academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Números Complejos

Semana 01

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

OBJETIVOS:

- ✓ Manejar las diversas formas como expresar los números complejos.
- ✓ Operar adecuadamente los números complejos y sus propiedades.
- ✓ Resolver problemas tipo examen de admisión que involucren a los números complejos

UNIDAD IMAGINARIA

Se denota por Euler como "i" y se define:

$$i = \sqrt{-1}$$

Donde: $i^2 = -1$

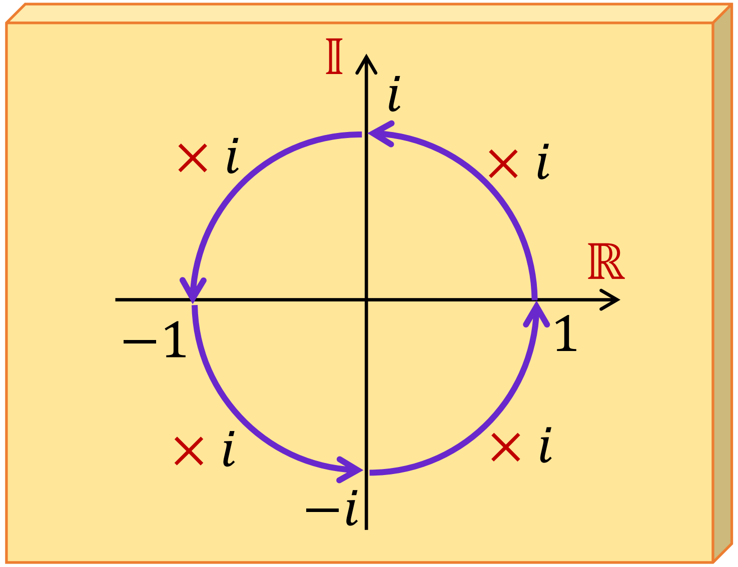
POTENCIAS ENTERAS DE i

Se definen: $i^0 = 1 \quad i^1 = i$

Donde:

$i^1 = i$	$i^5 = i$	$i^9 = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = -1$	$i^{10} = -1$
$i^3 = -i$	$i^7 = -i$	$i^{11} = -i$
$i^4 = 1$	$i^8 = 1$	$i^{12} = 1$

Cada 4 potencias se repiten



PROPIEDADES

Sean $k, n \in \mathbb{Z}$, se cumple:

1 $\;i^{4k} = i^{\dot{4}} = 1$

Ejemplos

- $i^{40} = i^{4(10)} = i^{\dot{4}} = 1$
- $i^{5616} = i^{16} = i^{\dot{4}} = 1$
- $i^{-32} = i^{\dot{4}} = 1$

2 $\boldsymbol{i^{4k+n} = i^{n}}$

Ejemplos

- $i^{25} = i^{\overset{\dot{4}}{24}+1} = i^{1} = i$
- $i^{1746} = i^{46} = i^{\overset{\dot{4}}{44}+2} = i^{2} = -1$
- $i^{78931} = i^{31} = i^{\overset{\dot{4}}{28}+3} = i^{3} = -i$
- $i^{-15} = i^{\overset{\dot{4}}{-16}+1} = i^{1} = i$

3 $\boldsymbol{i + i^{2} + i^{3} + \cdots + i^{\dot{4}} = 0}$

Ejemplos

- $i + i^{2} + i^{3} + \cdots + i^{16} = 0$
- $i + i^{2} + i^{3} + \cdots + i^{100} = 0$
- $i + i^{2} + i^{3} + \cdots + i^{42} =$

$$= \underbrace{i + i^{2} + i^{3} + \cdots + i^{40}}_{0} + i^{41} + i^{42}$$

$$= i^{1} + i^{2} = i - 1$$

Aplicación:

Calcule la siguiente sumatoria:

$$S = i - 2i^2 + 3i^3 - 4i^4 + \cdots - 48i^{48}$$

e indique el valor de $(1+i)S$.

$A)\ 48i$ $\quad B)\ -48i$ $\quad C)\ 0$ $\quad D)\ 48$ $\quad E)\ -48$

Resolución:

DEFINICIÓN DE UN NÚMERO COMPLEJO

Un número complejo z es un par ordenado de número reales

$$z = (a; b) \qquad a \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

FORMA BINÓMICA DE UN NÚMERO COMPLEJO

$$z = (a; b) = a + bi \qquad a \text{ y } b \in \mathbb{R}; \; i = \sqrt{-1}$$

Parte real: $Re(z)$ — Parte imaginaria: $Im(z)$

Ejemplos

- $z = 3 + 4i$

  $Re(z) = 3$
  $Im(z) = 4$

- $w = 3 - i$

  $Re(w) = 3$
  $Im(w) = -1$

Definiciones: $a \text{ y } b \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

$z = a + bi$	$z = 3 + 4i$	$w = 3 - i$
Conjugado $\bar{z} = a - bi$	$\bar{z} = 3 - 4i$	$\bar{w} = 3 + i$
Opuesto $z^* = -a - bi$	$z^* = -3 - 4i$	$w^* = -3 + i$
Módulo $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\lvert z\rvert = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$	$\lvert w\rvert = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

IGUALDAD DE DOS NÚMEROS COMPLEJOS

$a, b, m, n \in \mathbb{R}; i = \sqrt{-1}$

$a + bi = m + ni \leftrightarrow a = m \ \wedge \ b = n$

OPERACIONES

Adición

$$\begin{array}{r} 3+7i \quad + \\ 2-4i \quad \\ \hline 5+3i \quad \end{array}$$

Sustracción

$$\begin{array}{r} 5+8i \quad - \\ 2-4i \quad \\ \hline 3+12i \quad \end{array}$$

Multiplicación

$$(4+3i)(2-3i)$$
$$= 8 - 12i + 6i - 9i^2$$
$$= 17 - 6i$$

División

$$\frac{(1+2i)}{(3+i)} \cdot \frac{(3-i)}{(3-i)}$$
$$= \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

RESULTADOS NOTABLES

$(1+i)^2 = 2i$	$(1+i)^4 = -4$	$\frac{1+i}{1-i} = i$
$(1-i)^2 = -2i$	$(1-i)^4 = -4$	$\frac{1-i}{1+i} = -i$

Aplicación:

El número complejo z satisface la ecuación:

$$\frac{3-i}{2+4i}=\frac{i}{z}-i$$

Determine el valor de $f(z)$; donde

$$f(x)=x^2-2x+2$$

$A)\ 4i$ $\quad B)\ -4i$ $\quad C)\ -4$ $\quad D)\ 4$ $\quad E)\ 0$

Resolución:

Propiedades del conjugado

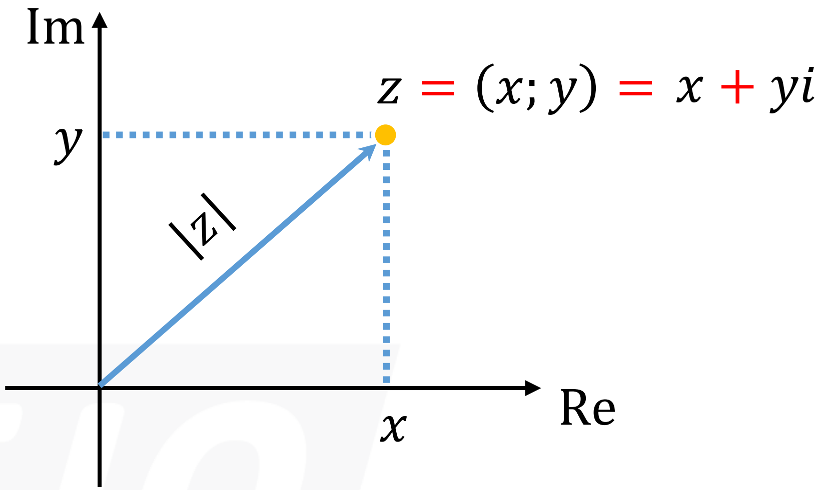
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$
4. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
5. $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
6. $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
8. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
9. $\overline{\sqrt[n]{z}} = \sqrt[n]{\overline{z}}$

Ejemplos

- $\overline{z + (1 + 4i)} =$
- $\overline{z \times (1 + i)} =$
- $\overline{(2 + 4i)^3} =$
- $\overline{\sqrt{4 + 7i}} =$

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DEL MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Sea el complejo $z = x + yi$, su módulo es graficamente, la distancia del polo al afijo



Ejemplos

- $z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$
- $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Propiedades del módulo

1) $\lvert z\rvert \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$	5) $\left\lvert \dfrac{z}{w} \right\rvert = \dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$
2) $\lvert z\rvert = \lvert \bar{z}\rvert = \lvert z^*\rvert$	
3) $\lvert z\rvert^2 = z.\bar{z}$	6) $\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
4) $\lvert z.w\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert$	7) $\lvert \sqrt[n]{z}\rvert = \sqrt[n]{\lvert z\rvert}$

Ejemplos

- $|3+4i| = |3-4i| = |-3-4i| = 5$
- $(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i) = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$
- $|(1+i)(3+4i)| = |1+i||3+4i|$

$$= \sqrt{2} \times 5$$

Aplicación:

Halle el módulo de z donde

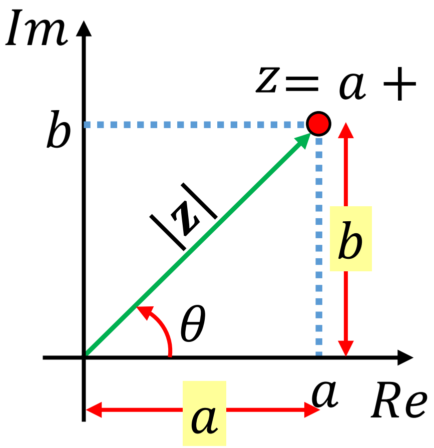
$$z = \frac{(2 + i\sqrt{5})(1 + i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}$$

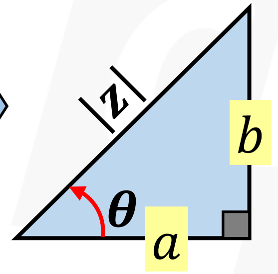
$A)\ 5\sqrt{2}$ $B)\ 6\sqrt{2}$ $C)\ 3\sqrt{2}$ $D)\ 7\sqrt{2}$ $E)\ 4\sqrt{2}$

Resolución:

FORMA POLAR Y EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

Sea el complejo $z = a + bi$





$\boldsymbol{b} = |z|\text{sen}\theta$

$\boldsymbol{a} = |z|\cos\theta$

Como $z = a + bi$

$z = |z|\cos\theta + |z|\text{sen}\theta . i$

$\boxed{\boldsymbol{z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}}$ Forma polar o trigonométrica

θ : Argumento de z **(Arg(z))** $\quad \boldsymbol{0 \leq \theta < 2\pi}$

Observación

$$\boldsymbol{\cos\theta + i\text{sen}\theta = \text{cis}\theta = e^{\theta i}}$$

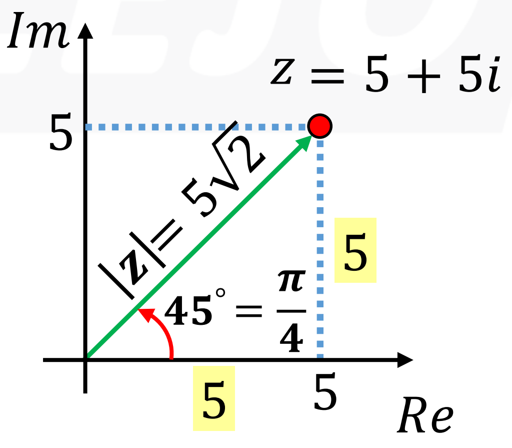
$\boxed{\boldsymbol{z = |z|\text{cis}(\theta)}}$ **Forma cis**

$\boxed{\boldsymbol{z = |z|e^{\theta i}}}$ **Forma exponencial**

Ejemplos

Exprese en las otras formas los siguientes números:

1) $\boldsymbol{z = 5 + 5i}$

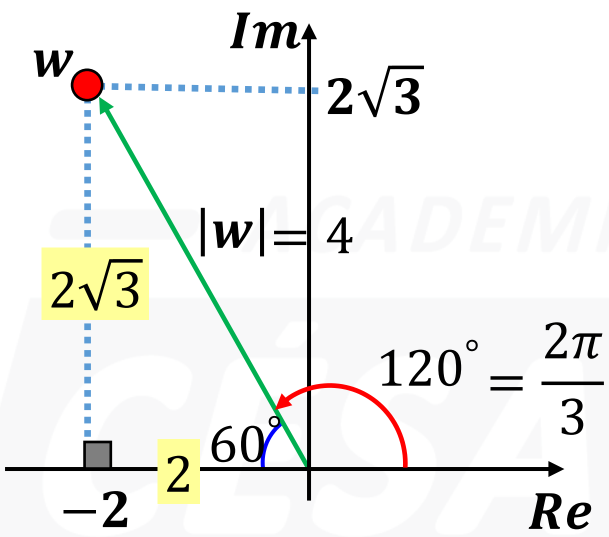


$$z = 5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z = 5\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$z = 5\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$$

2) $w = -2 + 2\sqrt{3}i$



$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$z = 4\operatorname{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$z = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}$$

Complejos Notables

$\mathbf{1} = (\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = \operatorname{cis}(0) = e^{0i}$	$\boldsymbol{i} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}i}$
$-\mathbf{1} = (\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = \operatorname{cis}(\pi) = e^{\pi i}$	$-\boldsymbol{i} = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

TEOREMAS

Sean los números complejos z y w no nulos.

$$z = |z|(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) = |z|\mathrm{cis}(\theta) = |z|e^{\theta i}$$

$$w = |w|(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha) = |w|\mathrm{cis}(\alpha) = |w|e^{\alpha i}$$

Donde se cumplen:

$$\boldsymbol{z.w} = \begin{cases} |z|.|w|[\cos(\theta + \alpha) + i\mathrm{sen}(\theta + \alpha)] \\ |z|.|w|\,\mathrm{cis}(\theta + \alpha) \\ |z|.|w|\,e^{(\theta+\alpha)i} \end{cases}$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = \begin{cases} \dfrac{|z|}{|w|}[\cos(\theta - \alpha) + i\mathrm{sen}(\theta - \alpha)] \\ \dfrac{|z|}{|w|}\mathrm{cis}(\theta - \alpha) \\ \dfrac{|z|}{|w|}e^{(\theta-\alpha)i} \end{cases}$$

Ejemplos

Sean los números complejos

$$z = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right) \text{ y } \; w = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\boldsymbol{z.w} = 6.2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{z.w} = 12\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\mathrm{sen}\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= 12\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 12e^{\frac{3\pi}{8}i}$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = \frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) + i\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{w}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right) = 3\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3e^{\frac{\pi}{8}i}$$

TEOREMA DE MOIVRÉ

Dado el número complejo no nulo

$$z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

Se tiene $(n \in \mathbb{N})$

I.
$$z^n = \begin{cases} |z|^n\,[\cos(\theta n) + i\operatorname{sen}(\theta n)] \\ |z|^n \operatorname{cis}(\theta n) \\ |z|^n e^{(\theta n)i} \end{cases}$$

Ejemplos

1. $(\cos 36° + i\operatorname{sen}36°)^5 = \cos(36°.5) + i\operatorname{sen}(36°.5)$

$= \cos(180°) + i\operatorname{sen}(180°)$

$= -1 + i.0$

$= -1$

2. $\left(\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}\right)^{18} = \sqrt{2}^{18}\operatorname{cis}\left(18.\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2^9\operatorname{cis}(6\pi)$

$= 512\operatorname{cis}(0)$

$= 512\,(1 + 0i)$

$= 512$

3. $\left(\sqrt{5}e^{\frac{7\pi}{4}i}\right)^6 = \sqrt{5}^6 . e^{6\cdot\frac{7\pi}{4}i}$

$= 5^3 e^{\frac{21\pi}{2}i}$

$= 125\,e^{\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right)i}$

$= 125\,e^{\frac{\pi}{2}i}$

$= 125\,(0 + 1i)$

$= 125i$

GRACIAS

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO