academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TRIGONOMETRÍA

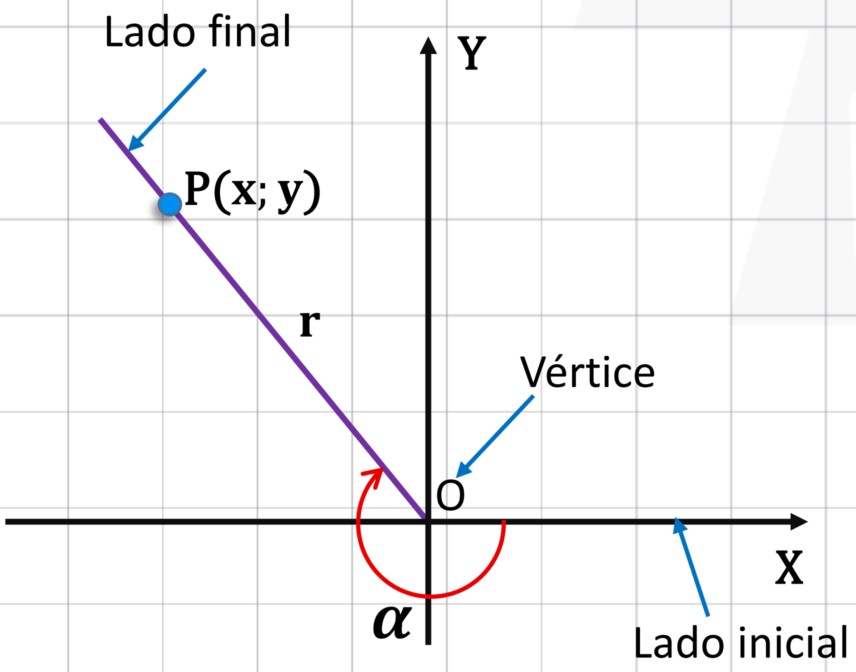
Tema:

ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL PLANO CARTESIANO

Definición

El ángulo en posición normal, es aquel ángulo trigonométrico que tiene su lado inicial sobre el eje positivo de las abscisas, vértice en el origen de coordenadas y lado final en cualquier parte del plano cartesiano.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{radio vector}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Abscisa}}{\text{radio vector}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Ordenada}}{\text{Abscisa}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Abscisa}}{\text{Ordenada}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{Abscisa}} = \frac{r}{x}$$

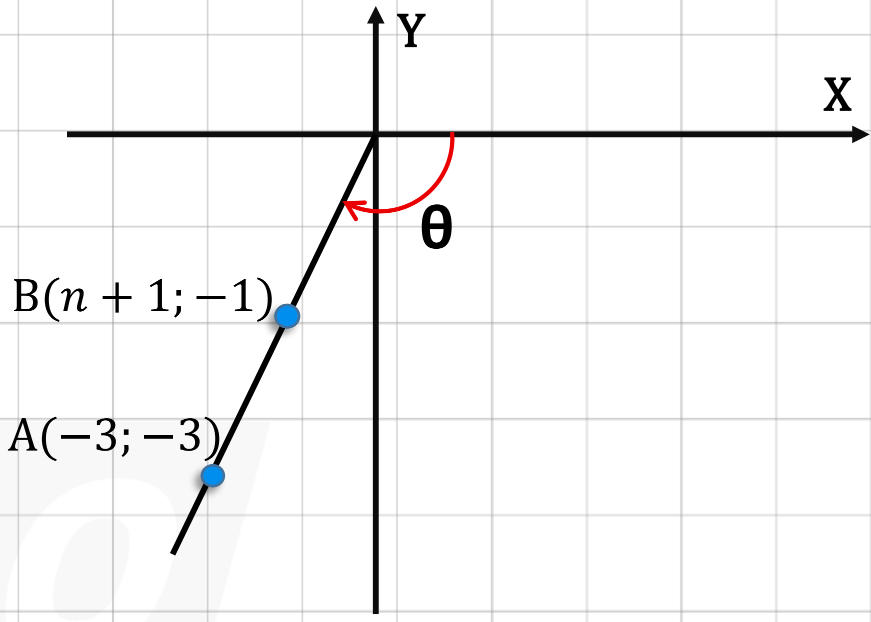
$$\csc\alpha = \frac{\text{radio vector}}{\text{Ordenada}} = \frac{r}{y}$$

Donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ejemplo

Del grafico halle el valor de n



Veamos

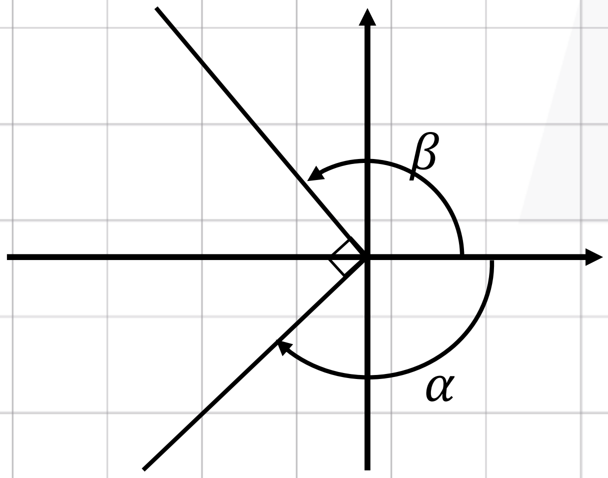
Por definición: $\cot\theta = \dfrac{n+1}{-1} = \dfrac{-3}{-3}$

Luego: $n + 1 = -1$

$\therefore n = -2$

Aplicación UNI 2012

De la figura mostrada, el valor de $\tan\alpha\tan\beta$ es



A) -2 B) -1 C) $-\frac{1}{2}$

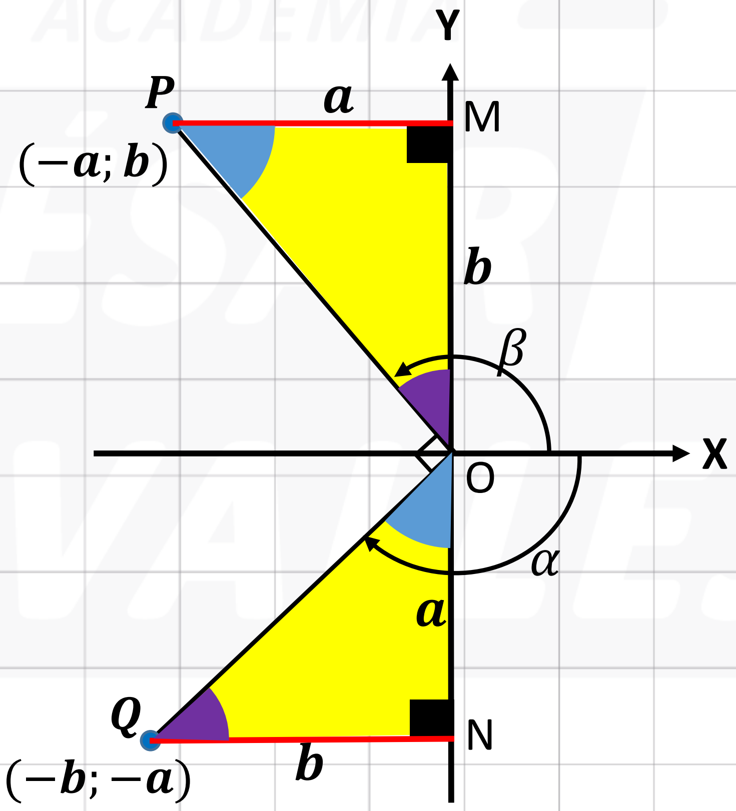
D) $-\frac{1}{2}$ E) 1

Resolución

Piden: $R = \tan\alpha\tan\beta$

Elegimos P y Q tal que $OP = OQ$

El triángulo PMO es congruente al triángulo QNO

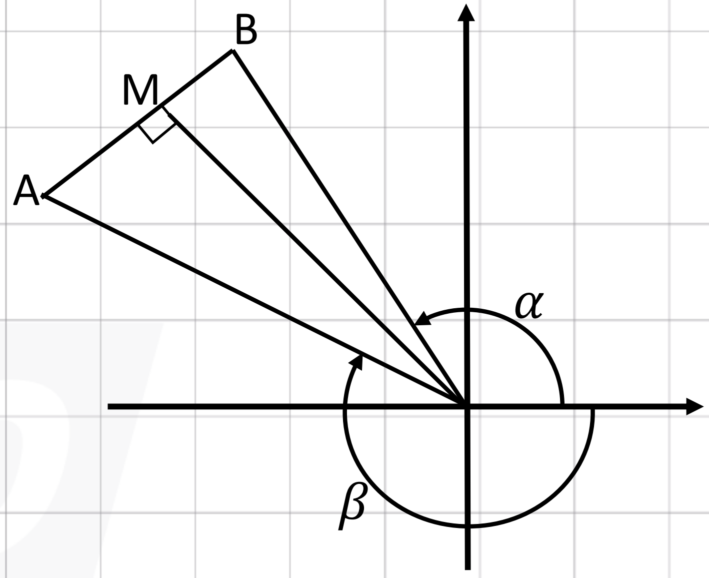


$$\tan\alpha = \frac{-a}{-b} \quad \wedge \quad \tan\beta = \frac{b}{-a}$$

Luego: $R = \frac{-a}{-b}\cdot\frac{b}{-a}$ $\quad \therefore \boldsymbol{R = -1}$

Reto UNI

En la figura mostrada $M = (-5; 4)$ es punto medio de AB. Calcule $\frac{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$



A) $-\frac{5}{4}$ B) $-\frac{4}{5}$ C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{5}{4}$ E) $\frac{7}{5}$

Signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante

Sea α un ángulo en posición normal con lado final en algún cuadrante. Entonces considerando las coordenadas de un punto en el lado final, observaremos que las razones trigonométricas pueden ser positivas o negativas. Se muestra el siguiente cuadro de signos de las razones trigonométricas.

Cuadrante	Razones trigonométricas positivas	Razones trigonométricas negativas
IC	Todas las Razones trigonométricas	Ninguna
IIC	$\operatorname{sen}\alpha\ y \csc\alpha$	$\tan\alpha, \cot\alpha, \cos\alpha, \sec\alpha$
IIIC	$\tan\alpha\ y \cot\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha, \csc\alpha, \cos\alpha, \sec\alpha$
IVC	$\cos\alpha\ y \sec\alpha$	$\operatorname{sen}\alpha, \csc\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$

sen, csc (+)	Todas son positivas
tan, cot (+)	cos, sec (+)

Aplicación

Si $\tan\theta > 0$ y $\cos\theta < 0$, determine el signo de las siguientes expresiones

$N = cot\theta - csc\theta$

$M = cos^3\theta + sen\theta$

Veamos

$\tan\theta > 0$ ....(I)

$\cos\theta < 0$ ....(II)

De (I) y (II):

$\theta \in IIIC.$

- N= $\cot\theta - \csc\theta$

  N= (+) – (–)=(+)+(+)

  N= (+)

- $M = cos^3\theta + sen\theta$

  $M = (-)^3 + (-)$

  $M = (-) + (-)$

  $M = (-)$

Razones trigonométricas de ángulos cuadrantales

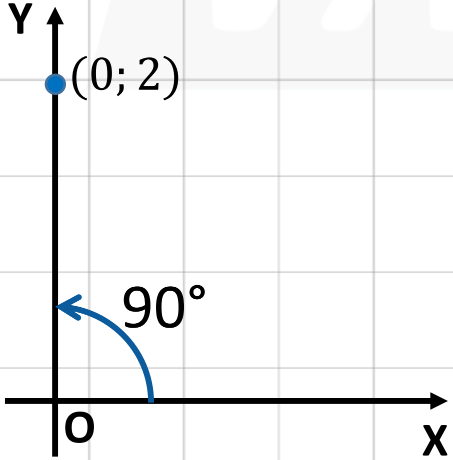
Sea α un ángulo en posición normal con lado final en algún semieje del plano cartesiano, (**ángulo cuadrantal**) . La medida de α se determina por

$$\alpha = 90°k \ \vee \ \alpha = \frac{\pi k}{2}\text{rad}$$

Ejemplos

$\alpha = 0, 90, 180, 270, \ldots$

Para el cálculo de las razones trigonométricas de 90°, dibujamos en el plano cartesiano y asumimos un punto "P" a una distancia 2 del origen de coordenadas, tal como se muestra en la figura



$$\text{sen } 90° = \frac{y}{r} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{2}{0} = No\ definido(ND)$$

Si repetimos el proceso para los diferentes ángulos cuadrantales obtendremos el siguiente cuadro:

	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	-1	ND	1
csc	ND	1	ND	-1	ND

Aplicación UNI

Si α y β son ángulos cuadrantales, positivos y menores que una vuelta, que cumplen $\cos^2\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2$, calcule el valor de la expresión

$$E = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos(\beta - \alpha)$$

A) -3
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

Resolución

$$\alpha\,;\beta \in \{90°, 180°; 270°\}$$

$cos^2\alpha - sen\beta = 2$
$cos^2\alpha = 2 + sen\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$

Por ser α ángulo cuadrantal, tenemos los casos siguientes:

- Si $\alpha = 90°$ ó $270° \Rightarrow \cos\alpha = 0$

Remplazando (I): $0 = 2 + \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}\beta = -2 = \frac{-2}{1} = \frac{y}{r}$, esto no es posible $(r \geq |y|)$

Entonces: $\boldsymbol{\alpha \neq 90°}$ ***y*** $\boldsymbol{\alpha \neq 270°}$

- Si $\alpha = 180° \Longrightarrow \cos\alpha = -1$

Remplazando (I): $(-1)^2 = 2 + \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}\beta = -1 \rightarrow \beta = 270°$

Luego $\boldsymbol{\beta = 270°}$ $\quad y \quad$ $\boldsymbol{\alpha = 180°}$

Reemplazando en E:

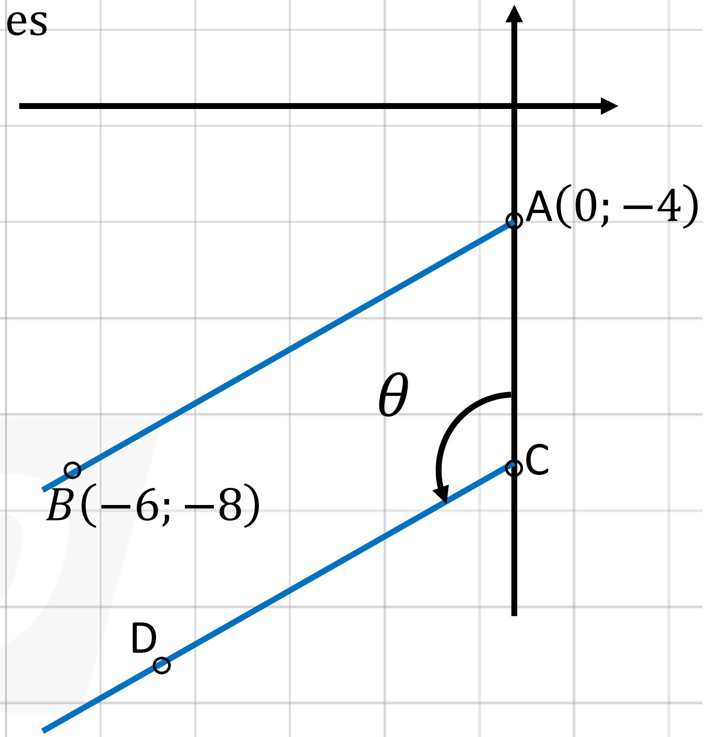
$E = \operatorname{sen}90° + \cos 90°$

$E = 1 + 0$

$\therefore \boldsymbol{E = 1}$

UNI 2017 I

En el gráfico mostrado si $AB \parallel CD$, entonces el valor de $\tan\theta$ es



A) $-\frac{3}{2}$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe