academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

FUNCIONES REALES Y GRÁFICA DE FUNCIONES I

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

OBJETIVOS:

- ✓ Conocer a las funciones, sus elementos, propiedades y gráficas.
- ✓ Calcular el dominio y rango en base a su regla de correspondencia .
- ✓ Desarrollar destrezas en la resolución de problemas tipo referidos al tema.

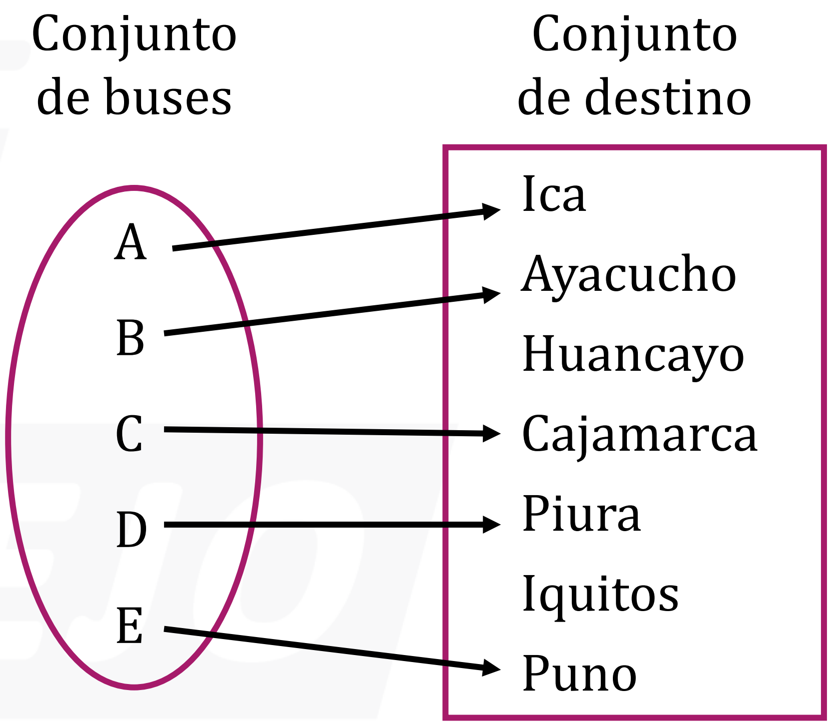
Introducción

Al observar la naturaleza detenidamente, podemos ver que muchas de las situaciones que suceden a nuestro alrededor están relacionadas.
Una de las situaciones cotidianas es el transporte de pasajeros a los distintos departamentos del Perú.

Veamos la siguiente situación :

Una empresa de transportes cuenta con 5 unidades de buses ,para transportar pasajeros a 6 ciudades del Perú, con horario de salida a las 8 de la mañana.

El siguiente diagrama muestra una posible distribución de bus y destino



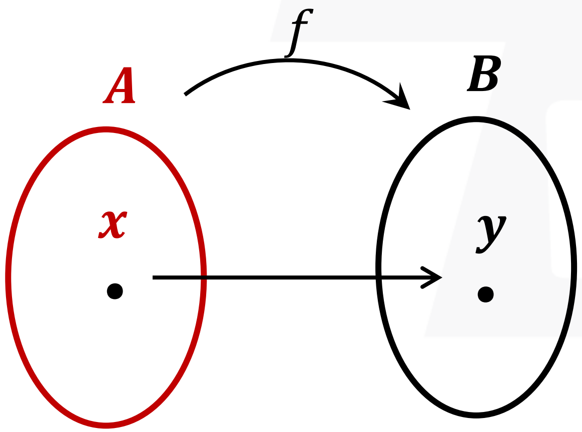
Del diagrama se observa que un bus solo puede ir a una sola ciudad

FUNCIÓN

Sean A y B conjuntos no vacíos. La función f de A en B es un conjunto de pares ordenados $(x; y)$ tal que a $x \in A$ le corresponde un único elemento $y \in B$.

Notación: $f: A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$

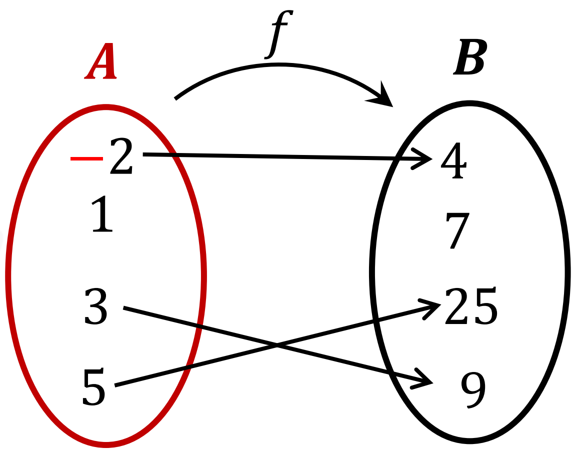
Gráficamente



Conjunto de partida

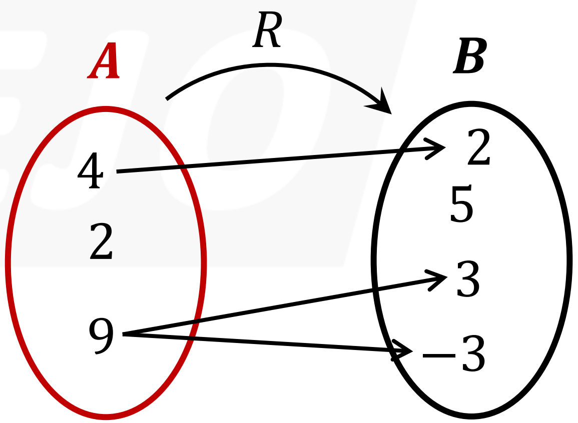
Conjunto de llegada

Ejemplos

- 

f es función

$f = \{(-2; 4); (3; 9); (5; 25)\}$

- 

R no es función

$R = \{(4; 2); (9; 3); (9: -3)\}$

CONDICIÓN DE UNICIDAD DE LA FUNCIÓN

Sea f una función.

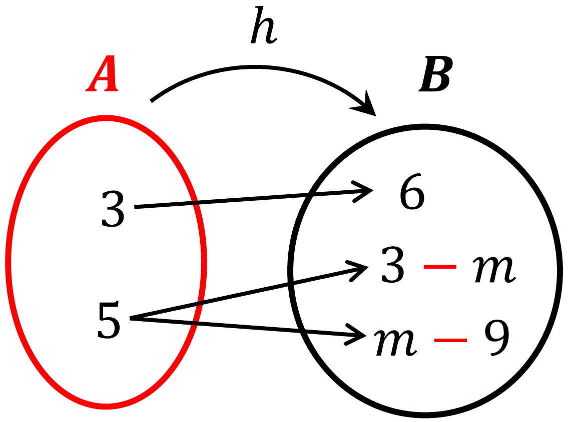
$$\text{Si } (\boldsymbol{x}; y) \in f \ \wedge \ (\boldsymbol{x}; z) \in f \ \rightarrow \ y = z$$

Ejemplos

- Sea g una función

  $g = \{(6; -3); (8; 4); (6; p)\} \quad \rightarrow \ p = -3$

- Sea h una función



$\rightarrow \ 3 - m = m - 9$

$\rightarrow \ m = 6$

DOMINIO Y RANGO

Sea la función $f : A \longrightarrow B$

Dominio de *f*

Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función.

$$\boxed{\text{Dom } f = \{x/(x; y) \in f\} \subseteq A}$$

Rango de *f*

Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen la función.

$$\boxed{\text{Ran } f = \{y/(x; y) \in f\} \subseteq B}$$

Ejemplo $\quad f = \{(-2; 4);\ (3; 9);\ (5; 25)\}$

$\text{Dom}f = \{-2; 3; 5\} \quad \text{Ran}f = \{4; 9; 25\}$

REGLA DE CORRESPONDENCIA

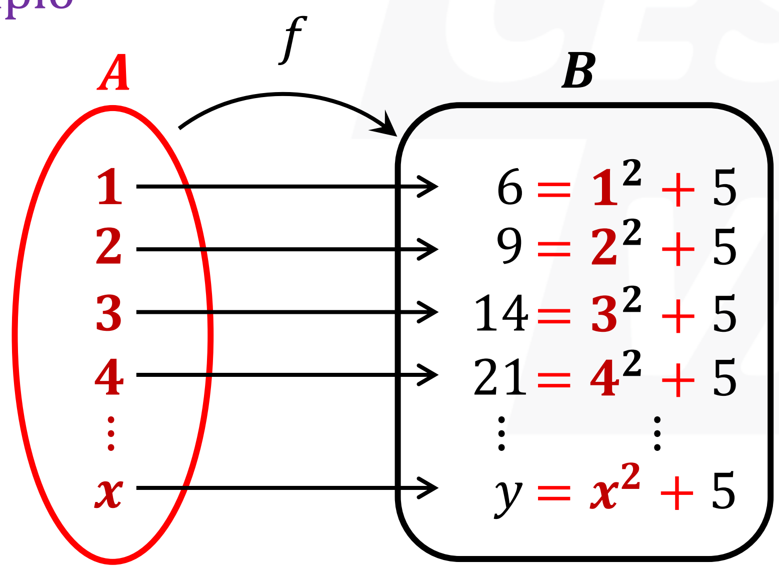
Sea $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ una función tal que $(x; y) \in f$. La regla de correspondencia de f es la igualdad que relaciona x e y.

Notación $\quad y = f(x)$

x: Var. independiente

y: Var. dependiente

Ejemplo



Luego: $\quad y = x^2 + 5 \quad$ o $\quad f(x) = x^2 + 5$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

La función $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es una función real de variable real, si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Ejemplos

- $$\begin{aligned} f: \langle -1;\ 6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 2x - 3 \end{aligned}$$

  De donde podemos plantear que:

  $\mathrm{Dom} f = \langle -1; 6] \quad \wedge \quad f(x) = 2x - 3$

- $g = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/ -2 < x \leq 5 \ \wedge\ y = 3x - 1\}$

  $\mathrm{Dom}\ g = \langle -2; 5] \ \wedge \ g(x) = 3x - 1$

Nota: Una función está **bien definida** si se conoce su dominio y regla de correspondencia.

CÁLCULO DE DOMINIO Y RANGO

Sea la función $\begin{array}{cccc} f & : \boldsymbol{A} & \rightarrow & \boldsymbol{B} \\ & x & \rightarrow & f_{(x)} \end{array}$

Dominio de *f*

Esta dada por la variación de x, si esta no se conoce entonces:

$$\text{Dom } f = A \cap \left(\text{CVA de } f_{(x)} \right)$$

Para hallar el CVA consideramos:

- $\sqrt[\text{par}]{\boldsymbol{h(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h(x) \geq 0$
- $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Q_{(x)} \neq 0$

Ejemplo:

Halle el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{9x - x^2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Resolución

Ejemplo:

Halle el dominio de la función si

$$g_{(x)} = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-4}} - \sqrt{9-|2x-3|}$$

Resolución

Rango de f

Esta dada por la variación de $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x})}$, y se obtiene a partir del dominio.

Ejemplo:

- Halle el rango de la función f si

$$f_{(x)} = 3 + \frac{10}{x+5}; \quad x \in [-3\,;1\,\rangle$$

Resolución

- Sea la función $g : [-2; 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = -x^2 + 8x - 7$$

Halle el rango de la función.

Resolución

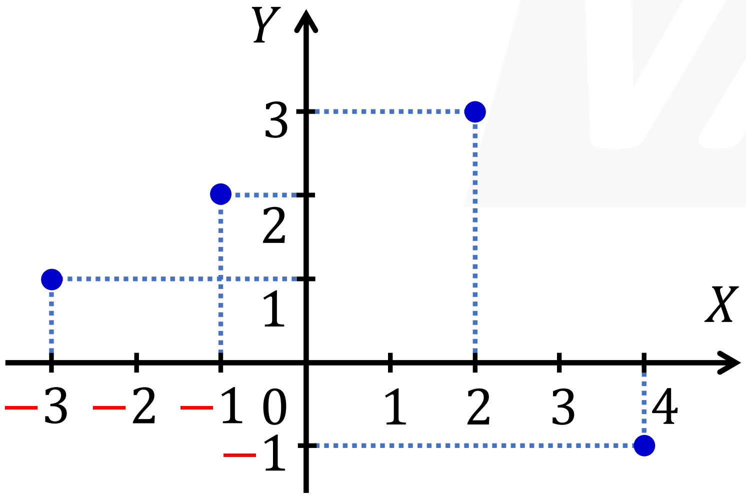
GRÁFICA DE FUNCIONES

La gráfica de una función f es la representación de todos sus pares ordenados (x, y) que pertenecen a la función en el plano cartesiano.

$$Graf\ (f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \text{Dom} f\ \wedge\ y = f(x)\}$$

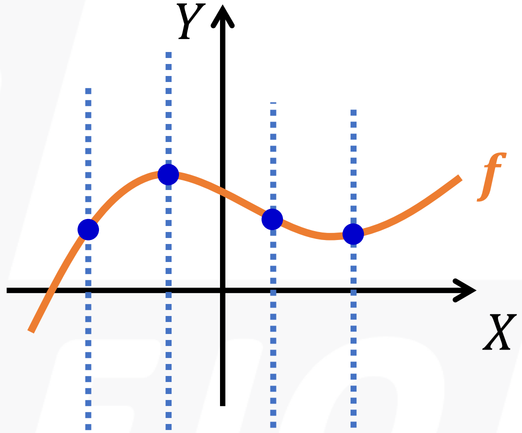
Ejemplo

$$f = \{(2; 3), (4; -1), (-1; 2), (-3; 1)\}$$

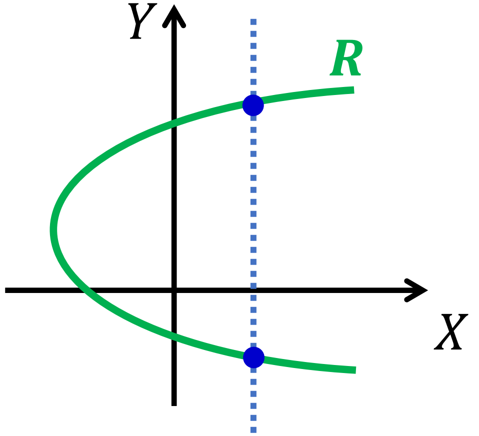


Propiedad

Una gráfica corresponde a una función, si al trazarle rectas verticales, estas la intersecan a lo más en un solo punto.



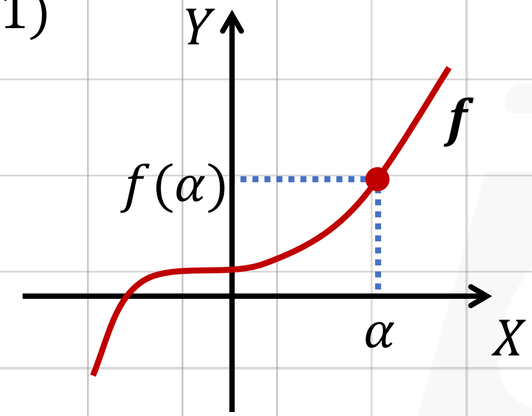
La gráfica de f sí corresponde a una función.



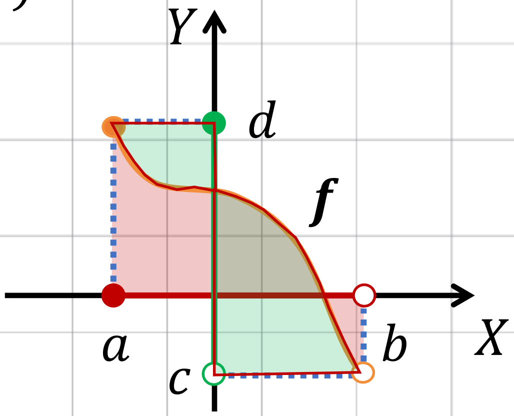
La gráfica de R no corresponde a una función.

Observaciones

1)



2)



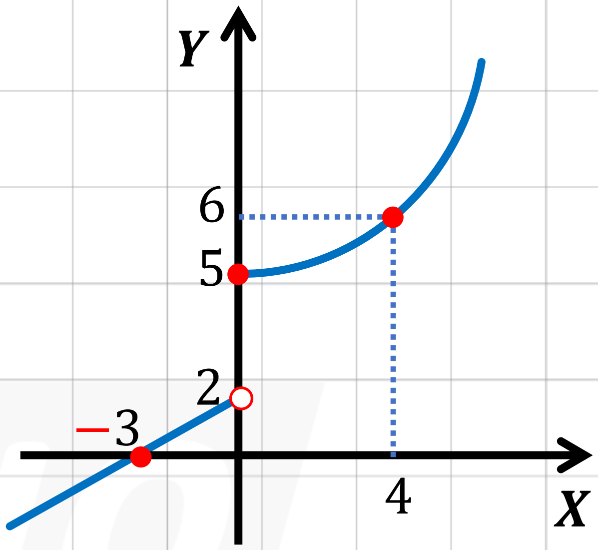
Dom f $= [a; b\rangle$

Ran f $= \langle c; d]$

Ejemplo:

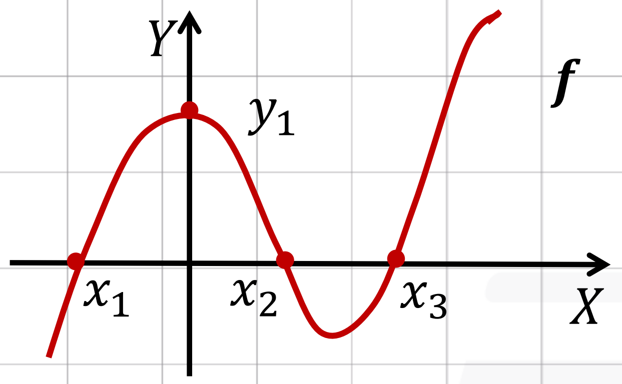
Se muestra la gráfica de la función f.

Calcule el valor de $f(-3).f(5) + f(4).f(0)$



Resolución

3)



Corte con el eje Y

$$\boxed{y_1 = f(0)}$$

Punto de intercepto con el eje $\boldsymbol{Y}$: $(0\,;\,y_1)$

Corte con el eje X

Se resuelve $\boxed{f(x) = 0}$

se obtiene $\text{CS} = \{x_1; x_2; x_3\}$

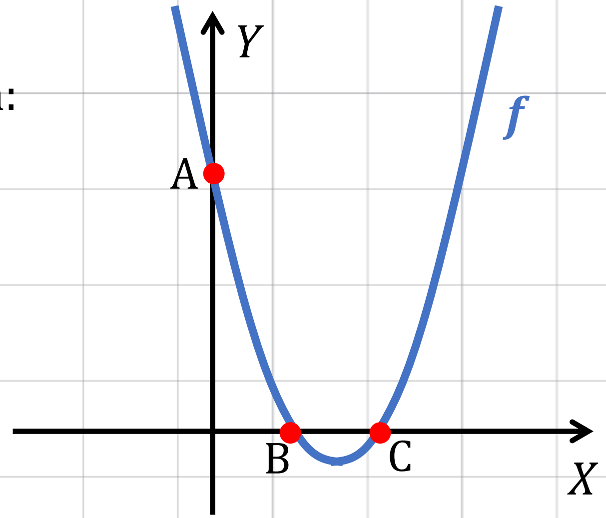
Puntos de intercepto con el eje $\boldsymbol{X}$:

$$(x_1; 0)\,,\quad (x_2; 0)\,,\quad (x_3; 0)$$

Ejemplo:

La gráfica de la función:

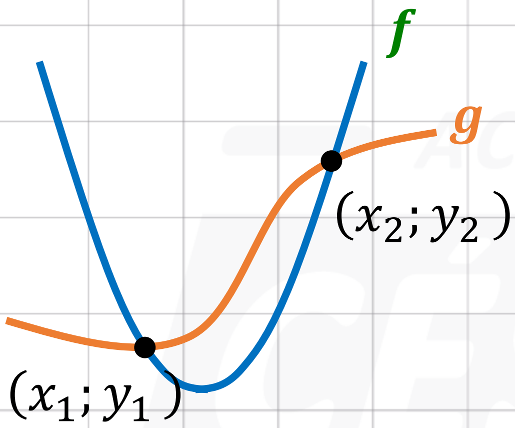
$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$



Encuentre las coordenadas donde la gráfica corta a los ejes.

Resolución:

4) Puntos de intercepto de las gráficas de dos funciones

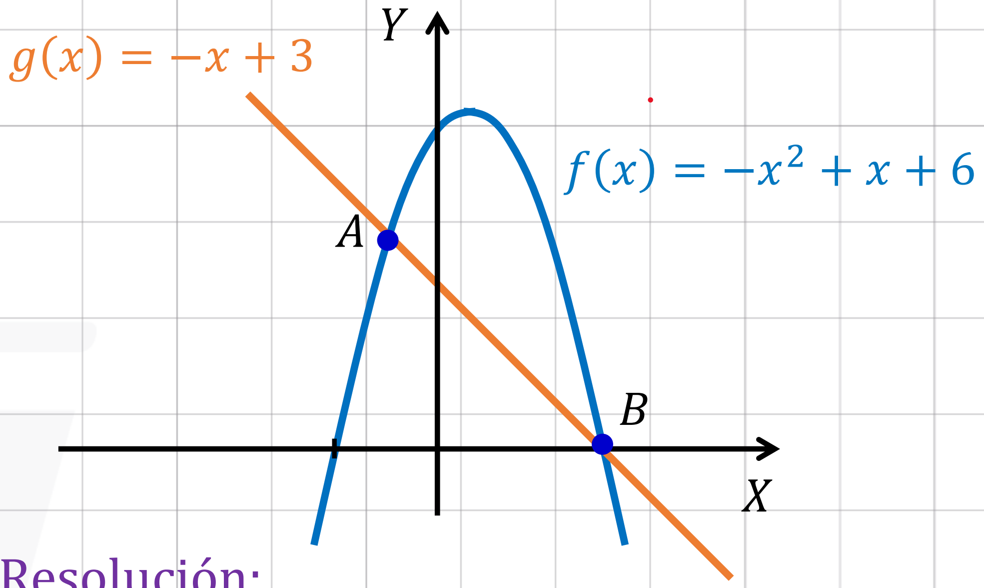


Para encontrar los puntos de intersección de dos gráficas, se deben igualar las reglas de correspondencias.

$$\boxed{f_{(x)} = g_{(x)}}$$

Ejemplo:

Halle los puntos de intersección (puntos A y B) entre las gráficas de f y g.



Resolución:

GRÁFICA DE FUNCIONES ESPECIALES

1.- Función constante

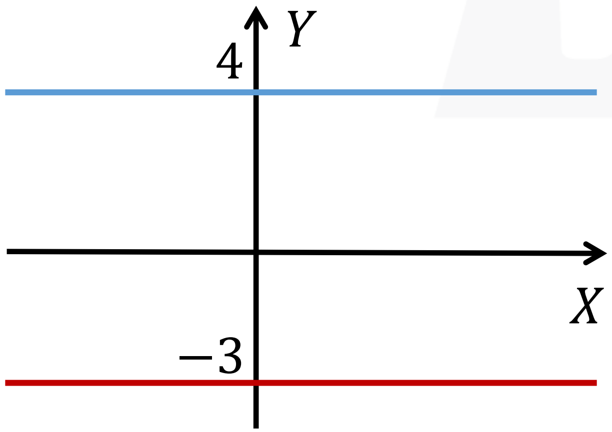
Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = k \quad ; \; k \in \mathbb{R}}$$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Rang}\, f = \{k\}$

Ejemplos

Grafique: $f_{(x)} = 4$, $g_{(x)} = -3$

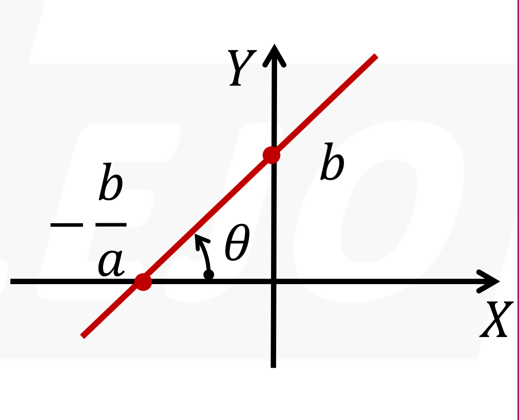
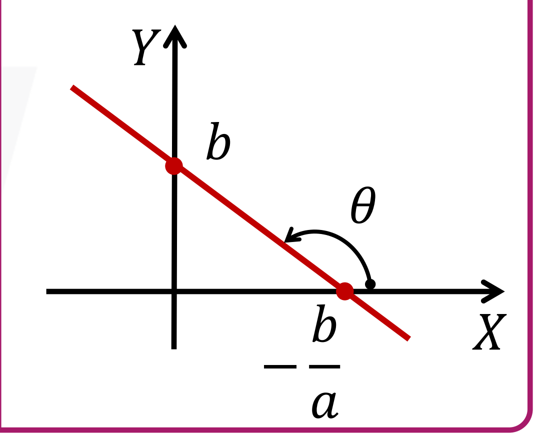


2.- Función lineal

Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = ax + b} \; ; a \neq 0$$

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Rang}\, f = \mathbb{R}$

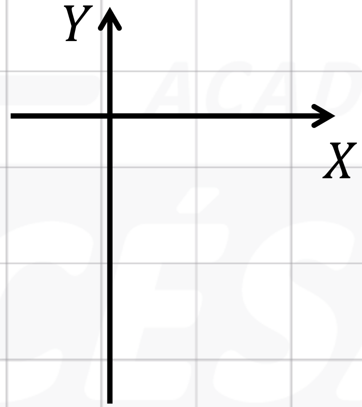
$a > 0$	$a < 0$
	

Donde :

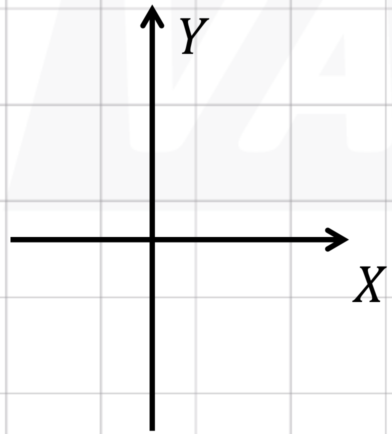
- Raíz : $-\dfrac{b}{a}$
- $a = \tan\theta$

Ejemplos:

- Grafique $f_{(x)} = 2x - 4$



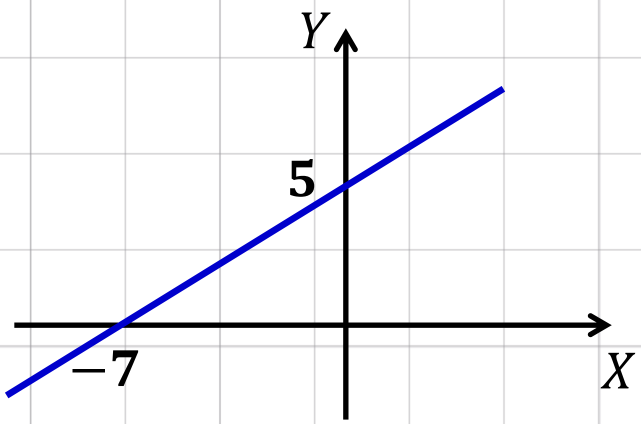
- Grafique $g_{(x)} = -3x$



- La gráfica de la función lineal

$$f(x) = \boldsymbol{a}x + b$$

es



Calcule ab

Resolución:

3.- Función cuadrática

Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = ax^2 + bx + c \ ; \ a \neq 0}$$

- $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\operatorname{Ran} f \subset \mathbb{R}$
- Su gráfica es una parábola vertical.

Completando cuadrados

$$\boxed{f_{(x)} = a(x-h)^2 + k}$$

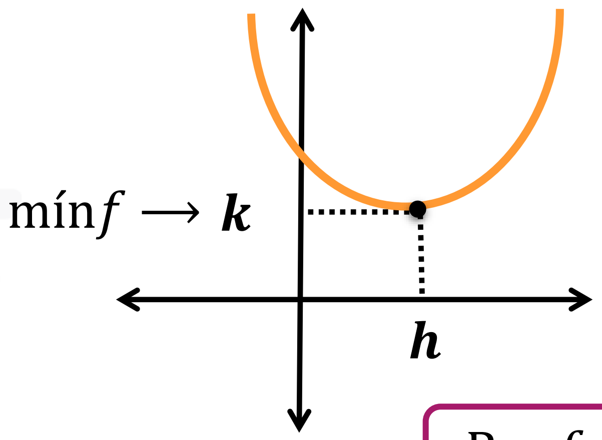
vértice: $\quad V = (h; k)$

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad k = f_{(h)}$$

donde x_1 y x_2 son raíces de $f_{(x)}$

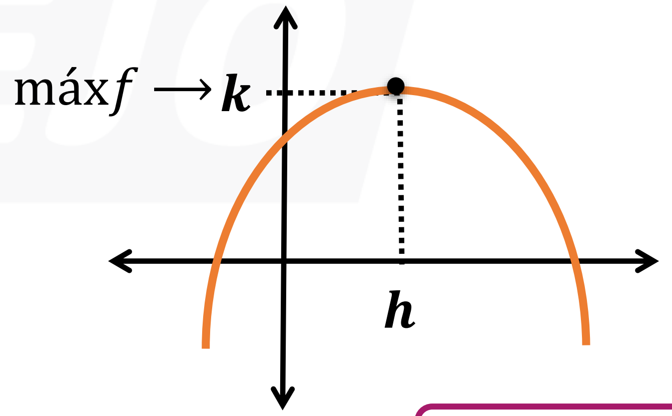
Grafiquemos considerando dos casos:

I) $a > 0$ Parábola cóncava hacia arriba



$$\boxed{\operatorname{Ran} f = [\, k \,; +\infty \rangle}$$

II) $a < 0$ Parábola cóncava hacia abajo



$$\boxed{\operatorname{Ran} f = \langle -\infty; k \,]}$$

Ejemplo

- Grafique $f(x) = x^2 - 4x + 3$

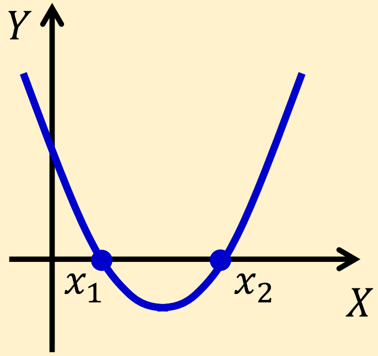
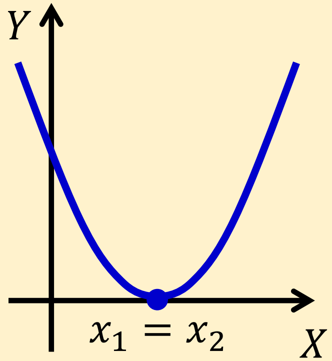
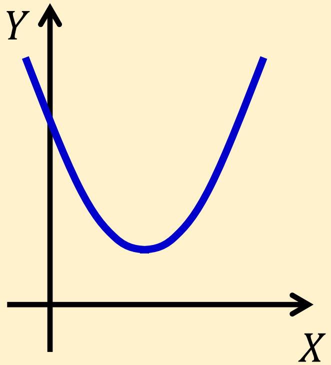
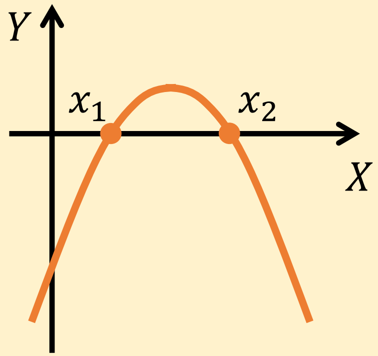
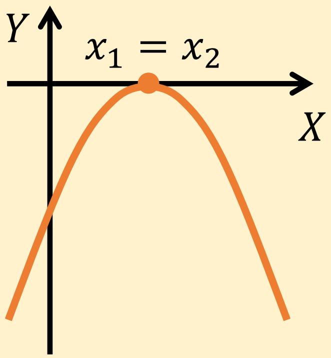
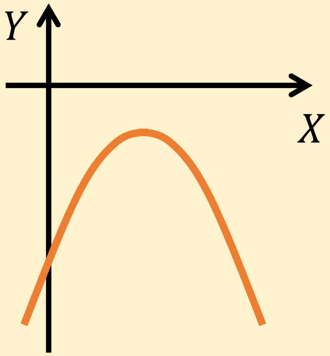
Resolución:

- Hallemos el rango de la siguiente función

$$f(x) = -2x^2 + 12x + 14$$

Resolución:

Propiedades : Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a \neq 0$

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
	Raíces reales y diferentes	**Raíces reales e iguales**	**Raíces no reales**
$a > 0$			
$a < 0$			

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe