academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ÁLGEBRA

Expresiones con valor absoluto e irracionales

Semana 04

Docente: Gustavo Poma Quiroz

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x denotado por $|x|$ se define de la siguiente manera

$$|x| = \begin{cases} x & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos

- $|\underbrace{3,14-\pi}_{(-)}| = -(3,14-\pi) = \pi - 3,14.$
- $|\underbrace{13}_{(+)}| = 13$
- $|-9| = -(-9) = 9$
- $|0| = 0$
- $|\underbrace{-\sqrt{5}}_{(-)}| = -(-\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

$|\underbrace{x}_{\text{positivo}}| = x$ En forma práctica, las barras se eliminan.

$|\underbrace{x}_{\text{negativo}}| = -x$ En forma práctica, le cambiamos de signo.

- $|\underbrace{x^2+5}_{\text{siempre positivo}}| = x^2+5$

  Como $x^2 \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$
  $\rightarrow x^2 + 5 \geq 5$

- $|\underbrace{3^x+2}_{\text{siempre es }(+)}| = 3^x+2$

  Como $3^x > 0$
  $\rightarrow 3^x + 2 > 2$

- $|\underbrace{|x|+1}_{\text{siempre positivo}}| = |x|+1$

  Como $|x| \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$
  $\rightarrow |x| + 1 \geq 1$

- $|x-5| =$ Depende de "x"

TEOREMAS CON VALOR ABSOLUTO

Considere que cada expresión este bien definida en los

1. $\lvert x\rvert \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$	**2.** $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert\lvert y\rvert$	**3.** $\lvert -x\rvert = \lvert x\rvert$
• $\lvert x+9\rvert \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ • $\lvert x-5\rvert \geq 0 ; \forall x \in \mathbb{R}$	• $\lvert 3x\rvert = \lvert 3\rvert\lvert x\rvert = 3\lvert x\rvert$ • $\lvert x(x-1)\rvert = \lvert x\rvert\,\lvert x-1\rvert$	• $\lvert 3-x\rvert = \lvert -(3-x)\rvert$ $= \lvert x-3\rvert$
4. $\left\lvert \frac{x}{y}\right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert} ; y \neq 0$	**5.** $\lvert x\rvert^2 = \lvert x^2\rvert = x^2$	**6.** $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$
$\left\lvert \frac{x-3}{x+2}\right\rvert = \frac{\lvert x-3\rvert}{\lvert x+2\rvert}$	• $\lvert x-4\rvert^2 = (x-4)^2$ • $(x-2)^2 = \lvert x-2\rvert^2$	• $\sqrt{(x-3)^2} = \lvert x-3\rvert$ • $\sqrt{(7-x)^2} = \lvert 7-x\rvert$

Consecuencia:

$\lvert 3x-6\rvert = 3\lvert x-2\rvert$

$\lvert -4x-20\rvert = 4\lvert x+5\rvert$

$\lvert a-b\rvert = \lvert b-a\rvert$

$\sqrt[2n]{x^{2n}} = \lvert x\rvert \; ; \quad n \in \mathbb{N}$

• $\sqrt[4]{(x-3)^4} = \lvert x-3\rvert$

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son ecuaciones donde la incógnita este afectado del valor absoluto.

Ejemplos

- $|3x-2|=15$
- $|x^2+x-12|=|2x+4|$

Resolución de ecuaciones con valor absoluto

Tener en cuenta la definición y propiedades del valor absoluto en el proceso de la resolución de la ecuación.

Teoremas

- $|x|=a \leftrightarrow a\geq 0 \wedge (x=a \vee x=-a)$
- $|x|=|a| \leftrightarrow x=a \vee x=-a$

Aplicación:

Resolver $|x^2-2|=x$ e indicar la suma de sus cuadrados de las soluciones

A) 12 B) 13 C) 5 D) 10 E) 25

Resolución:

$|x^2-2|=x$

$\rightarrow x\geq 0 \wedge (x^2-2=x \vee x^2-2=-x)$

$x^2-x-2=0 \vee x^2+x-2=0$

$x \quad -2$ $\quad$ $x \quad 2$

$x \quad 1$ $\quad$ $x \quad -1$

$x=2 \vee \underbrace{x=-1}_{\text{No}} \vee \underbrace{x=-2}_{\text{No}} \vee x=1$

Soluciones: 2; 1.

$\therefore 2^2+1^2=5$

Aplicación:

Determine el producto de soluciones de la ecuación:

$$|2x-1|+|6x-3|=|5-10x|-|x+2|$$

A) 2 B) 8 C) 0 D) −6 E) −1

Resolución:

$$|2x-1|+3|2x-1|=5|1-2x|-|x+2|$$

$$4|2x-1|=5|2x-1|-|x+2|$$

$$|x+2|=|2x-1|$$

$$\to\ x+2=2x-1 \ \lor\ x+2=-(2x-1)$$

$$3=x \qquad \lor\ 3x=-1$$

$$x=-1/3$$

∴ Product. soluciones: $(3)\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son inecuaciones en donde la incógnita se encuentra afectada por el valor absoluto.

Ejemplos

- $|x-7| \le 3$
- $|2x+1| > x+3$

Para la resolución utilizaremos los siguientes teoremas

Teorema 1

$$|x| < a \leftrightarrow \{a > 0 \wedge (-a < x < a)\}$$

$$|x| \le a \leftrightarrow \{a \ge 0 \wedge (-a \le x \le a)\}$$

Ejemplo

- $|x| < 5 \quad \leftrightarrow \quad -5 < x < 5$
- $|x| \le 7 \quad \leftrightarrow \quad -7 \le x \le 7$

Ejercicio:

Resuelva la inecuación siguiente

$$|2x-19| \le 13-x$$

Resolución:

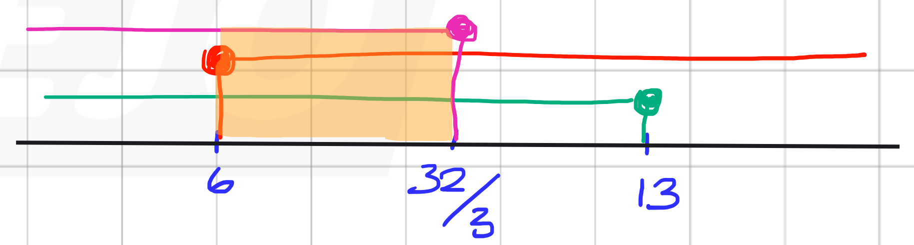
$13-x \ge 0 \quad \wedge \quad -(13-x) \le 2x-19 \le 13-x$

$13 \ge x \quad \wedge \quad -13+x \le 2x-19 \wedge 2x-19 \le 13-x$

$6 \le x \quad \wedge \quad 3x \le 32$

$x \le \frac{32}{3}$

Interject.



$\therefore\ CS = [6;\ 32/3]$

Teorema 2

$$|x| > a \leftrightarrow \{ x > a \lor x < -a \}$$

$$|x| \geq a \leftrightarrow \{ x \geq a \lor x \leq -a \}$$

Ejercicio:

Halle el conjunto solución de

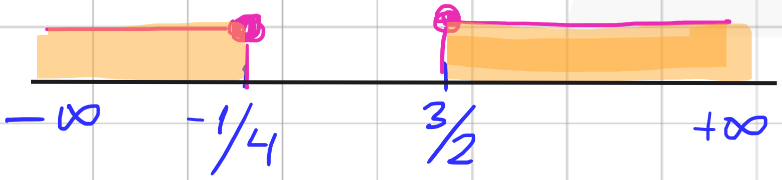
$$|3x-1| \geq x+2$$

Resolución:

$$3x-1 \geq x+2 \quad \lor \quad 3x-1 \leq -(x+2)$$

$$2x \geq 3 \quad \lor \quad 4x \leq -1$$

$$x \geq 3/2 \quad \lor \quad x \leq -1/4$$



$$CS = \langle -\infty ; -1/4] \cup [3/2 ; +\infty \rangle$$

Teorema 3

$$|x| \lesseqgtr |y| \leftrightarrow (x+y)(x-y) \lesseqgtr 0$$

Mantener mismo símbolo

Ejercicio:

Resuelva $|2x+7| \leq |x+5|$

Resolución:

$$(2x+7+x+5)(2x+7-(x+5)) \leq 0$$

$$(3x+12)(x+2) \leq 0$$

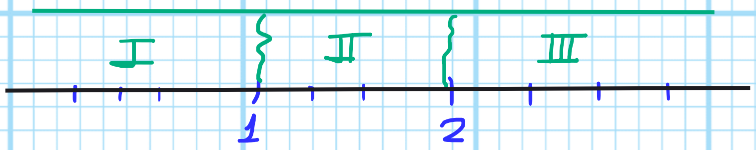
$$PC: -4 ; -2$$

$$\therefore CS = [-4 ; -2]$$

Resolver

$$|x-1|+|x-2|=10$$

Puntos críticos: $1;\ 2$



Luego

(I) $x \leq 1$: $\overbrace{|x-1|}^{(-)}+\overbrace{|x-2|}^{(-)}=10$

$$-(x-1)-(x-2)=10 \quad \Rightarrow \quad CS_{I}=\left\{-\tfrac{7}{2}\right\}$$

$$-2x+3=10$$

Si (Intersección) $\rightarrow -\tfrac{7}{2}=x$

(II) $1<x\leq 2$:

$$\Rightarrow CS_{II}=$$

(III) $2<x$:

$$\Rightarrow CS_{III}=$$

$$\therefore CS_{T}=CS_{I}\cup CS_{II}\cup CS_{III}$$

EXPRESIONES IRRACIONALES

Conjunto de valores admisible (CVA)

Es el conjunto de valores reales de la variable que garantiza la existencia de la expresión en $\mathbb{R}$.

Tener en cuenta para el cálculo del CVA.

$$\underbrace{\sqrt[\text{Par}]{f_{(x)}}}^{\geq 0} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f_{(x)} \geq 0$$

$$\sqrt[\text{Impar}]{g_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Q_{(x)} \neq 0$$

ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones donde al menos en uno de los lados presenta una expresión irracional.

Ejemplos

- $\sqrt{3x+8} = x - 13$
- $\sqrt[3]{x^3 + 8x + 19} = x + 5$

Resolución de la ecuación irracional

Existen varios métodos para resolver ecuaciones irracionales, entre ellas tenemos:

Primer método

Utilizar la potenciación para eliminar los radicales y luego verificar los valores obtenidos en la ecuación inicial.

Aplicación:

Resuelva la ecuación siguiente:

$$\underbrace{\sqrt{3x+7}}_{(+)\,o\,(0)} = x - 1$$

Resolución:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = (x-1)^2$$

$$3x+7 = x^2-2x+1$$

$$0 = x^2-5x-6$$

$$\begin{array}{cc} x & -6 \\ x & 1 \end{array}$$

$$\underbrace{x=6}_{\text{Si Cumple}} \vee \underbrace{x=-1}_{\text{No cumple}}$$

$$CJ = \{6\}$$

Segundo método Utilizar el cambio de variable.

Aplicación:

Resuelva $x^2 - 2\sqrt{x^2+3} = 5$

Resolución:

$$\sqrt{x^2+3}^{\,2} - 2\sqrt{x^2+3} = 5+3$$

$$\sqrt{x^2+3}^{\,2} - 2\sqrt{x^2+3} - 8 = 0$$

$$\begin{array}{cc} \sqrt{x^2+3} & -4 \\ \sqrt{x^2+3} & 2 \end{array}$$

$$\sqrt{x^2+3} = 4 \quad \vee \quad \underbrace{\sqrt{x^2+3} = -2}_{\text{No Cumple}}$$

$$(\ )^2$$

$$x^2+3 = 16$$

$$x^2 = 13 \rightarrow x = \pm\sqrt{13}$$

$$\therefore\ CJ = \{\pm\sqrt{13}\}$$

INECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas inecuaciones donde al menos en uno de los lados presenta una expresión irracional.

Ejemplos

- $\sqrt{x-1} < 3$
- $\sqrt{x+5} + 4 \geq \sqrt[3]{x+2}$

Resolución de la inecuación irracional

Se pueden aplicar los siguientes pasos:

I) Hallar el CVA.

II) Le damos sentido lógico a la desigualdad.

III) **Eliminamos radicales.**

IV) **CS =** **I ∩ II ∩ III**

Ej Resolver

$\sqrt{x-3} \geq 0$

$\therefore CS = CVA = [3;+\infty\rangle$

Aplicación:

Halle la suma de soluciones enteras del conjunto solución de $\sqrt{x-1} \leq 3 - x$.

A) 3 B) 5 C) 7 D) 8 E) 10

Resolución:

I) CVA: $x-1 \geq 0 \rightarrow \boxed{x \geq 1}$

II) $\underbrace{\sqrt{x-1}}_{(+)\circ(0)} \leq \underbrace{3-x}_{(+)\circ(0)} \rightarrow 3-x \geq 0$

$\boxed{3 \geq x}$

III) $\sqrt{x-1}^{\,2} \leq (3-x)^2$

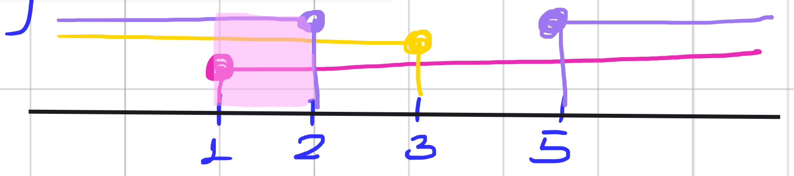
$x-1 \leq 9-6x+x^2$

$0 \leq x^2-7x+10$

$0 \leq (x-5)(x-2)$

PC: 5; 2 $\rightarrow \boxed{x \in \langle-\infty;2] \cup [5;+\infty\rangle}$

IV) $CS = I \cap II \cap III$



$\therefore CS = [1;2]$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS