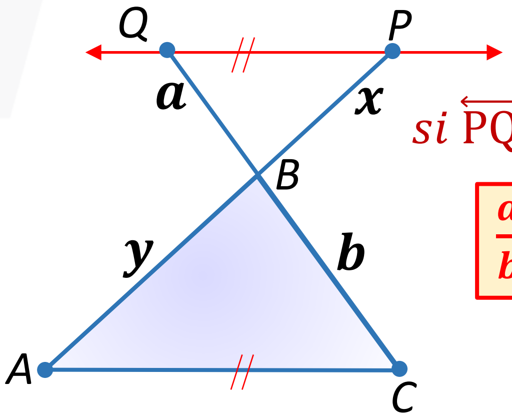
COROLARIO 1



Si $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

COROLARIO 2



si $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AC}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

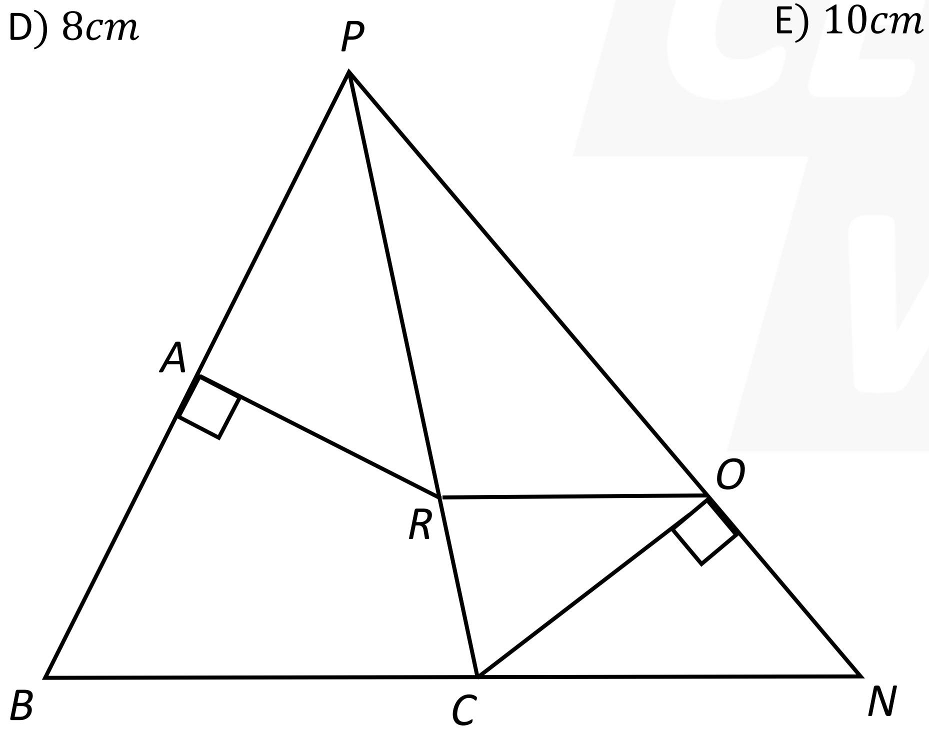
UNI

2018-II

En la figura, determine PO (en cm), tal que $\overline{PC}$ es la bisectriz interior en el triángulo BPN; m∢BNO = m∢ROP; AP=4cm y ON=3cm.

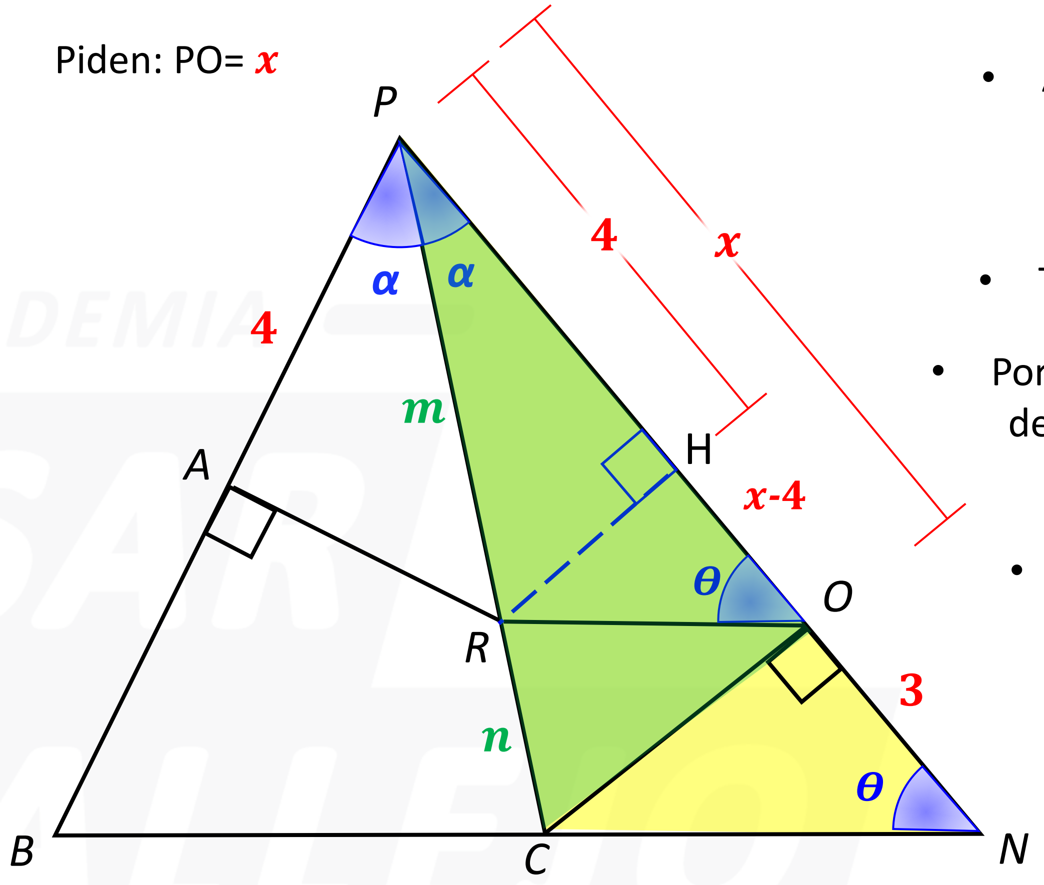
A) $2cm$ B) $4cm$ C) $6cm$

D) $8cm$ E) $10cm$



Resolución

Piden: PO= x



- ΔCPN : Por corolario

$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{x}{3}}$$

- Trazamos $\overline{RH} \perp \overline{PO}$
- Por teorema de la bisectriz de un ángulo:

PA = PH = 4

- ΔCPO : Por corolario

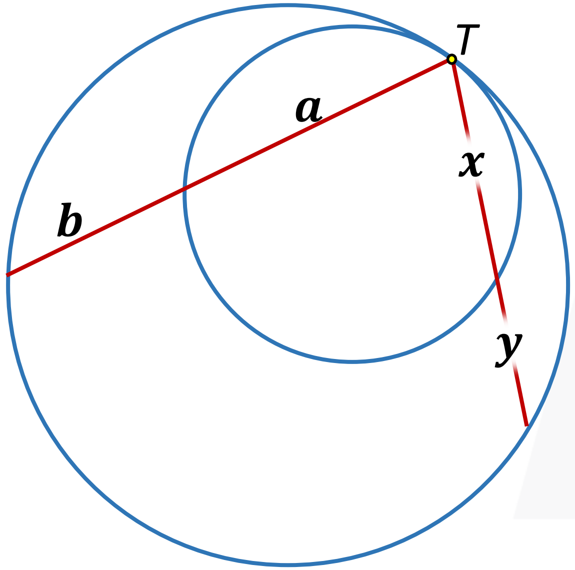
$$\boxed{\frac{m}{n} = \frac{4}{x-4}}$$

- Luego : $\frac{x}{3} = \frac{4}{x-4}$

$$\boxed{\therefore x = 6cm}$$

Clave C

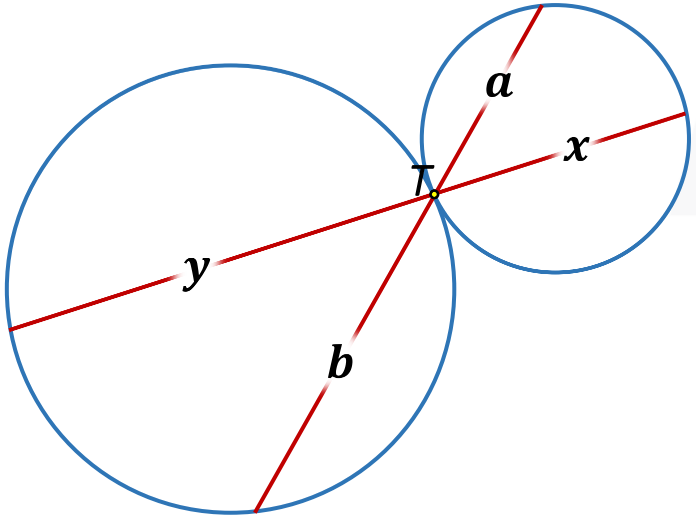
ALGUNAS CONSECUENCIAS DEL COROLARIO.



Si T es punto de tangencia

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

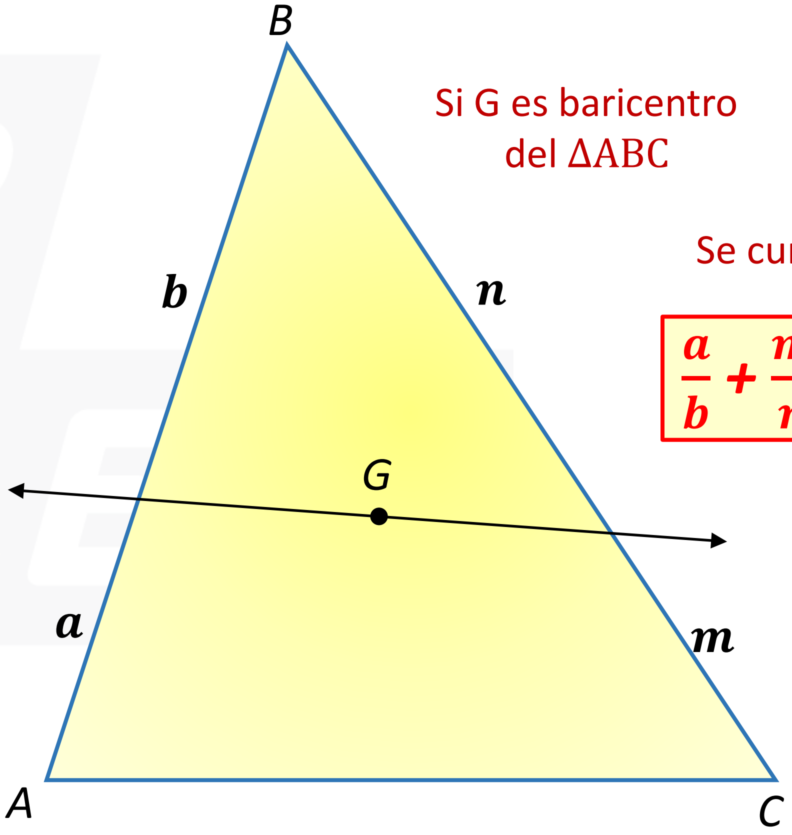


Si T es punto de tangencia

Se cumple:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$

Respecto al baricentro .



Si G es baricentro del ΔABC

Se cumple

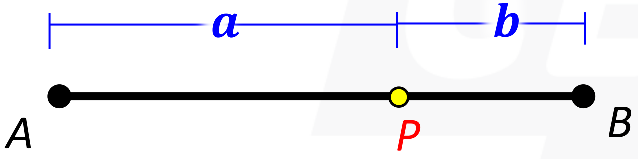
$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = 1}$$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO RESPECTO A UN PUNTO.

Si sobre un segmento dado, o en su prolongación, ubicamos un punto, decimos que este punto determina una razón en dicho segmento.

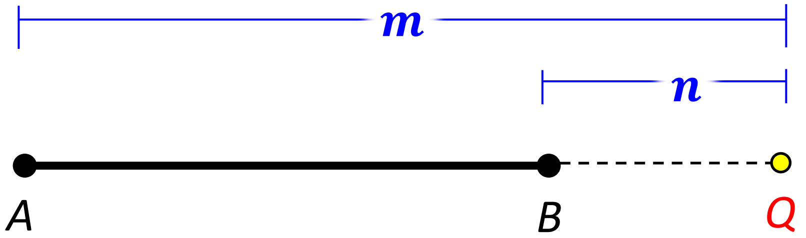
DIVISIÓN INTERNA.

$\dfrac{a}{b}$ Es la razón interna determinada por P en el segmento AB



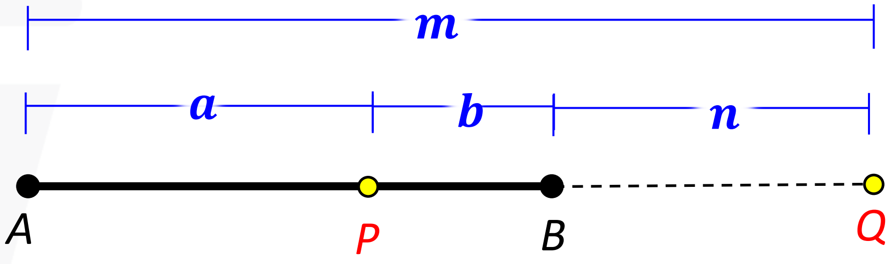
DIVISIÓN EXTERNA.

$\dfrac{m}{n}$ es la razón externa determinada por Q en el segmento AB



DIVISIÓN ARMÓNICA.

P y Q dividen armónicamente a un segmento si lo dividen interna y externamente en una misma razón :



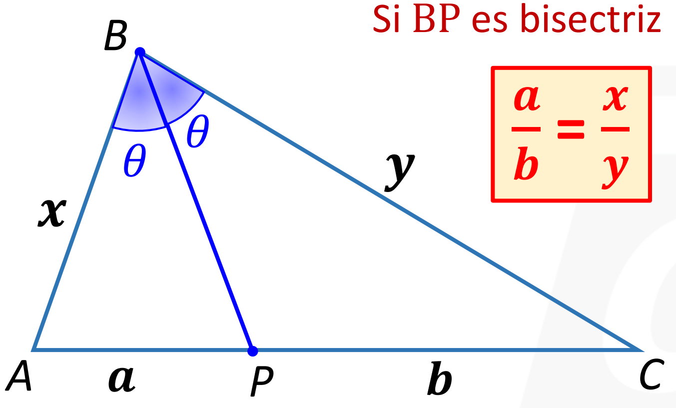
Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ ⇨ **P y Q dividen armónicamente a $\overline{AB}$**

NOTA

- **Nota:** A,P,B y Q son puntos armónicos.
- Se dice también que *A*,*P*,*B* y *Q* forman una cuaterna armónica.

PROPORCIÓN DETERMINADA POR BISECTRICES.

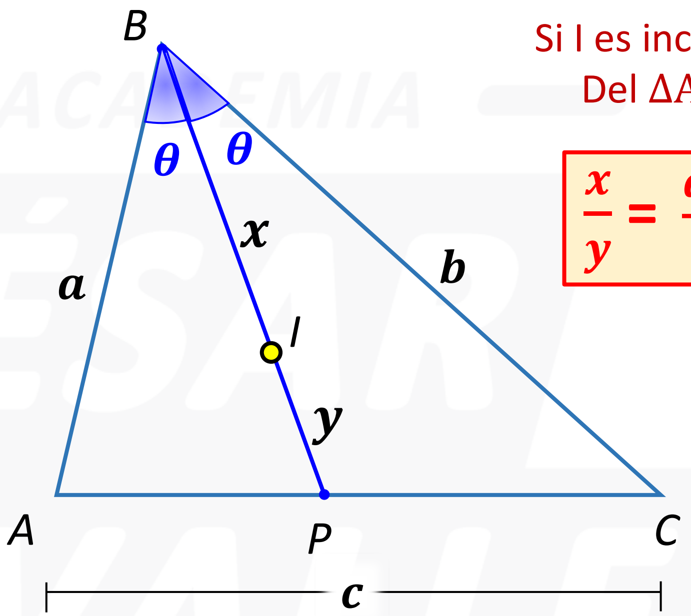
TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR.



Si $\overline{BP}$ es bisectriz

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

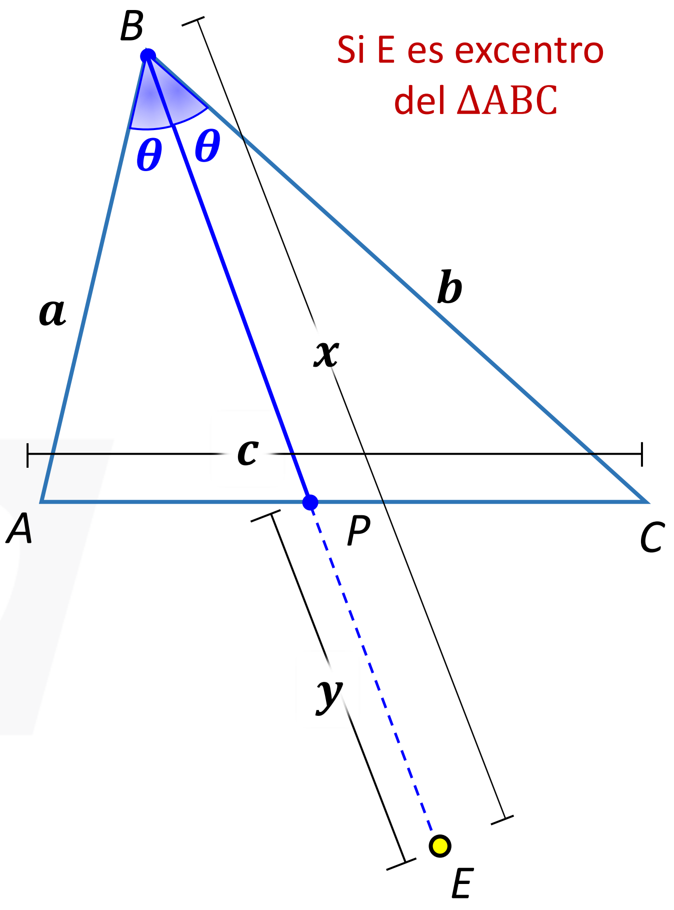
TEOREMA DEL INCENTRO.



Si I es incentro
Del ΔABC

$$\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

TEOREMA DEL EXCENTRO.



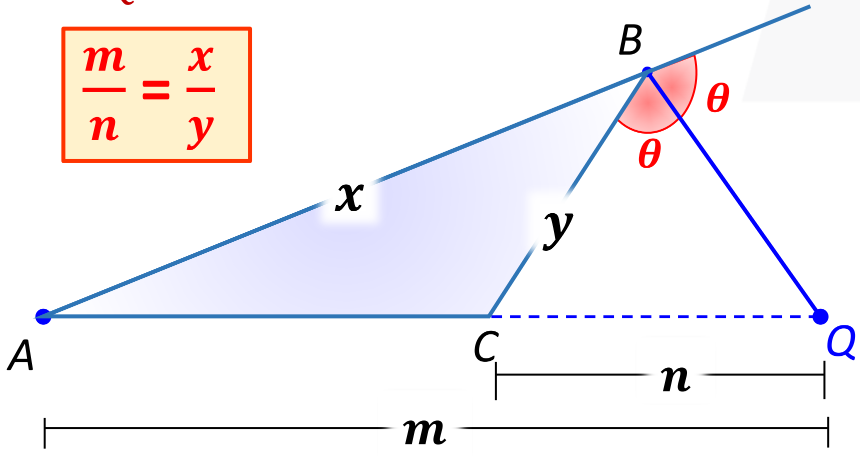
Si E es excentro
del ΔABC

$$\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR.

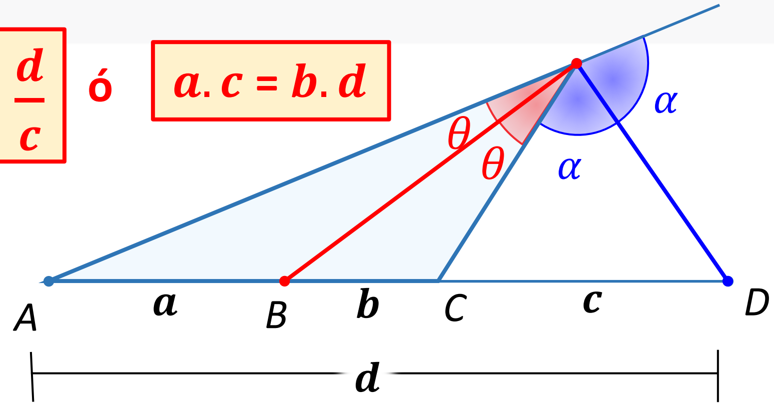
Si $\overline{BQ}$ es bisectriz

$$\frac{m}{n} = \frac{x}{y}$$



OBSERVACION:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$ ó $$a.c = b.d$$



UNI

2008-I

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la bisectriz interior BD. Por D se levanta una perpendicular al segmento AC que interseca a $\overline{BC}$ en M. Si AD=30cm y DC=40cm, entonces la medida del perímetro del triángulo BMD en centímetros es:

A) $30 + 24\sqrt{2}$ B) $32 + 24\sqrt{2}$ C) $34 + 24\sqrt{2}$

D) $35 + 24\sqrt{2}$ E) $36 + 24\sqrt{2}$

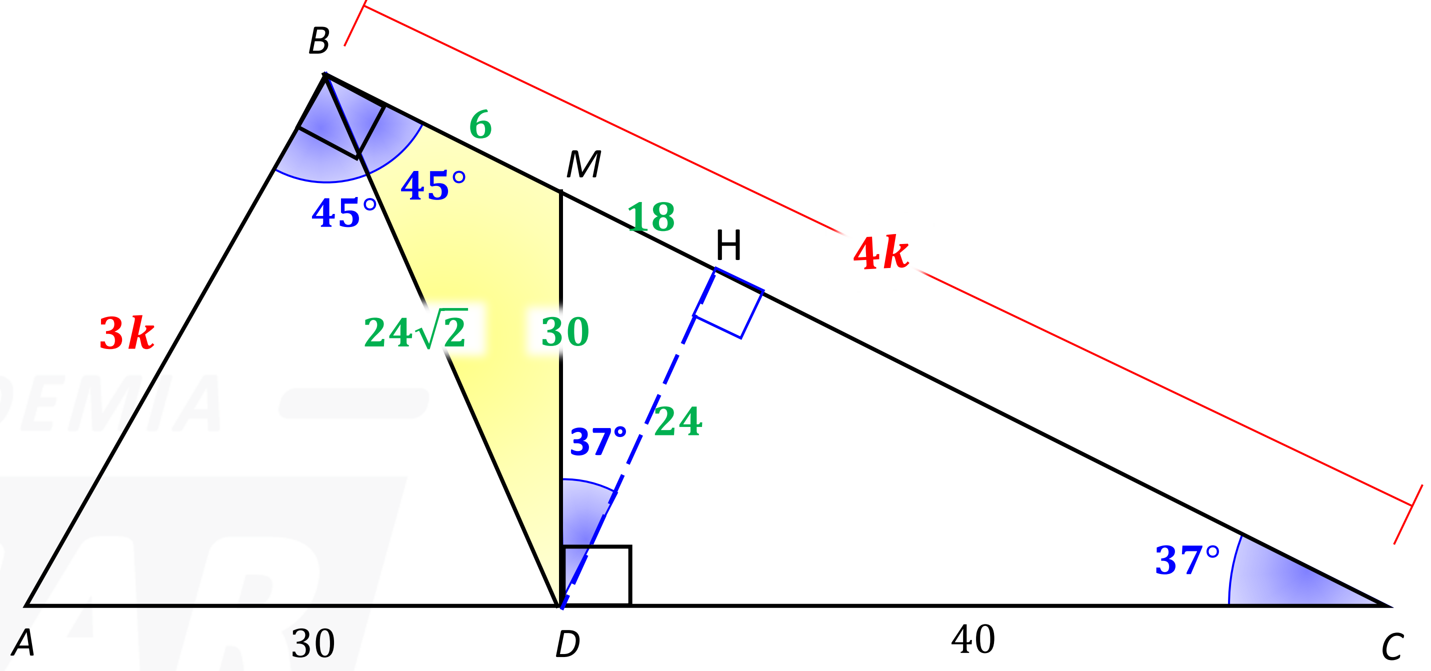
Resolución

Piden: $2\,p_{\Delta BMD}$

- Por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$$

- Trazamos $\overline{DH} \perp \overline{BC}$



- Ahora aprovecharemos los triángulos notables:
  - ✓ En el ΔDHC: DH=24
  - ✓ En el ΔBHD: BD=$24\sqrt{2}$
  - ✓ En el ΔDMH: MH=18 ; luego: BM=6
  - ✓ En el ΔMHD: MD=30

- Luego : $2\,p_{\Delta BMD} = 30+6+24\sqrt{2}$

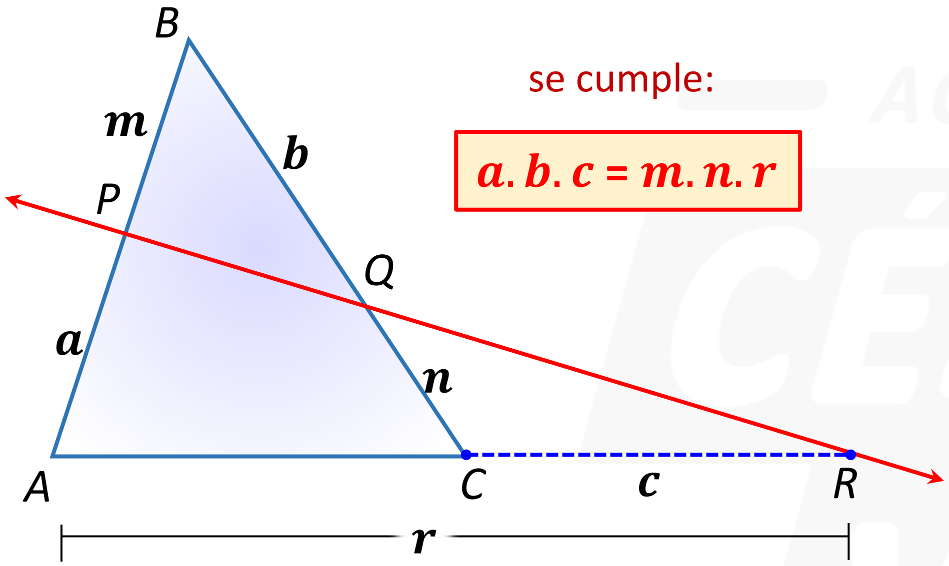
$$\therefore 2\,p_{\Delta BMD} = 36 + 24\sqrt{2}$$

Clave E

TEOREMAS.

TEOREMA DE MENELAO.

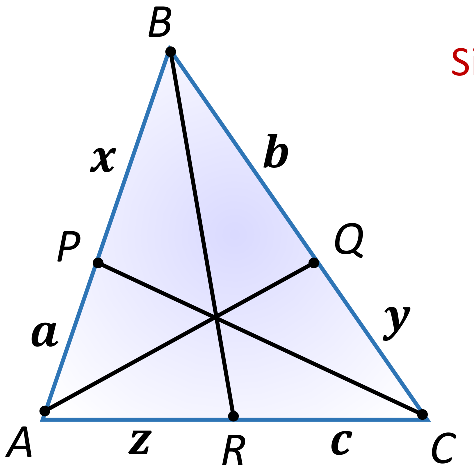
Si se traza una recta secantes a los lados.



se cumple:

$$\boxed{a.b.c = m.n.r}$$

TEOREMA DE CEVA.

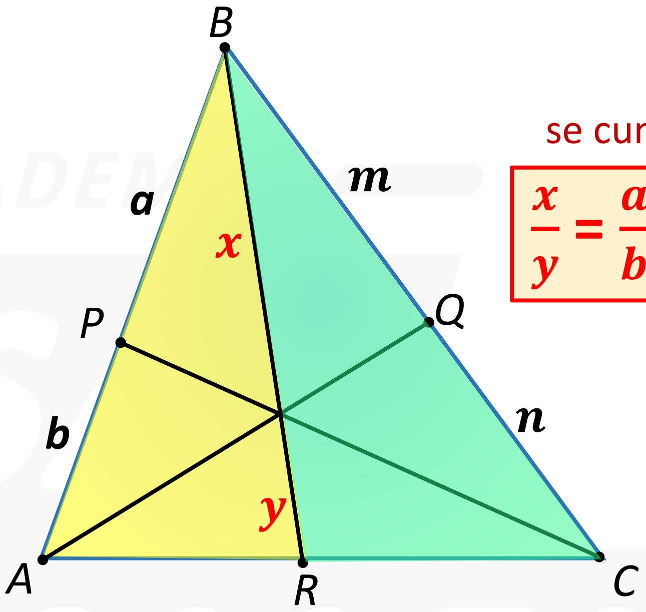


Si se trazan cevianas concurrentes.

se cumple:

$$\boxed{a.b.c = x.y.z}$$

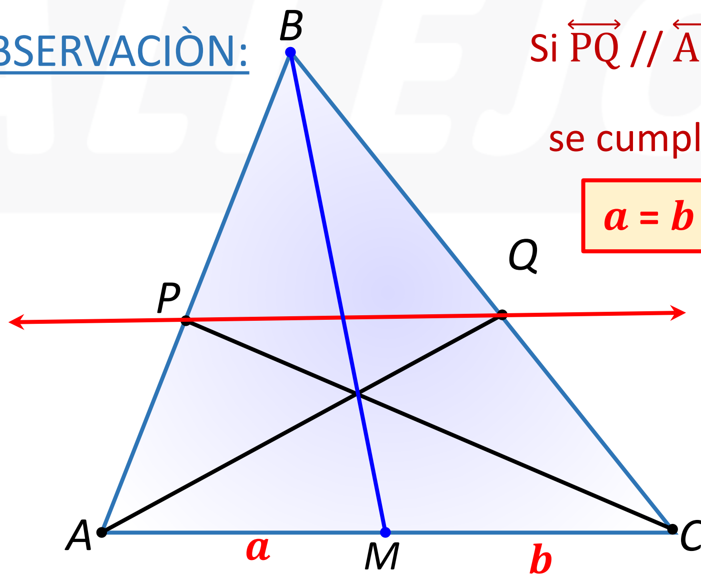
TEOREMA DE VAN AUBEL.



se cumple:

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n}}$$

OBSERVACIÒN:



Si $\overleftrightarrow{PQ} \,//\, \overleftrightarrow{AC}$

se cumple:

$$\boxed{a = b}$$

Demostración

- Por teorema de Menelao

ΔABR: $b.x.(RC) = a.y.(AC)$

$$\Rightarrow \frac{x.(RC)}{y.(AC)} = \frac{a}{b} \quad \text{..........(I)}$$

ΔCBR: $n.x.(AR) = m.y.(AC)$

$$\Rightarrow \frac{x.(AR)}{y.(AC)} = \frac{m}{n} \quad \text{..........(II)}$$

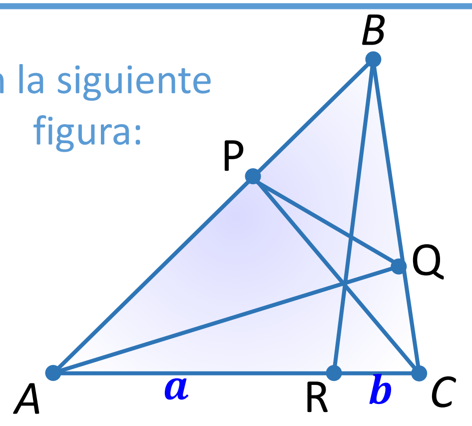
- De (I) + (II)

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{a}{b} + \frac{m}{n}$$

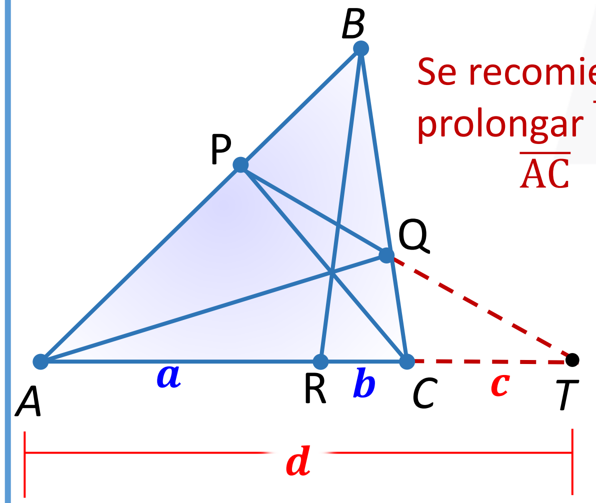
SUGERENCIAS ADICIONALES

Recomendaciones a situaciones frecuentes

En la siguiente figura:



Se recomienda prolongar $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$

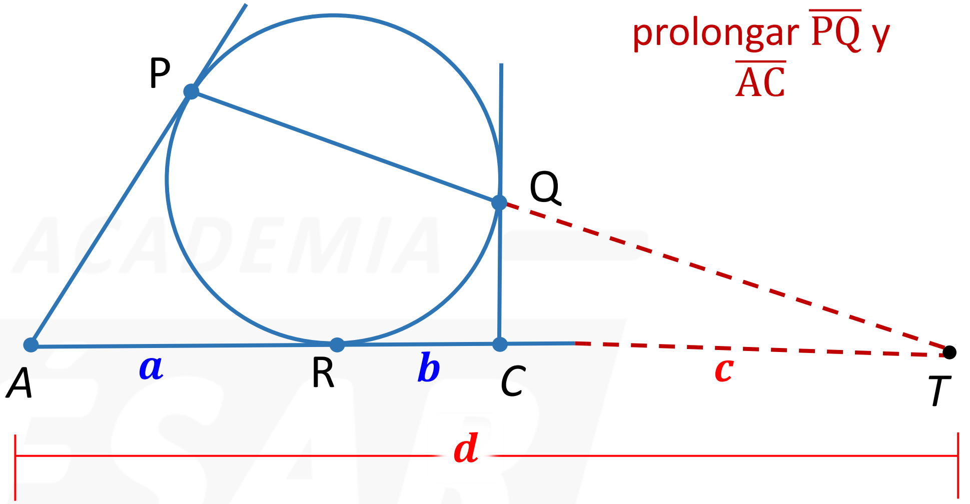


A,R,C y T forman una cuaterna armónica.

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{d}{c}}$ ó $\boxed{a.c = b.d}$

También:

Si P ,Q y R son puntos de tangencia:



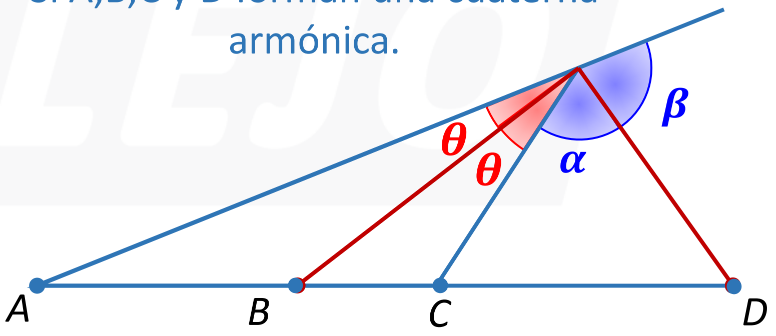
Se recomienda prolongar $\overline{PQ}$ y $\overline{AC}$

Luego:
A,R,C y T forman una cuaterna armónica.

$\Rightarrow$ $\boxed{a.c = b.d}$

También:

Si A,B,C y D forman una cuaterna armónica.



$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = \beta}$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe