academiacesarvallejo.edu.pe

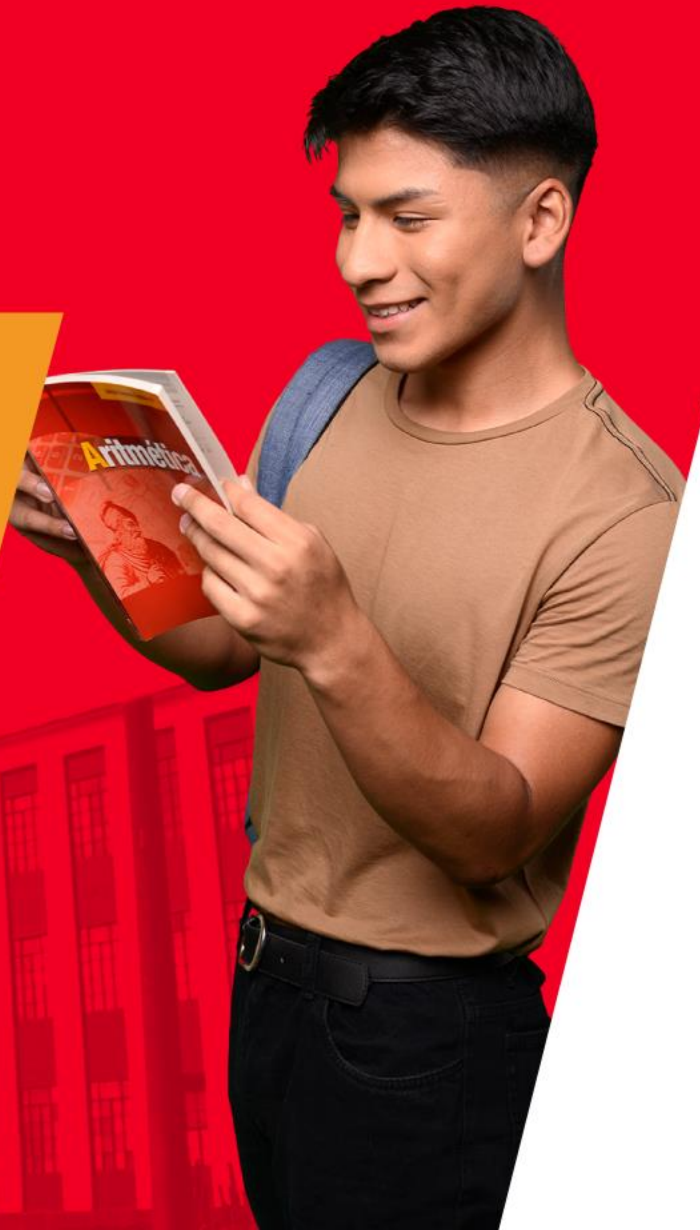
Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI



ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Ecuaciones polinomiales

Semana 02

Docente: Gustavo Poma Quiroz

Objetivos:

- ✓ Manejar las definiciones básicas sobre ecuaciones polinomiales.
- ✓ Resolver eficientemente las ecuaciones polinomiales más comunes.
- ✓ Desarrollar destrezas en la resolución de problemas tipo referidos al tema de ecuaciones.

ECUACIÓN

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones matemáticas, donde esta presente al menos una variable ahora llamada incógnita.

Ejemplos:

- $x^2 = x + 12$
- $x^2 = |x - 2|$
- $log_3{}^2 x - 3log_3 x = 2$

1. Teorema

$$\text{Si} \quad AB = 0 \leftrightarrow A = 0 \ \vee \ B = 0$$

Ejemplo

Si $(x-5)(x+7) = 0$

$\longrightarrow \quad x - 5 = 0 \quad \vee \quad x + 7 = 0$

$\longrightarrow \quad x = 5 \quad \vee \quad x = -7$

2. Solución de una ecuación

Es el valor que al reemplazar por la incógnita verifica la ecuación.

3. Conjunto solución (CS)

Es el conjunto formado por las soluciones de una ecuación.

Ejemplo

Resuelva la ecuación $(x^2 + 8x)(x - 2) = 0$

$\rightarrow x^2 + 8x = 0 \ \vee \ x - 2 = 0$

$x(x+8) = 0 \ \vee \ x = 2$

$x = 0 \ \vee \ x + 8 = 0 \ \vee \ x = 2$

$\underbrace{x = 0 \ \vee \ x = -8 \ \vee \ x = 2}_{\text{soluciones}}$

$\therefore CS = \{0; -8; 2\}$

Nota:

Resolver una ec. significa hallar su CS

RAÍZ DE UN POLINOMIO

1. Definición

α

α es raíz del polinomio $P_{(x)} \leftrightarrow P_{(\alpha)} = 0$

Ejemplos

- $P_{(x)} = 3x - 15$

5 es raíz del polinomio ya que : $P_{(5)} = 0$

- $F_{(x)} = x^2 + x - 2$

Factorizando

$$F_{(x)} = x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{cc} x & 2 \\ x & -1 \end{array}$$

$$F_{(x)} = (x+2)(x-1)$$

-2 es raíz del polinomio ya que : $F_{(-2)} = 0$

1 es raíz del polinomio ya que : $F_{(1)} = 0$

2. Multiplicidad de una raíz

Es la cantidad de veces que se repite una raíz de un polinomio.

Ejemplo

En el polinomio

$$P_{(x)} = (x+5)^2\,(x-2)^3$$

$$P_{(x)} = (x+5)(x+5)(x-2)(x-2)(x-2)$$

Sus raíces son: $-5, -5$ $, 2 \;\; , 2 \;\; , 2$

Raíz de multiplicidad dos o raíz doble

Raíz de multiplicidad tres o raíz triple

raices : $-5; -5; 2; 2; 2$

$\boxed{\#\text{raices} \geq \#\text{solucion}}$

Soluciones : $-5; 2 \rightarrow CS = \{-5; 2\}$

3. Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, posee al menos una raíz.

Corolario

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, tiene exactamente n raíces (contadas con la multiplicidad).

Ejemplos

- $R(x) = x^2 + 2x - 3$ tiene 2 raíces
- $Q(x) = 2x^3 - 11x + 9$ tiene 3 raíces

4. Teorema del factor

α es raíz de $P_{(x)} \leftrightarrow (x - \alpha)$ es factor de $P_{(x)}$

Ejemplos:

- Si -2 es raíz de $P_{(x)}$

$\rightarrow$ $(x - -2)$ es factor de $P_{(x)}$

$\rightarrow$ existe $q(x)$ tal que: $P_{(x)} = (x + 2)q(x)$

Consecuencias

- Si α es raíz doble de $P_{(x)}$

$\rightarrow$ $(x - \alpha)^2$ es factor de $P_{(x)}$

$\rightarrow$ existe $Q_{(x)}$ tal que: $P_{(x)} = (x - \alpha)^2 Q_{(x)}$

- Si α, β son raíces de $P_{(x)}$

$\longrightarrow$ $(x - \alpha)(x - \beta)$ es factor de $P_{(x)}$

$\Rightarrow P(x) = (x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$

Entonces la división

$$\frac{P_{(x)}}{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta} \quad \text{es exacta}$$

ECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \{a, b, c\} \subset \mathbb{C}, a \neq 0$$

Toda ecuación cuadrática tiene 2 raíces

1. Fórmula general

Las dos raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

son:

$$x_1 = \frac{-(b) + \sqrt{\Delta}}{2(a)} \quad ; \quad x_2 = \frac{-(b) - \sqrt{\Delta}}{2(a)}$$

Donde:

$\Delta = b^2 - 4ac$ es llamado **Discriminante**

Ejercicio

Sea la ecuación

$$3x^2 - 2ix - 1 = 0 \, ; i = \sqrt{-1}$$

$$\Delta = (-2i)^2 - 4(3)(-1) = -4 + 12$$

$$\Delta = 8$$

Las dos raíces de la ecuación son

$$x_1 = \frac{-(-2i) + \sqrt{8}}{2(3)} \quad ; \quad x_1 = \frac{-(-2i) - \sqrt{8}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{2i + 2\sqrt{2}}{2(3)} \quad ; \quad x_1 = \frac{2i - 2\sqrt{2}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{i + \sqrt{2}}{3} \quad ; \quad x_1 = \frac{i - \sqrt{2}}{3}$$

$$CS = \left\{\frac{i + \sqrt{2}}{3}, \frac{i - \sqrt{2}}{3}\right\}$$

2.- Naturaleza de las raíces

$$ax^2 + bx + c = 0\ ; \quad a \neq 0$$

Considerando los coeficientes reales

$\Delta > 0$	Raíces reales diferentes $(x_1 \neq x_2)$
$\Delta = 0$	Raíces reales e iguales (única solución)
$\Delta < 0$	Raíces imaginarias conjugadas

Ejemplo

Si las raíces de la ecuación $1x^2 - 6x - k = 0$ $(k \in \mathbb{R})$ son números imaginarios se cumple

$$\Delta < 0$$

$$(-6)^2 - 4(1)(-k) < 0$$

$$36 + 4k < 0$$

$$4k < -36$$

$$\longrightarrow \ k < -9$$

3. Teoremas (Cardano - Viete)

Sean x_1 , x_2 las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad a \neq 0$$

Se cumple:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$	$x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$	

Ejemplo

Sean x_1 , x_2 las raíces de la ecuación

$$7x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-5}{7} = \frac{5}{7}\ , \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{7}$$

4. Definiciones : $ax^2+bx+c=0$

4.1 Las raíces $\boldsymbol{x_1, x_2}$ serán llamadas:

- Raíces simétricas si $\boxed{x_1 + x_2 = 0}$ $\Rightarrow \boxed{b=0}$
- Raíces reciprocas si $\boxed{x_1 \cdot x_2 = 1}$ $\Rightarrow \boxed{a=c}$

4.2 Dos ecuaciones se dice que son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo

Las ecuaciones

- $(x-5)(x-7)=0 \quad \longrightarrow \quad CS = \{5, 7\}$
- $(x-5)^2(x-7)=0 \quad \longrightarrow \quad CS = \{5, 7\}$

tienen el mismo CS. entonces son equivalentes.

Ejercicio

Si las ecuaciones de incógnita x

$mx + \sqrt{3} = 5$ y $x^2 + ax + 2b = 0$

son equivalentes, halle la relación entre a y b.

Resolución

- $mx + \sqrt{3} = 5 \Rightarrow CS = \left\{ \dfrac{5-\sqrt{3}}{m} \right\} \Rightarrow$ Sol. Única
  $m \neq 0$
- $\underbrace{x^2 + ax + 2b = 0}_{\Delta = 0} \Rightarrow CS = \left\{ \dfrac{5-\sqrt{3}}{m} \right\} \Rightarrow$ Sol. Única

$a^2 - 4(1)(2b) = 0$

$a^2 = 8b$

Ecuación cúbica

Su forma general es:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{C}, a \neq 0$

Toda ecuación cúbica tiene 3 raíces

Teoremas (Cardano - Viete)

Sean $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}$ las raíces de la ecuación

$$S_1: \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$S_2: \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

⇒ Suma del Producto binario

$$S_3: \quad x_1 . x_2 . x_3 = -\frac{d}{a}$$

Ejercicio

Al resolver la ecuación

$$x^3 - 4x^2 + cx + 36 = 0$$

se obtiene CS= $\{-a, a, b\}$; $a > 0$

raíces

Halle $(a + b)$.

Resolución

Por Cardano

• Suma raíces : $-\cancel{a} + \cancel{a} + b = \frac{4}{1} \Rightarrow b = 4$

• Producto raíces : $(-a)(a)(b) = \frac{-36}{1}$

$\cancel{-}a^2 \cancel{(4)} = \cancel{-}\cancel{36}$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Por dato : $a = 3$

∴ $a + b = 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$

Ecuación bicuadrada

Su forma general es:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad a \neq 0$$

Toda ecuación bicuadrada tiene 4 raíces de la forma :

$$\alpha\, ,\beta\, ,-\alpha, -\beta$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

$x^2 \quad -25$

$x^2 \quad -1$

$x^2 = 25 \quad \vee \quad x^2 = 1$

$x = \pm 5 \quad \vee \quad x = \pm 1$

$C = \{5; -5; 1; -1\}$

Teoremas

Si $\alpha\, ,\beta\, ,-\alpha, -\beta$ son raíces de la ecuación

$ax^4 + bx^2 + c = 0\, ;\ a \neq 0$

se cumple que :

$$\alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{a} \qquad \alpha^2 \cdot \beta^2 = \frac{c}{a}$$

Ejemplo

Si $\alpha\, ,\beta\, ,-\alpha, -\beta$ son raíces de la ecuación

$$5x^4 + 3x^2 - 7 = 0$$

- $\alpha^2 + \beta^2 = -\dfrac{3}{5}$
- $\alpha^2 \cdot \beta^2 = \dfrac{-7}{5}$

Observación

Si sus raíces están en progresión aritmética estas tienen la forma siguiente:

$$-3\alpha\, ;\ -\alpha\, ;\ \alpha\, ;\ 3\alpha \quad ;\ \text{razón} = 2\alpha$$

Teoremas de paridad de raíces

1. Sea una ecuación polinomial de coeficientes racionales, se cumple:

$$a+\sqrt{b} \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a-\sqrt{b} \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{Q}$ y $\sqrt{b} \in I$

2. Sea una ecuación polinomial de coeficientes reales, se cumple:

$$a+bi \text{ es raíz} \quad \leftrightarrow \quad a-bi \text{ es raíz}$$

Donde $a, b \in \mathbb{R}$; $b \neq 0$ y $i=\sqrt{-1}$

3. Sea una ecuación polinomial de coeficientes reales, se cumple:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{a}-\sqrt{b}\ , -\sqrt{a}+\sqrt{b} \\ -\sqrt{a}-\sqrt{b} \end{cases}$$

Donde: $a, b \in \mathbb{Q}$ $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in I$

Ejercicio:

Sea la ecuación $2x^3 - 7x^2 + ax + b = 0$, donde $2+i$ es raíz ; $a, b \in \mathbb{Q}$.
Halle el valor de b.

Resolución

Como : $x_1 = 2+i \xrightarrow[\text{Pariedad.}]{\text{Por.}} x_2 = 2-i$

Por Cardano.

- $\underbrace{x_1+x_2}_{4}+x_3 = \frac{7}{2} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$

- $x_1 x_2 x_3 = -\frac{b}{2} \Rightarrow \overbrace{(2+i)(2-i)}^{5}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right) = -\frac{b}{\cancel{2}}$

$b=5$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe