academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

1

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO
UNI

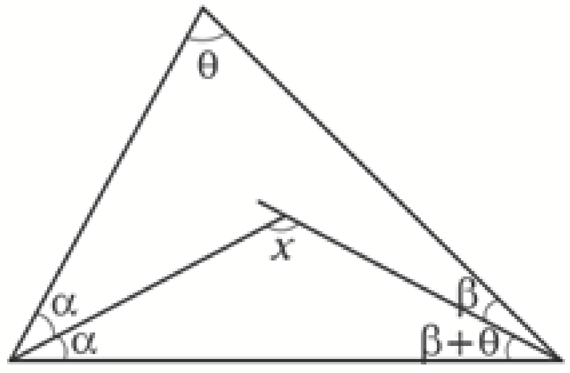
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

GEOMETRÍA

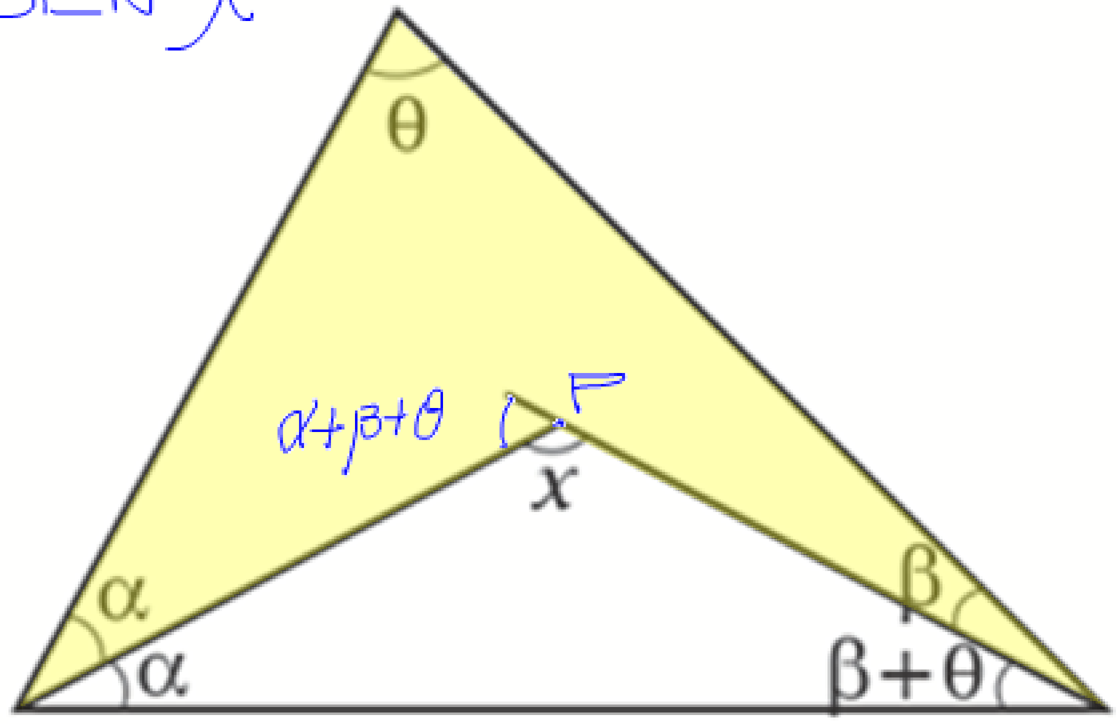
Tema:
TRIANGULOS

1. A partir del gráfico, calcule x.



A) 80° B) 90° C) 100°
D) 120° E) 110°

PIDEN x



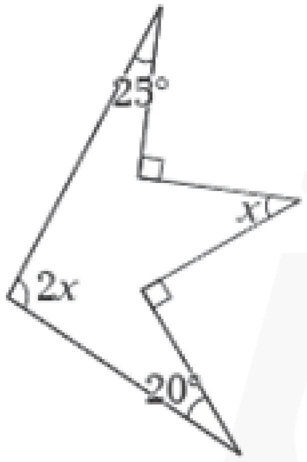
• : $x = \alpha+\beta+\theta$

• En "P": $x + \underbrace{\alpha+\beta+\theta}_{x} = 180°$

$\boxed{\therefore x = 90°}$

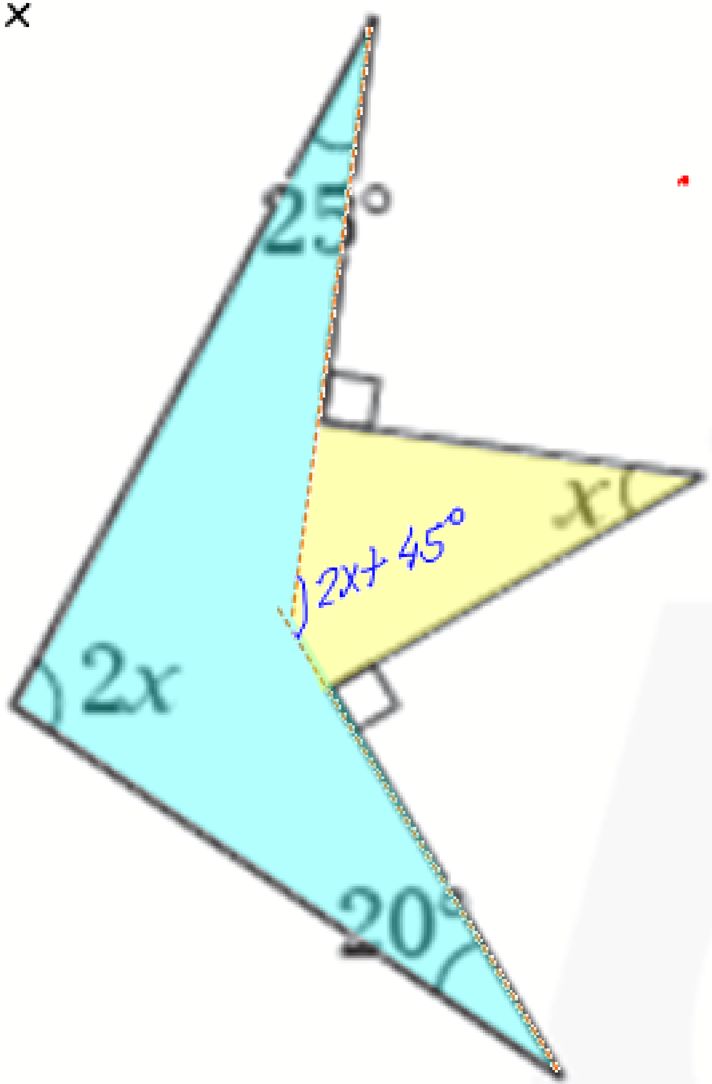
Clave B

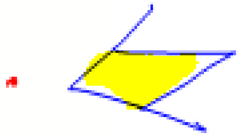
2. Del gráfico, calcule x.



~~A) 45°~~ B) 30° C) 60°
D) 20° E) 25°

PIDEN x





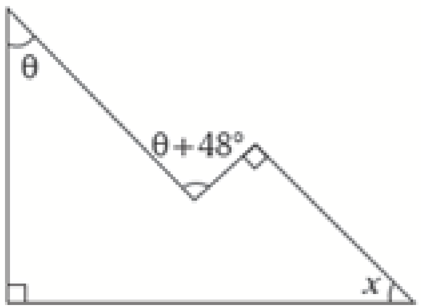
$x+2x+45^\circ=90^\circ+90^\circ$

$3x=135^\circ$

$\boxed{x=45^\circ}$

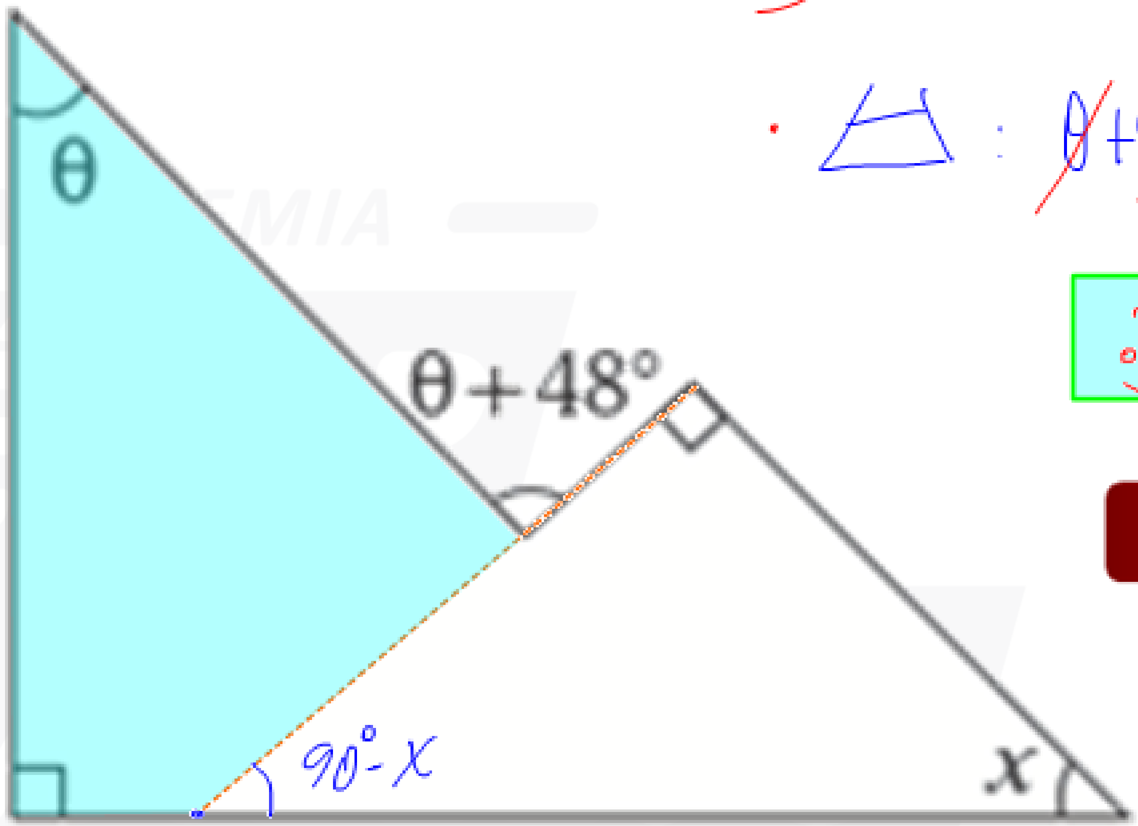
Clave A

3. Según el gráfico, calcule x.



A) 40° B) 24° C) 16°
D) 48° E) 22°

Piden x



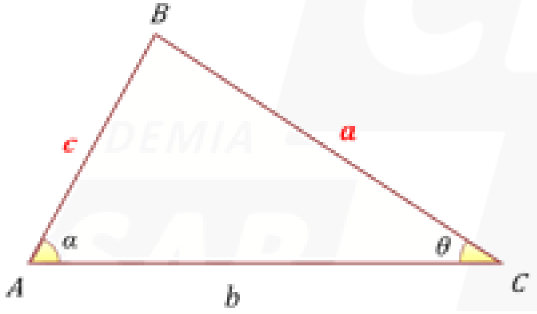
• : $\cancel{\theta}+\cancel{90^\circ}=\cancel{90}-x+\cancel{\theta}+48^\circ$

$$\boxed{\therefore x = 48^\circ}$$

Clave D

4. En un triángulo ABC, el perímetro de su región es 20. Calcule el mayor valor entero que puede tomar uno de sus lados.

A) 9
B) 8
C) 7
D) 6
E) 5



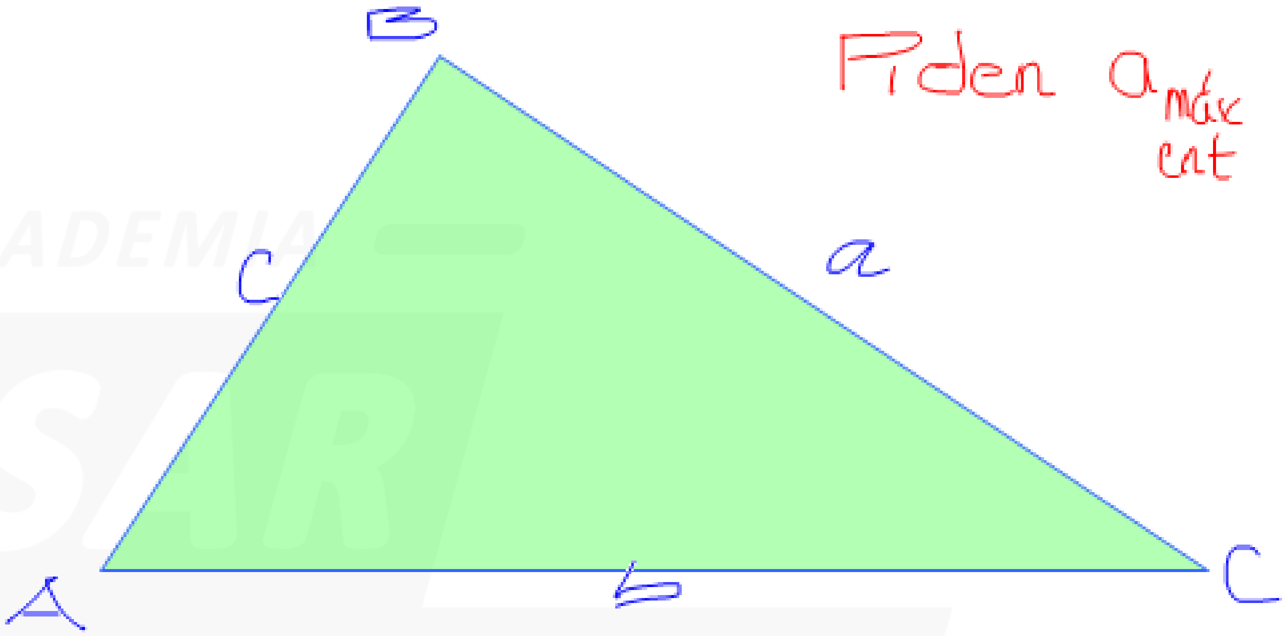
Teorema de Existencia

Si $c < a < b$ $\Rightarrow$

$$\boxed{b - c < a < b + c}$$

$$\boxed{a - c < b < a + c}$$

$$\boxed{b - a < c < b + a}$$



Piden $a_{\substack{máx\\ent}}$

Dato: $a+b+c=20$

$$b-c < a < b+c$$

$$a+a < b+c+a$$

$$2a < 20$$

$$\rightarrow a < 10$$

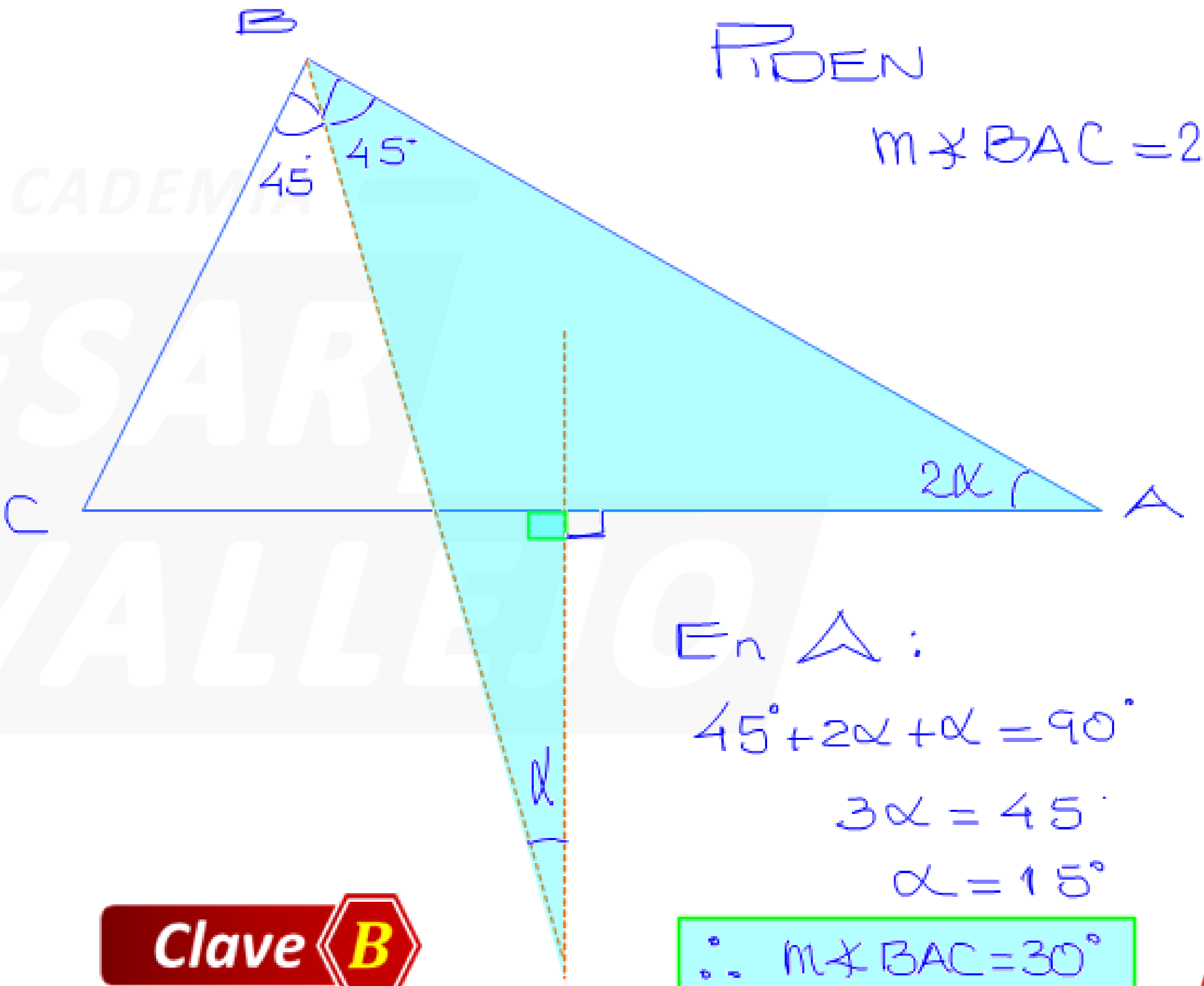
$a = 9, 8, 7, \ldots$

$$\boxed{\therefore a_{\substack{máx\\ent}} = 9}$$

Clave A

5. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la m∢BAC es el doble de la medida del ángulo, determinado por la bisectriz interior y la mediatriz relativos al lado $\overline{AC}$. Calcule la m∢BAC.

A) 45°
B) 30°
C) 60°
D) 40°
E) 75°



PIDEN

m∢BAC = 2α

En △ :

$45° + 2\alpha + \alpha = 90°$

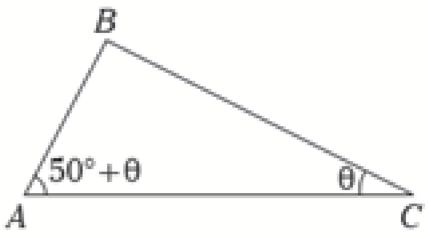
$3\alpha = 45°$

$\alpha = 15°$

$\boxed{\therefore \ m∢BAC = 30°}$

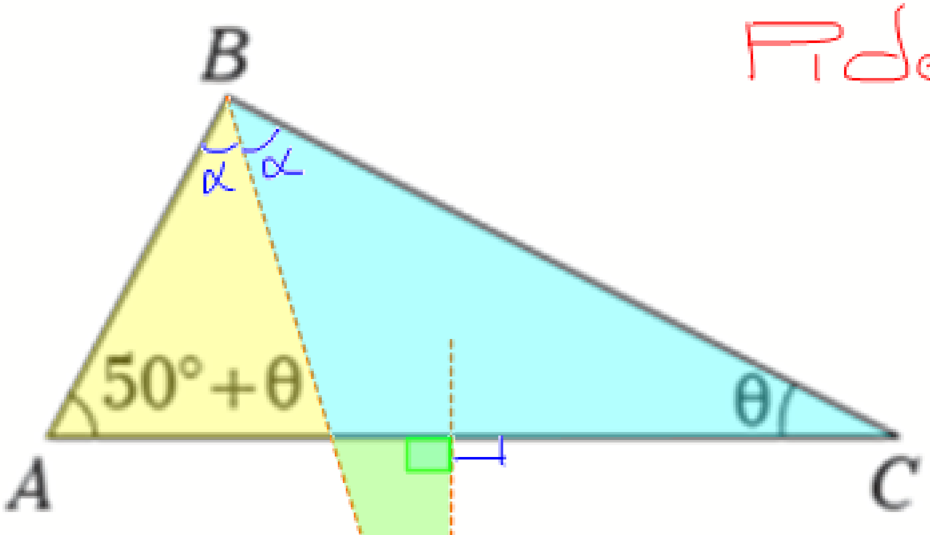
Clave B

6. A partir del gráfico, calcule la medida del ángulo que determinan la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{AC}$.



A) 20°　　B) 50°　　C) 25°
D) 30°　　E) 40°

Piden x



$$50+\cancel{\theta}+\cancel{\alpha}=\cancel{90}+x$$

$$\cancel{90}=\cancel{\alpha}+\cancel{\theta}+x$$

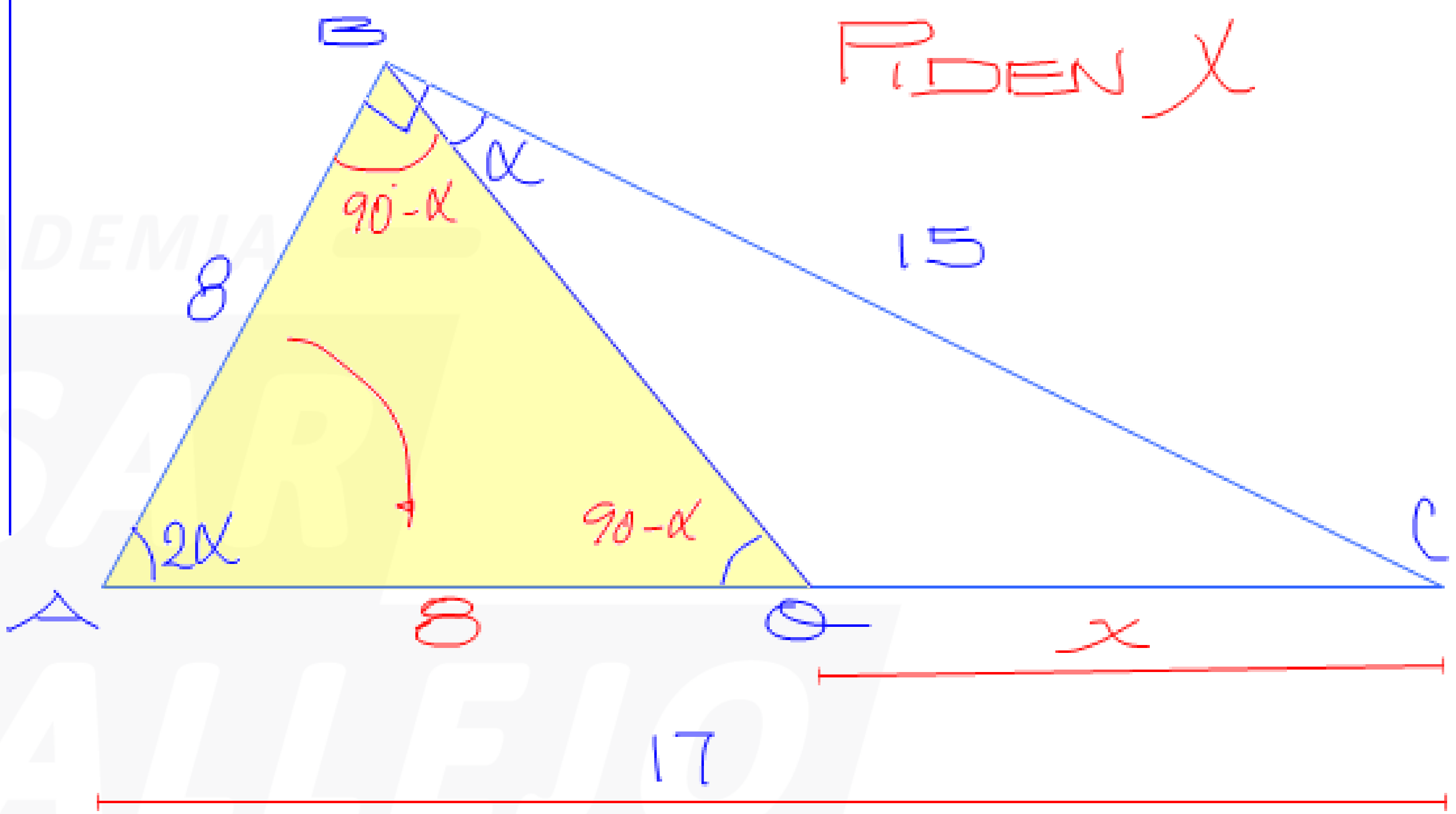
$$50=2x$$

$$\boxed{\therefore\ x=25^\circ}$$

Clave C

7. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior BQ, tal que $m\measuredangle BAC=2m\measuredangle QBC$, $AB=8$ y $BC=15$. Calcule QC.

A) 6 B) 7 C) 8
~~D) 9~~ E) 10



$x+8=17$

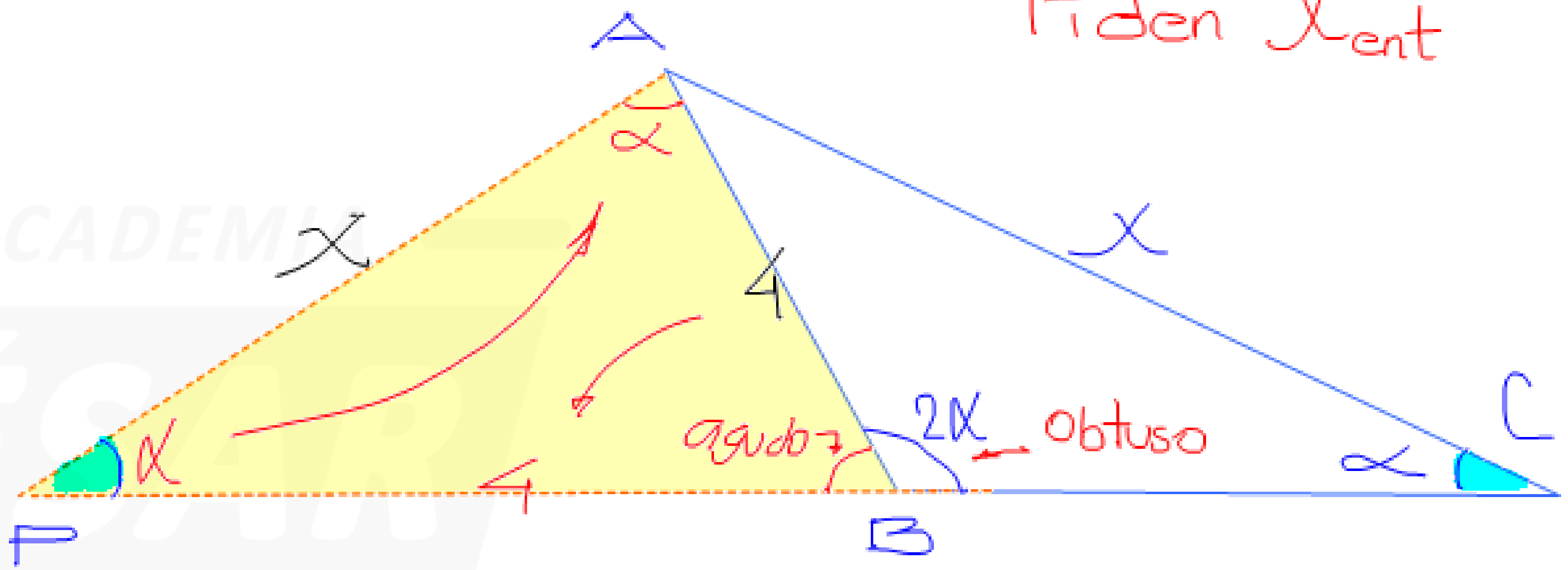
$\boxed{\therefore x=9}$

Clave D

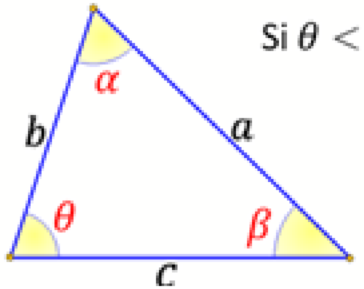
8. En un triángulo ABC, obtuso en B, $m\sphericalangle ABC = 2m\sphericalangle BCA$. Si $AB=4$, calcule el valor entero que puede tomar AC.

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 10

Piden x_{ent}



TRIÁNGULO ACUTÁNGULO



Si $\theta < 90°, \alpha < 90°, \beta < 90°$

Por naturaleza: $a^2 < b^2 + c^2$

· T Correspondencia: Como $2\alpha > \alpha \rightarrow \boxed{x > 4}$

· Trazar $\overline{AP}$ tal que $m\sphericalangle APC = \alpha$

$\rightarrow$ $\triangle APC$ es isósceles $AP = AC = x$

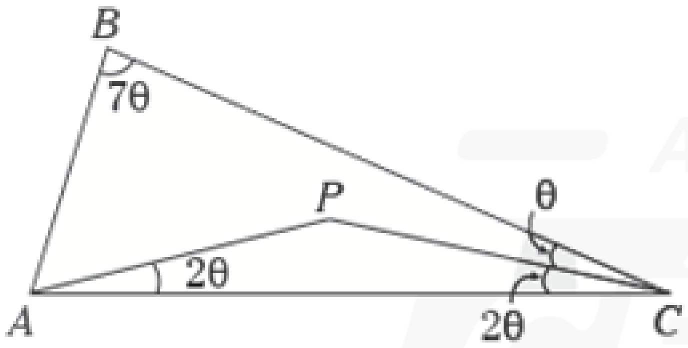
. $\triangle APB$ isósceles:

$x^2 < 4^2 + 4^2$ $\quad x^2 < 32$ $\quad \boxed{x < 5{,}64}$

$\rightarrow$ $4 < x < 5{,}6$ $\quad \boxed{\therefore\ x_{ent} = 5}$

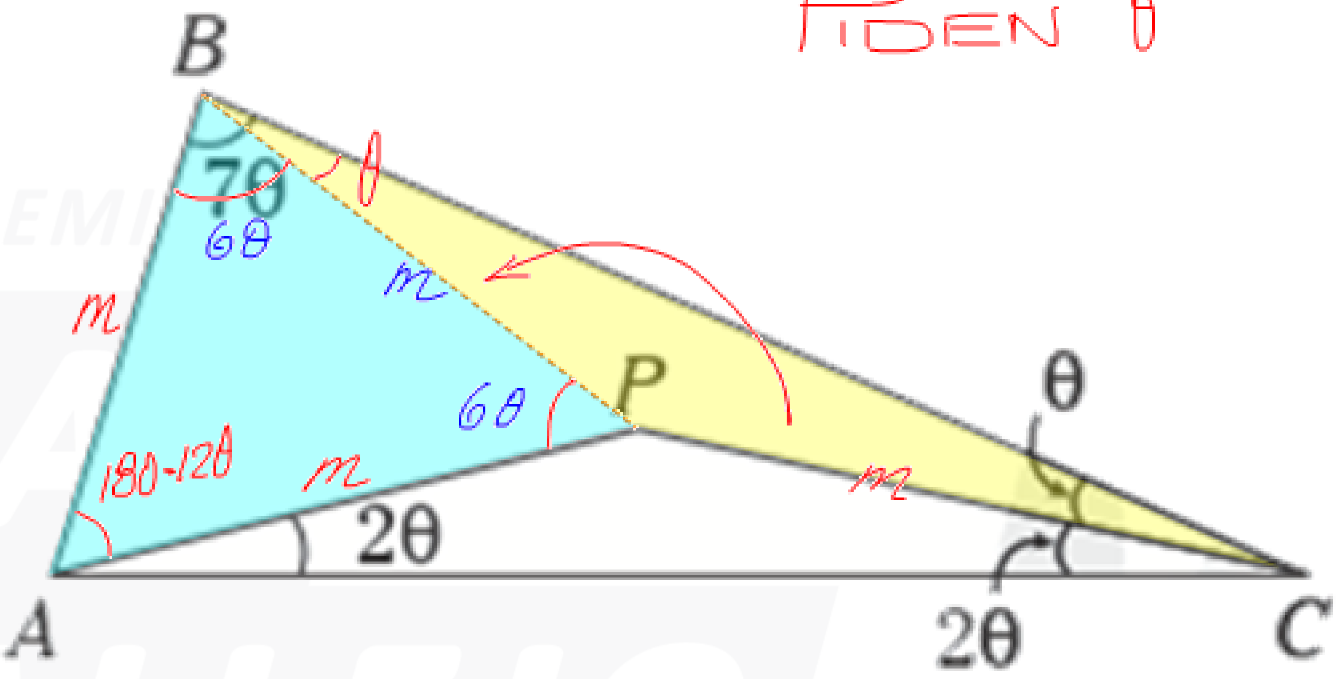
Clave A

9. Según el gráfico, $AB=PC$. Calcule θ.



A) 6°
B) 8°
C) 10°
D) 12°
E) 13°

PIDEN θ



- $\triangle$ BPC ES ISÓSCELES

  $BP=PC=m$

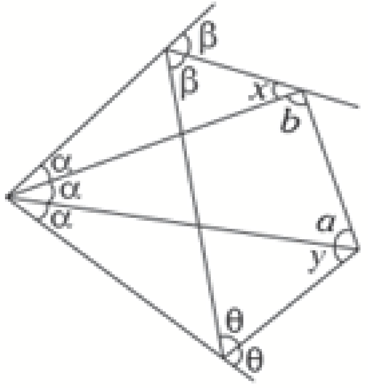
- $\triangle$ ABP ES EQUILÁTERO

  $6\theta=60°$

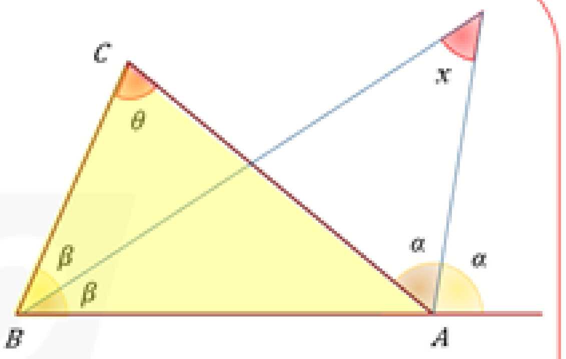
$\boxed{\therefore\ \theta=10°}$

Clave C

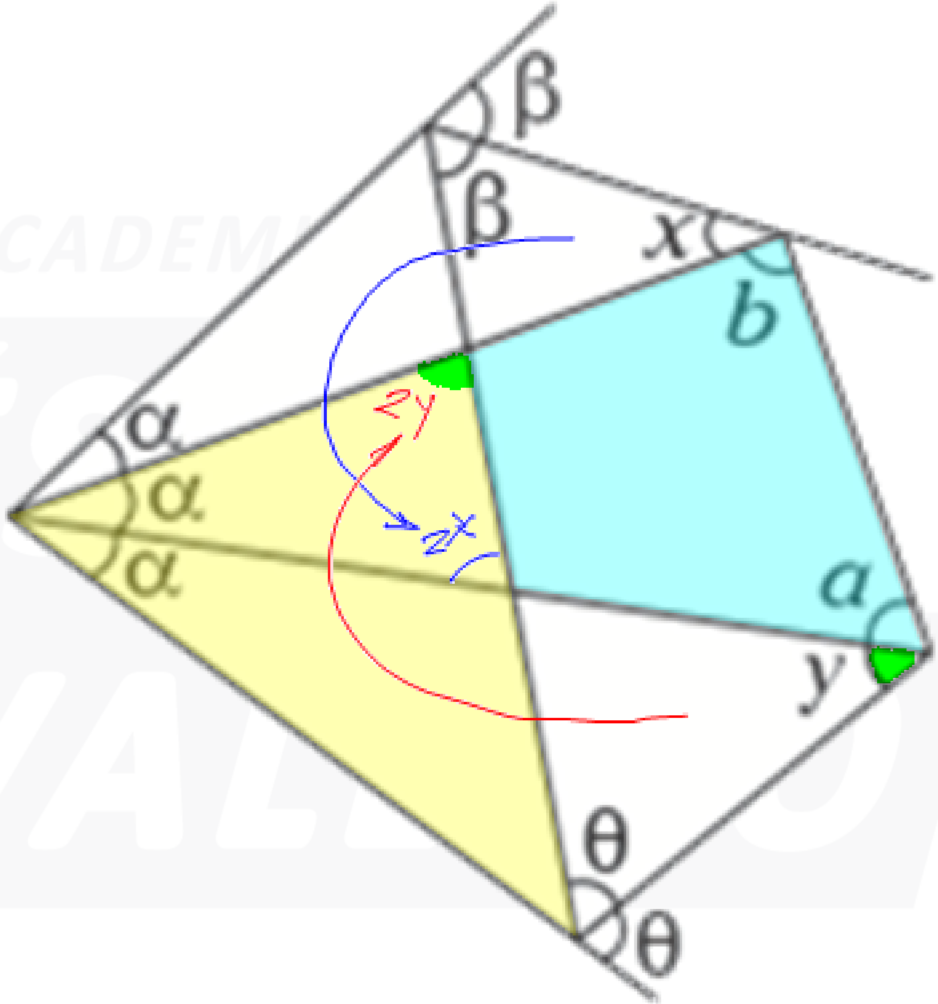
10. A partir del gráfico, calcule $x+y$ si $a+b=140°$.



A) 35° B) 40° C) 65°
D) 75° E) 70°



$x = \frac{\theta}{2}$



receso

$\triangle$:

$2x+2y = a+b$

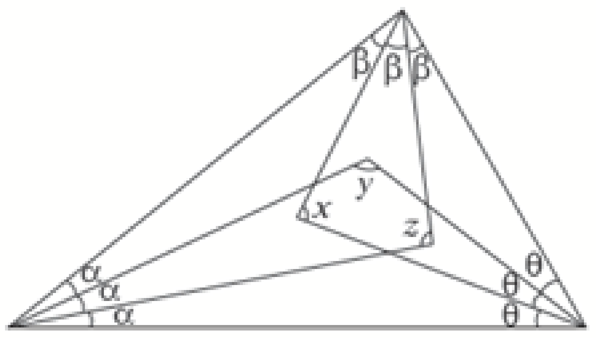
$x+y = \frac{a+b}{2}$

$x+y = \frac{140°}{2}$

$\boxed{x+y = 70°}$

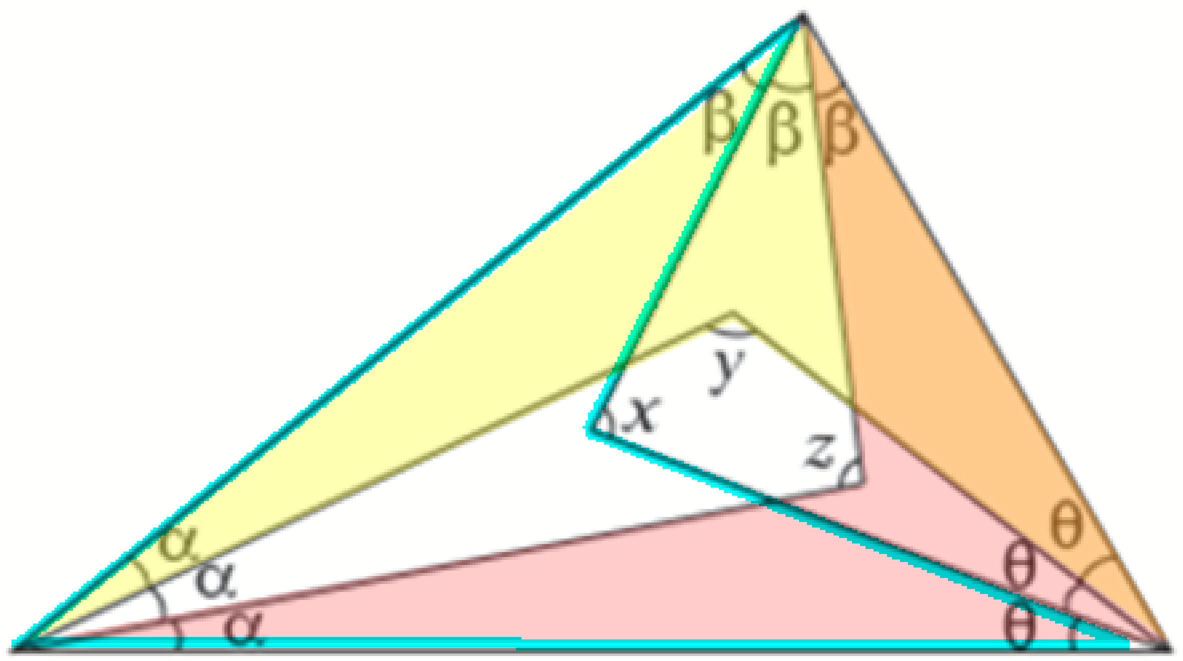
Clave E

11. Del gráfico, calcule $x+y+z$.



A) 270° B) 290° ~~C)~~ 300°

D) 350° E) 400°



$x = 3\alpha + \beta + \theta$

$y = \alpha + 3\beta + \theta$ +

$z = \alpha + \beta + 3\theta$

$x+y+z = 5\alpha + 5\beta + 5\theta$

$\triangle: 3\alpha + 3\beta + 3\theta = 180°$

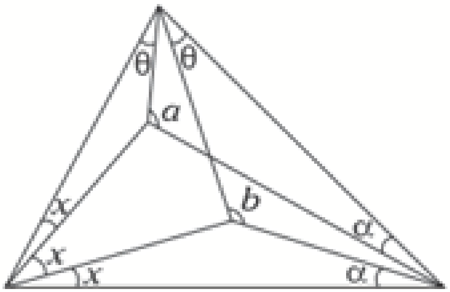
$\boxed{\alpha + \beta + \theta = 60°}$

$x+y+z = 5(\alpha+\beta+\theta)$

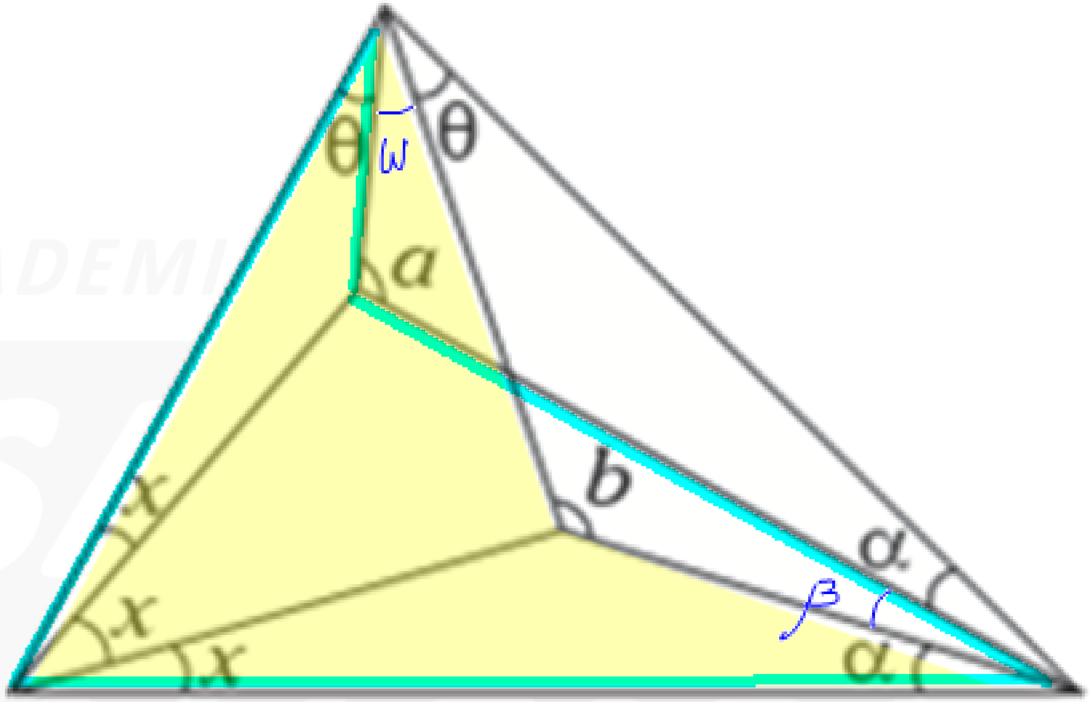
$\boxed{\therefore\ x+y+z = 300°}$

Clave C

12. Según el gráfico, $a+b=240°$. Calcule x.



A) 10°
B) 15°
C) ~~20°~~
D) 25°
E) 30°



$\angle: \; 3x + \theta + \alpha + \beta = a$

$\angle: \; 3x + \theta + \omega + \alpha = b$

$3x + 180° = 240°$

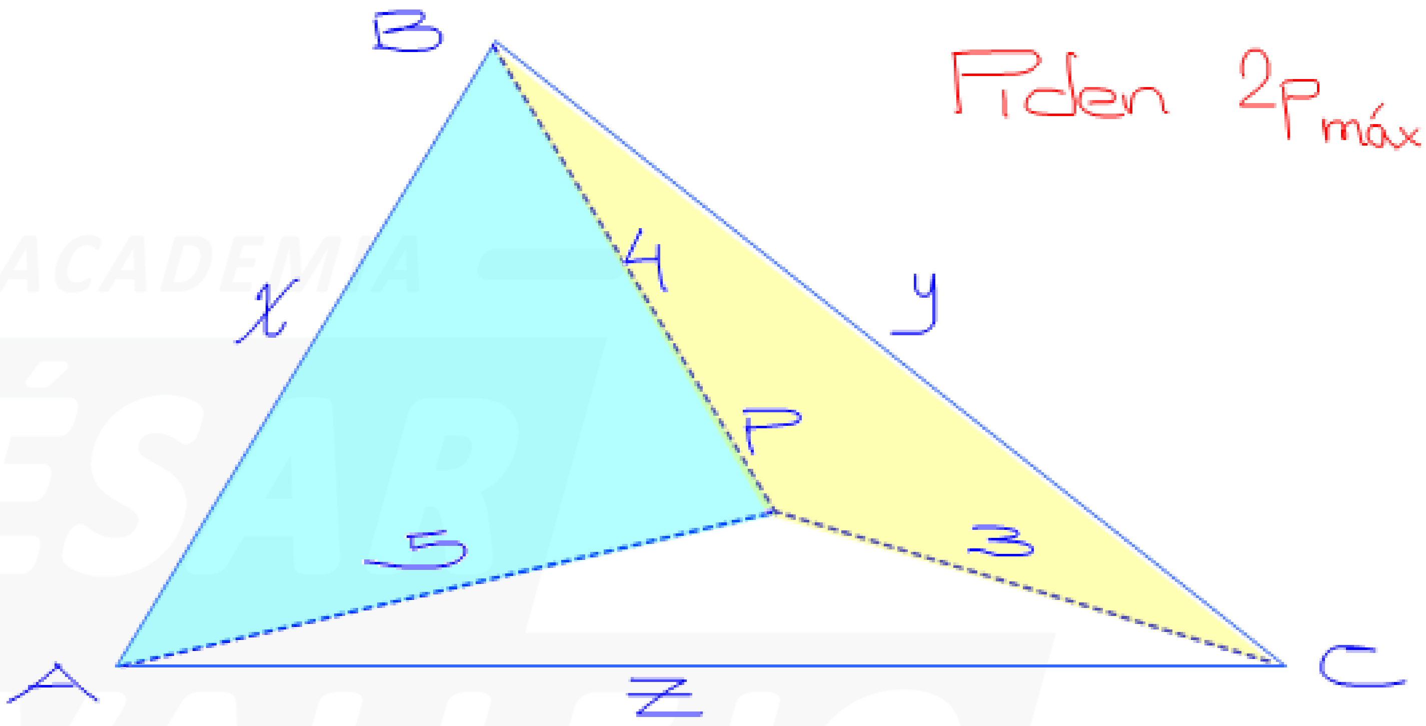
$3x = 60°$

$\boxed{\therefore \; x = 20°}$

Clave C

13. En la región interior de un triángulo ABC, se ubica el punto P, tal que $PC=3$, $PB=4$ y $PA=5$. Calcule el máximo valor entero que puede tomar el perímetro.

A) 20
B) 21
C) 22
~~D)~~ 23
E) 24



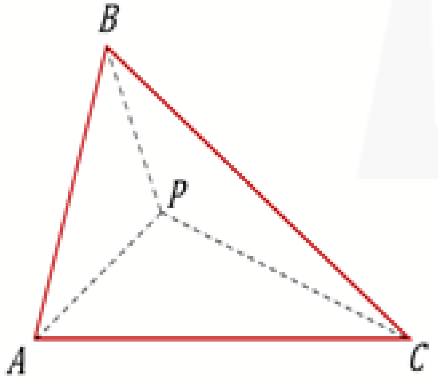
Piden $2p_{máx\ ent}$.

T. Existencia:

$$\begin{aligned} x &< 4+5 \\ y &< 4+3 \quad + \\ z &< 5+3 \\ \hline x+y+z &< 24 \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore\ 2p_{máx\ ent} = 23}$$

Clave D



Siendo $2p$: *perímetro del triángulo*

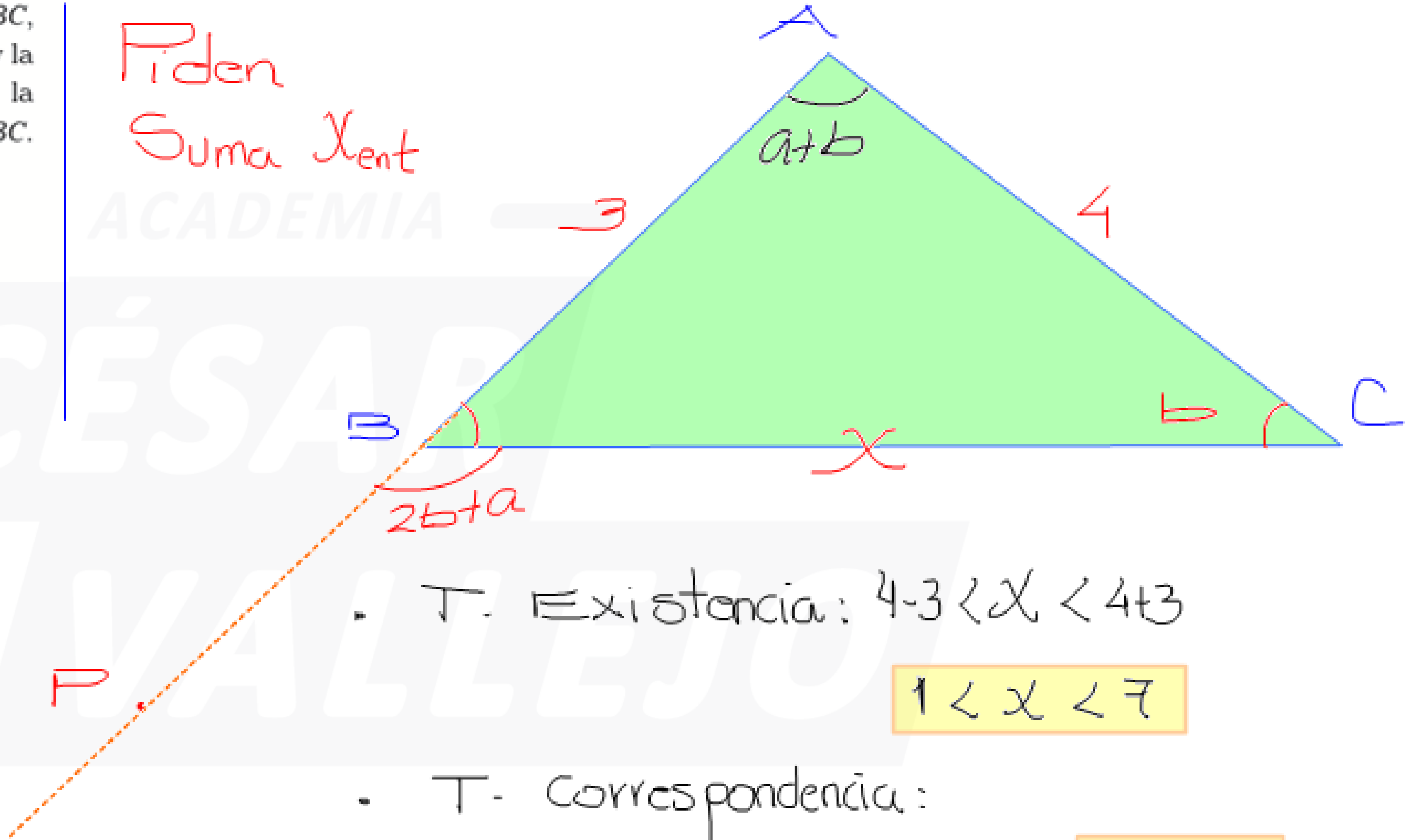
Para todo punto P de su región Interior:

$$\boxed{p < PA + PB + PC < 2p}$$

14. En la prolongación de AB de un triángulo ABC, se ubica el punto P, tal que la m$\measuredangle BCA=b$ y la m$\measuredangle PBC=2b+a$. Si $AB=3$ y $AC=4$, calcule la suma de valores enteros que puede tomar BC.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 ~~E)~~ 15

Piden
Suma x_{ent}



• T. Existencia: $4-3<x<4+3$

$\boxed{1<x<7}$

• T. Correspondencia:

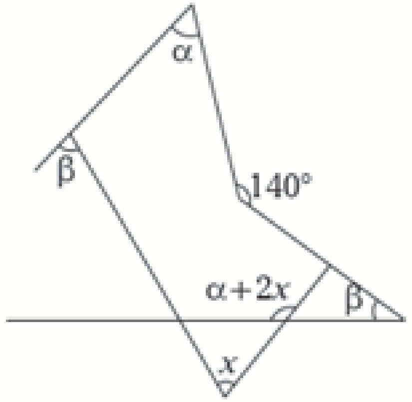
como $a+b>b \rightarrow \boxed{x>3}$

• $3<x<7 \rightarrow x_{ent}=4,5,6$

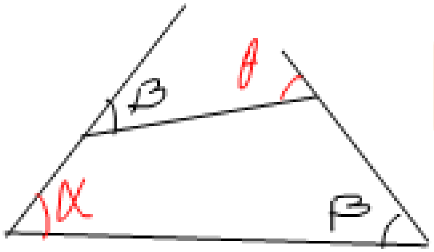
$\boxed{\therefore \text{ Suma } = 15}$

Clave E

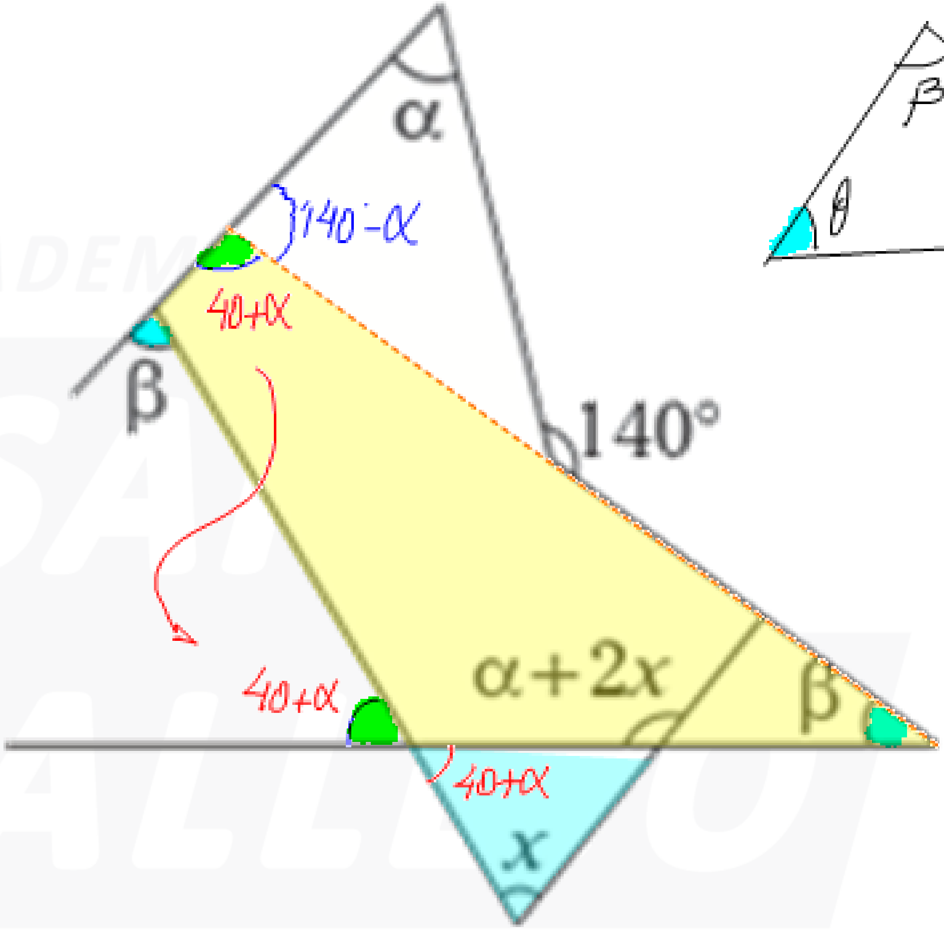
15. Del gráfico, calcule x.

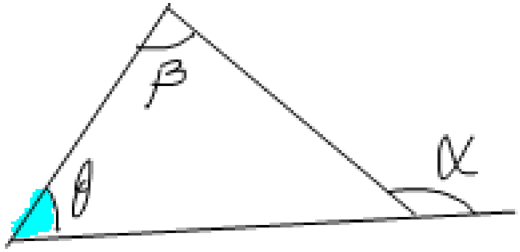


A) 35° B) 45° C) 50°
D) 30° ~~E) 40°~~



$\boxed{\alpha = \theta}$





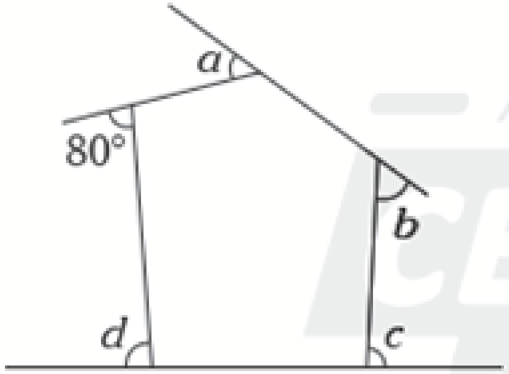
$\boxed{\theta = \alpha - \beta}$

$40° + \cancel{\alpha} + x = \cancel{\alpha} + 2x$

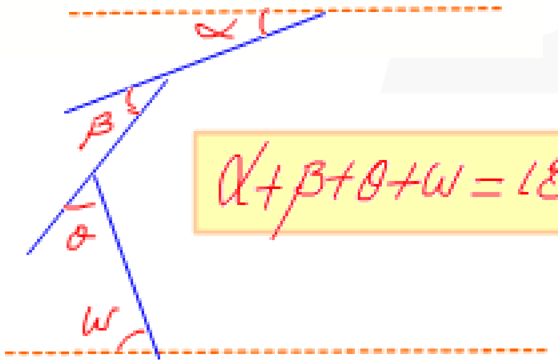
$\boxed{\therefore\ x = 40°}$

Clave E

16. En el gráfico, calcule $a+b+c+d$.

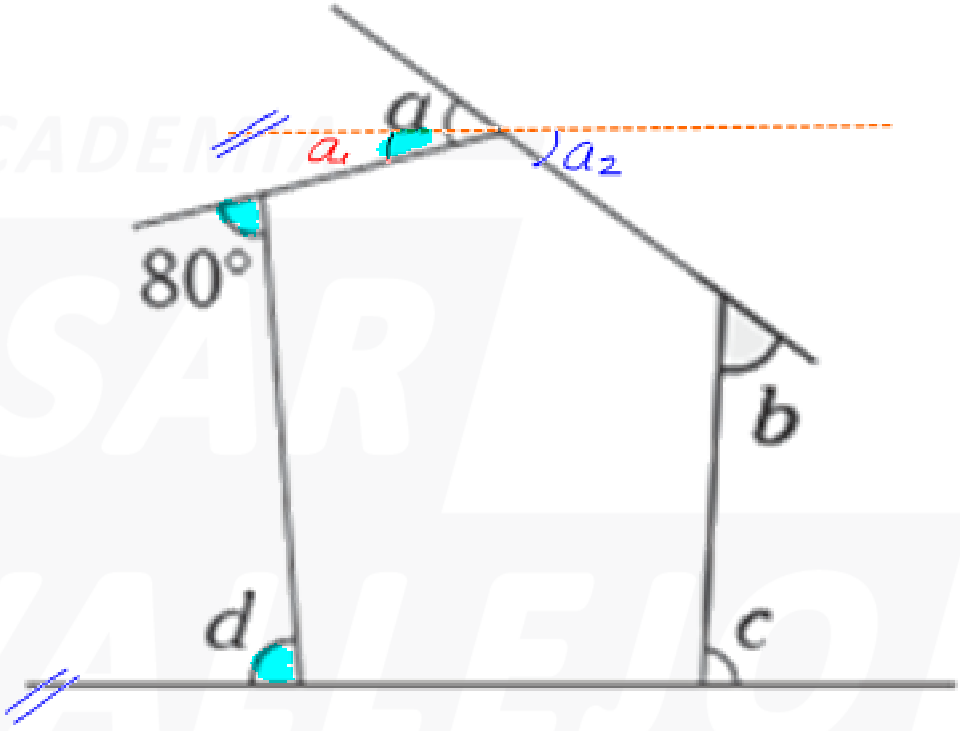


A) 200°
B) 210°
~~C)~~ 280°
D) 230°
E) 245°



$$\alpha+\beta+\theta+\omega=180°$$

Piden $a+b+c+d$



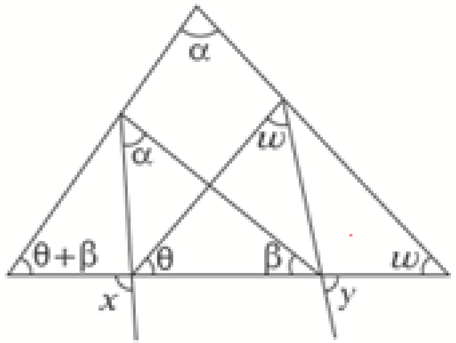
- $a_1+80+d=180°$
- $a_2+b+c=180°$

$$a+b+c+d+80°=360°$$

$$\therefore\ a+b+c+d=280°$$

Clave C

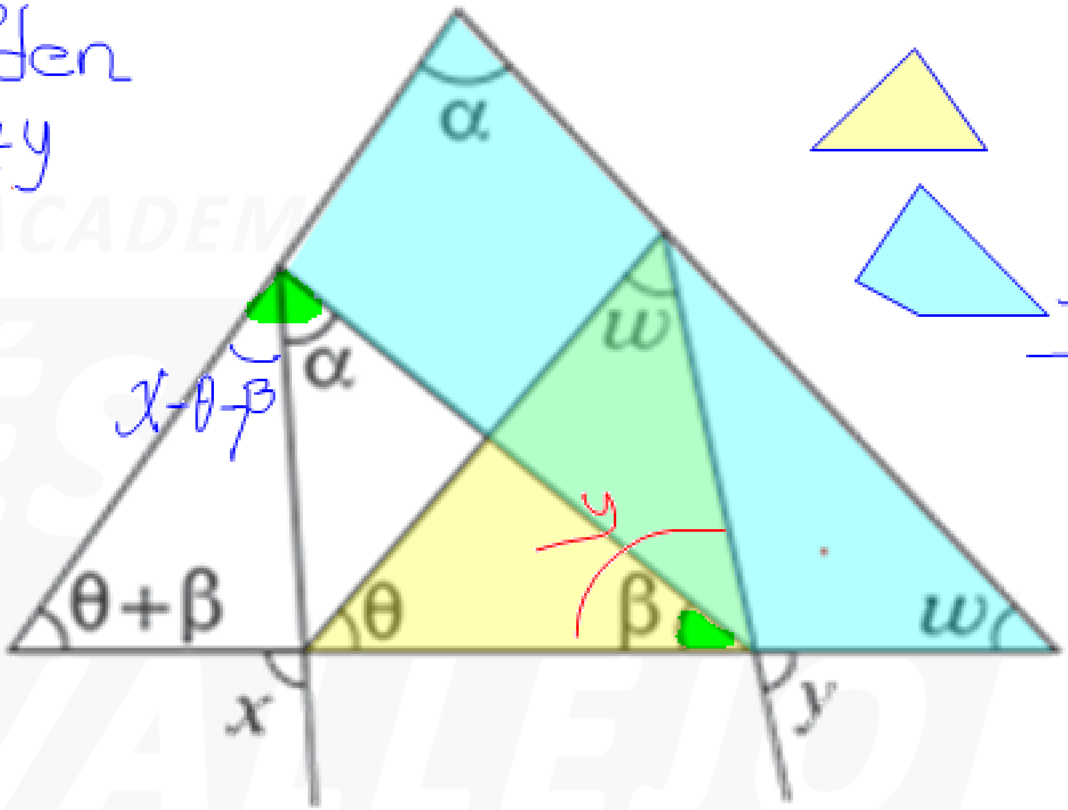
17. Según el gráfico, calcule $x+y$.



A) 90°
B) 120°
C) 150°
D) 180°
E) 195°

Piden

$x+y$



$y+\cancel{\theta}+\cancel{\omega}=180^\circ$

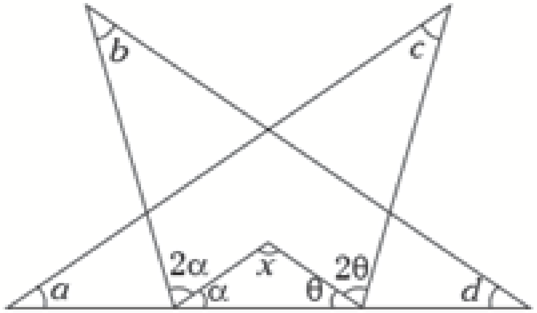
$+$

$x-\cancel{\theta}-\cancel{\beta}+\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}=\cancel{\alpha}+\cancel{\omega}$

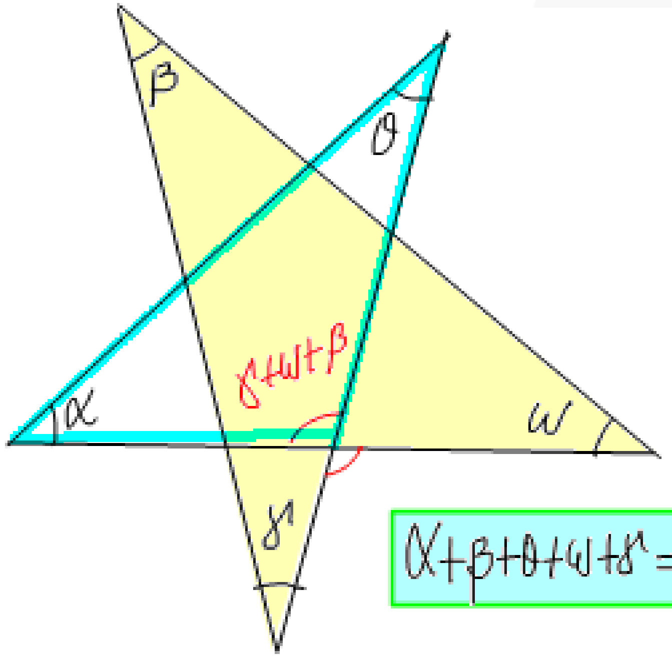
$\boxed{x+y=180^\circ}$

Clave D

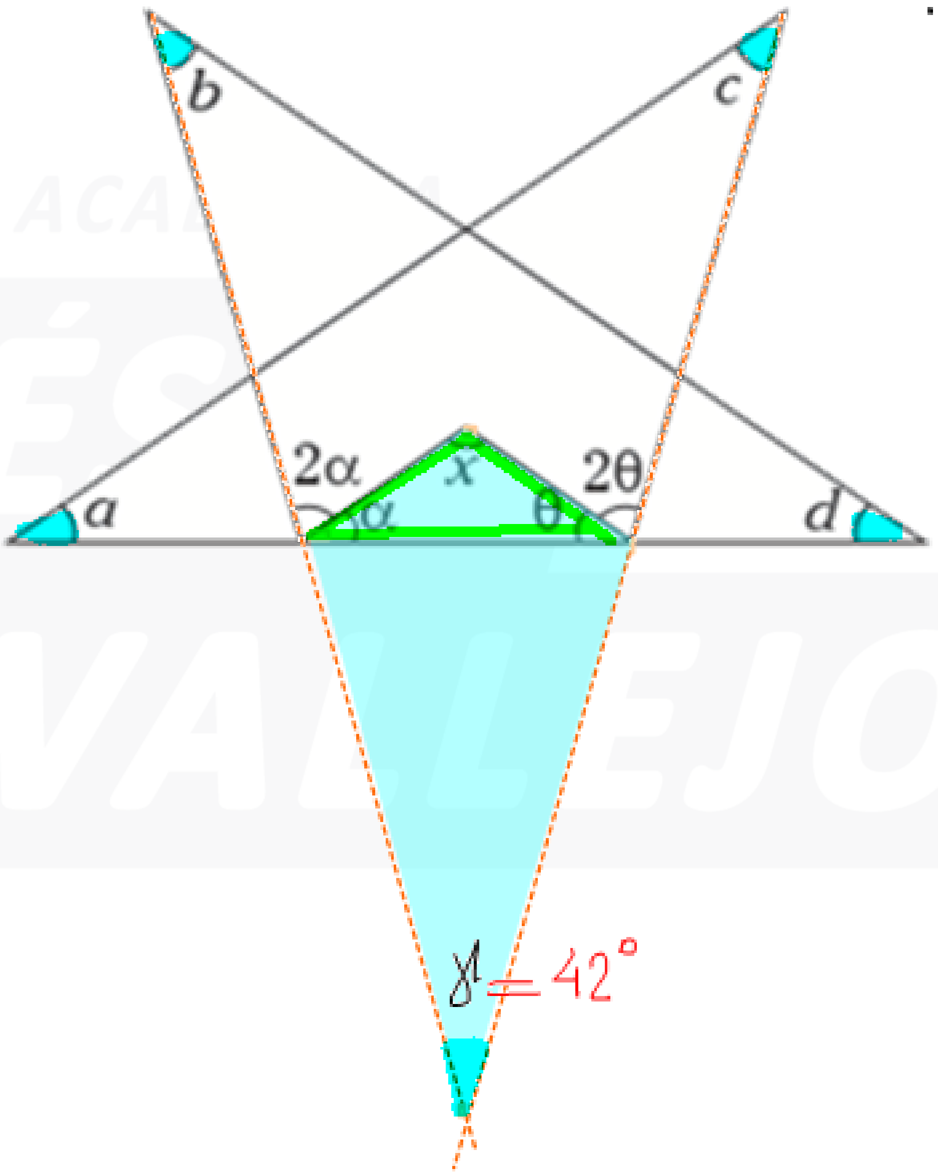
18. Sea $a+b+c+d=138°$. Calcule x.



A) 106°   B) 100°   C) 110°
D) 120°   E) 126°



$$\boxed{\alpha+\beta+\theta+\omega+\gamma=180°}$$

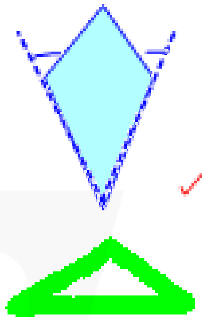


Piden x

· Teorema:

$$\underbrace{a+b+c+d}_{138°}+\gamma=180°$$

$$\boxed{\gamma=42°}$$



$$\cancel{2\alpha}+\cancel{2\theta}=x+42° \quad +$$

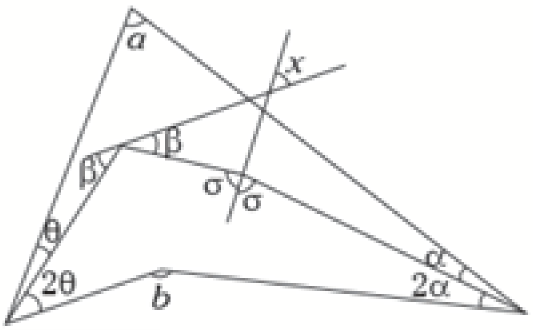
$$2\times180°=2x+\cancel{2\alpha}+\cancel{2\theta}$$

$$360-42=3x$$

$$\boxed{\therefore x=106°}$$

Clave A

19. Del gráfico, calcule x en función de a y b.



A) $\frac{b+2a}{6}$

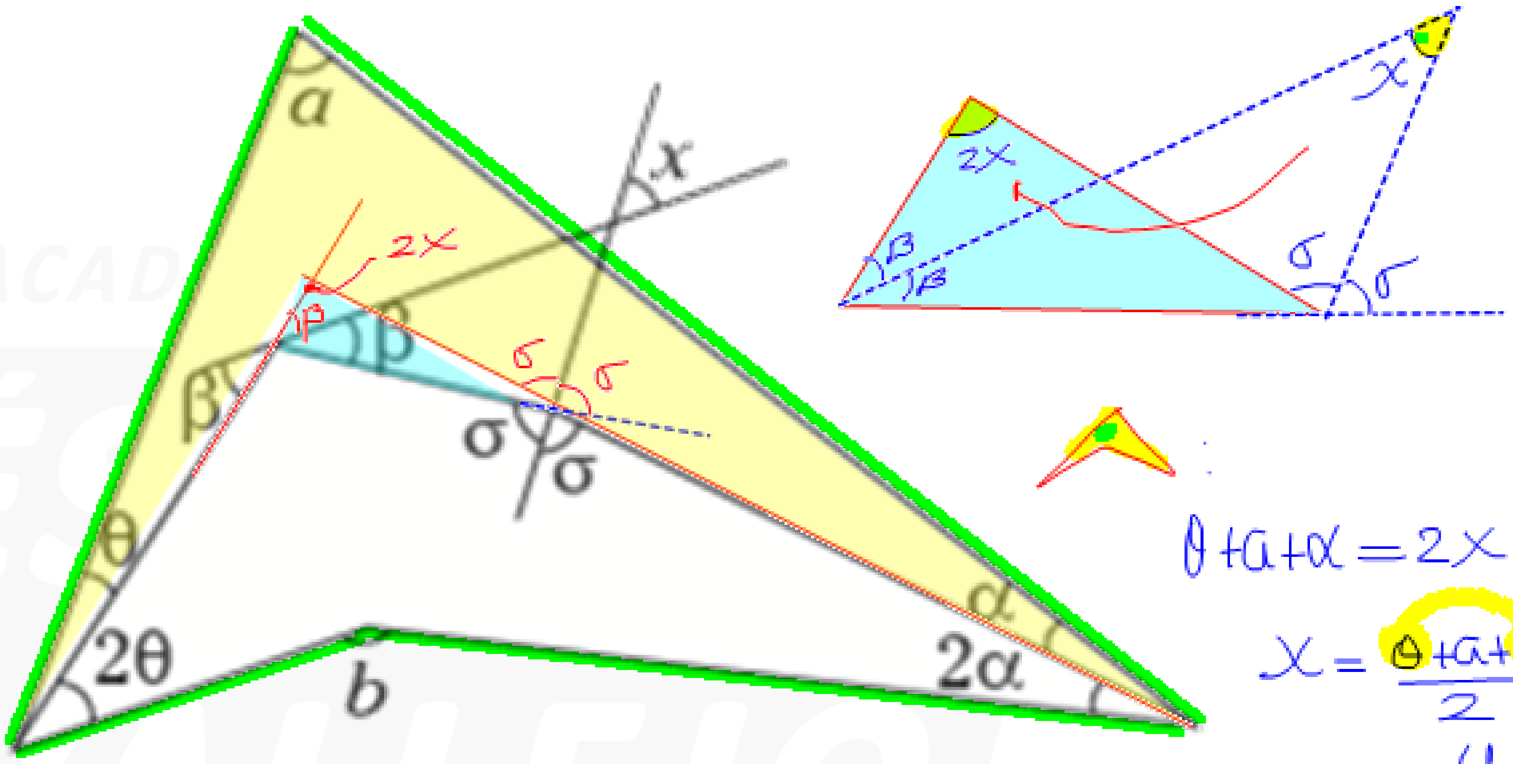
B) $\frac{b+3a}{6}$

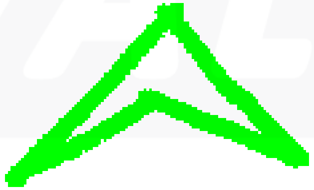
C) $\frac{b+a}{3}$

D) $\frac{2b+a}{3}$

E) $\frac{2b+3a}{6}$

Clave A





$\theta + a + \alpha = 2x$

$x = \frac{\theta + a + \alpha}{2} \quad \ldots (\mathrm{I})$

$3\theta + a + 3\alpha = b$

$3(\theta + \alpha) = b - a$

$\theta + \alpha = \frac{b-a}{3}$

• En (I)

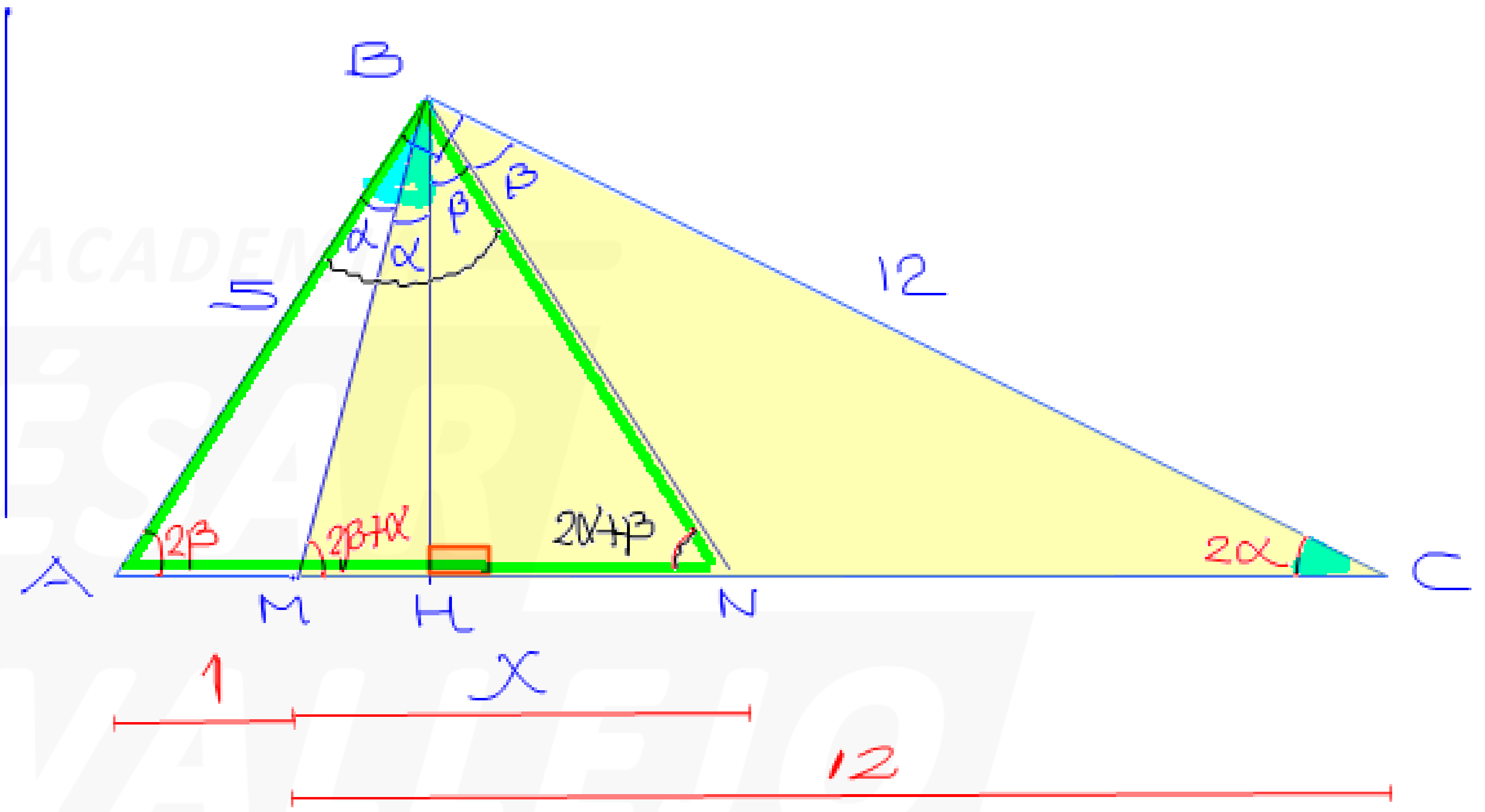
$x = \frac{\frac{b-a}{3} + a}{2}$

$\boxed{\therefore x = \frac{b+2a}{6}}$

20. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, luego se trazan las bisectrices interiores BM y BN de los ángulos ABH y HBC. Calcule MN si $AB=5$ y $BC=12$.

A) 4,5 B) 2,5 C) 3

D) 3,5 ~~E)~~ 4



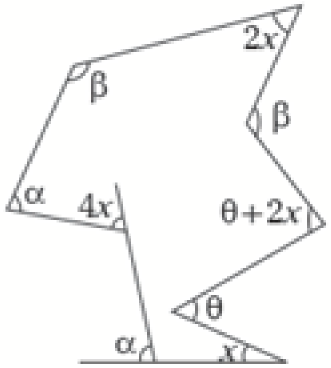
• $\triangle MBC$ es isósceles $MC = BC = 12$

• $\triangle ABN$ es isósceles $x+1 = 5$

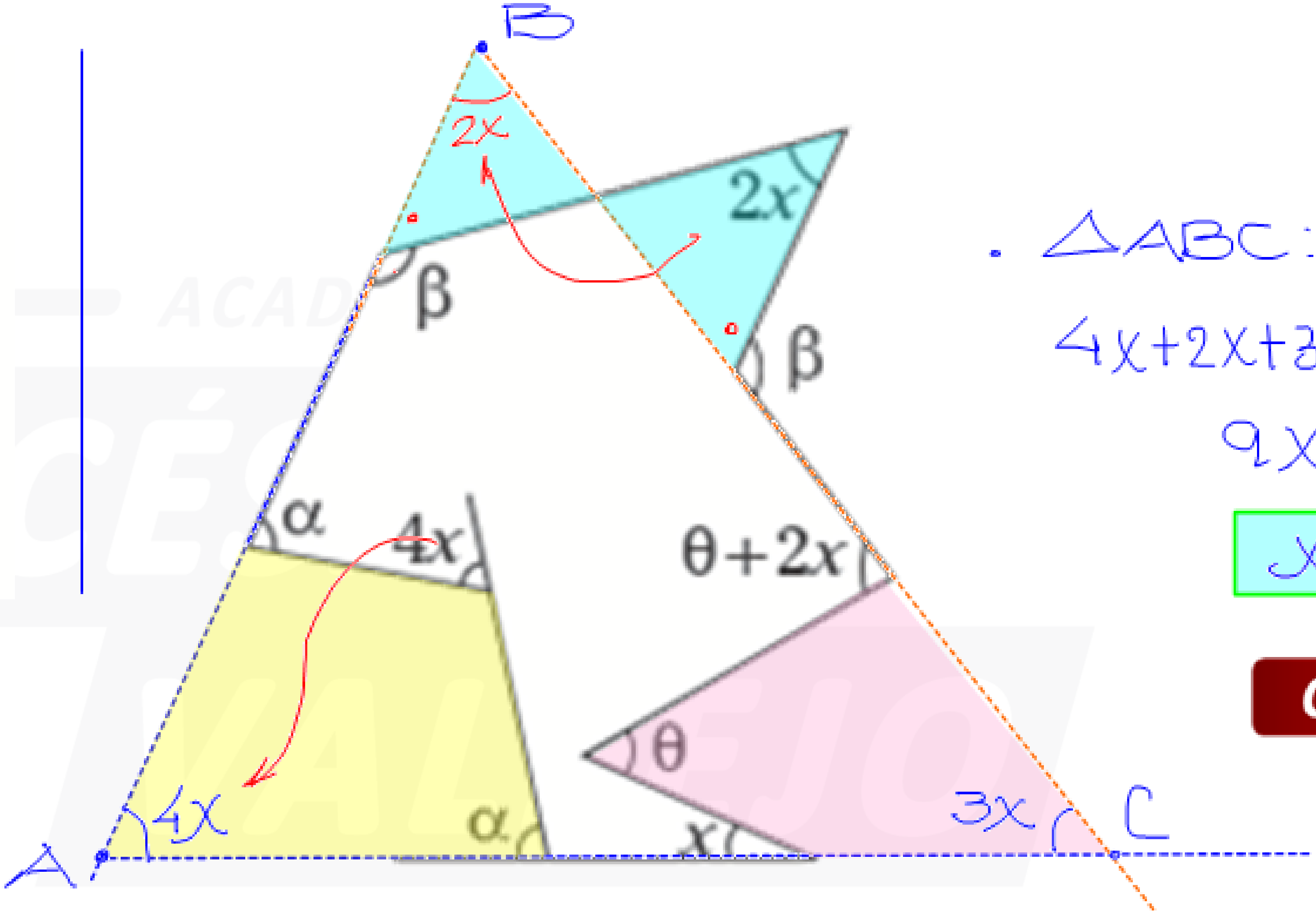
Clave E

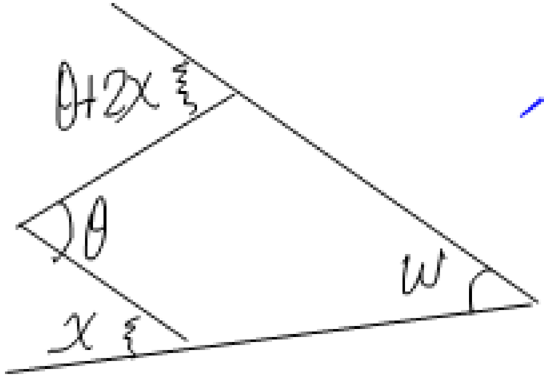
$\therefore\ x = 4$

21. Del gráfico, calcule x.



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) ~~20°~~
E) 24°





$\omega + \cancel{\theta} = \cancel{\theta} + 2x + x$

$\boxed{\omega = 3x}$

• $\triangle ABC$:

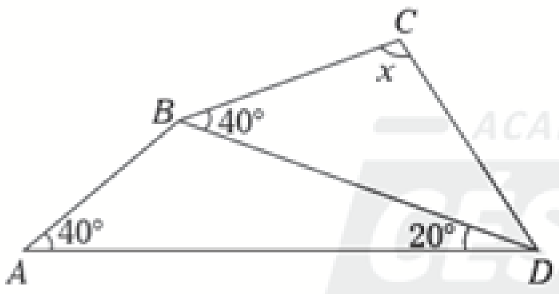
$4x + 2x + 3x = 180°$

$9x = 180°$

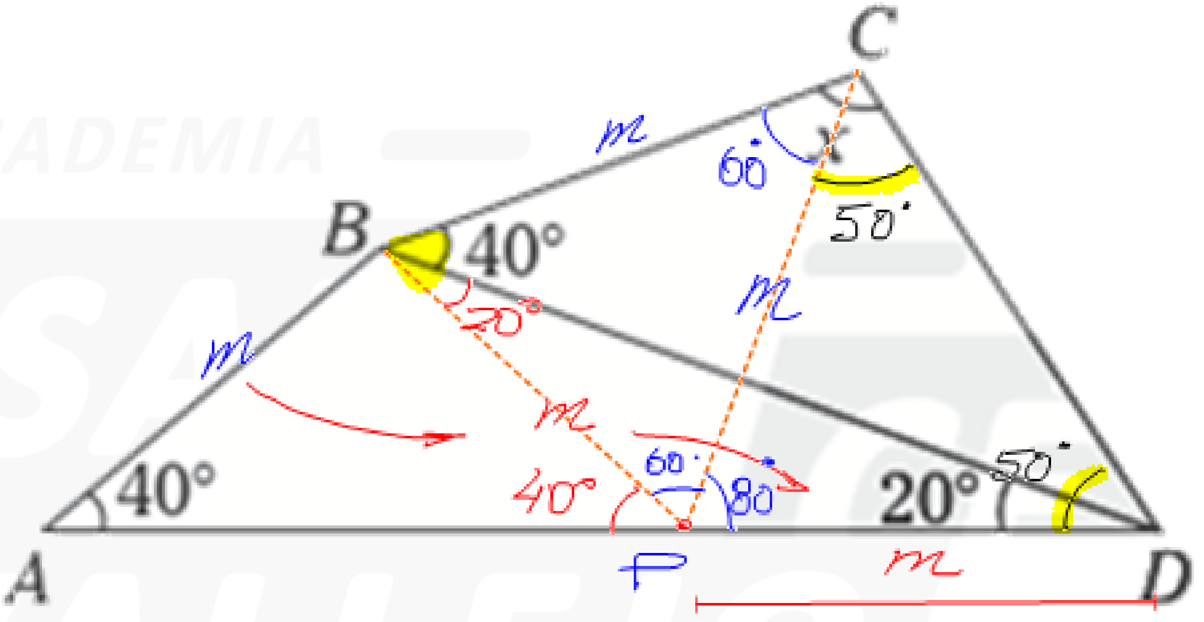
$\boxed{x = 20°}$

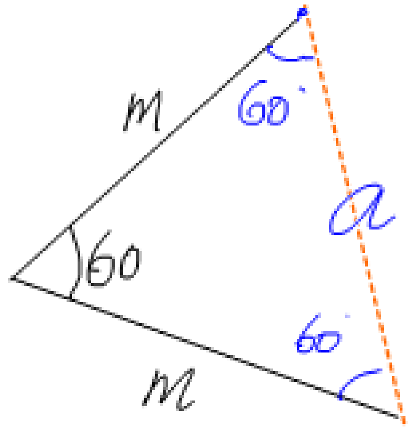
Clave D

22. Según el gráfico, $AB=BC$. Calcule x.



A) 100° B) 105° C) 110°
D) 115° E) 120°





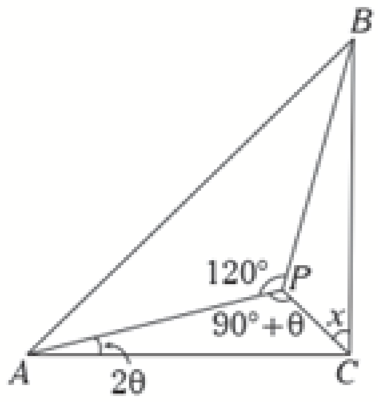
$a=m$

• $\triangle$ BPC es equilátero

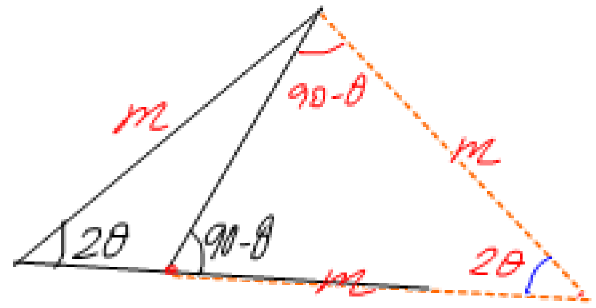
$\therefore x=110°$

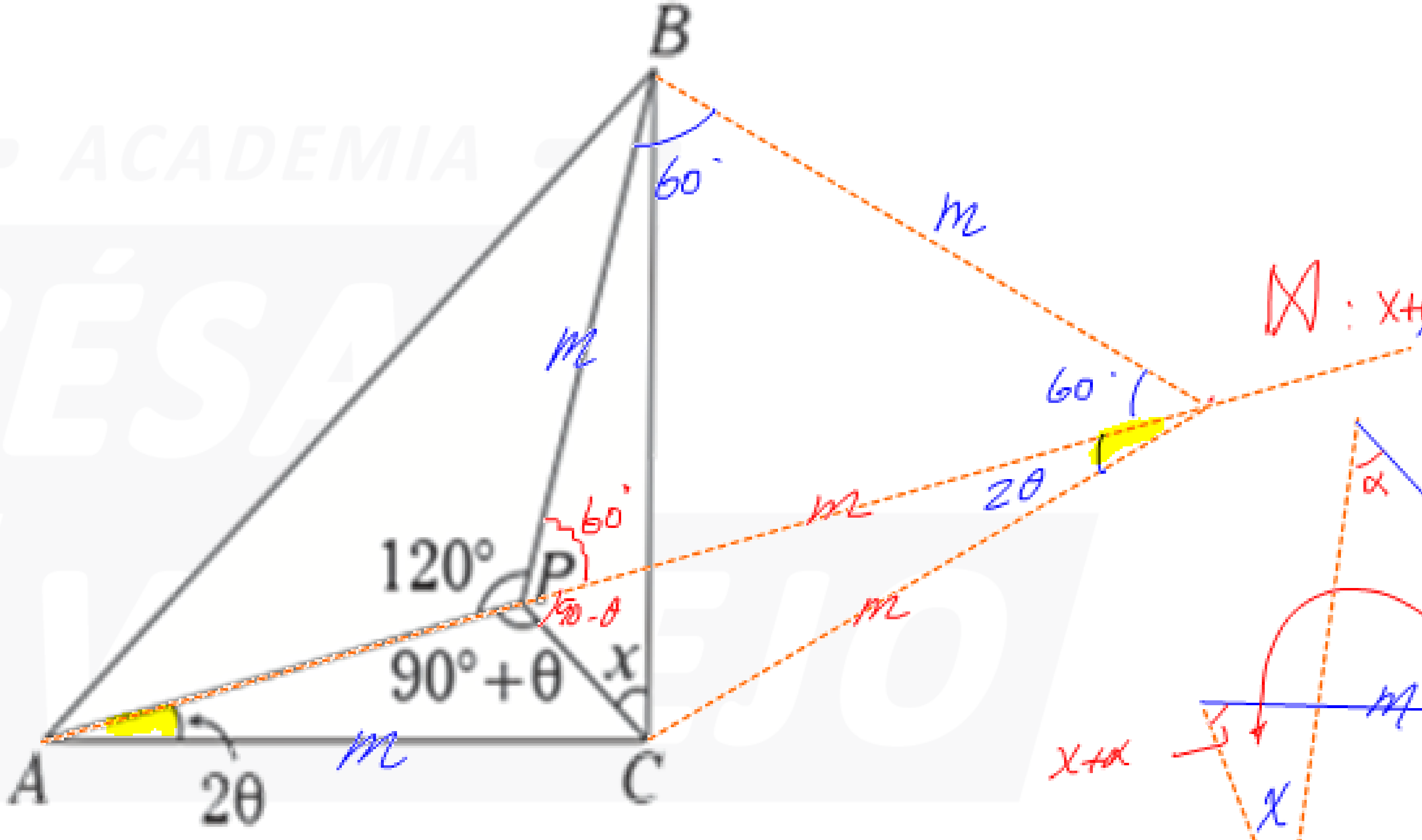
Clave C

23. En el gráfico, $AC=BP$. Calcule x.



A) 20°
B) 25°
C) 30°
D) 35°
E) 40°

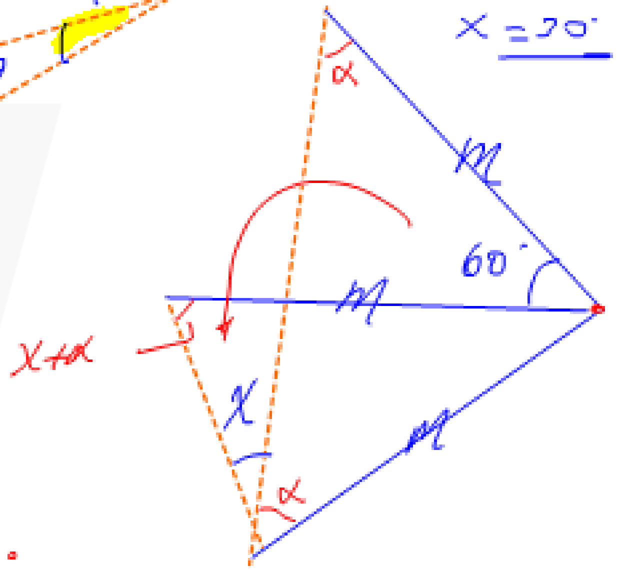




$\boxed{M}$: $x+\cancel{\alpha}+x=\cancel{\alpha}+60$

$2x=60$

$x=\underline{30°}$



Clave C

$x=\dfrac{60°}{2}$

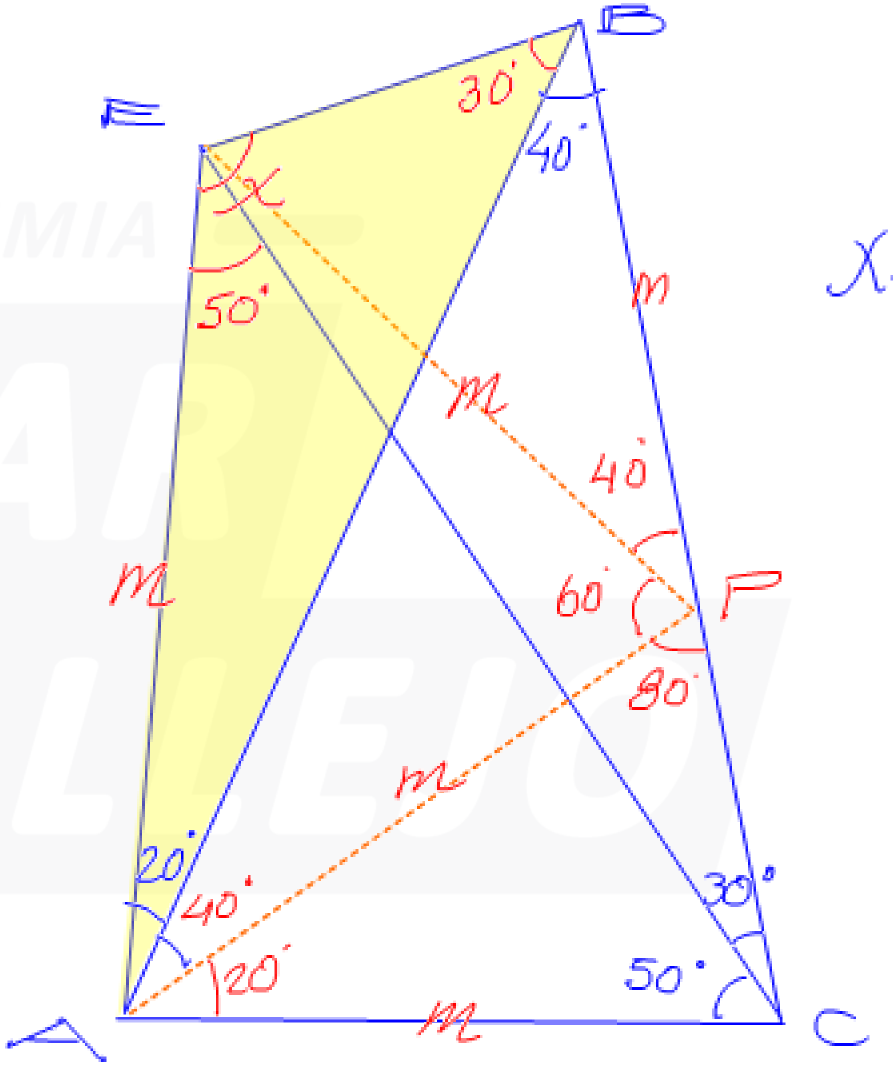
$\boxed{\therefore\ x=30°}$

24. En un triángulo ABC se ubica el punto E en la región exterior relativa a $\overline{BA}$ tal que

$$m\sphericalangle\frac{EAB}{2}=m\sphericalangle\frac{ECA}{5}=m\sphericalangle\frac{ABC}{4}=m\sphericalangle\frac{ECB}{3}=10°$$

Calcule $m\sphericalangle AEB$.

A) 125° B) 100° C) 110°
D) 120° E) 130°



PIDEN X

$X+30°+20°=180°$

$\boxed{\therefore\ X=130°}$

Clave E

TRIÁNGULOS

VÉRTICES
Tres puntos no colineales que determinan el triángulo: A, B, C

LADOS
Segmentos de recta que unen los vértices: segmentos AB, BC y AC

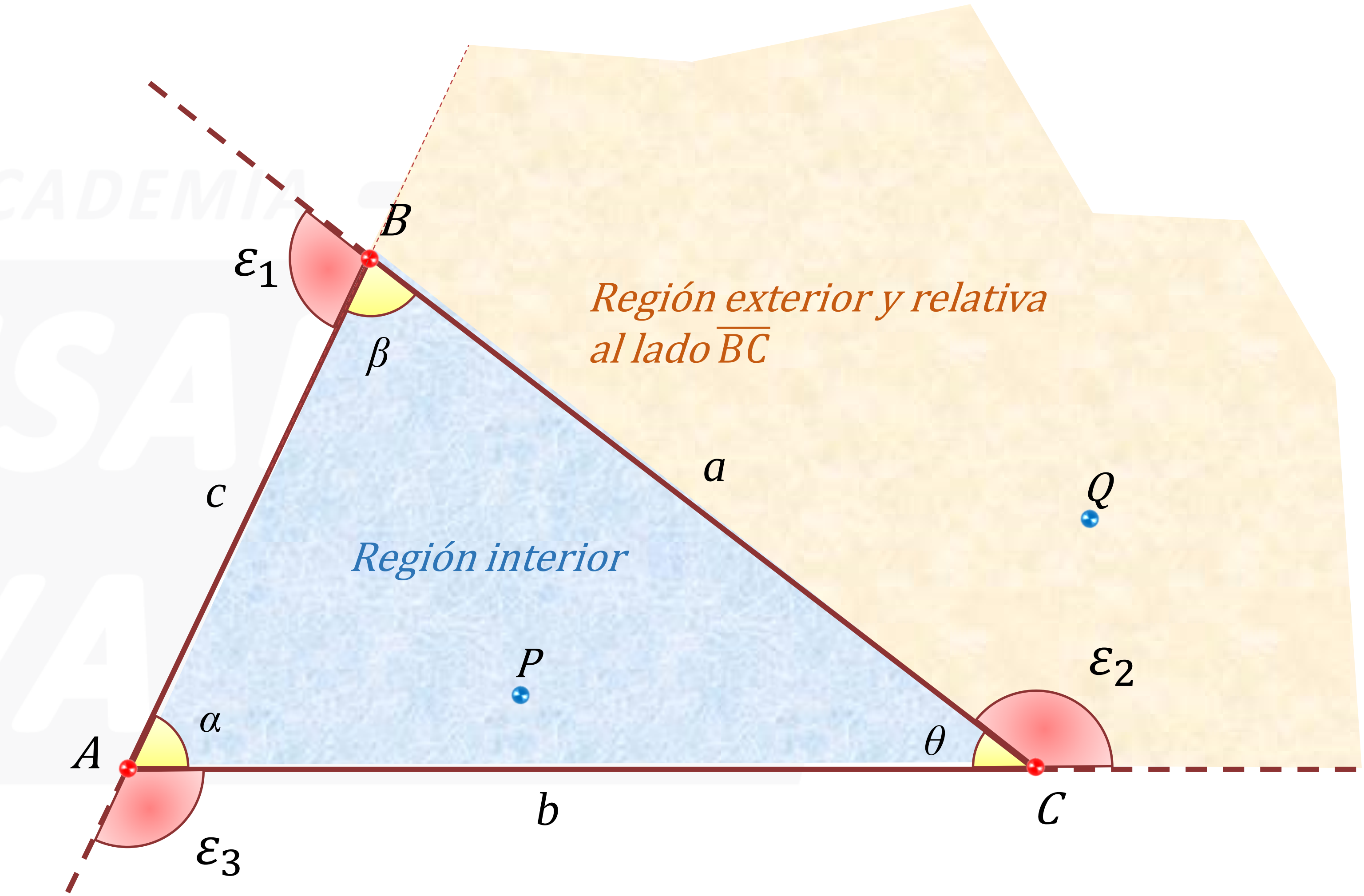
SEMIPERÍMETRO
Semisuma de las longitudes de sus lados: semiperímetro: $(a + b + c)/2$

MEDIDAS ANGULARES INTERIORES
Interiores: α, β, θ

MEDIDAS ANGULARES EXTERIORES
Exteriores: ε_1, ε_2, ε_3

P es un punto de la región Interior

Q es un punto de la región exterior



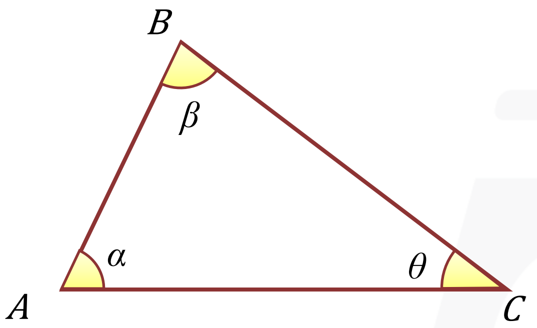
REGIÓN TRIÁNGULAR

Es el conjunto formado por los puntos del triángulo y de su región interior

TRIÁNGULOS

TEOREMA

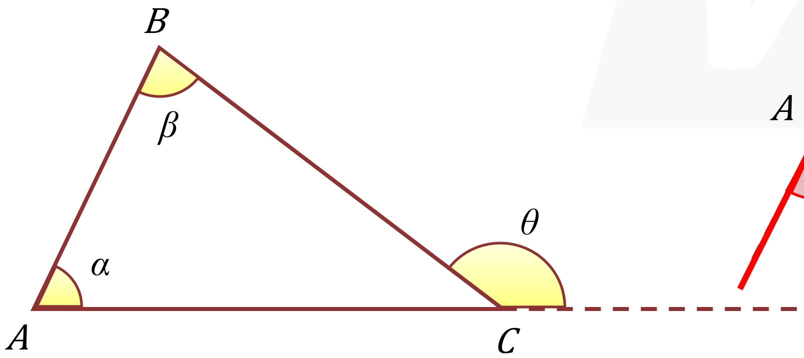
Suma de medidas angulares internas



$\alpha + \theta + \beta = 180°$

TEOREMA

Ángulo exterior



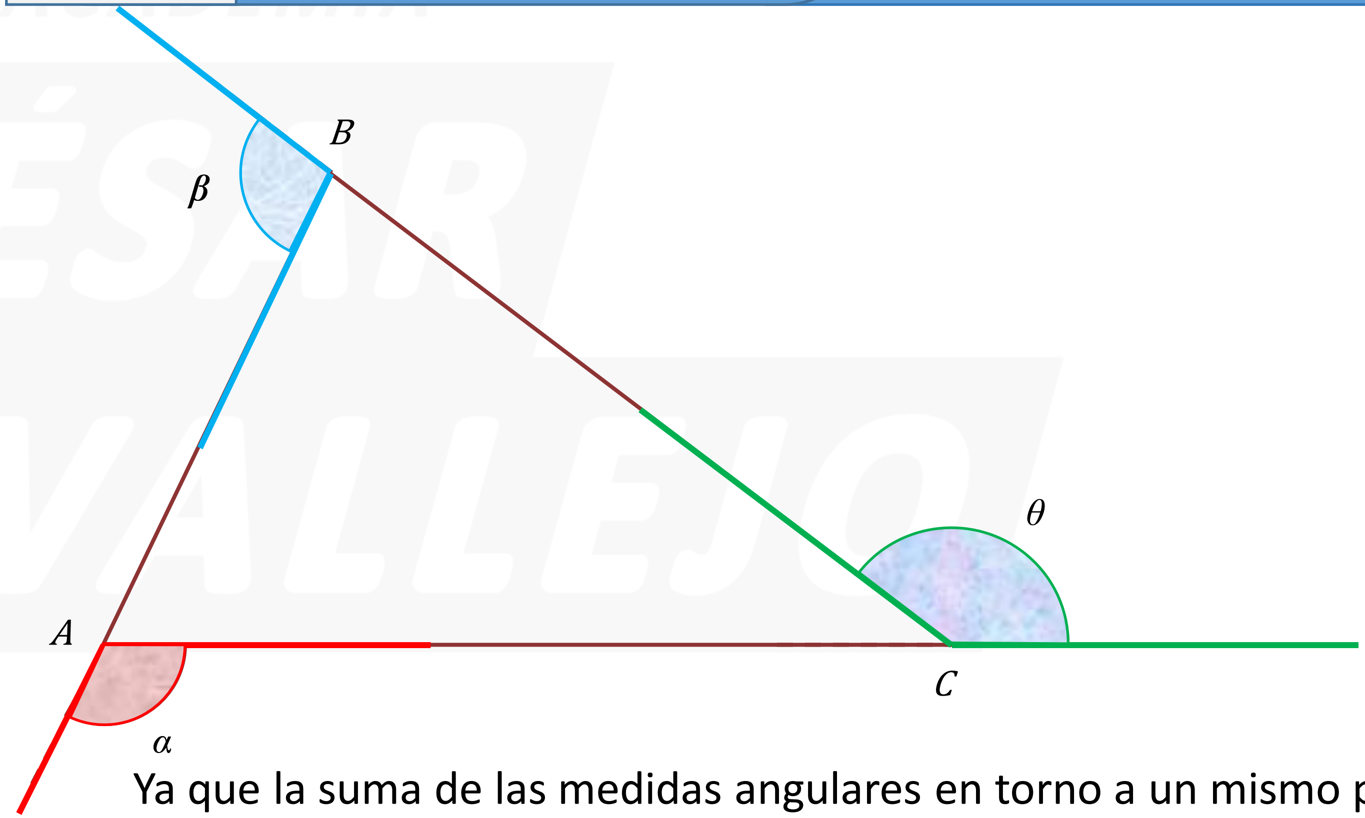
$\theta = \alpha + \beta$

MEDIDAS ANGULARES EXTERIORES

Al considerer una de ellas en cada vértice del triángulo, la suma de estas tres medidas será 360°

$\theta + \alpha + \beta = 360°$

DEMOSTRACIÓN

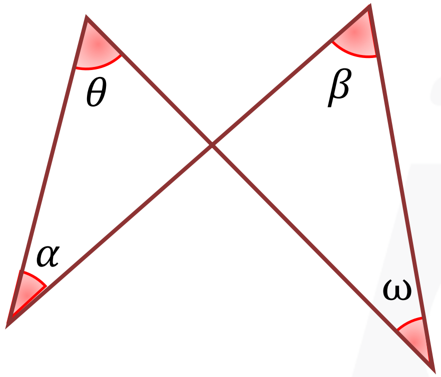


Ya que la suma de las medidas angulares en torno a un mismo punto es 360°

$$\therefore \theta + \alpha + \beta = 360°$$

TEOREMA

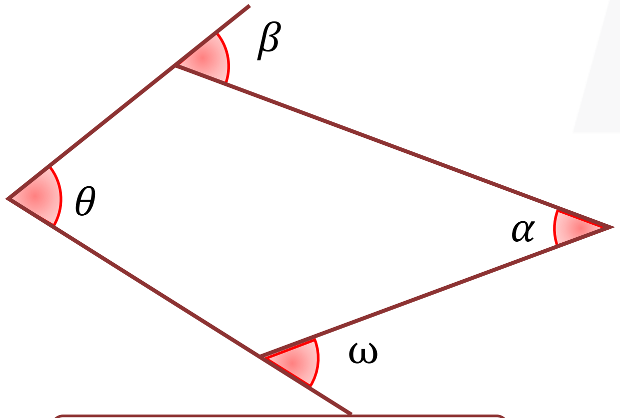
Cuadrilátero Cruzado



$$\theta + \alpha = \beta + \omega$$

TEOREMA

Cuadrilátero de región Convexa

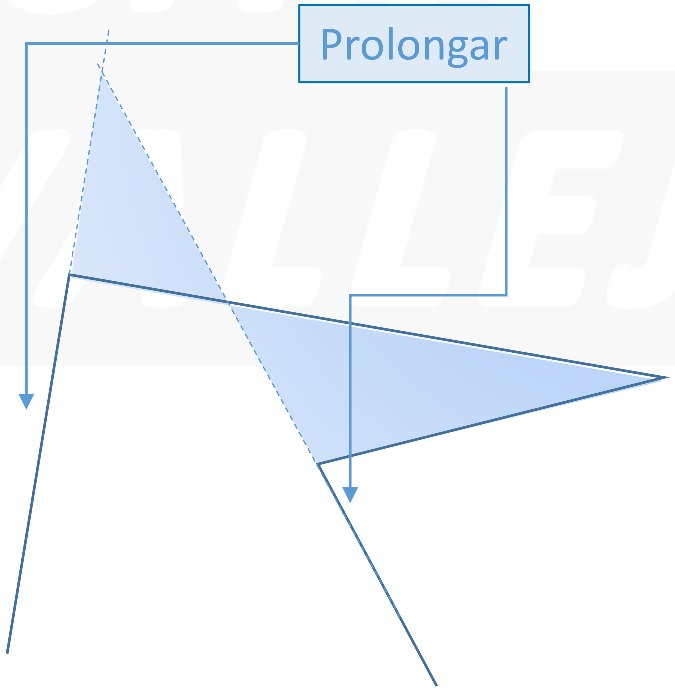


$$\theta + \alpha = \beta + \omega$$

Sugerencia:

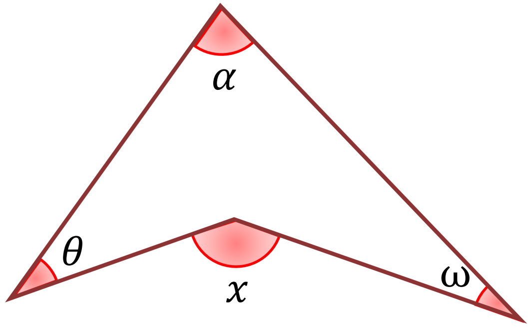
En figuras como esta:

Es recomendable:



TEOREMA

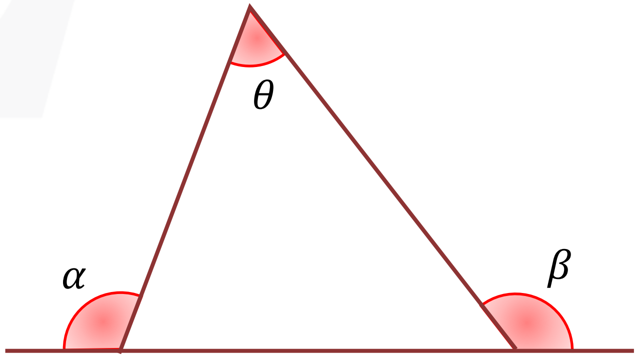
Cuadrilátero de región no convexa



$$\theta + \alpha + \omega = x$$

TEOREMA

Ángulos exteriores



$$\theta + 180° = \alpha + \beta$$

RELACIÓN DE ORDEN EN EL TRIÁNGULO

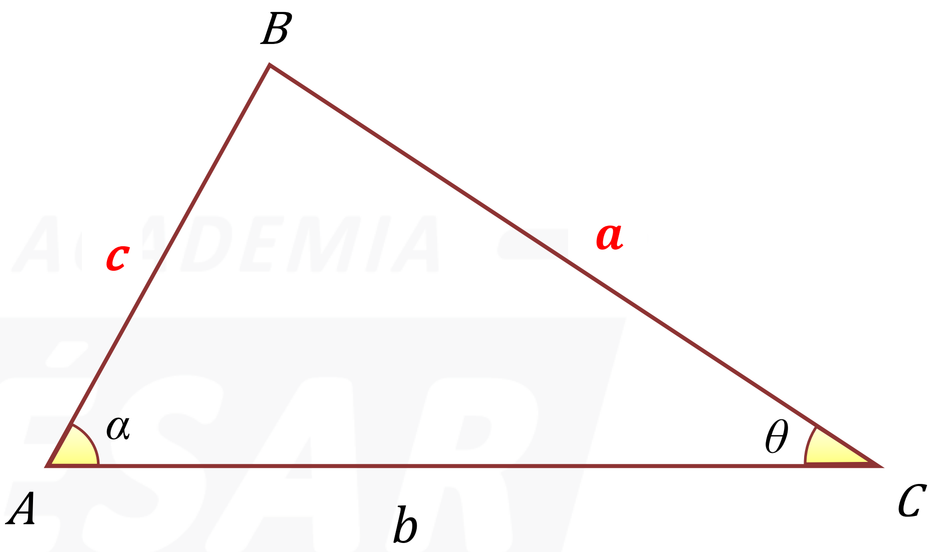
Teorema de Existencia

Si $c < a < b$ $\Rightarrow$

$$\boxed{b - c < a < b + c}$$

$$\boxed{a - c < b < a + c}$$

$$\boxed{b - a < c < b + a}$$

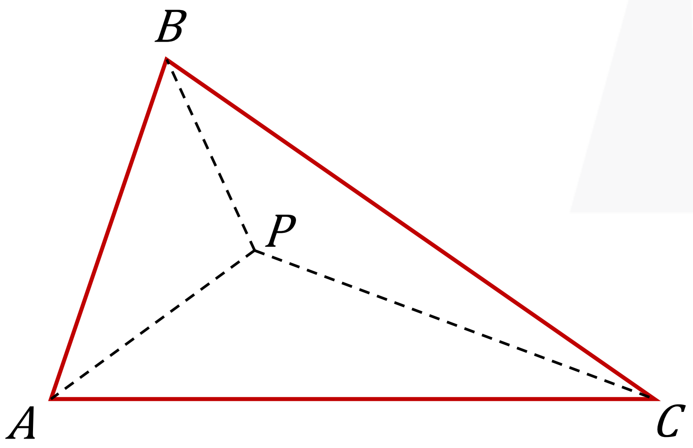


Teorema de Correspondencia

Al ángulo interior de mayor medida se opone el lado de mayor longitud.

$$\boxed{\alpha > \theta \Leftrightarrow a > c}$$

TEOREMA



Siendo $2p$: *perímetro del triángulo*

Para todo punto P de su región Interior:

$$\boxed{p < PA + PB + PC < 2p}$$

TRIÁNGULOS

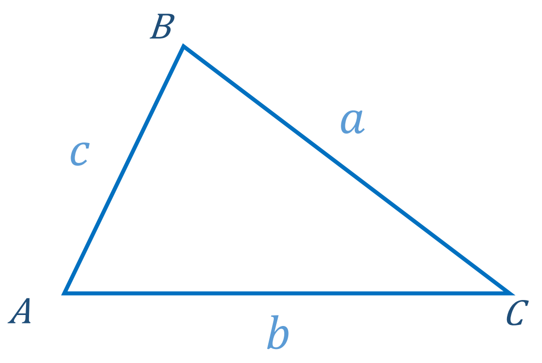
PROBLEMA

Determine el número de triángulos escalenos, de perímetro menor que 10 y cuyos lados tengan medidas enteras.

A) 1 B) 2 C) 3

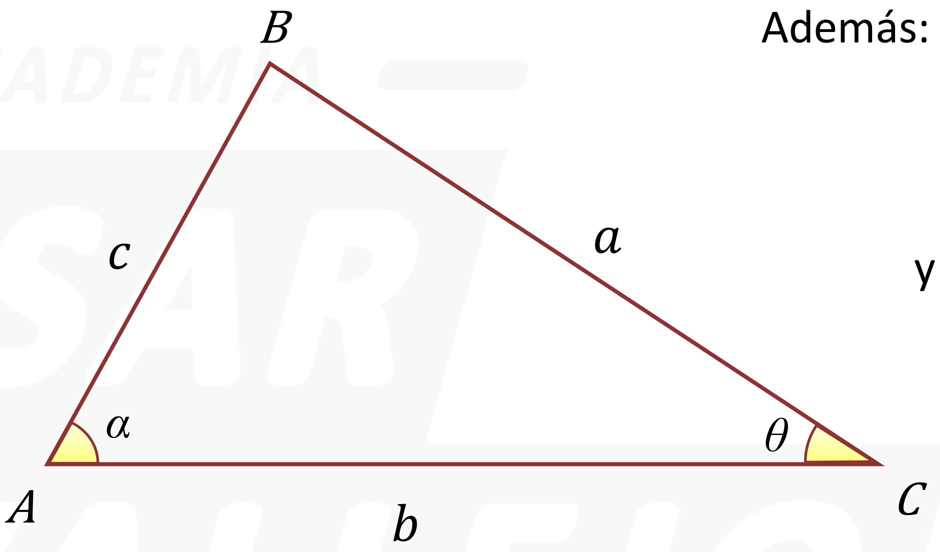
D) 4 E) 5

Teorema



$$b - a < c < b + a$$

RESOLUCIÓN:



Datos: a, b y c: números enteros

Además: $a \neq b$

$b \neq c$

$c \neq a$

y $a + b + c < 10$

Piden: *Número de triángulo que satisfacen dichas condiciones*

Sabemos que: $b < a + c \Rightarrow 2b < a + b + c \Rightarrow 2b < 10$

Se sigue que: $b < 5$ de manera análoga: $a < 5$ y $c < 5$

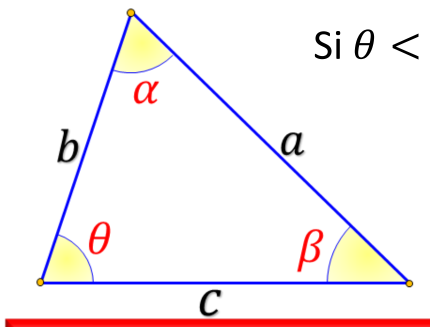
Ya que a, b y c deben ser distintos: $b = 4, a = 3, c = 2$

$\therefore$ Existe un único triángulo

CLAVE: A

CLASIFICACION DE TRIÁNGULOS

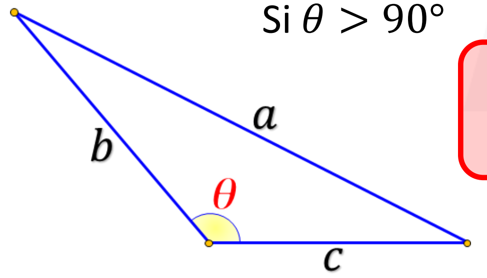
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO



Si $\theta < 90°, \alpha < 90°, \beta < 90°$

Por naturaleza:
$a^2 < b^2 + c^2$

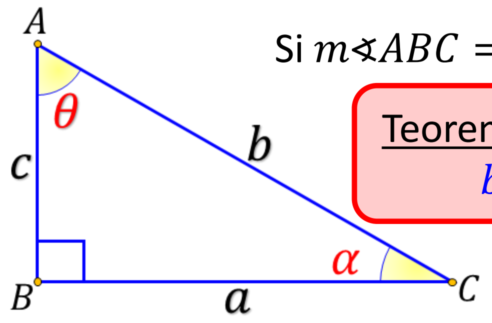
TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO



Si $\theta > 90°$

Por naturaleza:
$b^2 + c^2 < a^2$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

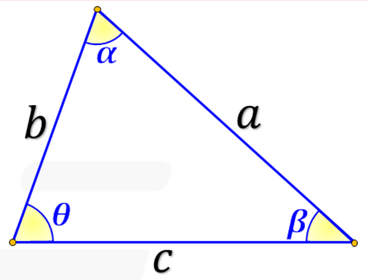


Si $m\sphericalangle ABC = 90°$

Teorema de Pitágoras:
$b^2 = c^2 + a^2$

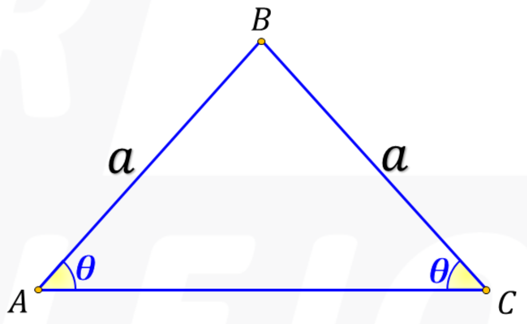
$\theta + \alpha = 90°$

TRIÁNGULO ESCALENO



$a \neq b,\ b \neq c,\ \ a \neq c$

TRIÁNGULO ISÓSCELES

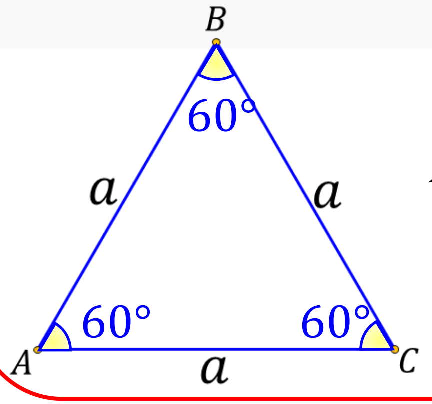


$AB = BC = a$

$\overline{AC}$: BASE

θ es agudo

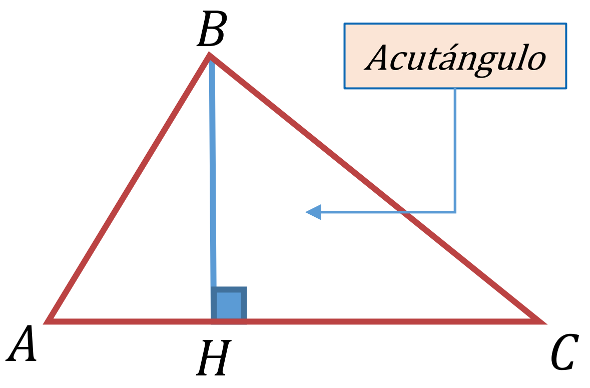
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

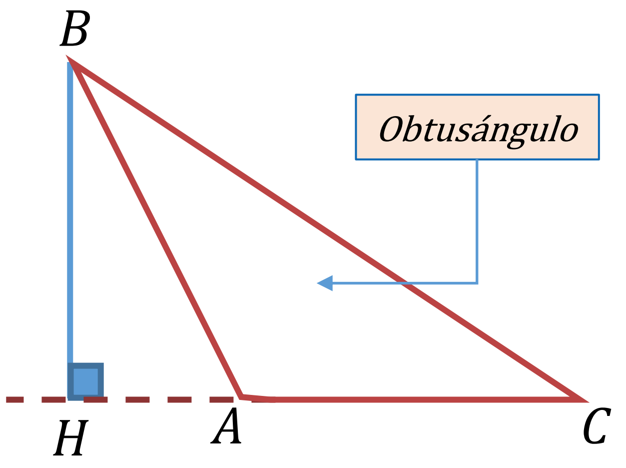


$AB = BC = AC = a$

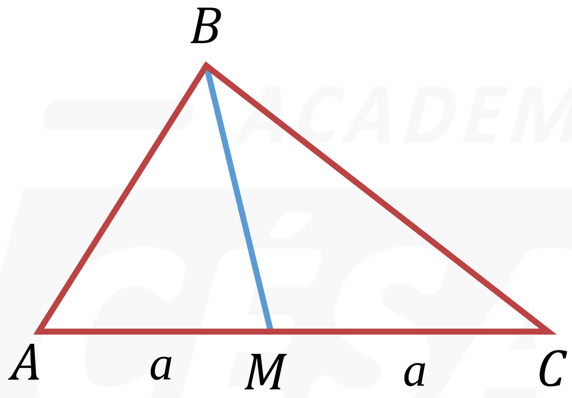
LÍNEAS NOTABLES ASOCIADAS AL TRIÁNGULO

ALTURA

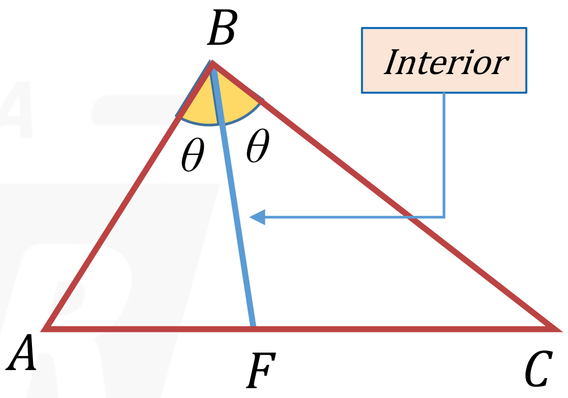


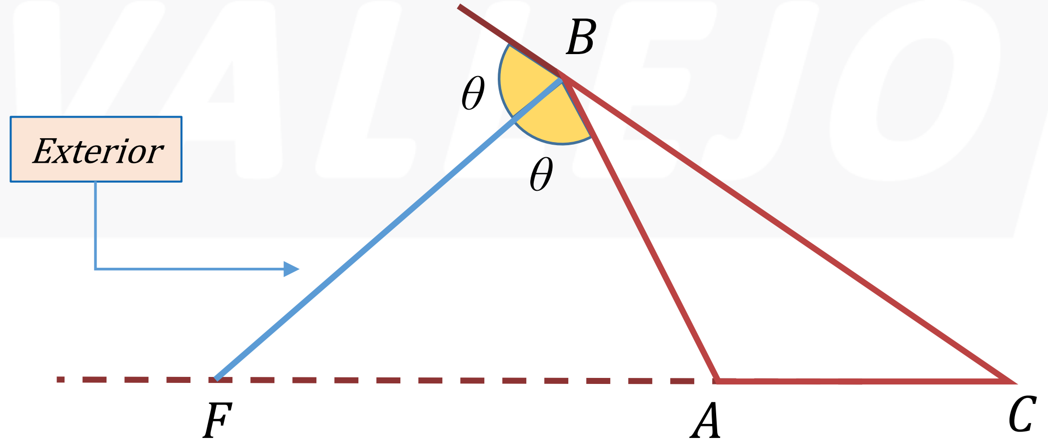


MEDIANA

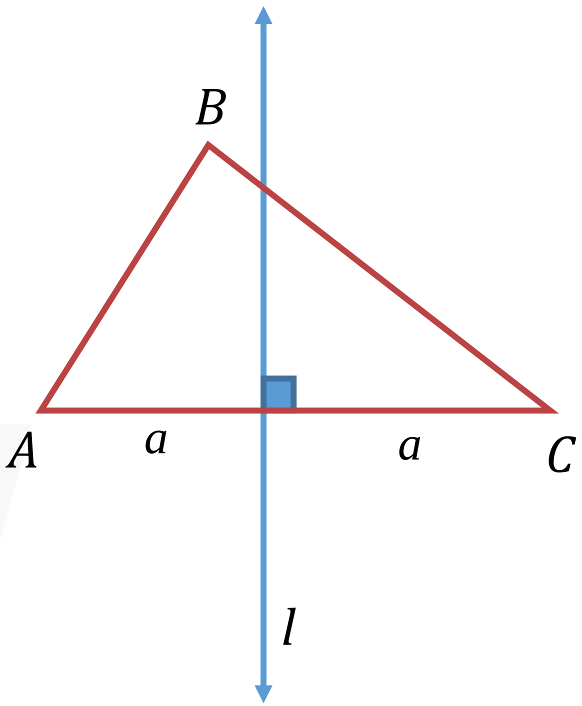


BISECTRIZ



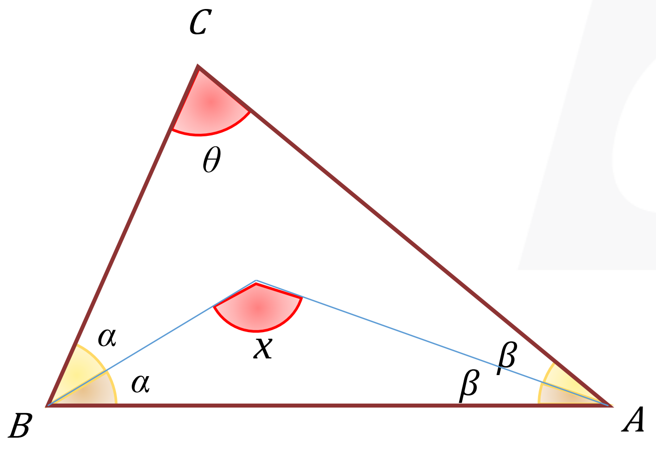


MEDIATRIZ



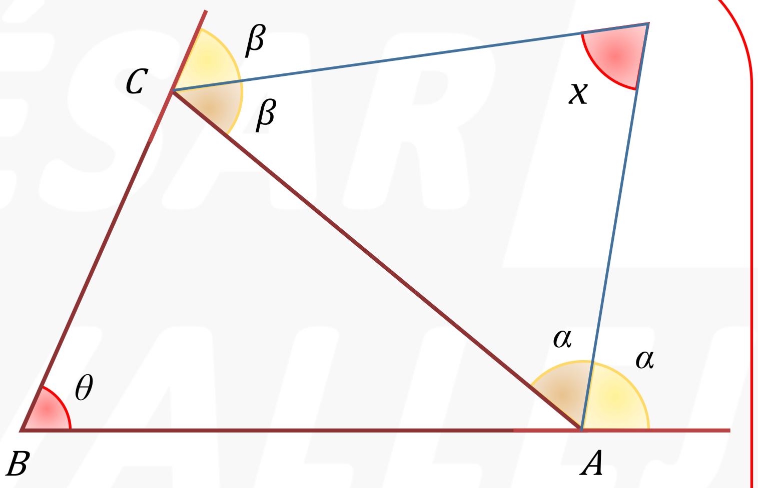
TEOREMAS DE ÁNGULOS ENTRE BISECTRICES

Segmentos bisectrices interiores



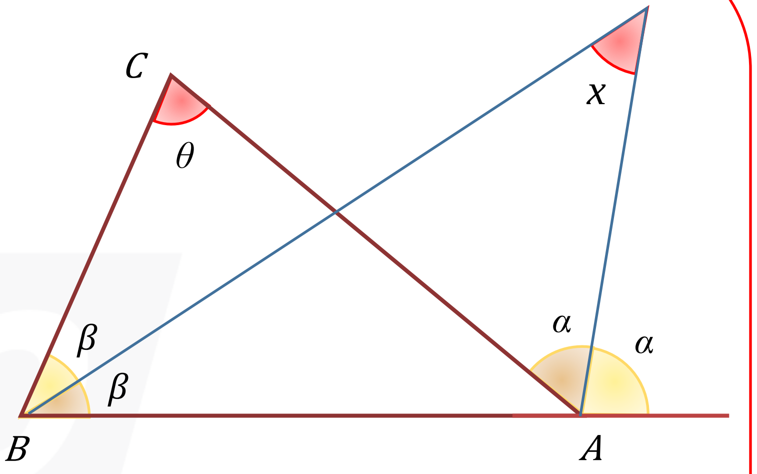
$$x = 90° + \frac{\theta}{2}$$

Segmentos bisectrices exteriores



$$x = 90° - \frac{\theta}{2}$$

Segmentos bisectrices



$$x = \frac{\theta}{2}$$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe