academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Números Complejos

Semana 01

Docente: José Luis Vásquez C.

1. Calcule el valor de la expresión S.

$$S=i+2i^3+3i^5+4i^7+\ldots+100i^{199}$$

A) $-50i$ B) -50 C) $100i$
D) $-100i$ E) 0

Resolución

2. Calcule $\overline{z}+z^*$ si se tiene que
$z=(1+2i)^5+(1-2i)^5+|z|$

A) 2　　B) 4　　C) 6
D) –2　　~~E)~~ 0

Resolución

$$w=(1+2i)^5 \rightarrow \overline{w}=\overline{(1+2i)^5}$$

$$\overline{w}=(\overline{1+2i})^5=(1-2i)^5$$

Luego: $z=\underbrace{w+\overline{w}}+|z|$

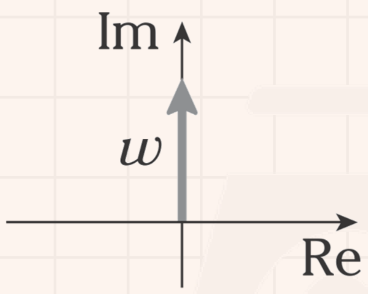
$$z=2\mathrm{Re}(z)+\underbrace{|z|}_{\mathbb{R}}$$

$\longrightarrow z$ es un complejo real.

entonces: $\overline{z}=z$

$\therefore\ \overline{z}+z^*=z+\underbrace{z^*}_{-z}=\underline{0}$

3. La representación gráfica de $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ es la siguiente:



determine $z\times\bar{z}$.

A) 1

B) $\sqrt{2}$

C) $\dfrac{1}{2}$

D) $\dfrac{1}{4}$

E) $\sqrt{3}$

Resolución

4. Halle el módulo de z, donde

$$z=\frac{\left(2+i\sqrt{5}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)^{3}}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$$

A) $5\sqrt{2}$
~~B)~~ $6\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $7\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{2}$

UNI 2022 - I

Resolución

$$|z|=\left|\frac{(2+i\sqrt{5})\,(1+i\sqrt{3})^{3}}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$$

$$|z|=\frac{|2+\sqrt{5}i|\;|1+\sqrt{3}i|^{3}}{|\sqrt{5}+\sqrt{3}i|}$$

$$|z|=\frac{\sqrt{2^2+\sqrt{5}^2}\;\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}^{\,3}}{\sqrt{\sqrt{5}^2+\sqrt{3}^2}}$$

$$|z|=\frac{3\cdot 2^3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ |z|=\underline{6\sqrt{2}}$$

5. Calcule la suma de todos los $z \in \mathbb{C}$ de manera que cumpla la igualdad $z^2 = 2\bar{z}i$.

A) 1

B) 0

C) 2

D) $\frac{1}{2}$

E) -2

Resolución

6. Si $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$, entonces, determine

$$\left(\overline{z}-z^2\right)^5+z^3$$

$\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$

A) 0 B) 2 ~~C)~~ 1

D) 3 E) –1

Resolución

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2z=-1+\sqrt{3}i$$

$$(2z+1)^2=(\sqrt{3}i)^2$$

$$4z^2+4z+1=-3 \rightarrow 4z^2+4z+4=0$$

$$\rightarrow z^2+z+1=0 \rightsquigarrow -z^2=z+1$$

$$\therefore (z-1)(z^2+z+1)=0(z-1)$$

$$z^3-1=0 \rightarrow z^3=1$$

reempl. en lo que piden

$$(\overline{z}-z^2)^5+\underbrace{z^3}_{1}=(\underbrace{\overline{z}+z}_{2\mathrm{Re}(z)}+1)^5+1$$

$$=\underbrace{(-1+1)}_{0}^5+1=1$$

7. Exprese en su forma cis el resultado de la división $\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$.

A) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

B) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

C) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

D) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

E) $\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

Resolución

8. Si $z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{24}\right)$, entonces, determine la parte real de $(z^{12}+z^{8}+z^{6})$.

A) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt[3]{2}$

D) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}$

Resolución

Notamos: $Z=\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i}$

- $e^{\frac{\pi}{2}i}=\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}+i\underbrace{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}}_{1}=i$
- $e^{\frac{\pi}{3}i}=\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- $e^{\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

Piden:

$$Z^{12}+Z^{8}+Z^{6}=\left(\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i}\right)^{12}+\left(\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i}\right)^{8}+\left(\sqrt[6]{2}\,e^{\frac{\pi}{24}i}\right)^{6}$$

$$=2^{2}e^{\frac{\pi}{2}i}+\sqrt[3]{2}^{\,4}e^{\frac{\pi}{3}i}+2e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$=4(i)+\boxed{2\sqrt[3]{2}}\left(\boxed{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\boxed{2}\left(\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

$$=(\sqrt[3]{2}+\sqrt{2})+(\qquad)i$$

$\therefore\ Re(z^{12}+z^{8}+z^{6})=\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$

9. Determine el valor de la siguiente expresión.

$$i+3i^2+5i^3+7i^4+\ldots+39i^{20}$$

A) $20(1-i)$
B) $10(1+i)$
C) $10(1-i)$
D) $20(1+i)$
E) 0

Resolución

10. Calcule la parte imaginaria del resultado de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\frac{5+2i}{2-5i}\right)^4+\frac{1}{1+i}$$

A) 3 ~~B)~~ $-\frac{3}{2}$ C) $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{3}{4}$ E) -1

Resolución

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\frac{(5+2i)\,i}{(2-5i)\,i}\right)^4+\frac{1\,(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$(i)^3+\left(\frac{\cancel{(5+2i)}\,i}{\cancel{(5+2i)}}\right)^4+\frac{1-i}{2}$$

$$-i+1+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$$

$$\therefore\ \mathrm{Im}(\quad)=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

11. Si $z=\dfrac{n+2i}{4-6i}$ es un complejo real y $w=\dfrac{3+mi}{2+4i}$ es un imaginario puro, entonces, determine mn.

A) 6 B) 2 C) 1

D) 3 E) –1

Resolución

12. Determine el $|z|$ si se sabe que

$$\bar{z}^2 i = z\left(\frac{(2+i)^3}{(2-i)}\cdot\frac{(3+4i)}{2(1-i)^2}\right)$$

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{1}{4}$

D) 3 E) 1

Resolución

$$\left|\bar{z}^2 i\right| = \left|z\,\frac{(2+i)^3(3+4i)}{(2-i)\,2(1-i)^2}\right|$$

$$|\bar{z}|^2\underbrace{|i|}_{1} = |z|\,\frac{|2+i|^3\,\overbrace{|3+4i|}^{5}}{|2-i|\,|2|\,\underbrace{|1-i|^2}_{\sqrt{2}}}$$

$$\cancel{|z|}^2 = \cancel{|z|}\,\frac{\sqrt{2^2+1^2}^{\,3}\cdot 5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\;2\;\sqrt{2}^{\,2}}$$

$$|z| = \frac{\cancel{\sqrt{5}}^{\,3}\cdot 5}{\cancel{\sqrt{5}}\,(4)} = \frac{25}{4}$$

13. Determine el resultado de la siguiente expresión.

$$\frac{|z+1|^2+|z-1|^2}{|z+1|^2-|z-1|^2}$$

A) $\dfrac{|z|^2+1}{2z}$

B) $\dfrac{z^2+1}{\bar{z}+z}$

C) $\dfrac{|z|^2+1}{\bar{z}+z}$

D) $\dfrac{z^2+1}{2z}$

E) $\dfrac{|z|^2+1}{2\bar{z}}$

Resolución

14. Si $z=1+i$ y la sumatoria

$$S=\sum_{n=0}^{999} z^n$$

entonces, el valor $1+iS$ es

A) 0 B) 1 C) 2^{1000}
D) 2^{500} E) -1

Resolución

Recordar

#términos

$$1+r+r^2+r^3+\dots+r^n=\left(\frac{r^{\overbrace{n+1}}-1}{r-1}\right)$$

$$S=\sum_{n=0}^{999} z^n = \underbrace{z^0}_{1}+z^1+z^2+z^3+\dots+z^{999}$$

$$=\frac{z^{1000}-1}{z-1}$$

$$=\frac{(1+i)^{1000}-1}{\cancel{1}+i-\cancel{1}}=\frac{\left[(1+i)^4\right]^{250}-1}{i}$$

$$S=\frac{(-4)^{250}-1}{i}$$

$$iS=4^{250}-1$$

$$1+iS=(2^2)^{250}=$$

$$\therefore\ 1+iS=\boxed{2^{500}}$$

15. El número complejo z_0 satisface la ecuación:

$$\frac{5+3i}{-4+i}=\frac{2i}{z_0}-2i$$

Determine el valor de $f(z_0)$, donde
$f(x)=x^2-3x+3$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-2+i$
D) $2+\sqrt{2}i$ E) i

Resolución

16. Sean z_1 y z_2 complejos opuestos, de manera que

$$z_1 = \frac{m}{1+i} + n \quad \text{y} \quad z_2 = -m - \frac{1}{i}$$

Calcule el valor de mn.

A) -2 ~~B)~~ 2 C) 6
D) 4 E) -6

Resolución

Recorda

$$z = w$$

$$a + bi = m + ni \Rightarrow a = m \wedge b = n.$$

Por dato: $z_1 + z_2 = 0$

$$z_1 = -z_2$$

$$\frac{m(1-i)}{(1+i)(1-i)} + n = -\left(-m - \frac{1i}{ii}\right)$$

$$\frac{m - mi}{2} + n = m - i$$

$$\frac{m}{2} + n - \frac{m}{2}i = m - 1i$$

$$\frac{m}{2} + n = m \quad ; \quad -\frac{m}{2} = -1$$

$$\downarrow \qquad\qquad m = 2$$

$$1 + n = 2$$

$$n = 1$$

$$\therefore mn = 2$$

17. Si $z=\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}i$ y

$w=\sqrt{1+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}i$

calcule el valor de $|z\overline{w}+1|^2-|z+w|^2$.

A) 4 B) 8 C) 24

D) 30 E) 41

Resolución

18. Si $|z+ai|=|z+bi|$ con $a;b\in\mathbb{R}$; $a\neq b$; $z\in\mathbb{C}$, determine $z-\bar{z}$.

A) $-(a+b)i$ B) $(a+b)i$ C) $2(a+b)i$

D) $(a-b)i$ E) $(a^2-b^2)i$

Resolución

Recordar.

$$\boxed{|z|^2=z\bar{z}}$$

Del dato:

$$|z+ai|^2=|z+bi|^2$$

$$(z+ai)(\overline{z+ai})=(z+bi)(\overline{z+bi})$$

$$(z+ai)(\bar{z}-ai)=(z+bi)(\bar{z}-bi)$$

$$\cancel{z\bar{z}}-zai+\bar{z}ai+a^2=\cancel{z\bar{z}}-zbi+\bar{z}bi+b^2$$

$$a^2-b^2=z(a-b)i-\bar{z}(a-b)i$$

$$\cancel{(a-b)}(a+b)=z\cancel{(a-b)}i-\bar{z}\cancel{(a-b)}i$$

$$(a+b=(z-\bar{z})i)$$

$\times i$

$$-(a+b)i=z-\bar{z}$$

19. Si $z \in \mathbb{C} / \left| z * \left(1 - \sqrt{3}i\right) \right| = 4$ y $\arg(zi) = 315°$, determine z^8.

A) 64 B) 256 C) 128

D) 32 E) 512

Resolución

20. Calcule el módulo de z.

$$z=\frac{\left(2e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^{3}}{\left(e^{\pi i}+e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{5}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1

D) 3 E) 4

Resolución

21. Determine $|ze^{i}|$ si $z=|z|e^{\theta i}$ de modo que cumpla lo siguiente:

$$2z+|z|e^{(\theta+\pi)i}=(1-i)(4-3i)$$

A) $5e\sqrt{2}$ B) $3e\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$

D) 5 E) $4\sqrt{2}$

Resolución

22. Calcule el valor reducido de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}+\sqrt{3}i+e^{\frac{3\pi}{2}i}}{1-\sqrt{3}i}\right)^{31}$$

A) $-\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

C) $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

D) $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

E) 1

Resolución

23. Si $z\in\mathbb{C}$ tal que $e^{z}=2$ entonces determine el valor de $\operatorname{Re}(z)+\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|e^{z}|}$.

A) $\ln2+k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$
B) $\ln2+2k\pi i;\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$
C) $\ln2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$
D) $\ln4+k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$
E) $\ln3+2k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$

Resolución

$$e^{z}=2$$

$$e^{x+yi}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^{x}\cdot e^{yi}=2e^{\frac{\pi}{2}i}$$

24. Determine todos los $x \in \mathbb{R}$; i es la unidad imaginaria, de modo que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{\pi + ei}{e - \pi i} = e^{2xi}$$

A) $\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

C) $\frac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

D) $\frac{\pi}{8} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

E) $\frac{\pi}{4} + 4k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Resolución

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Números Complejos

Semana 01

Test en línea

1. Calcule el valor de

$$S = \sum_{n=0}^{100} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$$

A) 100 B) 0 C) 1
D) –1 E) i

Resolución

2. Determine el módulo del complejo

$$z=\frac{(3+2i)(-3+4i)^2}{1+2\sqrt{3}i}$$

A) 25 B) 1 C) 5
D) 10 E) 2

Resolución

3. Sea el complejo $z=x+yi$ que satisface la ecuación

$$(x+1)^2+2i=9+(5+y)i$$

Determine la suma de los números complejos z que son solución.

A) 0

B) $-6i$

C) $2-3i$

D) $-2-6i$

E) $2+6i$

Resolución

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe