academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Inecuaciones

Semana 03

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

OBJETIVOS:

- ✓ Resolver inecuaciones polinomiales y fraccionarias.
- ✓ Aplicar teoremas sobre inecuaciones.
- ✓ Resolver problemas tipo, relacionados con el tema de inecuaciones.

INECUACIÓN

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones matemáticas, donde esta presente al menos una variable que será llamada incógnita.

Ejemplo:

- $2x^2 \leq 3x - 1$
- $\dfrac{x-3}{x+1} > \dfrac{5}{x+3}$
- $|2x-3| \leq 10$

Solución de una inecuación

Es el valor que al reemplazarla por la incógnita en la inecuación, la desigualdad se verifica.

Ejemplo:

- $x^2 \leq x + 6$ una solución es el 2, veamos:

$x = 2$: $2^2 \leq 2 + 6$ ¡se verifica!

INECUACIÓN LINEAL

Su forma general es:

$$\boxed{ax + b \gtreqless 0} \quad a \neq 0$$

Resolución:

Su resolución por lo general es por despeje de la incógnita aplicando los teoremas de desigualdades.

Ejemplo

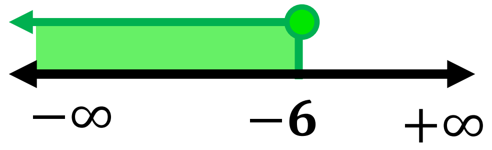
Resuelva

$$3x - 5 \leq x - 17$$

Resolución

$\xrightarrow{-x}$ $2x - 5 \leq -17$ $\xrightarrow{+5}$ $2x \leq -12$

$\xrightarrow{\div 2}$ $x \leq -6$



$\therefore\ CS = \langle -\infty; -6]$

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Su forma general es:

$$ax^2 + bx + c \gtrless 0 \qquad a \neq 0$$

Ejemplos

- $5x^2 + 3x - 7 > 0$
- $x^2 - 10 \leq 0$

Resolución:

La inecuación cuadrática se debe reducir a su forma general y es conveniente que su coeficiente principal sea positivo ($a > 0$).

Según el discriminante (Δ) de la cuadrática, se presentan 3 casos:

Caso 1 $\quad (\Delta > 0)$

Halle sus dos raíces (por factorización o fórmula general), luego aplique el criterio de los puntos críticos e indique el CS.

Ejemplo:

Resuelva

$$5x + 12 \geq 2x^2$$

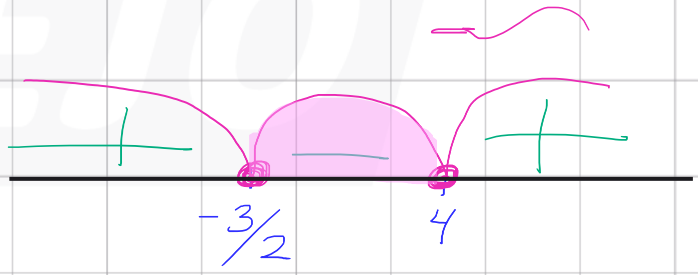
Resolución

$$0 \geq 2x^2 - 5x - 12 \qquad \Delta > 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & 3 \\ x & & -4 \end{array}$$

$$0 \geq (2x+3)(x-4)$$

$$PC: -3/2 \; ; \; 4$$



$$CS = [-3/2 \; ; \; 4]$$

Ejemplo

Resuelva la siguiente inecuación

$$2x^2 + 9\sqrt{3}x - 15 > 0$$

Resolución:

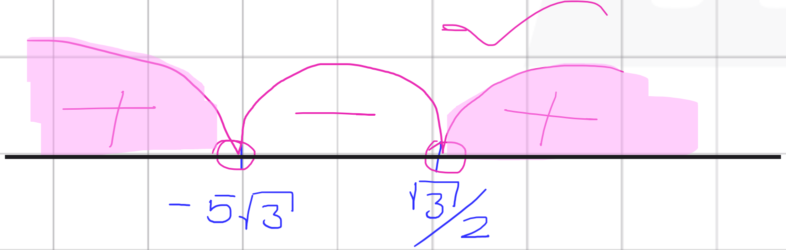
$2x^2 + 9\sqrt{3}x - 15 > 0 \longrightarrow \Delta > 0$

$2x \quad -\sqrt{3}$

$x \quad 5\sqrt{3}$

$(2x - \sqrt{3})(x + 5\sqrt{3}) > 0$

PC: $\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\ -5\sqrt{3}$



$\mathcal{S} = \langle -\infty; -5\sqrt{3} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty \rangle$

Observación

Toda inecuación cuadrática $ax^2 + bx + c \gtrless 0$ tiene como conjunto solución a uno de los sgtes. intervalos: $\langle m\,;n \rangle$; $\langle -\infty; m \rangle \cup \langle n\,;+\infty \rangle$

$[m\,;n]$; $\langle -\infty; m] \cup [n; +\infty \rangle$

donde m y n son raíces de la cuadrática, entonces podemos aplicar el Teo. de Cardano.

Ejemplo:

Determine ab si la inecuación $1x^2 + ax + b \geq 0$ tiene como CS $= \langle -\infty; -3] \cup [7\,; +\infty \rangle$

raíces

Resolución:

Por Cardano

o) Suma raíces $= -3 + 7 = -\frac{a}{1} \Rightarrow a = -4$

o) Producto raíces $= (-3)(7) = \frac{b}{1} \Rightarrow b = -21$

$\therefore ab = \underline{84}$

Caso 2 $(\Delta = 0)$

El polinomio es un trinomio cuadrado perfecto y por simple inspección se obtiene el conjunto solución.

$\boxed{x^2 \geq 0 \,;\, \forall x \in \mathbb{R}}$

Ejemplo

Resuelva la inecuación

$$x^2 - 12x + 36 \leq 0$$

Resolución:

Se tiene $x^2 - 12x + 36 \leq 0$

$x^2 - 12x + 36 \leq 0$
$x \quad -6$
$x \quad -6$
$\underbrace{(x-6)(x-6)}\leq 0$
$(x-6)^2 \leq 0$

Como $\Delta = (-12)^2 - 4(1)(36) = 0$

entonces la cuadrática es un TCP

$\longrightarrow \quad (x-6)^2 \leq 0$

$\longrightarrow \quad (x-6)^2 = 0 \quad \vee \quad (x-6)^2 < 0$

$\rightarrow x = 6$

$\therefore \quad CS = \{6\}$

También tenga en cuenta lo siguiente:

- Si $(x-3)^2 \geq 0 \longrightarrow CS = \mathbb{R}$
- Si $(x-3)^2 > 0 \longrightarrow CS = \mathbb{R} - \{3\}$
- Si $(x-3)^2 \leq 0 \longrightarrow CS = \{3\}$ (Solución única)
- Si $(x-3)^2 < 0 \longrightarrow CS = \emptyset$

Observación

Si el conjunto solución de:

- $ax^2 + bx + c \leq 0$ es de la forma $\{\alpha\}$
- $ax^2 + bx + c > 0$ es de la forma $\mathbb{R} - \{\alpha\}$

entonces $a > 0,\ \Delta = 0$ y α es raíz doble.

Se puede aplicar Cardano.

Ejemplo

Halle el valor de $(b+m)$ si la inecuación

$2x^2-12x+b\leq 0$ tiene como $CS=\{m\}$.

→ raíz

Resolución:

Notamos q' m es la raíz doble.

Por Cardano

- Suma raíces: $m+m=-\left(\frac{-12}{2}\right) \Rightarrow m=3$
- Product. raíces: $(m)(m)=\frac{b}{2} \Rightarrow b=18$

(3) (3)

$\therefore m+b=\boxed{21}$

Caso 3 $(\Delta < 0)$

Se debe aplicar el teorema de trinomio positivo, luego por simple inspección se obtiene el conjunto solución que puede ser $\mathbb{R}$ o $\emptyset$.

Teorema del trinomio positivo (TTP):

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{(+)} > 0\ ;\ \forall x\in\mathbb{R} \leftrightarrow (a>0 \wedge \Delta<0)$$

Ejemplo

Sea $P_{(x)}=3x^2+7x+5$

Como $\Delta=7^2-4(3)(5)$

$\Delta=-11<0$

Además $a=3>0$

Por el teorema del trinomio positivo

$$P_{(x)}=\underbrace{3x^2+7x+5}_{+}>0\quad ;\ \forall\, x\in\mathbb{R}$$

También tenga en cuenta lo siguiente:

$$\underbrace{3x^2+7x+5}_{+}<0 \longrightarrow \text{CS}=\emptyset$$

$$\underbrace{3x^2+7x+5}_{+}\leq 0 \longrightarrow \text{CS}=\emptyset$$

$$\underbrace{3x^2+7x+5}_{+}>0 \longrightarrow \text{CS}=\mathbb{R}$$

$$\underbrace{3x^2+7x+5}_{+}\geq 0 \longrightarrow \text{CS}=\mathbb{R}$$

Aplicación

Si $\quad x^2-rx-\dfrac{3}{4}>-r;\quad \forall x\in\mathbb{R}$

Halle la variación de r.

Resolución

$1x^2-rx-\frac{3}{4}>-r;\ \forall x\in\mathbb{R}$

$x^2-rx-\frac{3}{4}+r>0;\ \forall x\in\mathbb{R}$, por el T.T. positivo

Se cumple

$a=1>0 \ \wedge \ \Delta<0$

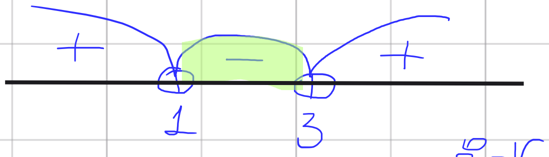
$(-r)^2-4(1)\left(-\frac{3}{4}+r\right)<0$

$r^2+3-4r<0$

$r^2-4r+3<0$

$(r-3)(r-1)<0$

PC: 3 ; 1



$r\in\langle 1;3\rangle$

Teorema del trinomio no negativo

$$ax^2 + bx + c \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a > 0 \wedge \Delta \leq 0)$$

Aplicación

Determine la variación de m si la inecuación

$$x^2 - mx + 3 \geq 0$$

cumple para todo x que pertenece a los reales.

Resolución:

$x^2 - mx + 3 \geq 0;\ \forall x \in \mathbb{R}$, por el T.T no negativo

Se cumple: $a = 1 > 0$ y

$\Delta \leq 0$

$(-m)^2 - 4(1)(3) \leq 0 \rightarrow \sqrt{m^2} \leq \sqrt{12}$

$|m| \leq 2\sqrt{3}$

$\therefore m \in [-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$

INECUACIÓN POLINOMIAL DE GRADO SUPERIOR

Su forma general es:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \gtrless 0$$

Donde: $a_0 \neq 0 \quad \wedge \quad n \geq 3$

Ejemplos:

- $x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \leq 0$
- $4x^4 - 5x^2 + 1 > 0$

Resolución:

1) La inecuación que tome su forma general y es convenientes que su coeficiente principal sea positivo.

2) Factorice en $\mathbb{R}$

3) Aplique los teoremas necesarios para simplificar la inecuación .

4) Aplique el criterio de los puntos críticos e indique el conjunto solución.

Ejercicio

Resuelva la inecuación

$$7x + 6 - x^2 \geq 2x^3$$

Resolución:

$$0 \geq 2x^3 + x^2 - 7x - 6$$

factorizar por: Divisores binómicos

Por Ruffini

	2	1	−7	−6
2	↓	4	10	6
	$2x^2$	$5x$	3	0

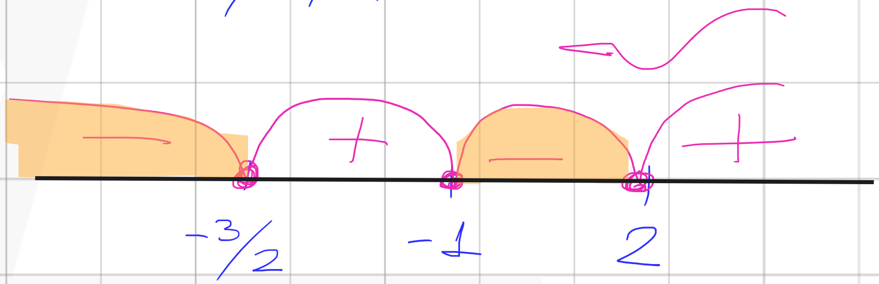
raíz

$$\Rightarrow (x-2)(2x^2+5x+3) \leq 0$$

$$\begin{array}{ll} 2x & 3 \\ x & 1 \end{array}$$

$$(x-2)(2x+3)(x+1) \leq 0$$

Pc: $2; -3/2; -1$



$$C.S. = \langle -\infty; -3/2] \cup [-1; 2]$$

Teoremas

Sea la inecuación polinomial, $P_{(x)} \gtrless 0$

Teorema 1

Si $P_{(x)}$ presenta un factor positivo, dicho factor se puede cancelar y no cambia el sentido de la desigualdad.

Ejemplos

Resuelva las siguientes inecuaciones

- $$x^4 \leq 5x^2 + 36$$

$x^4 - 5x^2 - 36 \leq 0$

$x^2 \quad -9$

$x^2 \quad 4$

$(x^2-9)\underbrace{\cancel{(x^2+4)}}_{(+)} \leq 0$

$x^2 - 9 \leq 0 \rightarrow (x-3)(x+3) \leq 0$

$PC: 3; -3$

$\therefore CS = [-3; 3]$

- $$(x^2 - 4x - 12)\underbrace{\cancel{(x^2 + 3x + 5)}}_{(+)}(2x - 1) > 0$$

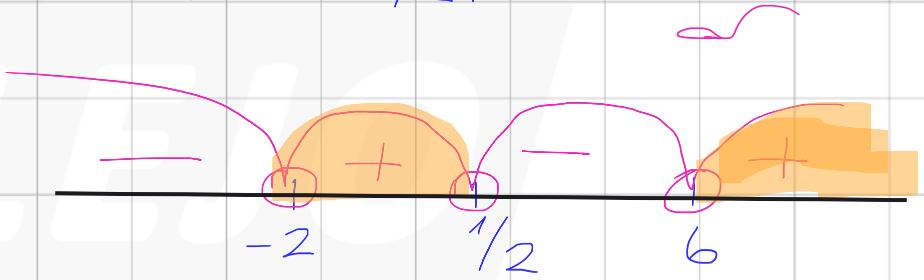
$(+) \leftarrow a > 0 \wedge \Delta < 0$

$x \quad -6$

$x \quad 2$

$(x-6)(x+2)(2x-1) > 0$

$PC: 6; -2; 1/2$



$\therefore CS = \langle -2; 1/2 \rangle \cup \langle 6; +\infty \rangle$

Teorema 2

Si $P_{(x)}$ presenta algún factor con exponente impar, dicho exponente se puede cancelar y no afecta el sentido de la desigualdad.

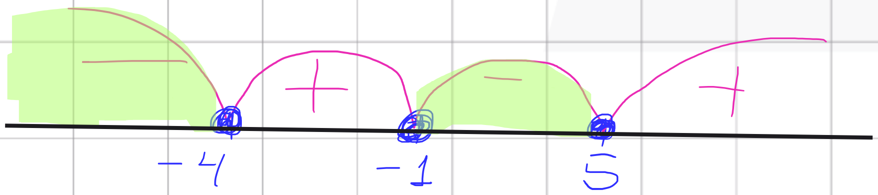
Ejemplo

- Resuelva $(x+4)^{\cancel{5}}(x+1)(x-5)^{\cancel{3}} \leq 0$

Resolución

$\Leftrightarrow (x+4)(x+1)(x-5) \leq 0$

PC: $-4; -1; 5$



$CS = \langle -\infty; -4] \cup [-1; 5]$

- $(x^2-3x+2)(x^2-4x+3)(x^2-5x+4) \leq 0$

Resolución

$x \quad -2 \qquad x \quad -3 \qquad x \quad -4$

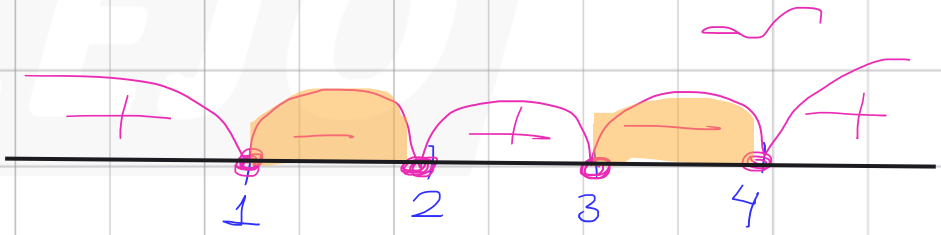
$x \quad -1 \qquad x \quad -1 \qquad x \quad -1$

$(x-2)(x-1)(x-3)(x-1)(x-4)(x-1) \leq 0$

$(x-2)(x-3)(x-4)(x-1)^{\cancel{3}} \leq 0$

$(x-2)(x-3)(x-4)(x-1) \leq 0$

PC: $2; 3; 4; 1$



$CS = [1; 2] \cup [3; 4]$

Teorema 3

Cuando $P_{(x)}$ presenta factores con **exponente par**, se puede cancelar dicho factor teniendo en cuenta lo siguiente:

Si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$, se rescata la(s) solución(es) de los factores cancelados igualándolos a cero.

Si la desigualdad es $<$ o $>$, se rescata la(s) restricciones obtenidas de los factores cancelados, indicando que estas deben ser diferente a cero.

Ejemplos

- $\cancel{(x-4)^2}(x-1) \leq 0$

$x-1 \leq 0 \quad \vee \quad x-4=0$

$x \leq 1 \quad \vee \quad x=4$

$\therefore \text{CS} = \langle -\infty;1] \cup \{4\}$

- $\cancel{(x+3)^4}(x-5)\cancel{(x-8)^6} \geq 0$

$x-5 \geq 0 \quad \vee \quad x+3=0 \quad \vee \quad x-8=0$

$x \geq 5 \quad \vee \quad x=-3 \quad \vee \quad x=8$

Ya está en el CS

$\therefore \text{CS} = [5;+\infty\rangle \cup \{-3\}$

Ejemplos

- $\cancel{(x-5)^4}(x-9) < 0$

$x-9<0 \quad \wedge \quad x-5 \neq 0$

$x<9 \quad \wedge \quad x \neq 5$

$\therefore \text{CS} = \langle -\infty;9\rangle - \{5\}$

- $\cancel{(x-6)^2}(x-4)\cancel{(x+1)^8} > 0$

$x-4>0 \quad \wedge \quad x-6 \neq 0 \quad \wedge \quad x+1 \neq 0$

$x>4 \quad \wedge \quad x \neq 6 \quad \wedge \quad x \neq -1$

El CS no toma este valor

$\therefore \text{CS} = \langle 4;+\infty\rangle - \{6\}$

INECUACIÓN FRACCIONARIA

Su forma general es:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \lessgtr 0}$$

Donde: $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios

$°[Q(x)] \geq 1$

Ejemplos:

- $\dfrac{2x-1}{x^2-2x-3} \geq 0$
- $\dfrac{x+1}{x-2} < x$

Teorema:

x

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \gtrless 0 \;\leftrightarrow\; P(x).Q(x) \gtrless 0 \;\wedge\; Q(x) \neq 0}$$

Resolución

1) Llevarlo a su forma general.

2) Aplique el teorema.

3) Resuelva la inecuación polinomial e indique el CS considerando la restricción del paso 2.

Ejercicio :

Resolver:

$$1 \leq \frac{4}{x-3}$$

Resolución

Ejercicio :

Halle la suma de las soluciones enteras positivas de la inecuación

$$\frac{3}{x+2} \leq \frac{5}{2x-3}$$

Resolución:

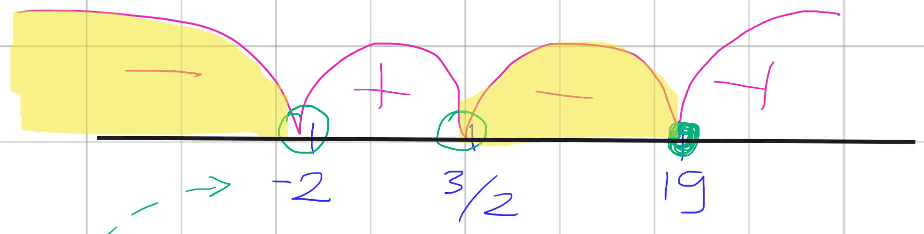
$$\frac{3}{x+2} - \frac{5}{2x-3} \leq 0 \quad ; \quad x+2 \neq 0 \; ; \; 2x-3 \neq 0$$

$$x \neq -2 \; ; \; x \neq \frac{3}{2}$$

$$\frac{6x-9-5x-10}{(x+2)(2x-3)} \leq 0$$

$$(x+2)(2x-3)(x-19) \leq 0$$

PC: $-2 \; ; \; 3/2 \; ; \; 19$



$$S = \langle -\infty ; -2 \rangle \cup \langle 3/2 ; 19]$$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe