ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

SEMANA 7

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GEOMETRÍA

TEMA: SEMEJANZA

SEMANA 7

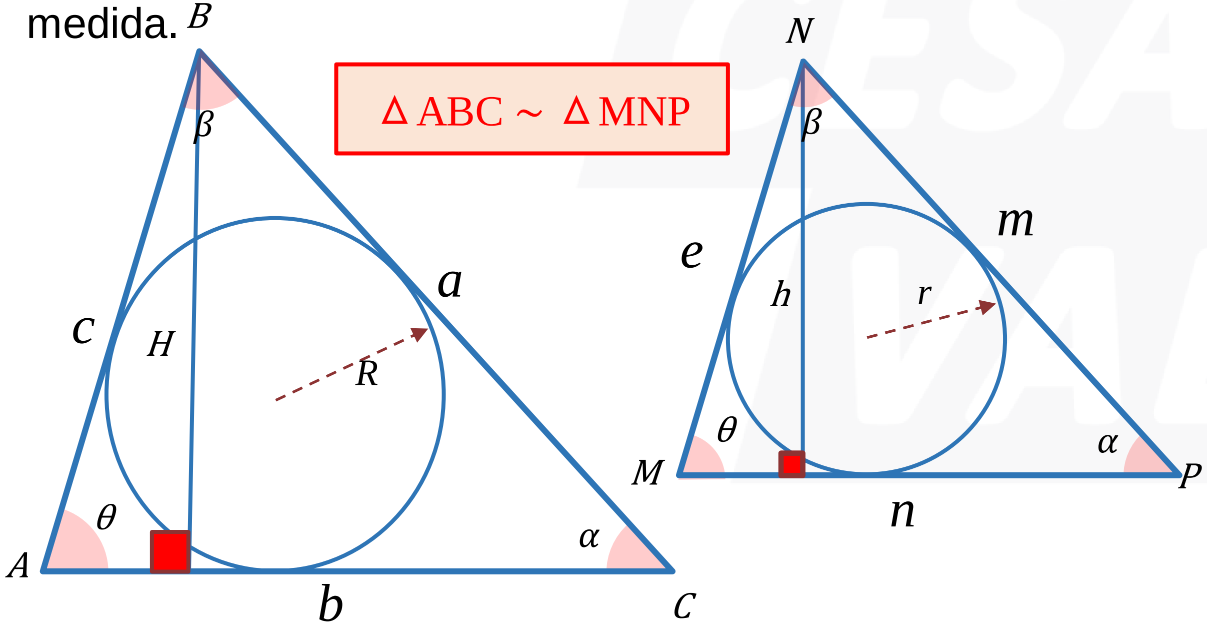
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DEFINICIÓN:

Un triángulo será semejante a otro, si los ángulos interiores del primero son de igual medida que los ángulos del segundo y las longitudes de sus lados homólogos son proporcionales.

LADOS HOMÓLOGOS:

Son aquellos lados cuyas longitudes mantienen la misma razón y además son los que se oponen a ángulos de igual medida.

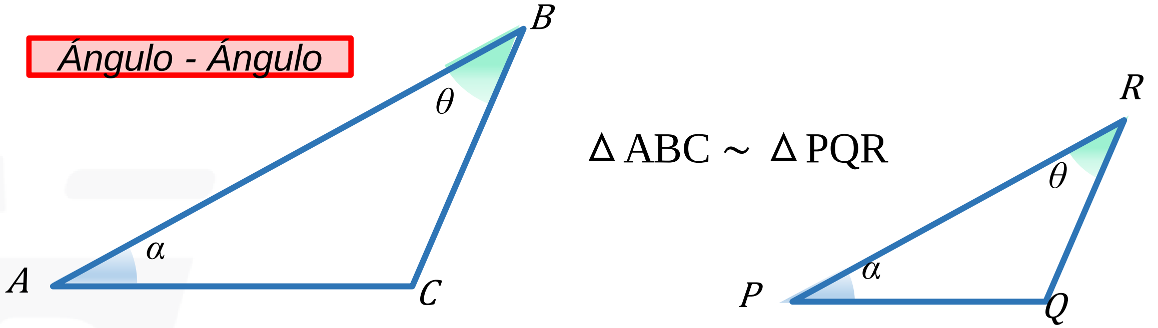


Δ ABC ~ Δ MNP

$$\frac{c}{e}=\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{H}{h}=\frac{R}{r}=\cdots=k$$

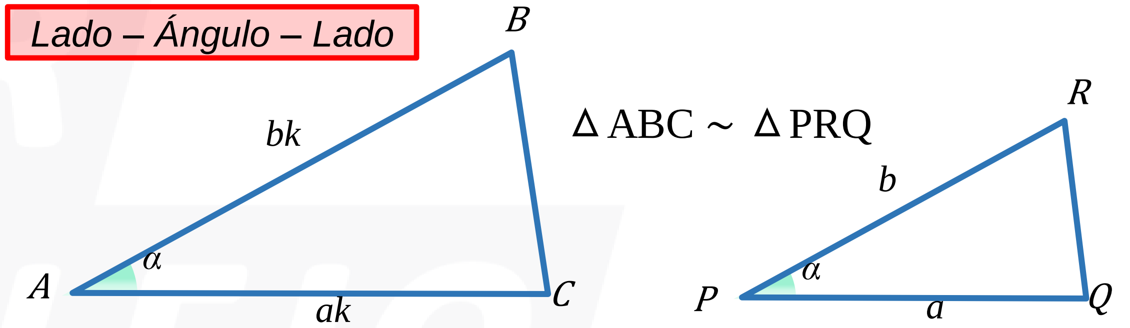
CRITERIOS DE SEMEJANZA

Ángulo - Ángulo



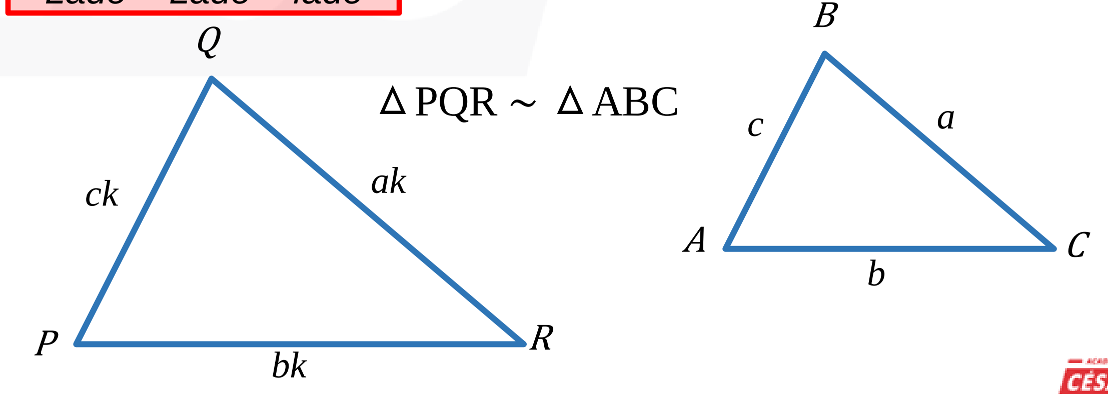
Δ ABC ~ Δ PQR

Lado – Ángulo – Lado



Δ ABC ~ Δ PRQ

Lado – Lado – lado



Δ PQR ~ Δ ABC

UNI

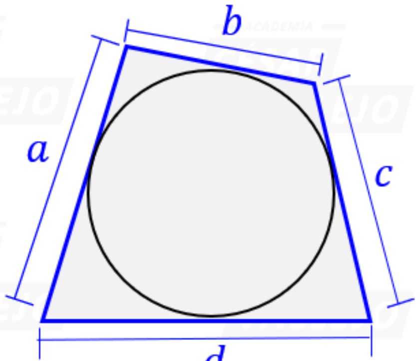
2011-I

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio *r* y circunscrito a una circunferencia de radio *R*. Si $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$ en *I*, *3BI* = *AI* y *AB* + *CD* = a cm (a >0), calcule la longitud (en cm) de $\overline{BC}$.

A) $\frac{a}{2}$ B) $\frac{a}{3}$ C) $\frac{a}{4}$

D) $\frac{a}{5}$ E) $\frac{a}{6}$

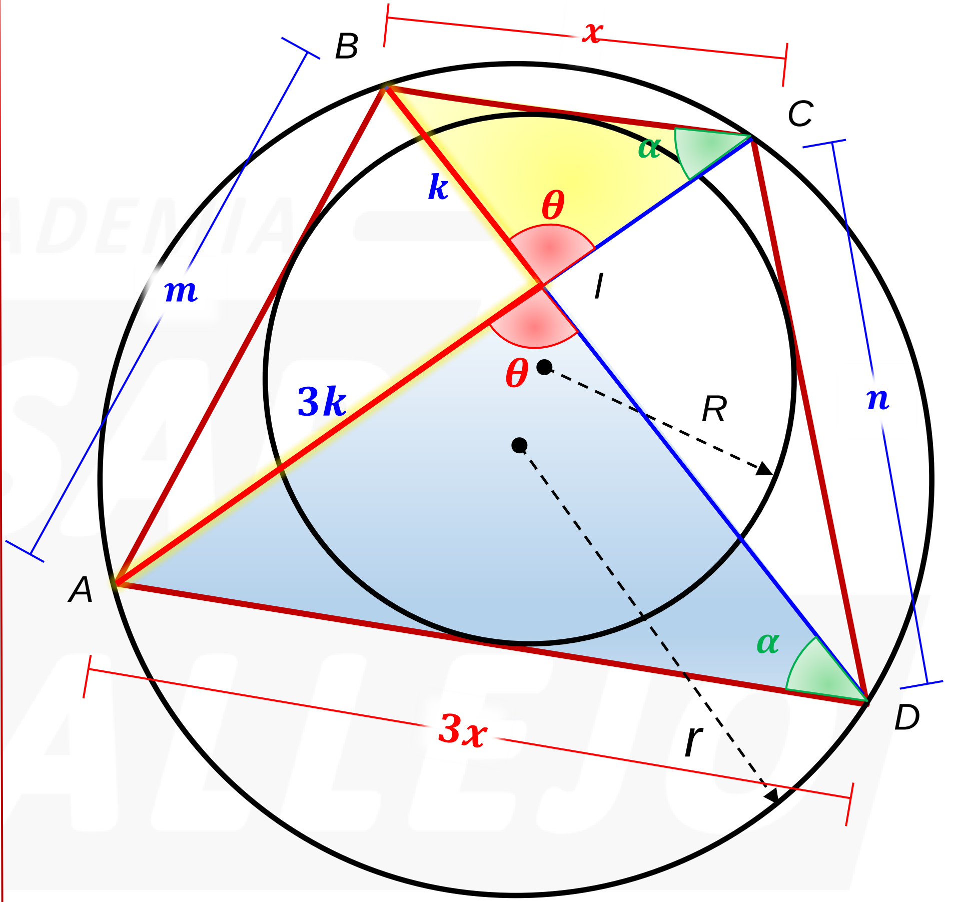
TEOREMA



$\boxed{a + c = b + d}$

Resolución

Piden: $BC = x$



Datos: $3BI = AI$

$\underbrace{AB + CD}_{m+n} = a$

- $ABCD$: Inscrito

m∢BCA = m∢ADB = α

m∢BIC = m∢AID = θ

- ∆BCI ~ ∆ADI: (CASO A-A) $\dfrac{AD}{x} = \dfrac{3k}{k}$

⇨ $AD = 3x$

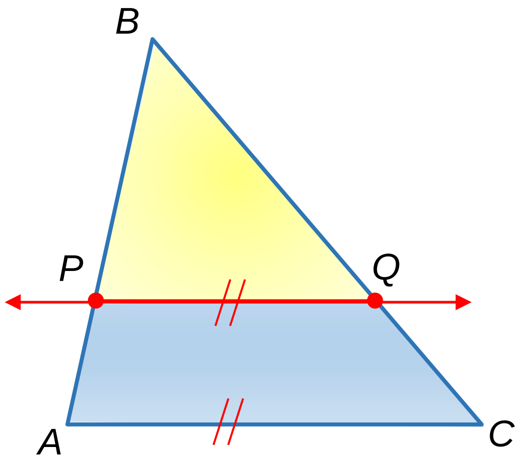
- Por teorema de Pitot

$\underbrace{m + n}_{a} = x + 3x$

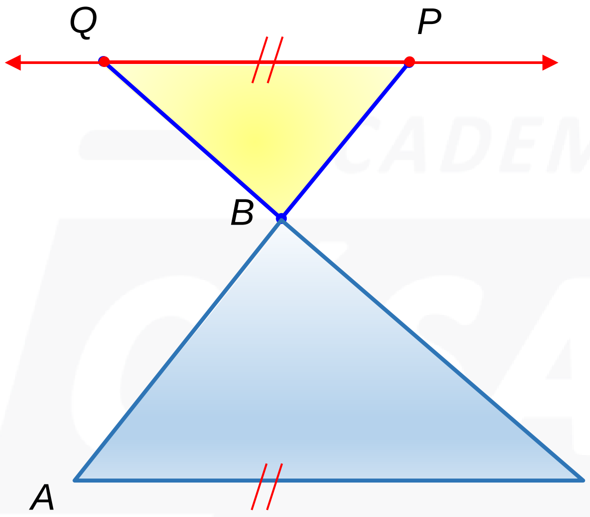
Clave C

$\boxed{\therefore\ x = \dfrac{a}{4}}$

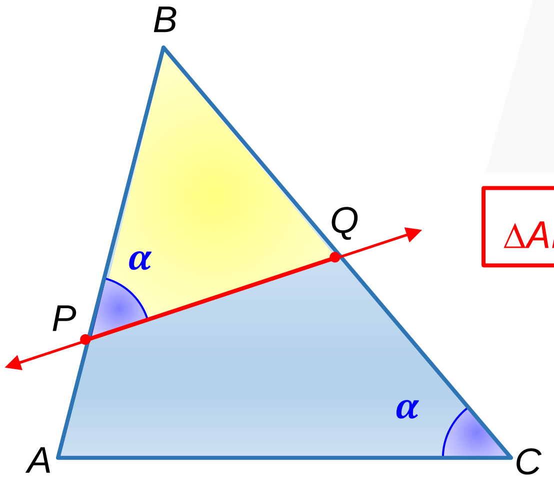
SITUACIONES FRECUENTES DONDE SE PRESENTA SEMEJANZA.



$\Delta ABC \sim \Delta PBQ$

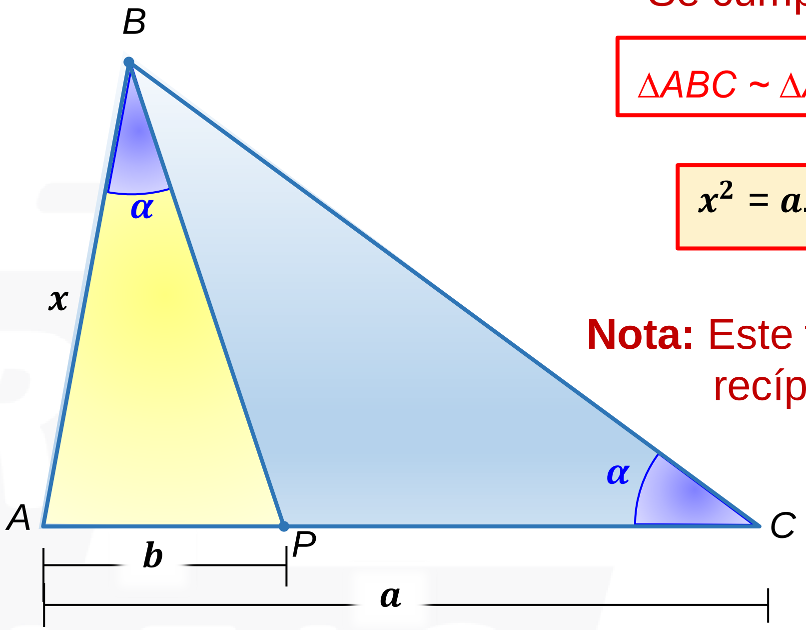


$\Delta ABC \sim \Delta PBQ$



$\Delta ABC \sim \Delta QBP$

TEOREMAS

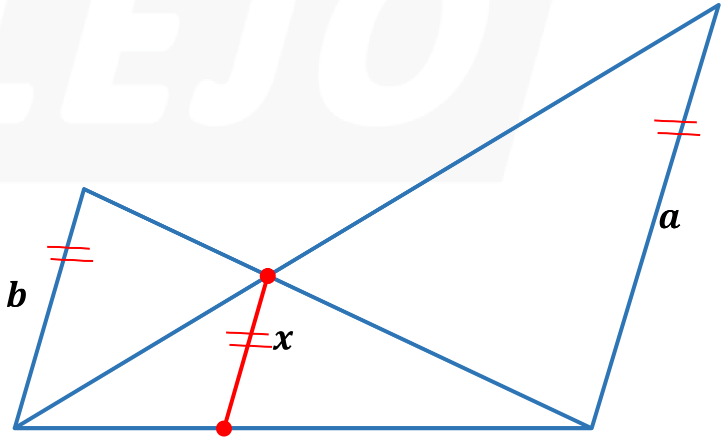


Se cumple:

$\Delta ABC \sim \Delta APB$

$x^2 = a.b$

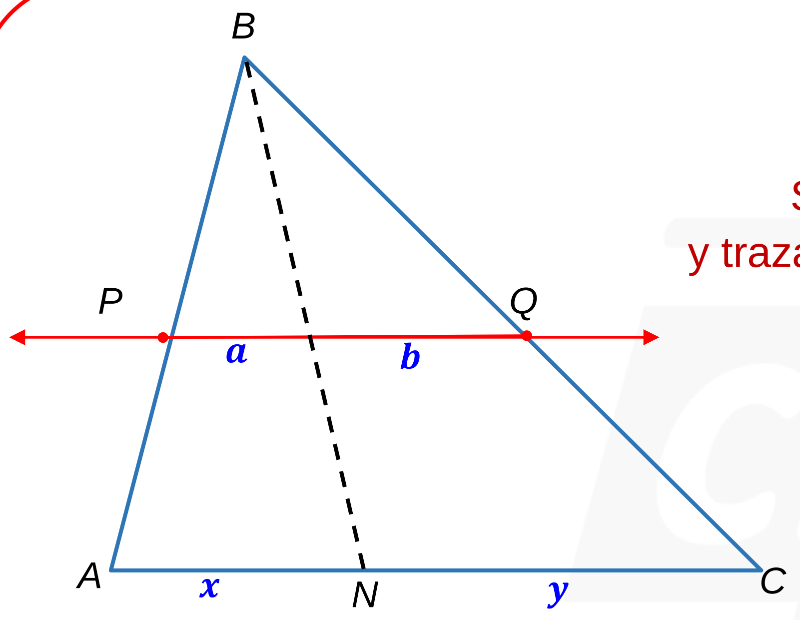
Nota: Este teorema es recíproco.



Se cumple:

$$x = \frac{a.b}{a+b}$$

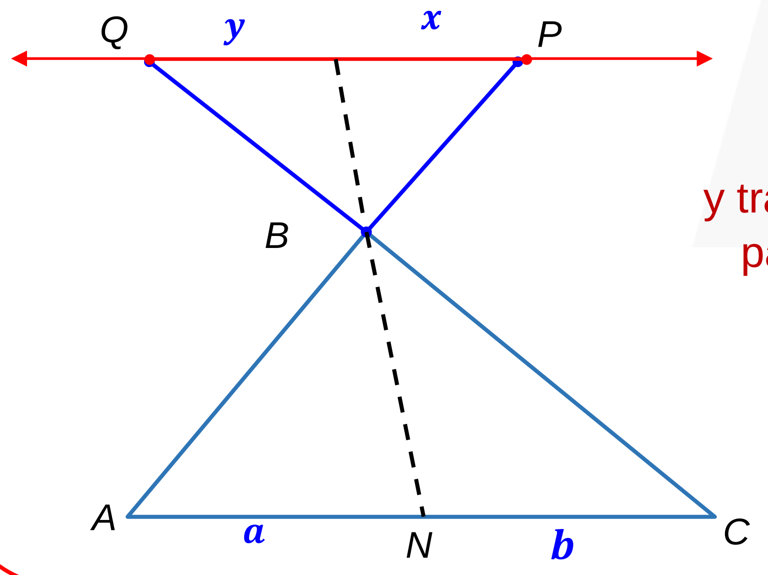
A continuación algunas relaciones adicionales como resultado de la semejanza.



Si $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$
y trazamos la ceviana $\overline{BN}$

Se cumple:

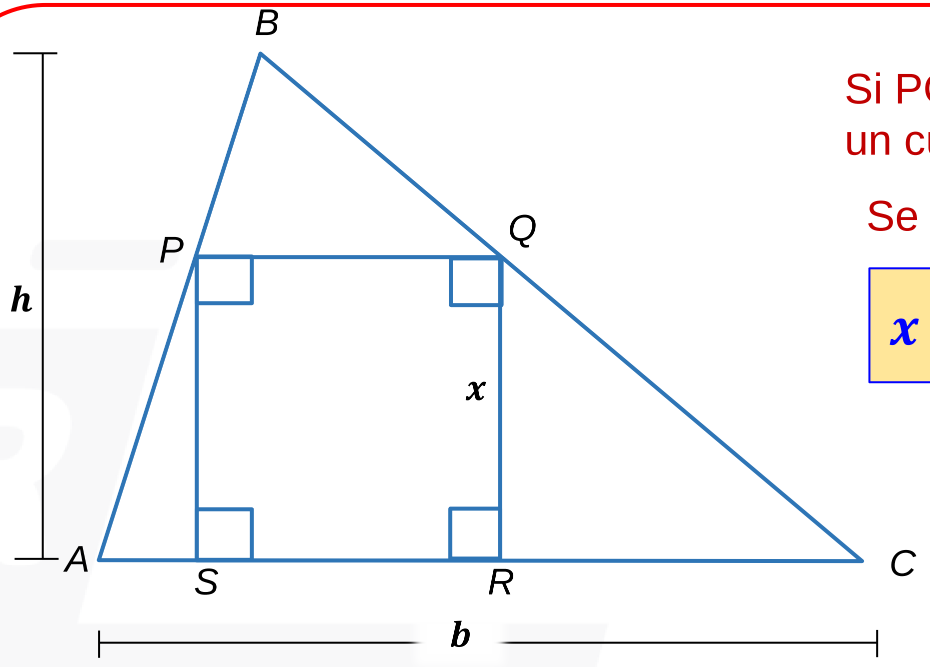
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$



Si $\overline{QP} \parallel \overline{AC}$
y trazamos la ceviana $\overline{BN}$
para luego prolongarla

Se cumple:

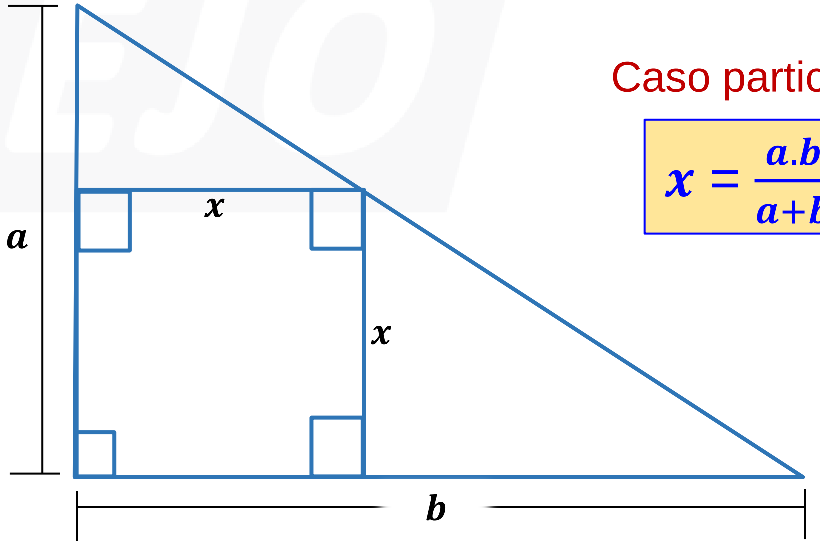
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$$



Si PQRS es un cuadrado

Se cumple:

$$\boxed{x = \frac{b\,.h}{b+h}}$$



Caso particular:

$$\boxed{x = \frac{a.b}{a+b}}$$

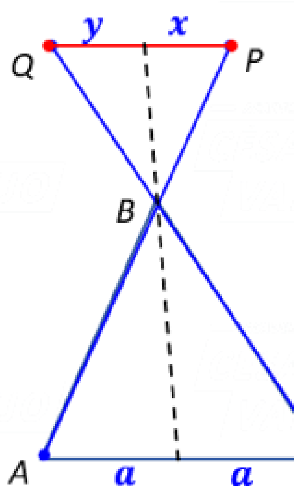
UNI **2002-II**

Sea $ABCD$ un cuadrado de lado L, M es el punto medio del lado $\overline{AD}$, E es un punto en el lado $\overline{AB}$, P es la intersección de $\overline{MB}$ con $\overline{EC}$ y F es tal que $\overline{DF}$ contiene a P (F e $\overline{EB}$). Sabiendo que AE =EF. Calcula FB.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$L B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{L}{3}$

D) $\frac{L}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$L

OBSERVACIÓN



Si $\overline{QP} \parallel \overline{AC}$

Se cumple:

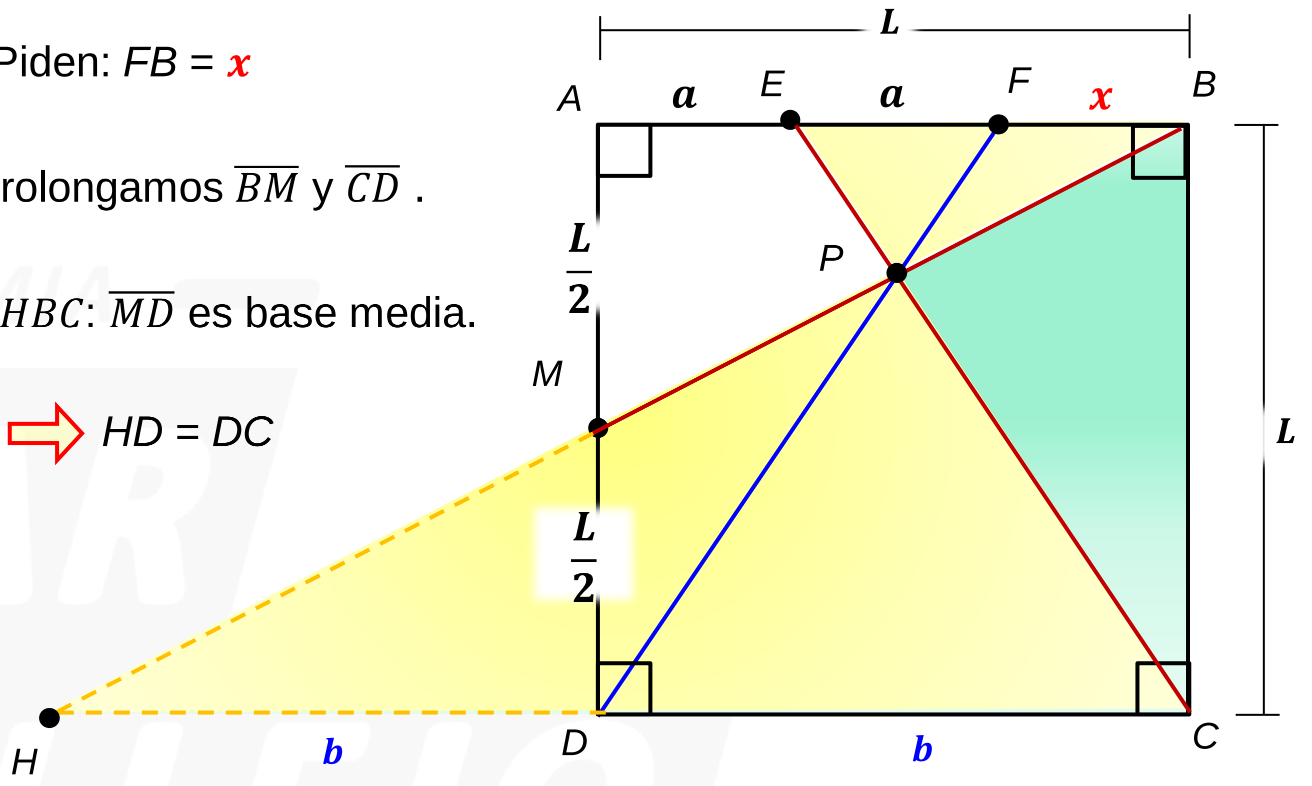
$\boxed{x = y}$

Resolución

Piden: $FB = x$

- Prolongamos $\overline{BM}$ y $\overline{CD}$.
- ΔHBC: $\overline{MD}$ es base media.

$\Rightarrow$ $HD = DC$



- Por la observación: $x = a$

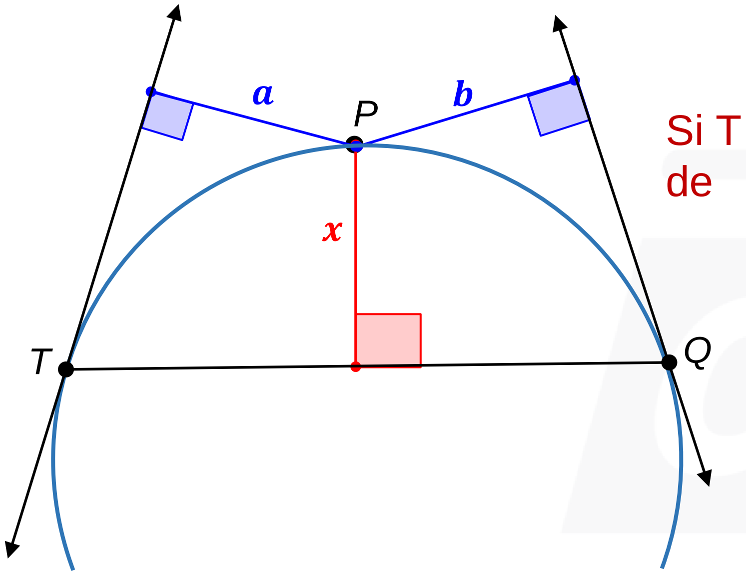
$\Rightarrow$ $3a = L$

$\boxed{\therefore\ x = \frac{L}{3}}$

Clave C

TEOREMAS ADICIONALES

Caso 1:

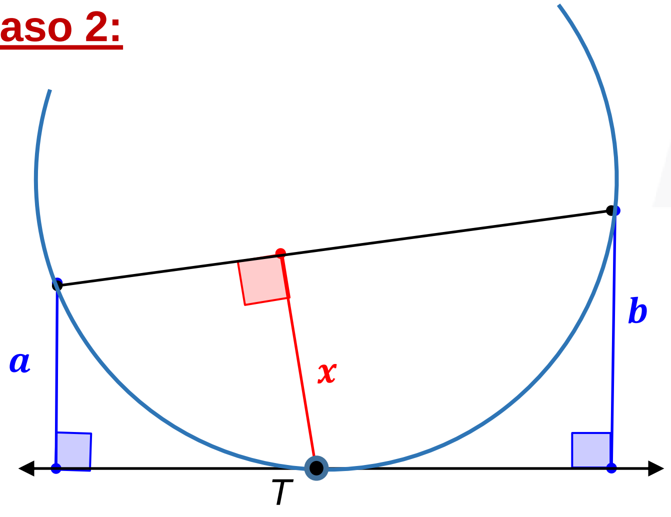


Si T y Q son puntos de tangencia.

Se cumple:

$$\boxed{x^2 = a.b}$$

Caso 2:

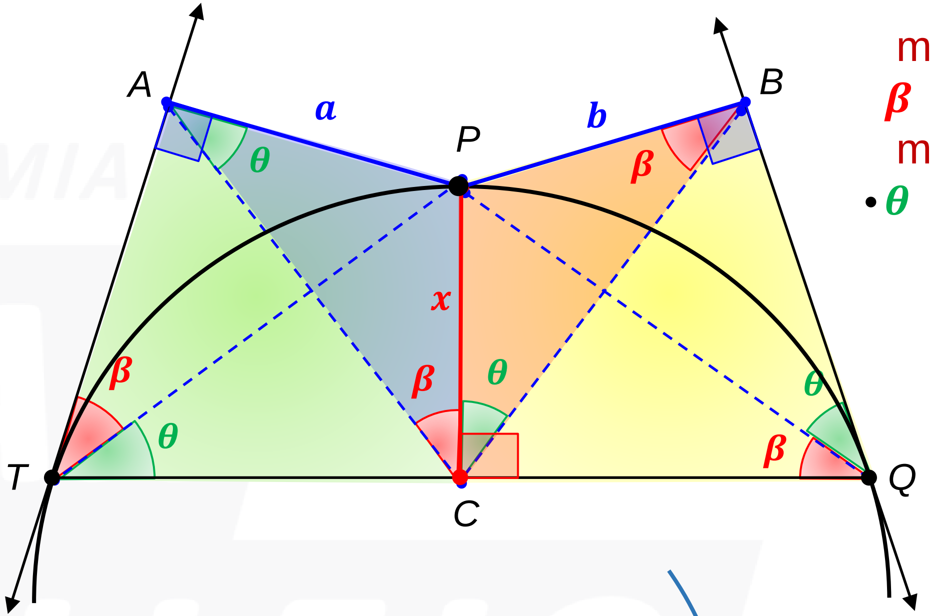


Si T es punto de tangencia.

Se cumple:

$$\boxed{x^2 = a.b}$$

DEMOSTRACIÓN:



m∢ATP = m∢TQP = β

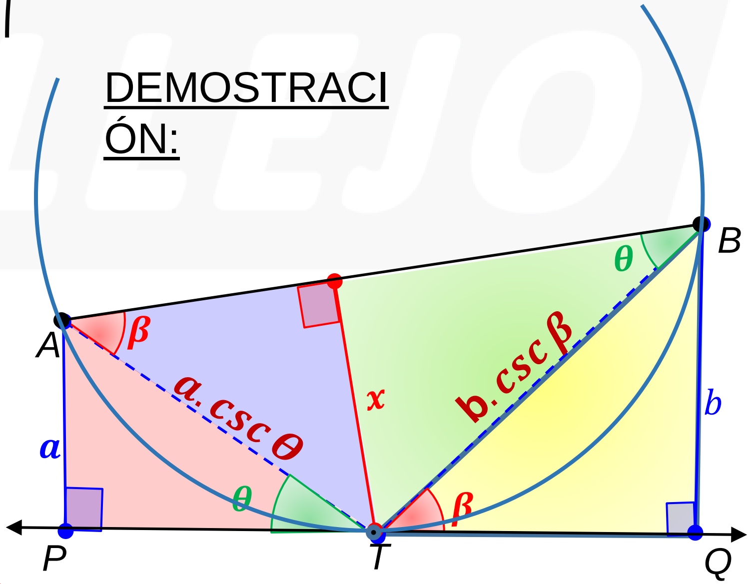
m∢BQP = m∢QTP = θ

- ⏢APC y ⏢CPBQ son inscriptibles:

- $\Delta APC \sim \Delta CPB$: $\frac{x}{b} = \frac{a}{x}$

$\therefore x^2 = a.b$

DEMOSTRACIÓN:



- Por la observación anterior:

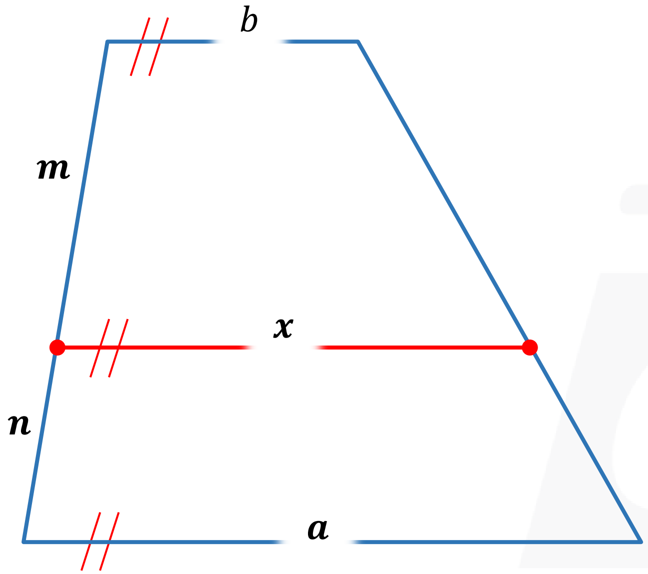
m∢BAT= m∢BTQ = β

m∢ABT = m∢ATP = θ

- $x = a.csc\,\theta.(sen\beta)$
- $x = b.csc\beta.(sen\theta)$

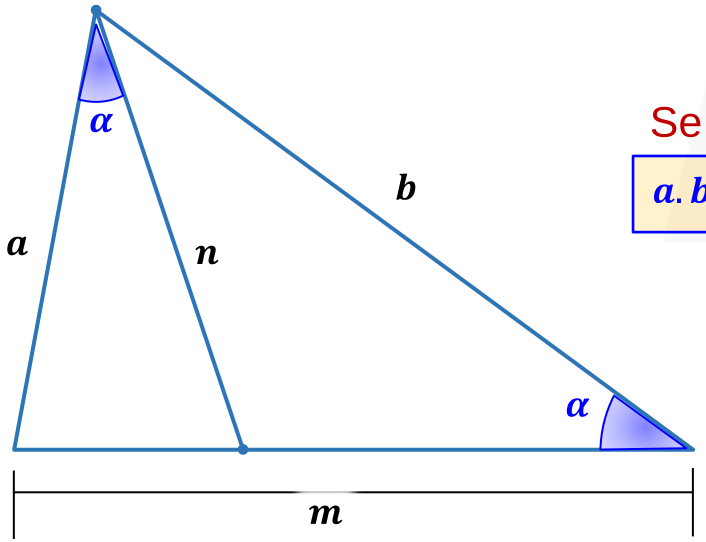
$\therefore x^2 = a.b$

TEOREMAS ADICIONALES



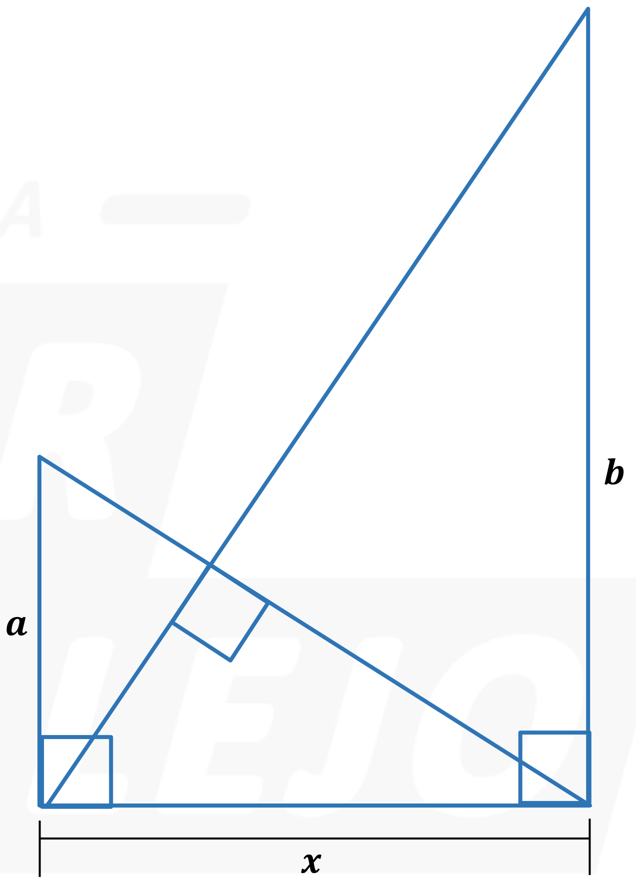
Se cumple:

$$x = \frac{a.m + b.n}{m+n}$$



Se cumple:

$$a.b = m.n$$



Se cumple:

$$x^2 = a.b$$

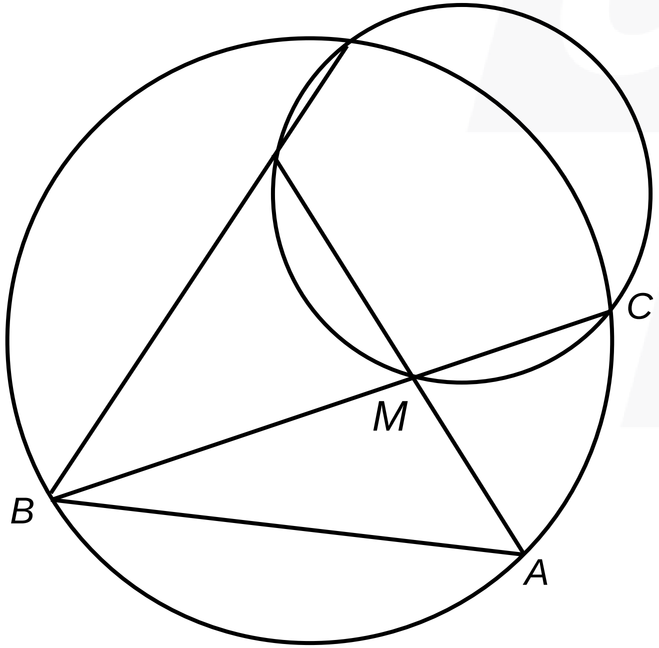
UNI

2018-I

Según el gráfico $AM = 1$u, $AC = 2$u y $AB = 3$u. Calcule BC (en u).

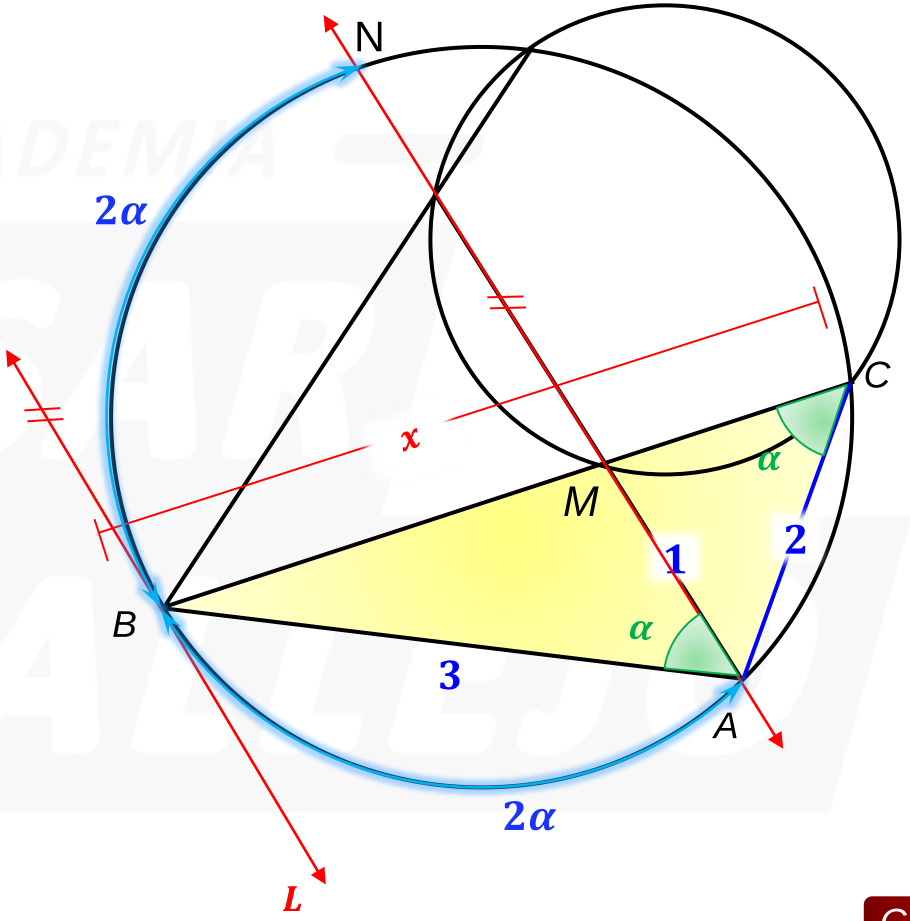
A) 4 B) $\sqrt{17}$ C) 5

D) 6 E) 7

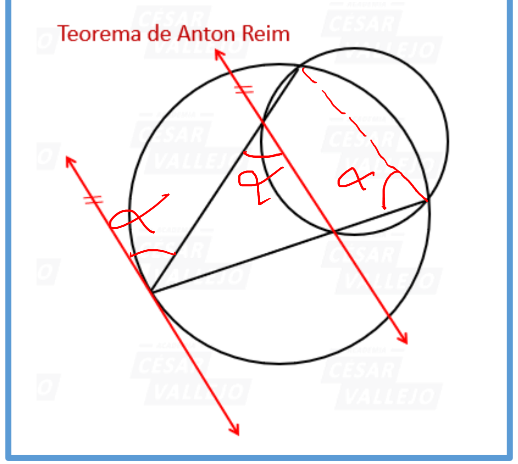


Resolución

Piden: $BC = x$



OBSERVACIÓN



- Trazamos la tangente por B
- Por observación: $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AN}$

$\Rightarrow$ $m\widehat{BN} = m\widehat{BA} = 2\alpha$

- ΔBCA : Por semejanza.

$3(2) = 1(x)$

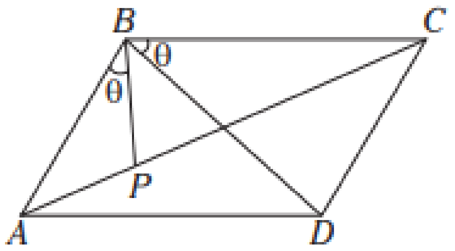
Clave **D**

$\therefore x = 6$

NOTA: En este problema el triángulo ABC no cumple con el teorema de

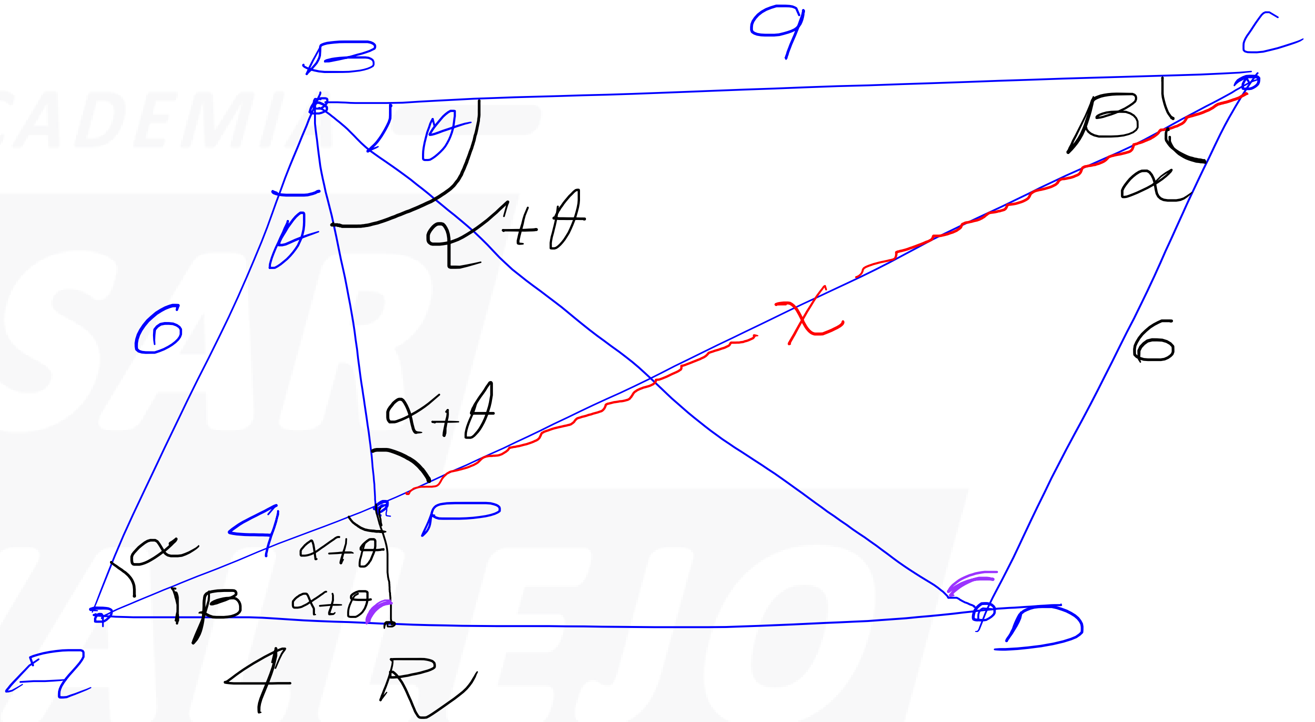
PREGUNTA 1

Según el gráfico, $ABCD$ es un paralelogramo. Si $AB=6$, $BC=9$ y $AP=4$, calcule PC.



A) 8 B) 7 C) 6
D) 9 E) 11

PIDEN: $PC = x$



- $\triangle ABR \sim \triangle CBD$ (A-A)

$$\frac{AR}{6} = \frac{6}{9}$$

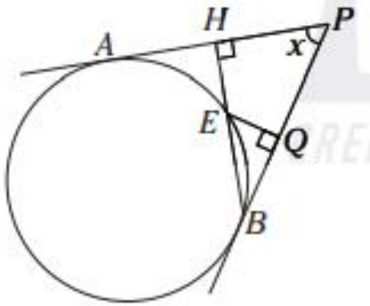
$$AR = 4$$

- $\triangle APR$: ISÓSCELES
- $\triangle PBC$: ISÓSCELES

$$\therefore \; x = 9$$

PREGUNTA 2

Según el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si $(EH)(EQ)=9$ y $EB=5$, calcule x.

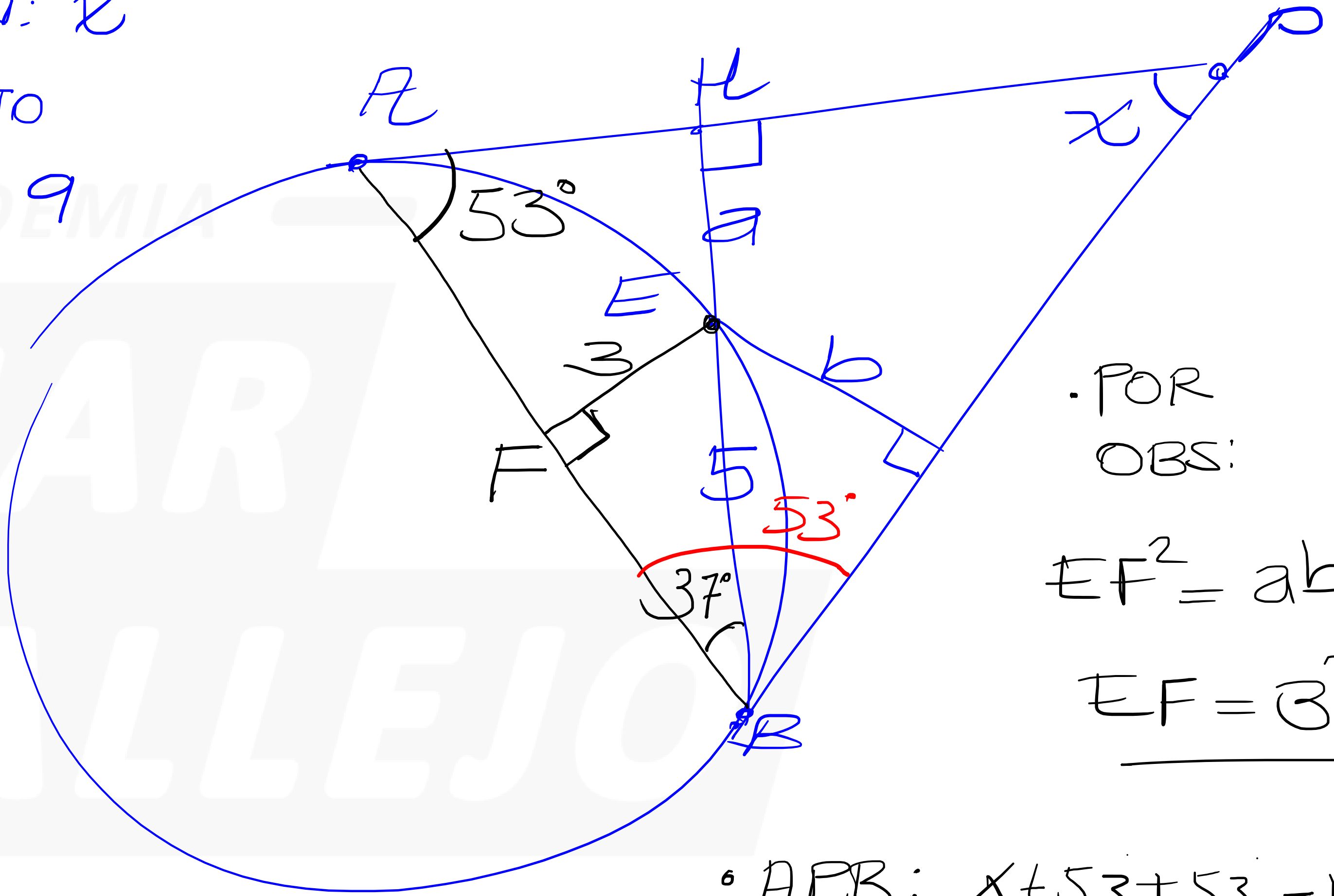


A) 53° B) 60° C) 74°
D) 75° E) 37°

PIDEN: x

DATO

$ab=9$



• POR OBS:

$EF^2=ab$

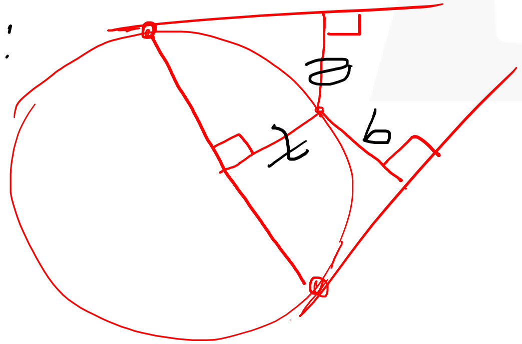
$\boxed{EF=3}$

• APB: $x+53+53=180$

$\therefore \boxed{x=74°}$

OBS:

$\boxed{x^2=ab}$



PREGUNTA 3

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB=AC=5$ y $BC=6$. El punto D está en AC y P es un punto en BD, tal que m$\measuredangle APC=90°$.

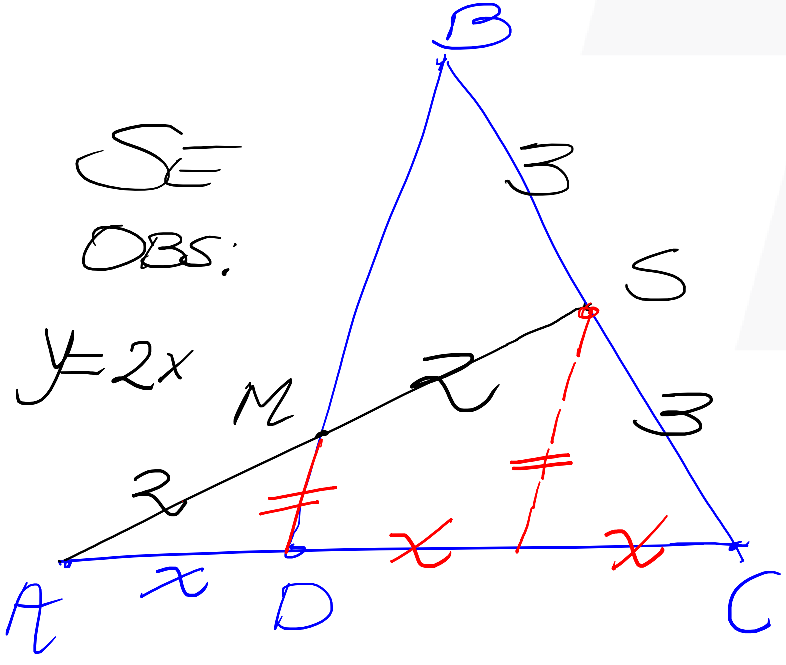
Si m$\measuredangle ABP$=m$\measuredangle BCP$, calcule $\frac{AD}{DC}$.

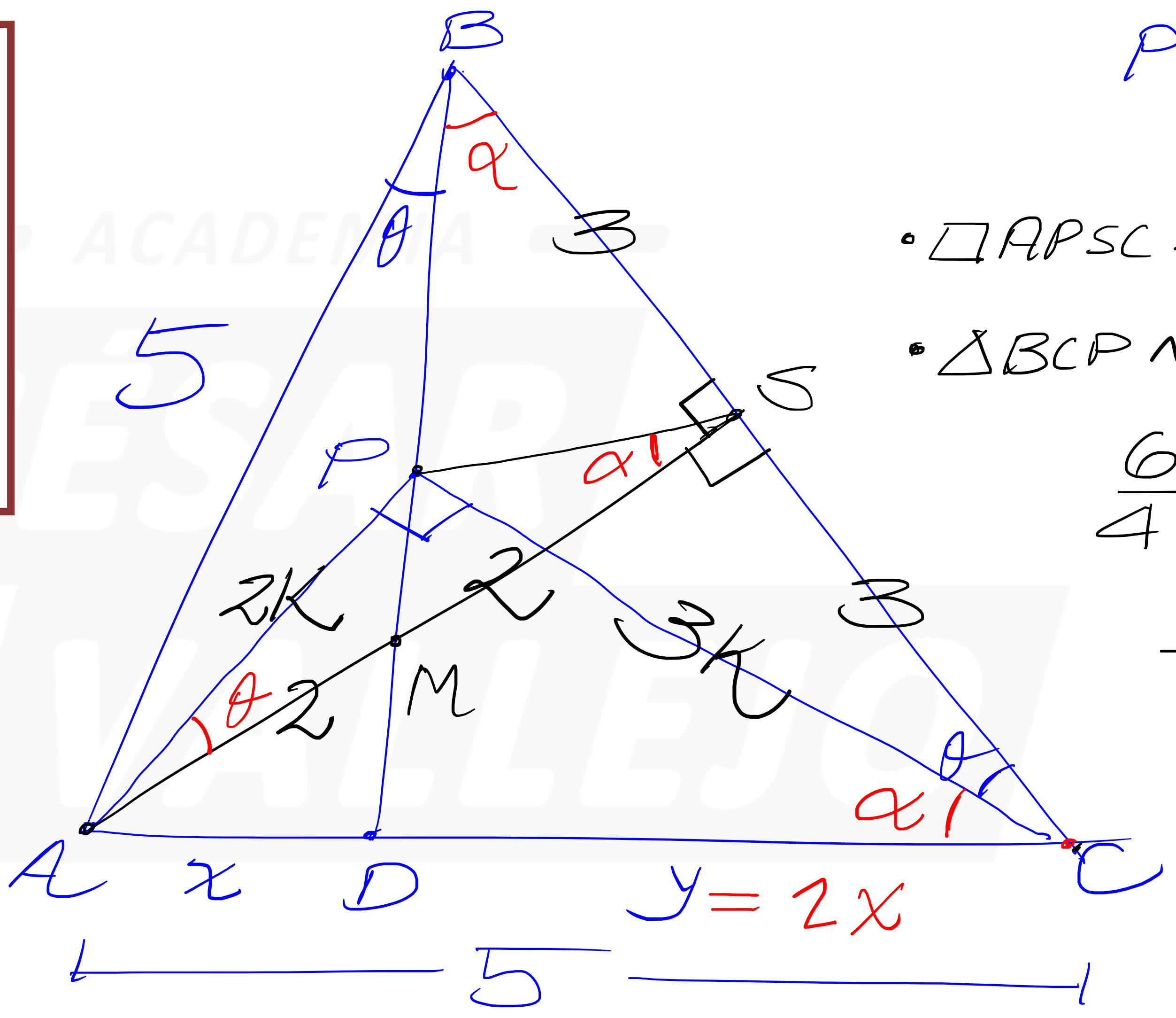
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ E) 1

SE OBS:

$y=2x$





PIDEN: $\frac{x}{y}$

• ◻APSC : INSCRIPT.

• ΔBCP ∼ ΔSAP

$\frac{6}{4} = \frac{PC}{AP}$

→ $PC = 3K$

$AP = 2K$

• ΔAPC :

$\tan\alpha = \frac{2}{3}$

→ $MS = 2$

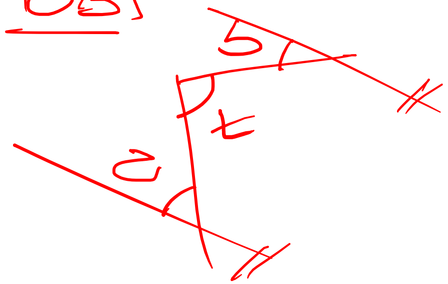
$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

PREGUNTA 4

Sea *ABCDE* un pentágono convexo, donde *ABDE* es un rombo y m∢*ABC* = m∢*CDE* = 135°. Sean *M* y *N* los puntos de intersección de *AC* y *EC* con *BD*, respectivamente. Si *BM* = 10 y *ND* = 70, halle *MN*.

A) 7 B) 9 C) 12
D) 14 E) 20

OBS



$X = a + b$

• $\triangle SDG \sim \triangle ABR$ (A-A)

$$\frac{m}{7m} = \frac{BR}{DG} \quad \begin{cases} BR = b \\ DG = 7b \end{cases}$$

• DE LO ANTERIOR:
$BC = \ell$ y $CD = 7\ell$

• SE DEDUCE: $\omega = 53°$

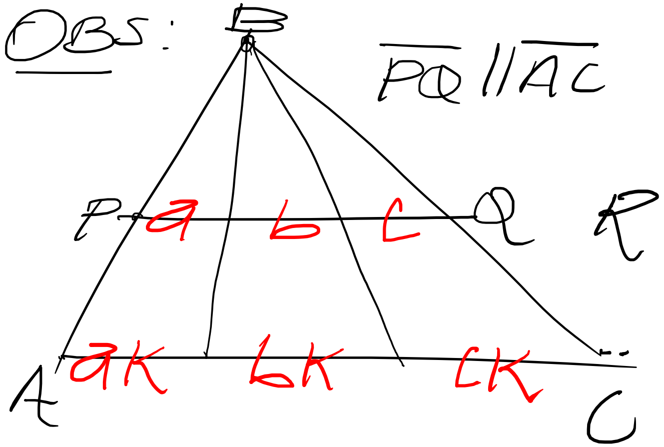
• $\frac{5k}{7k} = \frac{10}{x}$

$\therefore x = 14$

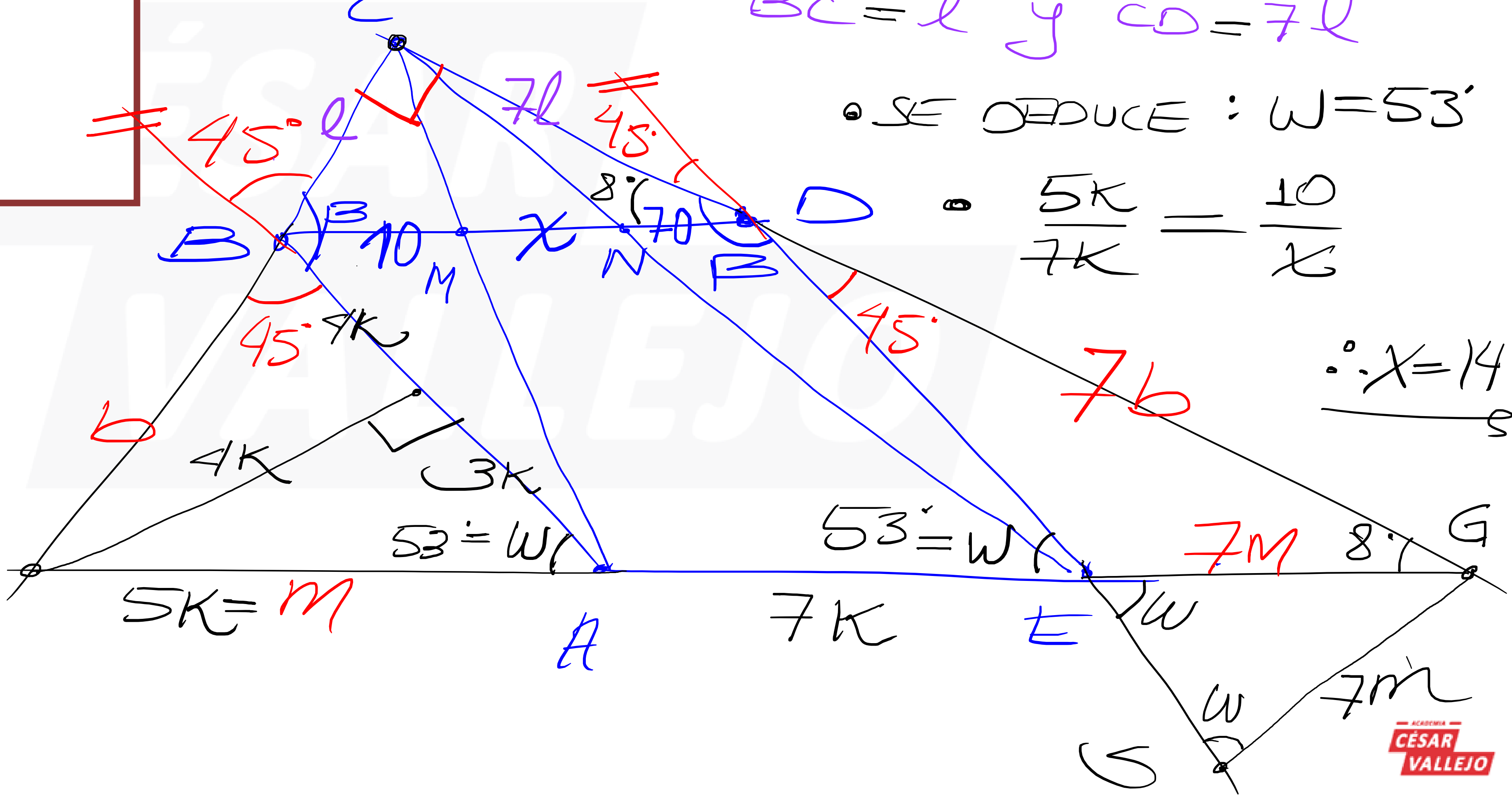
PIDEN: x

DATO: $\beta = 135°$

OBS:



$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$



PREGUNTA 5

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita en dicho triángulo es tangente a $\overline{AB}$ en P, a $\overline{AC}$ en Q, a $\overline{BC}$ en L, respectivamente. Si M es un punto del menor arco QL, de modo que las distancias de M a $\overline{AB}$ y a $\overline{AC}$ valen 2 cm y 6 cm, respectivamente, calcule el cuadrado de la distancia de M a $\overline{PQ}$.

A) 10
B) 9
C) 12
D) 7
E) 6

PREGUNTA 6

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a $\overline{CA}$ en Q, R y S, respectivamente. La recta RQ interseca a la prolongación del segmento CA en P. Calcule PR/PQ si $QS=2$ y $RS=6$.

A) 9 B) 12 C) 13
D) 3 E) 4

PREGUNTA 7

Se sabe que $ABCD$ es un rectángulo, P y Q son puntos de $\overline{BC}$ y de $\overline{AD}$, respectivamente, de modo que $ABPQ$ es un cuadrado de centro O, y los ángulos BDP y ODA son de igual medida. Si $\overline{PD}$ interseca a $\overline{OC}$ en S, calcule AB/PS.

A) $3\sqrt{2}$ B) 8 ~~C) $2\sqrt{2}$~~

D) 1,2 E) 3

PIDEN: $\dfrac{x}{y}$

DATO

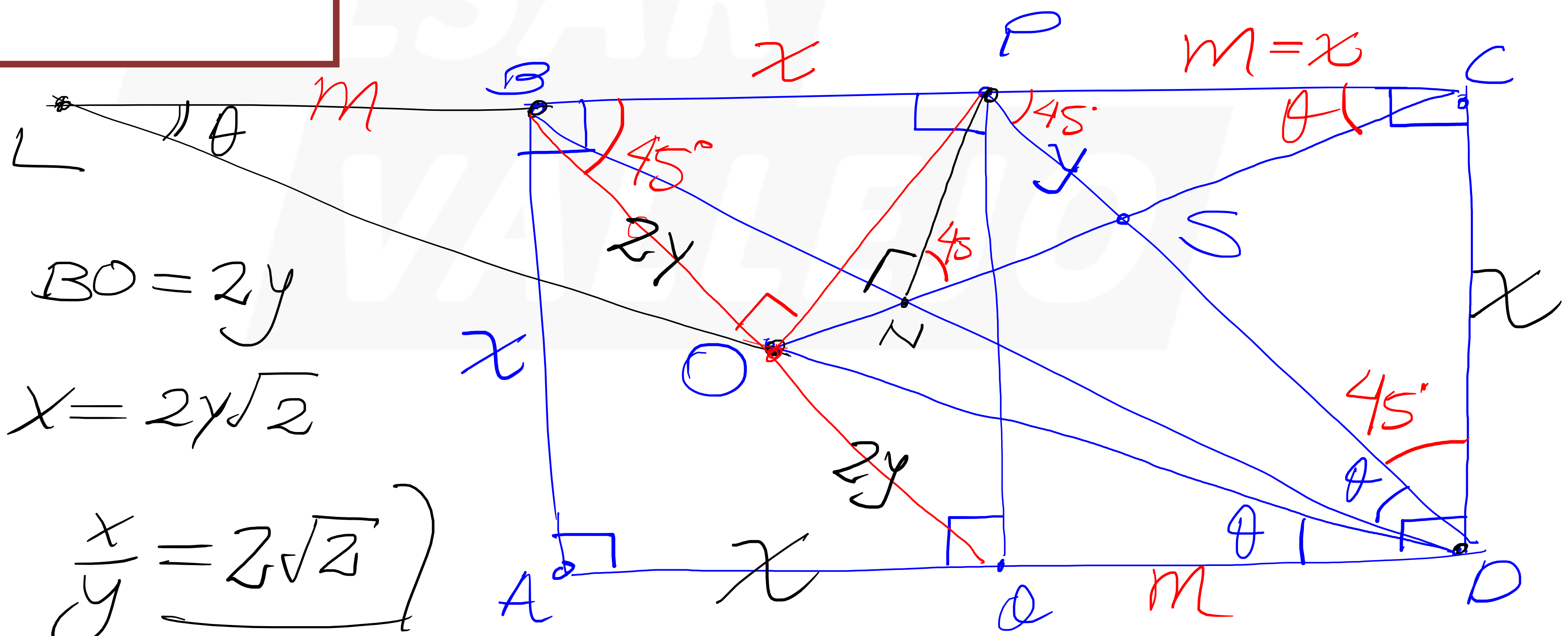
ABPQ: CUADRADO

ABCD: RECTÁNGULO

• ◻NPCD y ◻OBPN SON INSCRIPTIBLES

$\rightarrow m = x$

• △OBC: $\overline{PS}$ ES BASE MEDIA



LUEGO: $BO = 2y$

Pero: $x = 2y\sqrt{2}$

$\therefore \dfrac{x}{y} = 2\sqrt{2}$

PREGUNTA 8

En un cuadrilátero $ABCD$, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares a $\overline{AD}$, L y S están en $\overline{AB}$ y en $\overline{CD}$, respectivamente, de modo que $CS=2$, $SD=3$. Si $\overline{BS}$ interseca a $\overline{CL}$ en P y la distancia $\overline{PQ}$ a $\overline{AD}$ es 4 con Q en $\overline{AD}$, y $\overline{LQ}$ es paralelo a $\overline{BP}$, calcule AL.

A) 2,1

~~B) 2~~

C) 5

D) 1,2

E) 1,3

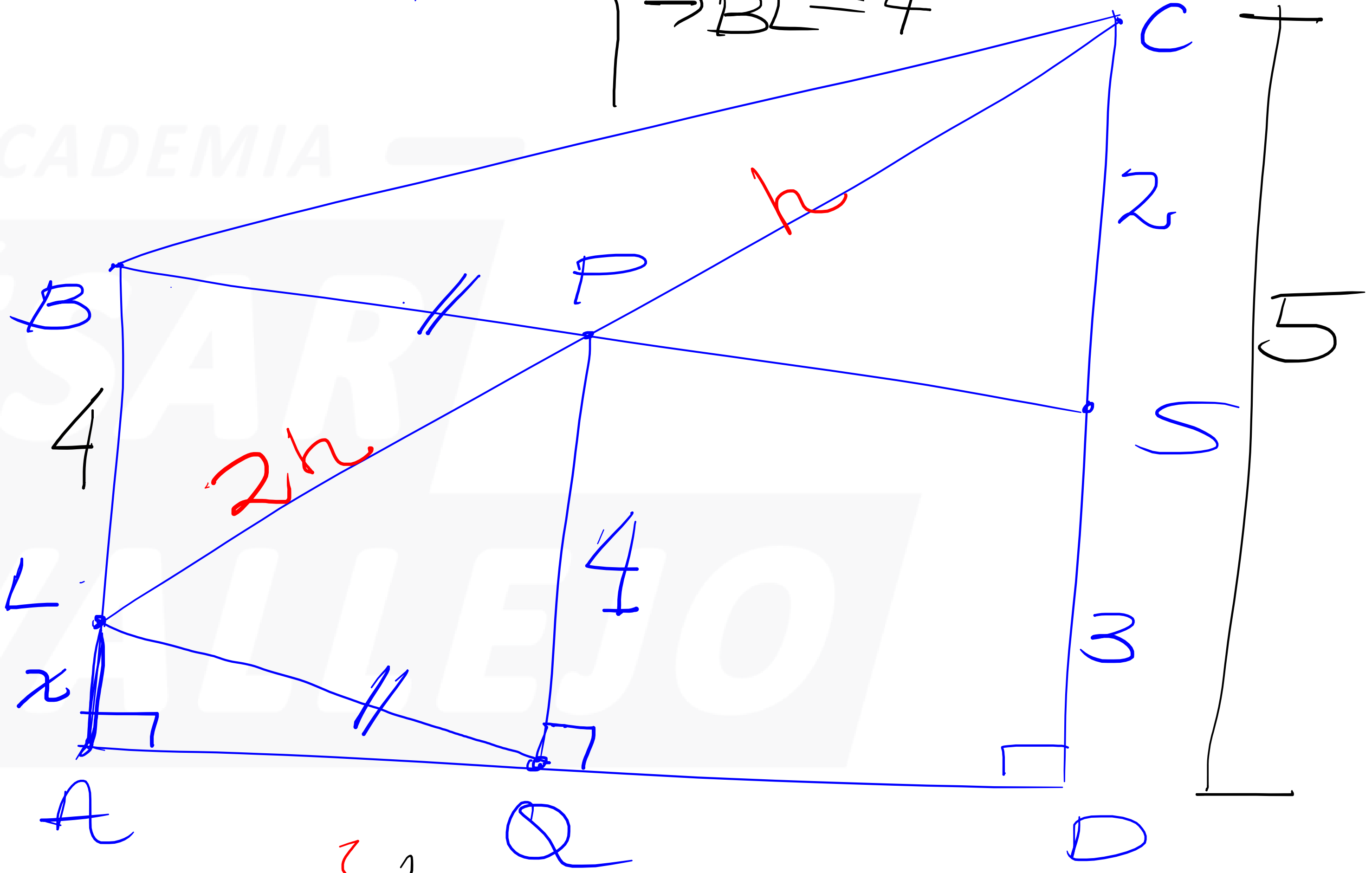
PIDEN: x

DATO: $\overline{BP} \parallel \overline{LQ}$

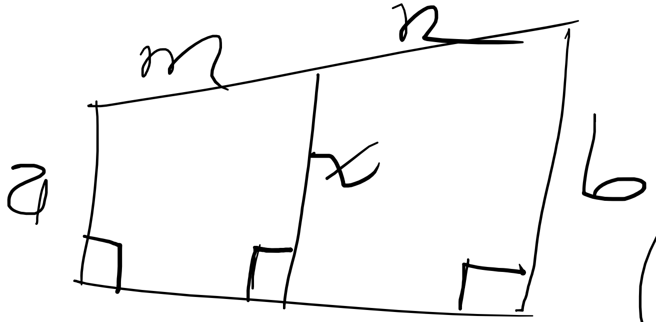
SE NOTA:

▱LBPQ ES PARALELOGRAMO

$\rightarrow BL=4$



OBS



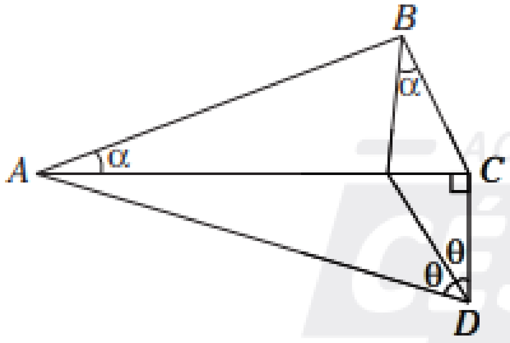
$$\boxed{x=\frac{an+bm}{m+n}}$$

LUEGO:

$$4=\frac{xh+5(2h)}{h+2h} \rightarrow \therefore x=2$$

PREGUNTA 9

Según el gráfico, $AD = 3(CD) = 6\sqrt{2}$. Calcule BC.



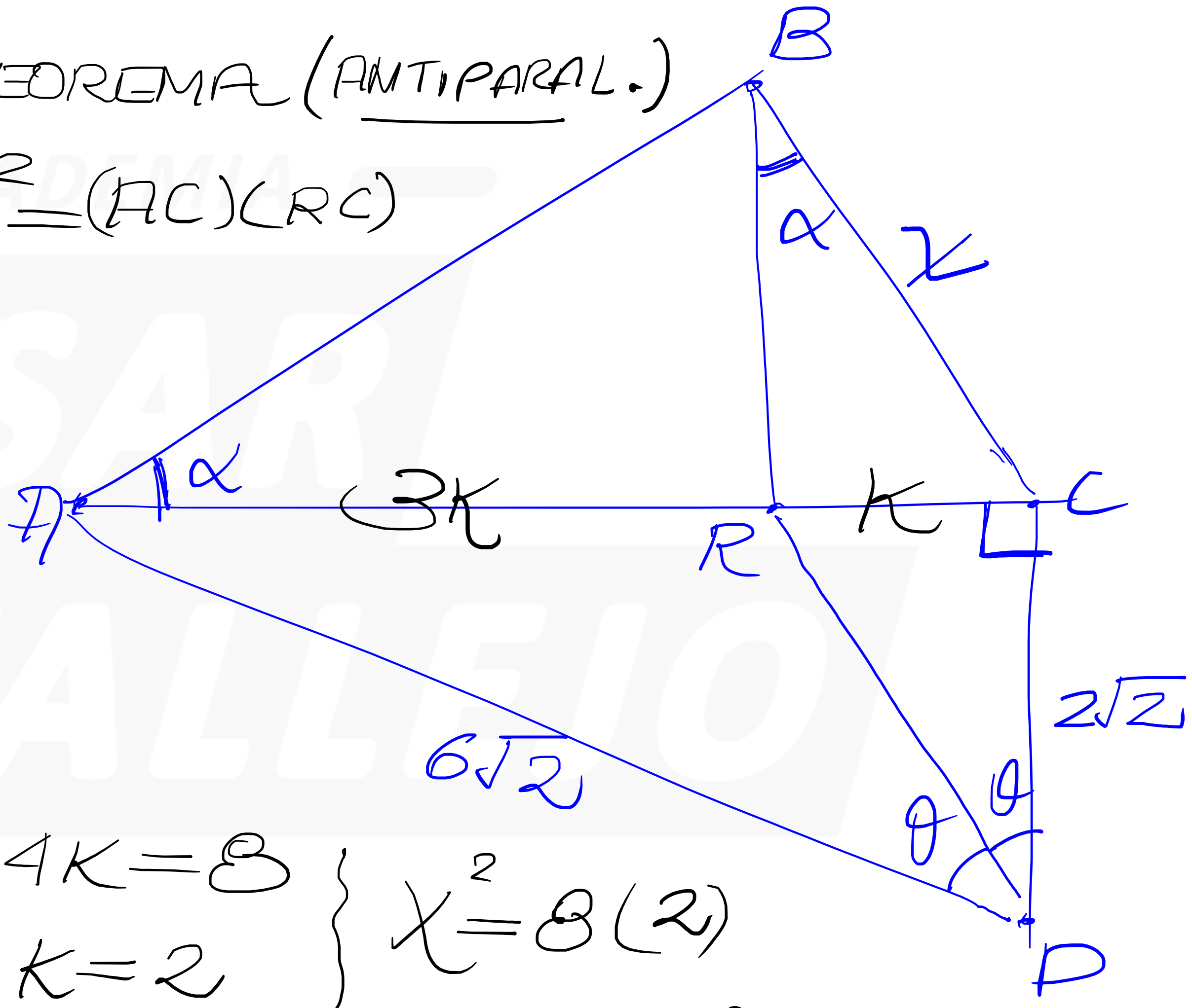
A) 1 B) 1,5 C) 2

D) $2\sqrt{2}$ E) 4

PIDEN: x

∘ TEOREMA (ANTIPARAL.)

$x^2 = (AC)(RC)$



∘ PITÁGORAS: $AC = 8$

∘ $\dfrac{AR}{RC} = \dfrac{3}{1}$

∘ $4K = 8$

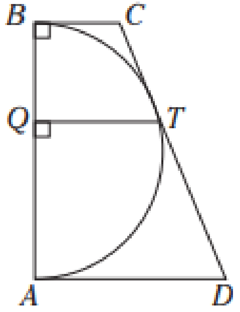
$K = 2$

$x^2 = 8(2)$

$\therefore x = 4$

PREGUNTA 10

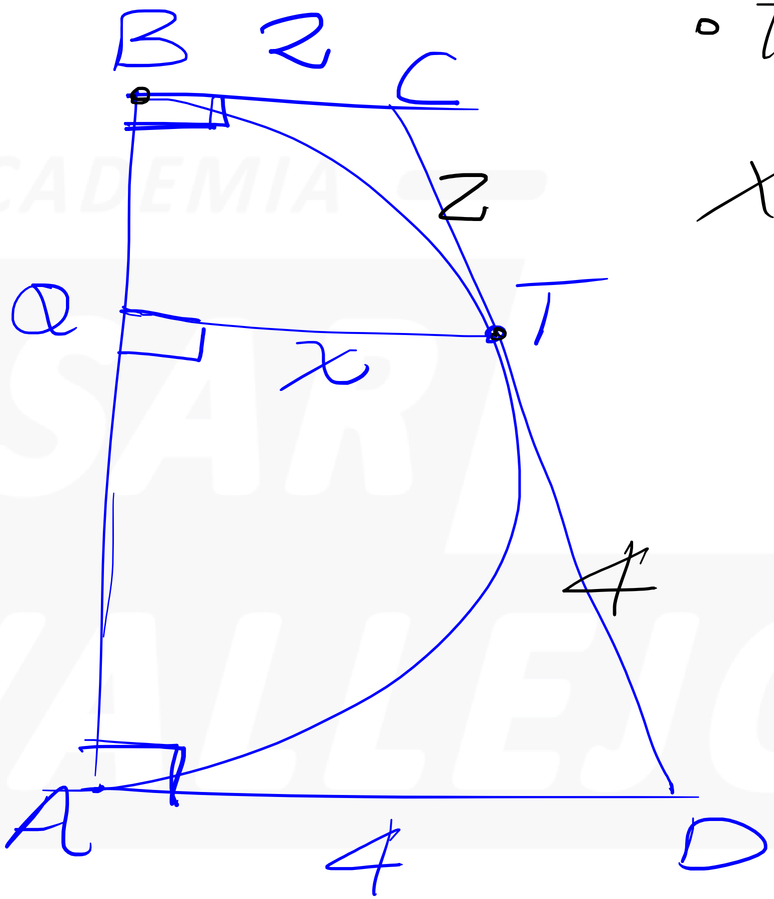
Según el gráfico, T es punto de tangencia. Si $BC=2$ y $AD=4$, calcule TQ.



A) $\frac{8}{3}$ B) $\frac{15}{8}$ C) $\frac{5}{2}$

D) 2 E) $\frac{4}{3}$

PIDEN: x



• TEOREMA

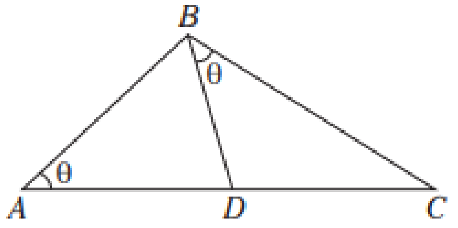
$$x = \frac{2(4)+4(2)}{2+4}$$

$$x = \frac{16}{6}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}$$

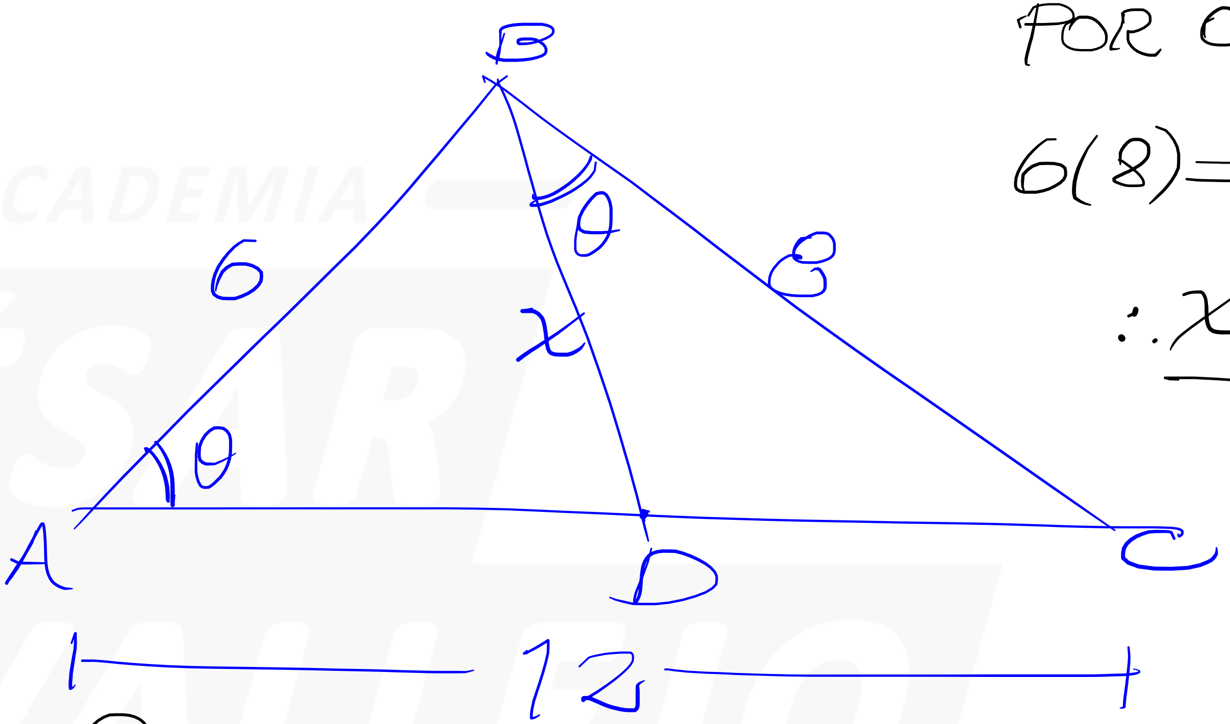
PREGUNTA 11

En el gráfico, $AB=6$, $BC=8$ y $AC=12$. Calcule BD.



A) 3
~~B) 4~~
C) 5
D) 2
E) 7

PIDEN: x

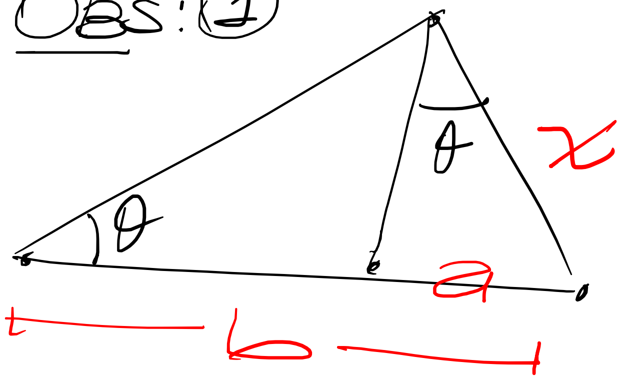


POR OBS (2)

$6(8)=12(x)$

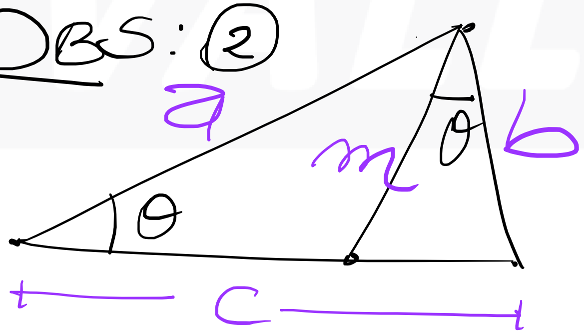
$\therefore \boxed{x=4}$

OBS: (1)



$\boxed{x^2=ab}$

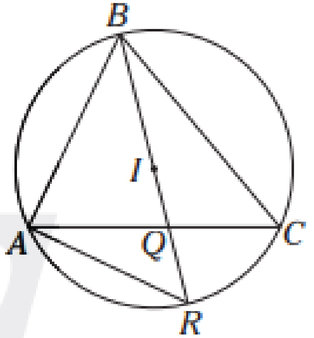
OBS: (2)



$\boxed{ab=c.m}$

PREGUNTA 12

Del gráfico, I es el incentro de la región triangular ABC. Si $BI=2(IQ)=4$, calcule AR.

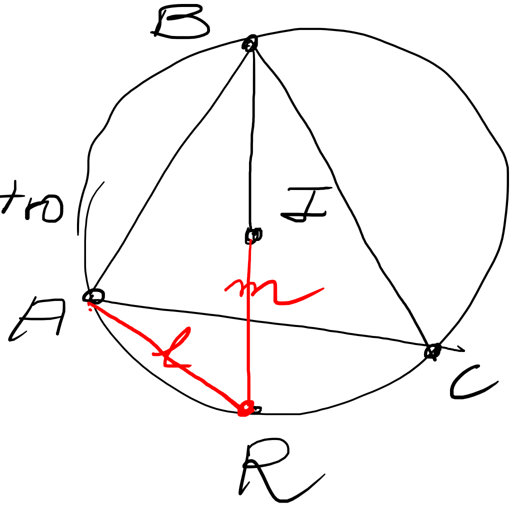


A) 3
B) $3\sqrt{2}$
C) 4
D) $4\sqrt{2}$
E) 6

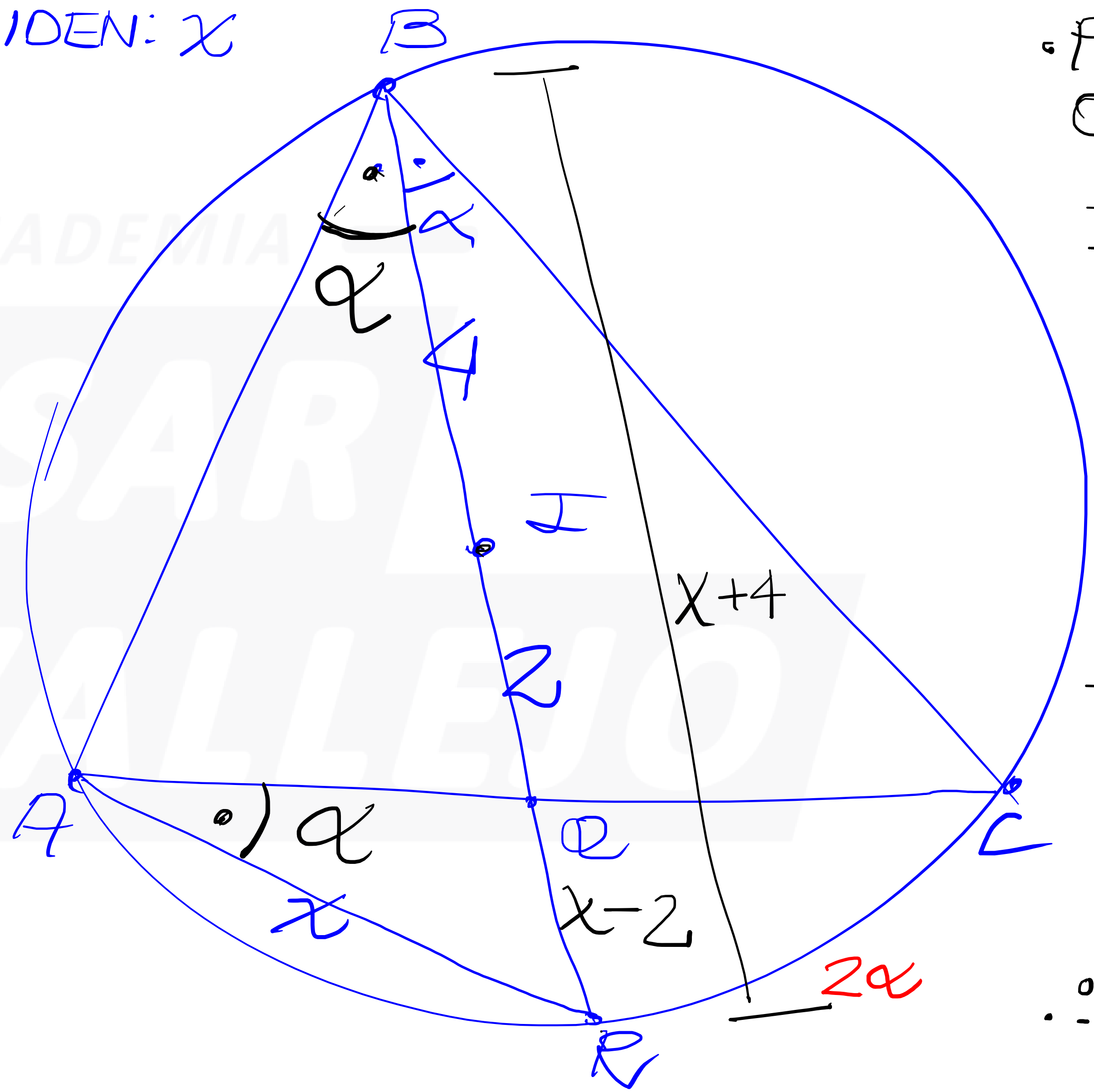
OBS:

I: incentro

$\ell = m$



PIDEN: x



• POR OBS:

$IR = AR = x$

• LUEGO

$QR = x-2$

• $\triangle ABR$ teorema

$x^2 = (x+4)(x-2)$

$\therefore \boxed{x=4}$

PREGUNTA 13

En un triángulo ABC, se trazan las alturas AQ y CP. Si $AC=3(PQ)$ y $AB=12$, calcule BQ.

A) 9
B) 3
C) 6
D) 4
E) $2\sqrt{3}$

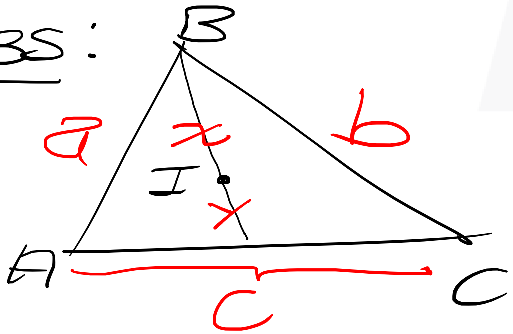
PREGUNTA 14

Calcule la distancia del incentro al baricentro de una región triangular, cuyos lados son 6; 7 y 8.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$

D) 2 E) $\frac{1}{2}$

OBS:

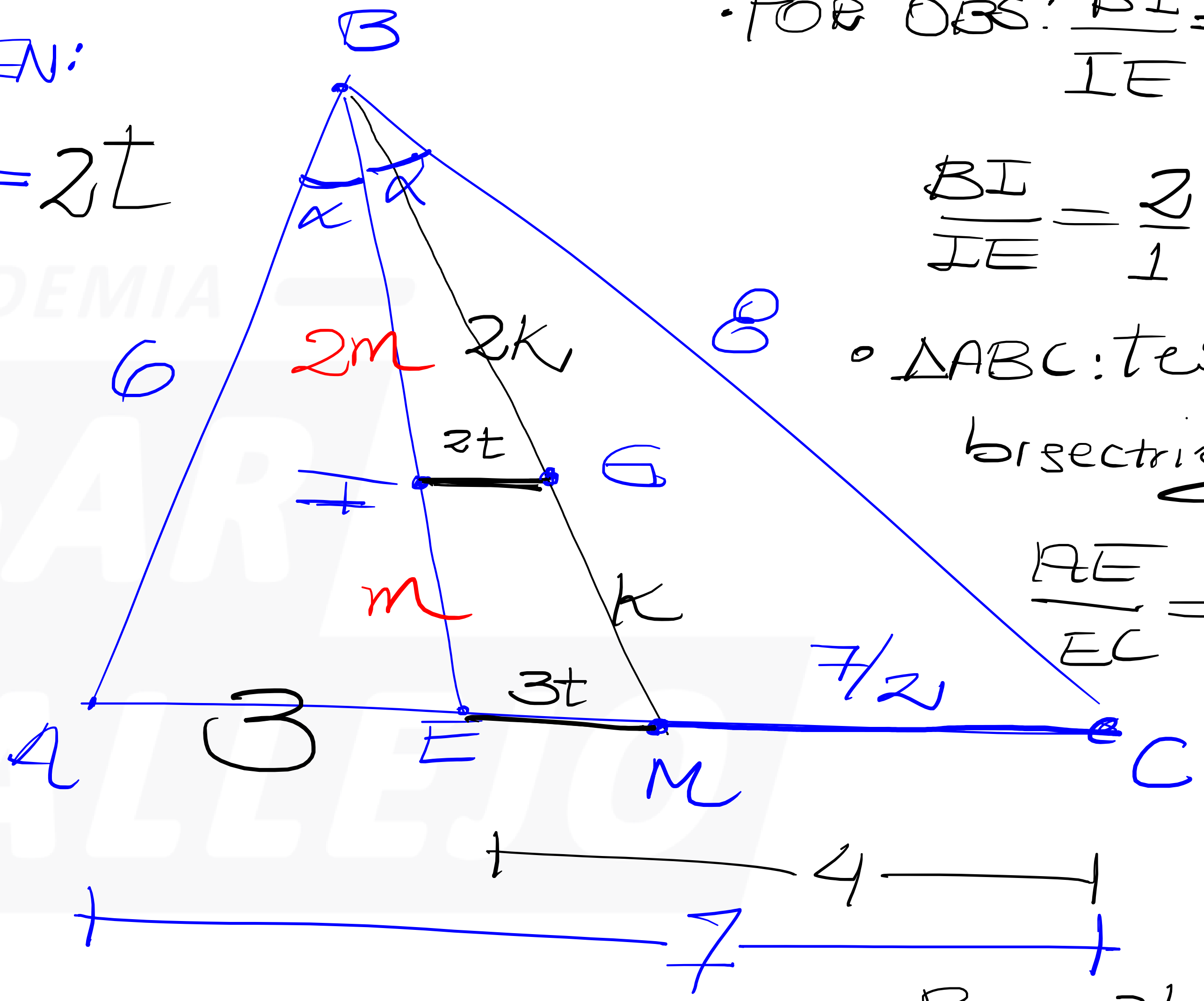


I: INCENTRO

$$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{a+b}{c}}$$

PIDEN:

$IG = 2t$



• POR OBS: $\frac{BI}{IE} = \frac{6+8}{7}$

$\frac{BI}{IE} = \frac{2}{1}$

• $\triangle ABC$: teo bisectriz

$\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$

• COMO $\overline{IG} \parallel \overline{EM}$

$\triangle IBG \sim \triangle EBM$

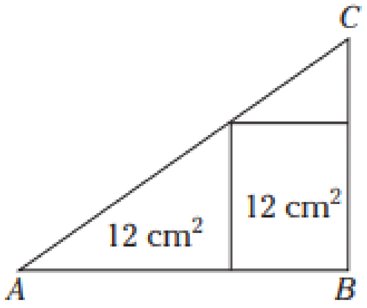
$\frac{IG}{EM} = \frac{2}{3}$

Pero: $3t = \frac{1}{2}$

$\therefore 2t = \frac{1}{3}$

PREGUNTA 15

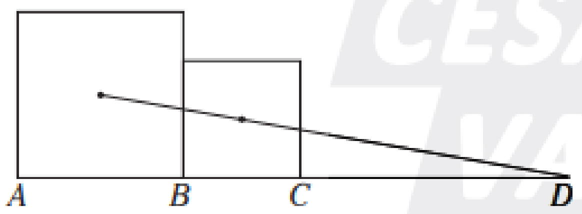
El triángulo rectángulo *ABC* ha sido dividido en un rectángulo y dos triángulos. El rectángulo y un triángulo tienen un área de 12 cm^2. ¿Cuál es el área del otro triángulo, en cm^2?



A) 1
B) 1,5
C) 2
D) 2,5
E) 3

PREGUNTA 16

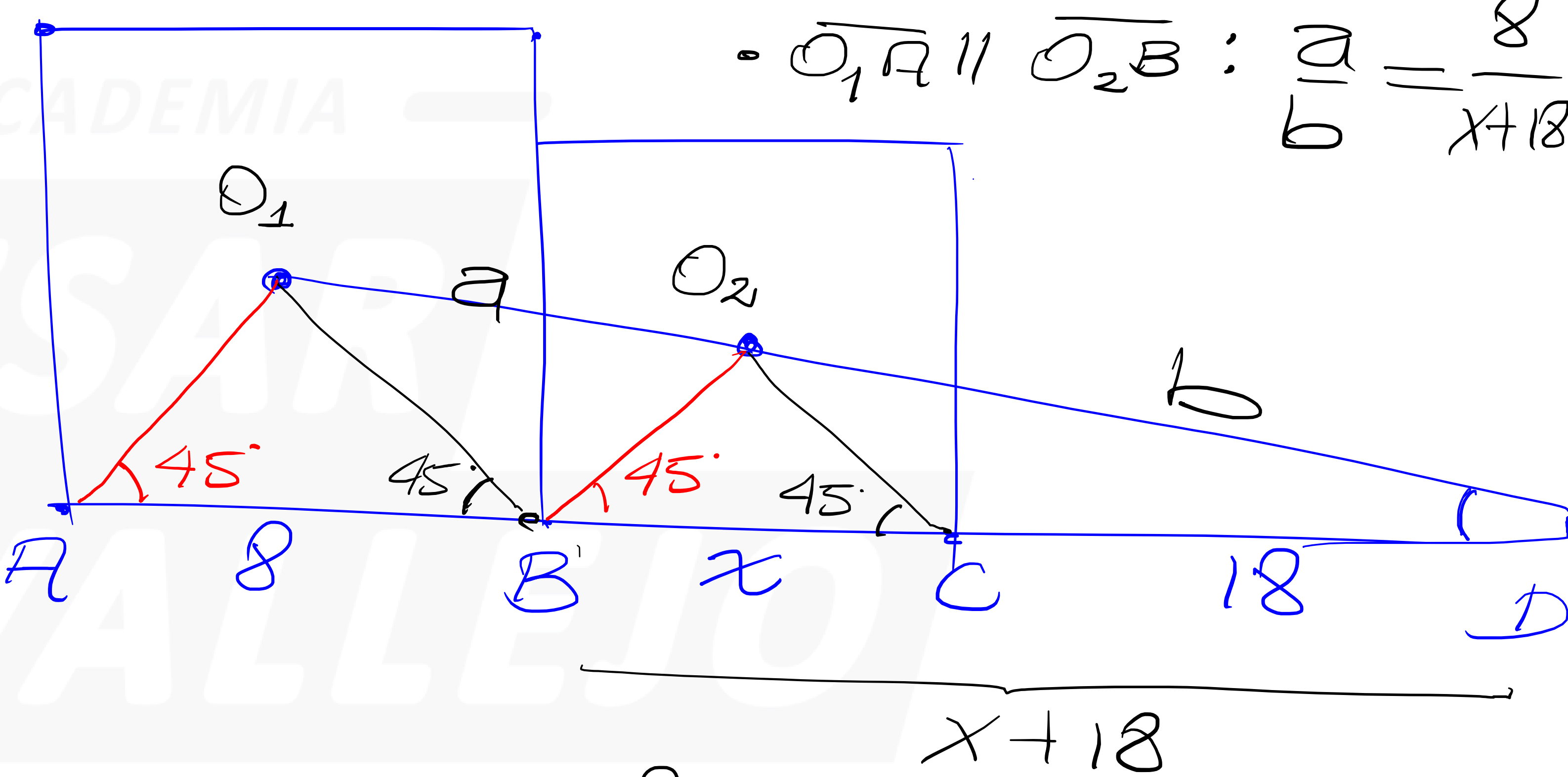
En el gráfico se muestra dos cuadrados y una recta que pasa por sus centros. Si $AB=8$ y $CD=18$, calcule la longitud de BC.



A) 1 B) 3 C) 6

D) 9 E) 2

PIDEN: x



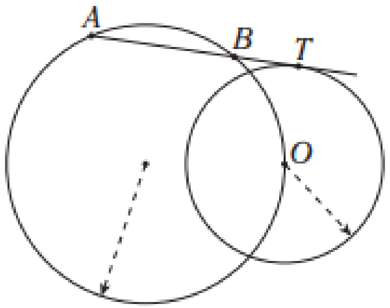
- $\overline{O_1B} \parallel \overline{O_2C}$: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{18}$
- $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2B}$: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{8}{x+18}$

DE LO ANTERIOR: $\dfrac{x}{18}=\dfrac{8}{x+18}$

$\therefore \boxed{x=6}$

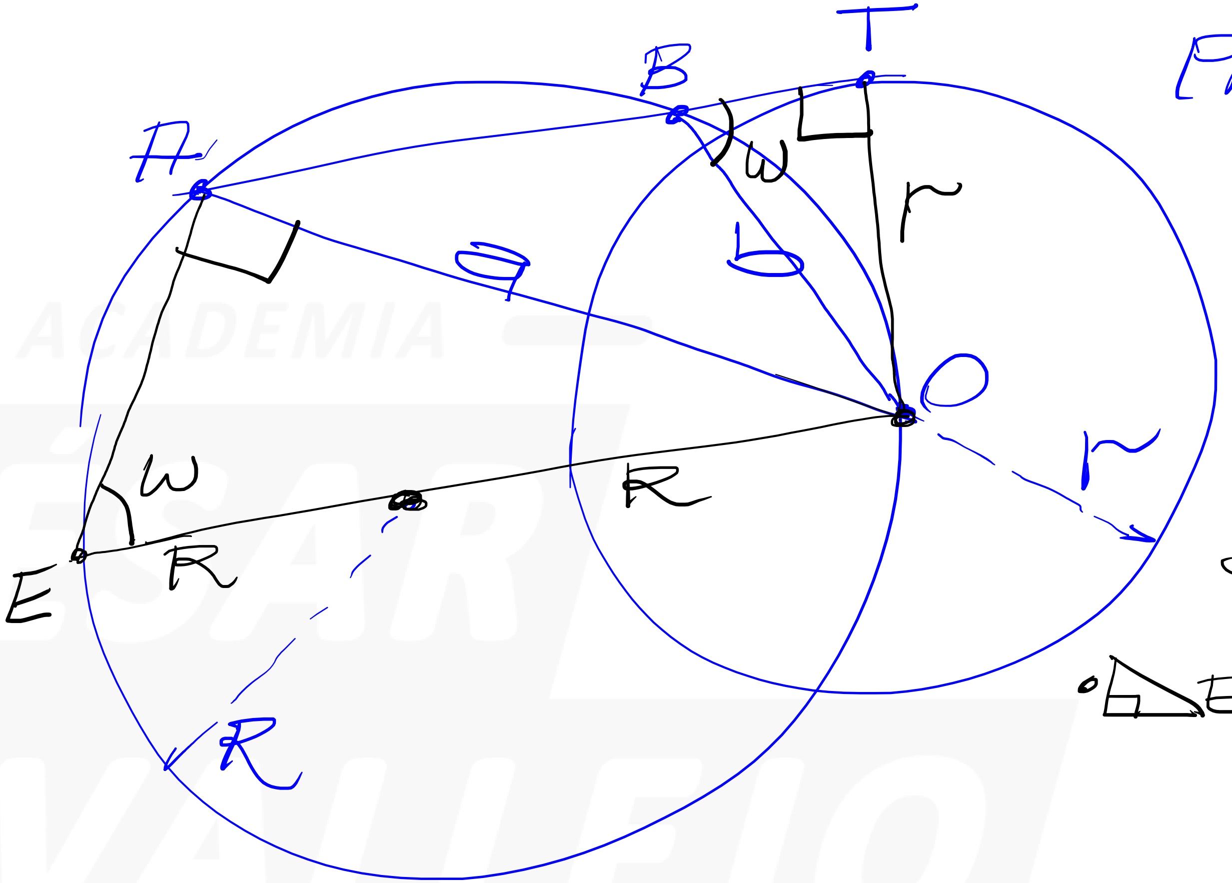
PREGUNTA 17

Si T es punto de tangencia, $(AO)(BO)=k$, halle el producto de las longitudes de los radios de las circunferencias mostradas.



A) $2k$ B) $4k$ C) $k\sqrt{2}$

D) $\frac{k}{2}$ E) k



PIDEN: $R.r$

• DATO

$a.b=K$

SE OBS:

• $\triangle EAO \sim \triangle BTO$

$$\frac{a}{2R}=\frac{r}{b}$$

$$ab=2Rr$$

$$\therefore \frac{K}{2}=R.r$$

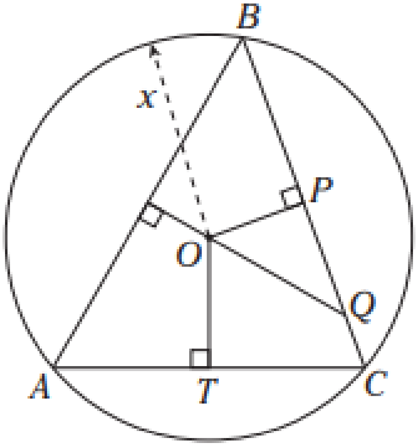
PREGUNTA 18

En un cuadrilátero $ABCD$, inscrito en una circunferencia cuyo radio mide 6, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en P, tal que $2(AP)=3(BP)$ y $BC=4$. Halle la m$\overset{\frown}{AD}$.

A) 37°
B) 45°
C) 53°
D) 60°
E) 74°

PREGUNTA 19

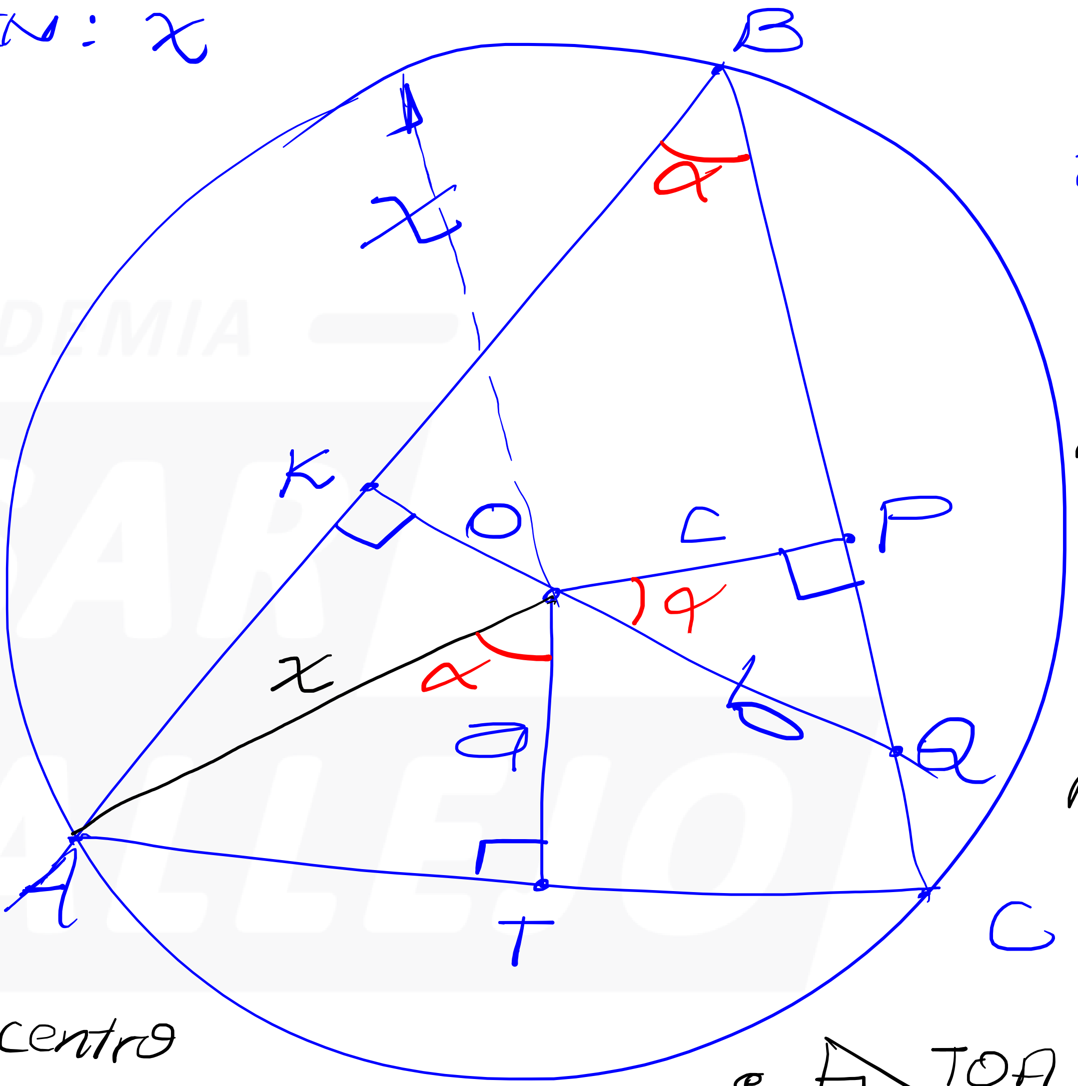
En el gráfico, $(OT)(OQ)=6(OP)$. Calcule x.



~~A) 6~~ B) 12 C) 4

D) 8 E) 3

PIDEN: x



- DATO

$ab = 6c$

• POR OBS:

$m\measuredangle B = m\measuredangle AOT$

• ◻KBPC es inscript.

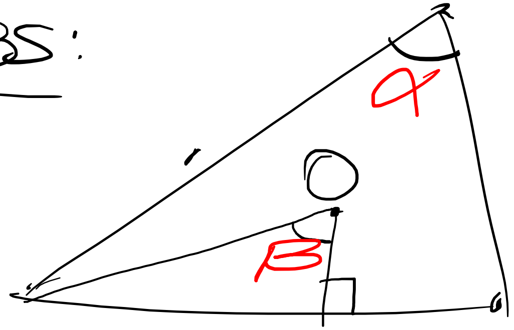
$m\measuredangle POQ = \alpha$

• $\triangle TOA \sim \triangle PCQ$

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{b}$$

$\rightarrow ab = xc \quad \therefore \boxed{x=6}$

OBS:



O: circuncentro

$\rightarrow \boxed{\alpha=\beta}$

PREGUNTA 20

Sea $\mathscr{C}$ la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo ABC, recto en B. Se trazan dos rectas tangentes a $\mathscr{C}$ y perpendiculares a $\overline{AC}$ en M y N ($A-M-N-C$). Si $(AM)(NC)=16$, halle el radio de la circunferencia $\mathscr{C}$.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4

D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt[3]{2}$

PIDEN: R

DATO:

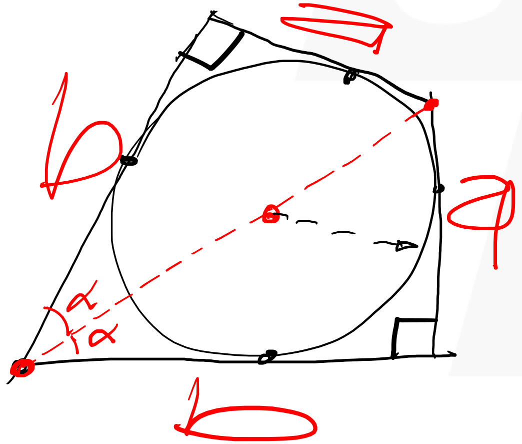
$ab = 16$

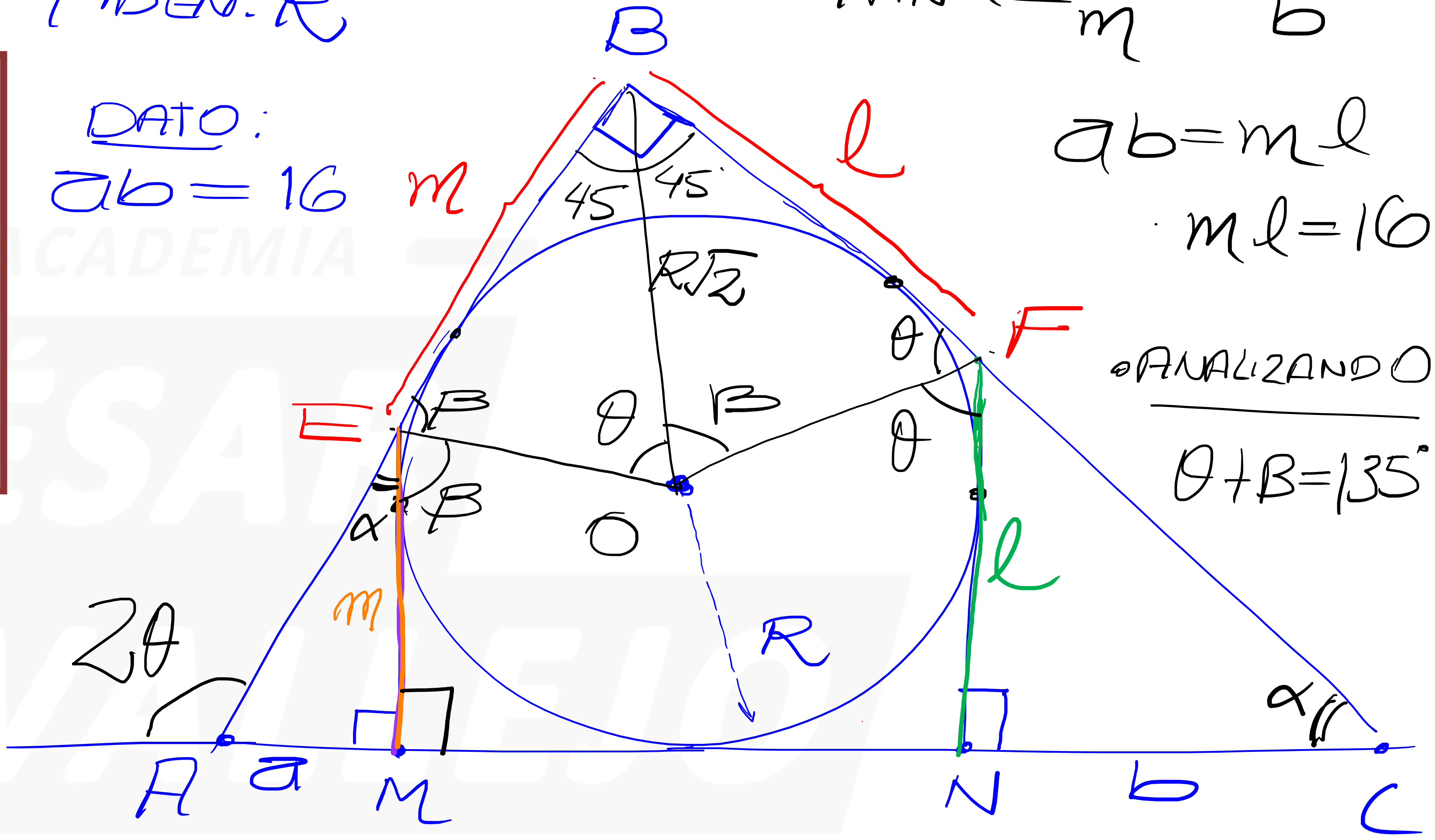
$\tan\alpha = \frac{a}{m} = \frac{l}{b}$

$ab = ml$

$ml = 16$

OBS:





• ANALIZANDO O

$\theta + \beta = 135^\circ$

• $\triangle EBO \sim \triangle OBF$

$\frac{m}{R\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{l}$

$ml = 2R^2$

$16 = 2R^2 \longrightarrow \therefore R = 2\sqrt{2}$

PREGUNTA 21

En un triángulo ABC, cuyo incentro es I, la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BD}$ interseca a la circunferencia circunscrita en E. Si $BI=3$, $DI=2$, halle DE.

A) 3
B) 4
C) 5/2
D) 6/5
E) 2

PREGUNTA 22

En un $\triangle ABC$, $m\measuredangle ABC=120°$, $AB=a$ y $BC=b$. Halle la longitud de la bisectriz interior $\overline{BD}$.

A) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$

B) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

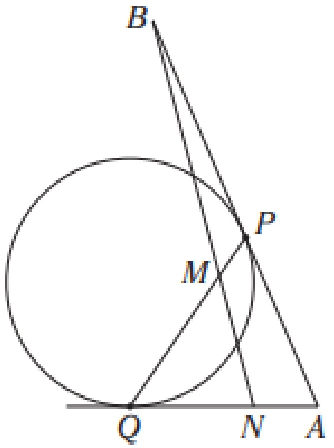
C) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b}$

E) $\dfrac{ab}{a+b}$

PREGUNTA 23

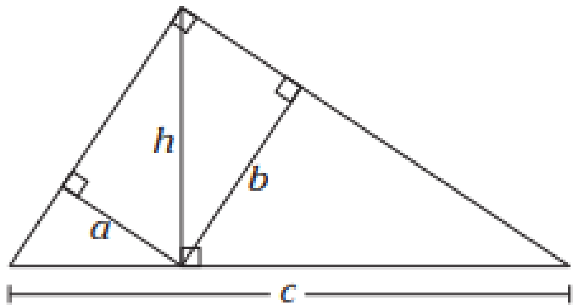
En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia, $PB=10$, $MQ=7$, $QN=5$. Si la $m\sphericalangle PAQ=74°$, calcule MP.



A) 2
B) 3
C) 4
D) 2,5
E) 5

PREGUNTA 24

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, si $a \cdot b \cdot c = 8$, calcule h.



A) 1 B) 2 C) 4
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt[3]{4}$

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS