academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Ciclo INTENSIVO UNI

ÁLGEBRA

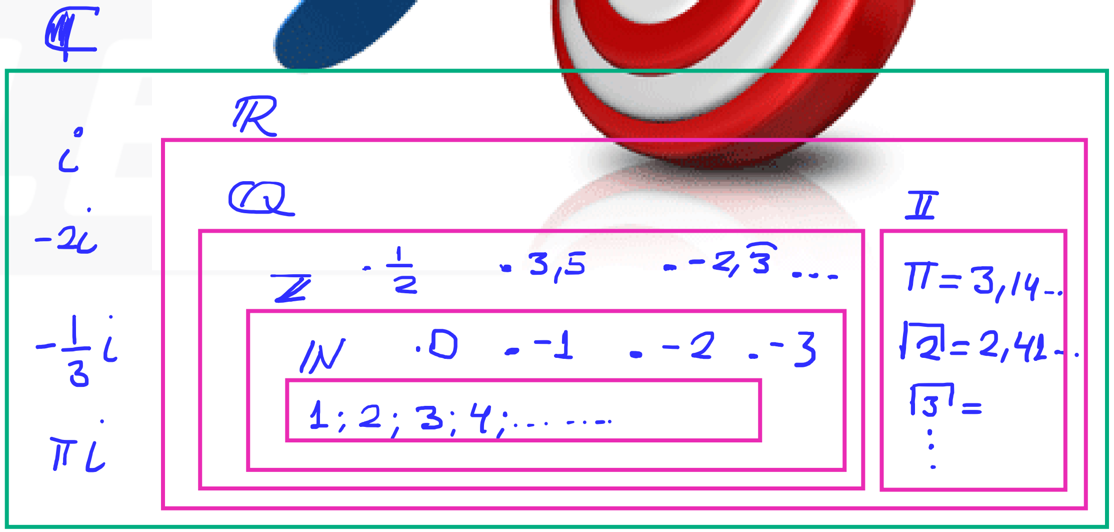
Números Complejos

Semana 01

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

OBJETIVOS:

- ✓ Manejar las diversas formas como expresar los números complejos.
- ✓ Operar adecuadamente los números complejos y sus propiedades.
- ✓ Resolver problemas tipo examen de admisión que involucren a los números complejos



UNIDAD IMAGINARIA

Se denota por Euler como "i" y se define:

$$i = \sqrt{-1}$$

Donde: $$i^2 = -1$$

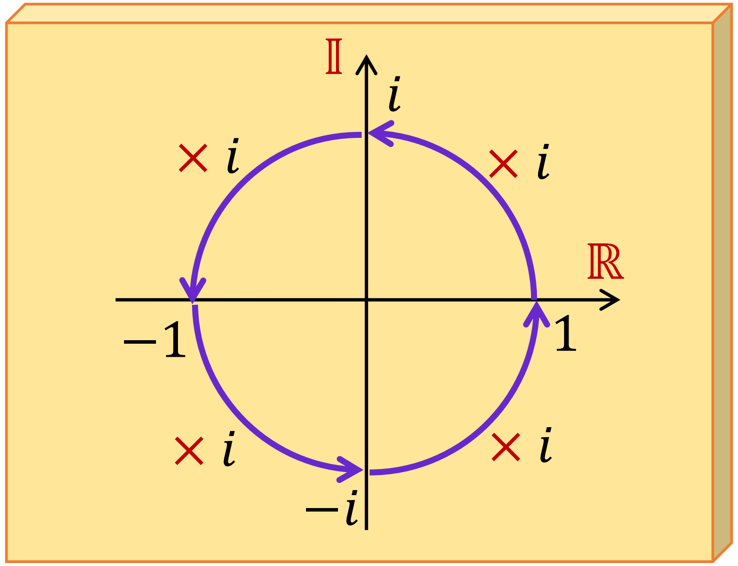
POTENCIAS ENTERAS DE i

Se definen: $i^0 = 1 \quad i^1 = i$

Donde:

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Cada 4 potencias se repiten



PROPIEDADES

Sean $k, n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

1 $\boldsymbol{i^{4k} = i^{\dot{4}} = 1}$

Ejemplos

- $i^{40} = i^{4(10)} = i^{\dot{4}} = 1$
- $i^{56\underline{16}} = i^{16} = i^{\dot{4}} = 1$
- $i^{-32} = i^{\dot{4}} = 1$

2 $i^{\cancel{4k}+n} = i^n$

Ejemplos

- $i^{25} = i^{\overset{\dot{4}}{24}+1} = i^1 = i$
- $i^{1746} = i^{\overbrace{46}^{\overset{0}{4}+2}} = i^{\overset{\dot{4}}{44}+2} = i^2 = -1$
- $i^{78931} = i^{\overbrace{31}^{\overset{0}{4}+3}} = i^{\overset{\dot{4}}{28}+3} = i^3 = -i$
- $i^{-15} = i^{\overset{\dot{4}}{-16}+1} = i^1 = i$

$= i^{-12-3} = i^{\overset{0}{4}-3} = i^{-3} = i$

3 $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{\dot{4}} = 0$

Ejemplos

- $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{\overbrace{16}^{\overset{0}{4}}} = 0$
- $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{\overbrace{100}^{\overset{0}{4}}} = 0$
- $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{42} =$

$= \underbrace{i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{40}}_{0} + i^{\overbrace{41}^{\overset{0}{4}+1}} + i^{\overbrace{42}^{\overset{0}{4}+2}}$

$= i^1 + i^2 = i - 1$

Aplicación:

Calcule la siguiente sumatoria:

$$S = i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + \cdots - 48i^{48}$$

e indique el valor de $(1+i)S$.

A) $48i$ B) $-48i$ C) 0 D) 48 E) -48

Resolución:

$$S = i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + \ldots - 48i^{48}$$

$$iS = i^2 - 2i^3 + 3i^4 - 4i^5 + \ldots + 47i^{48} - 48i^{49}$$

(+)

$$S + iS = \underbrace{\underbrace{i - i^2 + i^3 - i^4}_{0} + \ldots\ldots - i^{48}}_{0} - 48i^{49}$$

(-1) $(-i)$ (1)

$$\Rightarrow (1+i)S = -48i^{\overset{o}{4}+1}$$

$$\therefore \boxed{(1+i)S = -48i}$$

DEFINICIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo z es un par ordenado de número reales

$$z = (a; b) \qquad a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$z = (a; b) = a + bi \qquad a \text{ y } b \in \mathbb{R}; \quad i = \sqrt{-1}$$

Parte real: $Re(z)$ — Parte imaginaria: $Im(z)$

Ejemplos

- $z = 3 + 4i$

  $Re(z) = 3$
  $Im(z) = 4$

- $w = 3 - i$

  $Re(w) = 3$
  $Im(w) = -1$

Definiciones: $a \text{ y } b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

$z = a + bi$	$z = 3 + 4i$	$w = 3 - i$
Conjugado $\bar{z} = a - bi$	$\bar{z} = 3 - 4i$	$\bar{w} = 3 + i$
Opuesto $z^* = -a - bi$	$z^* = -3 - 4i$	$w^* = -3 + i$
Módulo $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	$\lvert w\rvert = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

IGUALDAD DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS

$i^2 = -1$

$a, b, m, n \in \mathbb{R};\ i = \sqrt{-1}$

$a + bi = m + ni \leftrightarrow a = m \ \wedge \ b = n$

OPERACIONES

Adición

$$\begin{array}{r} 3 + 7i \quad + \\ 2 - 4i \\ \hline 5 + 3i \end{array}$$

Sustracción

$$\begin{array}{r} 5 + 8i \quad - \\ 2 - 4i \\ \hline 3 + 12i \end{array}$$

Multiplicación

$$(4 + 3i)(2 - 3i)$$

$$= 8 - 12i + 6i - 9\underbrace{i^2}_{-1}$$

$$= 17 - 6i$$

División

$$\frac{(1 + 2i)}{(3 + i)} \cdot \frac{(3 - i)}{(3 - i)}$$

$$= \frac{5 + 5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

RESULTADOS NOTABLES

$(1 + i)^2 = 2i$	$(1 + i)^4 = -4$	$\frac{1 + i}{1 - i} = i$
$(1 - i)^2 = -2i$	$(1 - i)^4 = -4$	$\frac{1 - i}{1 + i} = -i$

Obs: $x^2 + y^2 = -2$

Una solución es cuando $(x = y = i)$

Aplicación:

El número complejo z satisface la ecuación:

$$\frac{3-i}{2+4i}=\frac{i}{z}-i$$

Determine el valor de $f(z)$; donde

$$f(x)=x^2-2x-2$$

~~A)~~ $4i$ B) $-4i$ C) -4 D) 4 E) 0

Resolución:

$$\frac{i}{z}=\underbrace{\frac{3-i}{2+4i}+i}$$

$$\frac{i}{z}=\frac{-1+i}{2+4i}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{i}=\frac{2+4i}{-1+i} \Rightarrow z=\frac{-4+2i}{-1+i}$$

$$z=\frac{(4-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+4i-2i+2}{1^2-i^2}$$

$$z=\frac{6+2i}{2}=3+i$$

Luego: $f(x)=\underbrace{x^2-2x+1}-3$

$$f(x)=(x-1)^2-3$$

$$\Rightarrow f(z)=(3+i-1)^2-3=(2+i)^2-3$$

$$f(z)=\cancel{4}+4i+\cancel{i^2}\cancel{-3}$$

$$\therefore f(z)=4i$$

Propiedades del conjugado

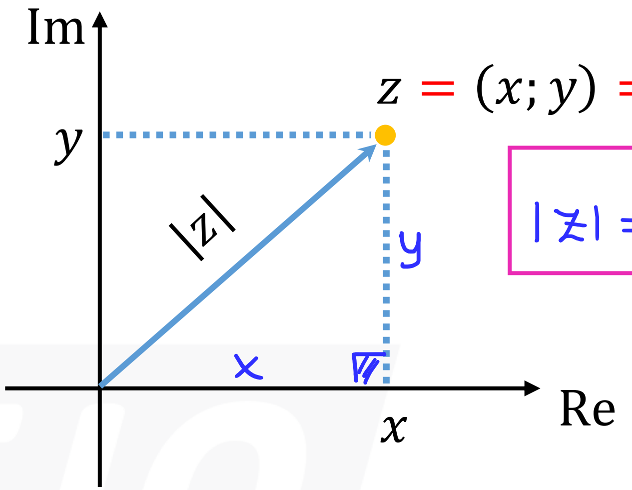
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
6. $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
8. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
9. $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\overline{z}}$

Ejemplos

- $\overline{z + (1 + 4i)} = \overline{z} + \overline{1+4i} = \overline{z} + 1 - 4i$
- $\overline{z \times (1 + i)} = \overline{z}\,(\overline{1+i}) = \overline{z}\,(1-i)$
- $\overline{(2 + 4i)^3} = (\overline{2+4i})^3 = (2-4i)^3$
- $\overline{\sqrt{4 + 7i}} = \sqrt{\overline{4+7i}} = \sqrt{4-7i}$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DEL MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea el complejo $z = x + yi$, su módulo es graficamente, la distancia del polo al afijo



$\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$

Ejemplos

- $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
- $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Propiedades del módulo

1) $\lvert z\rvert \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$	5) $\left\lvert \dfrac{z}{w} \right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$
2) $\lvert z\rvert = \lvert \bar{z}\rvert = \lvert z^*\rvert$	
3) $\lvert z\rvert^2 = z.\bar{z}$	6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
4) $\lvert z.w\rvert = \lvert z\rvert \lvert w\rvert$	7) $\left\lvert \sqrt[n]{z} \right\rvert = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}$

Ejemplos

- $|3+4i| = |3-4i| = |-3-4i| = 5$
- $\underset{z}{(1+\sqrt{3}i)} \cdot \underset{\bar{z}}{(1-\sqrt{3}i)} = \underbrace{1^2+\sqrt{3}^2}_{|z|^2} = 4$
- $|(1+i)(3+4i)| = |1+i||3+4i|$

$$= \sqrt{2} \times 5$$

Aplicación:

Halle el módulo de z donde

$$z=\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$$

$A)\ 5\sqrt{2}$ $\quad \cancel{B})\ 6\sqrt{2}$ $\quad C)\ 3\sqrt{2}$ $\quad D)\ 7\sqrt{2}$ $\quad E)\ 4\sqrt{2}$

Resolución:

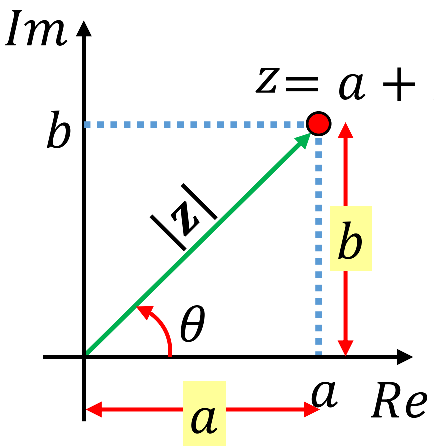
$$|z|=\left|\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}\right|$$

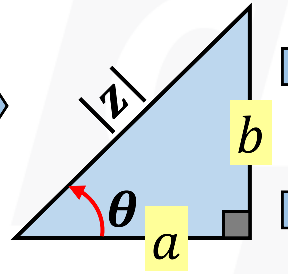
$$|z|=\frac{|2+i\sqrt{5}|\,|1+i\sqrt{5}|^3}{|\sqrt{5}+i\sqrt{3}|}$$

$|z|=$

FORMA POLAR Y EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

Sea el complejo $z = a + bi$





$b = |z|\text{sen}\theta$

$a = |z|\cos\theta$

Como $z = a + bi$

$\Rightarrow \quad z = |z|\cos\theta + |z|\text{sen}\theta . i$

$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)}$ Forma polar o trigonométrica

θ : Argumento de z **(Arg(z))** $\quad \mathbf{0 \leq \theta < 2\pi}$

Observación

$$\cos\theta + i\,\text{sen}\theta = \text{cis}\theta = e^{\theta i}$$

$\Rightarrow$

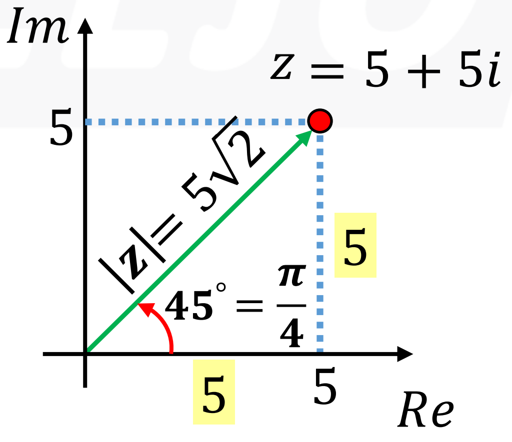
$\boxed{z = |z|\text{cis}(\theta)}$ **Forma cis**

$\boxed{z = |z|e^{\theta i}}$ **Forma exponencial**

Ejemplos

Exprese en las otras formas los siguientes números:

1) $z = 5 + 5i$

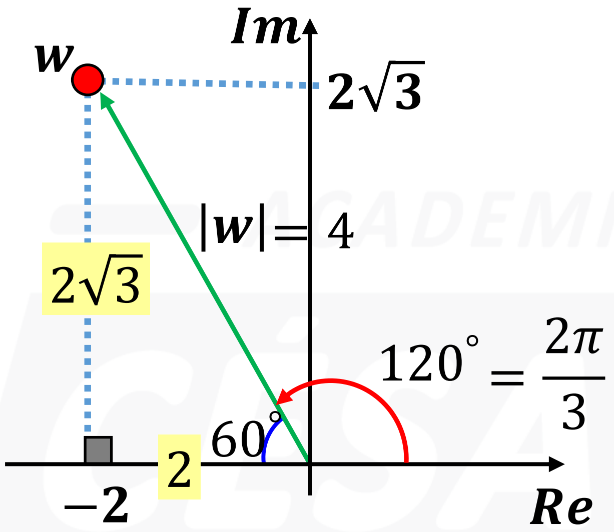


$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = 5\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$z = 5\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

2) $w = -2 + 2\sqrt{3}i$



$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 4\,\text{cis}\,\frac{2\pi}{3}$$

$$z = 4\,e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Complejos Notables

$\mathbf{1} = (\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = \text{cis}(0) = e^{0i}$	$\boldsymbol{i} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$-\mathbf{1} = (\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = \text{cis}(\pi) = e^{\pi i}$	$-\boldsymbol{i} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

TEOREMAS

Sean los números complejos z y w no nulos.

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|\operatorname{cis}(\theta) = |z|e^{\theta i}$$

$$w = |w|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) = |w|\operatorname{cis}(\alpha) = |w|e^{\alpha i}$$

Donde se cumplen:

$$\boldsymbol{z.w} = \begin{cases} |z|.|w|[\cos(\theta+\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta+\alpha)] \\ |z|.|w|\operatorname{cis}(\theta+\alpha) \\ |z|.|w|\,e^{(\theta+\alpha)i} \end{cases}$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = \begin{cases} \dfrac{|z|}{|w|}[\cos(\theta-\alpha) + i\operatorname{sen}(\theta-\alpha)] \\ \dfrac{|z|}{|w|}\operatorname{cis}(\theta-\alpha) \\ \dfrac{|z|}{|w|}e^{(\theta-\alpha)i} \end{cases}$$

Ejemplos

Sean los números complejos

$$z = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \text{ y } w = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\boldsymbol{z.w} = 6.2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{z.w} = 12\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 12\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 12e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = \frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right) = 3\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3e^{\frac{\pi}{8}i}$$

TEOREMA DE MOIVRÉ

Dado el número complejo no nulo

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = |z|\,e^{\theta i}$$

Se tiene $(n \in \mathbb{N})$

I. $$z^n = \begin{cases} |z|^n\,[\cos(\theta n) + i\operatorname{sen}(\theta n)] \\ |z|^n \operatorname{cis}(\theta n) \\ |z|^n e^{(\theta n)i} \end{cases}$$

Ejemplos

1. $(\cos 36° + i\operatorname{sen}36°)^5 = \cos(36°.5) + i\operatorname{sen}(36°.5)$

$= \cos(180°) + i\operatorname{sen}(180°)$

$= -1 + i.0$

$= -1$

2. $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\dfrac{\pi}{3}\right)^{18} = \sqrt{2}^{18}\operatorname{cis}\left(18.\dfrac{\pi}{3}\right)$

$= 2^9\operatorname{cis}(6\pi)$

$= 512\operatorname{cis}(0)$

$= 512\,(1 + 0i)$

$= 512$

3. $\left(\sqrt{5}e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^6 = \sqrt{5}^6 . e^{6\cdot\frac{7\pi}{4}i}$

$= 5^3 e^{\frac{21\pi}{2}i}$

$= 125\,e^{\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right)i}$

$= 125\,e^{\frac{\pi}{2}i}$

$= 125\,(0 + 1i)$

$= 125i$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe