Números complejos

Intensivo UNI 2024 - III

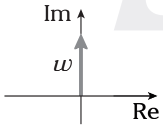
1. Calcule el valor de la expresión S.
$S=i+2i^3+3i^5+4i^7+...+100i^{199}$

A) $-50i$ B) -50 C) $100i$
D) $-100i$ E) 0

2. Calcule $\overline{z}+z^*$ si se tiene que
$z=(1+2i)^5+(1-2i)^5+|z|$

A) 2 B) 4 C) 6
D) -2 E) 0

3. La representación gráfica de $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ es la siguiente:



Determine $z\times\overline{z}$.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{1}{2}$
D) $\dfrac{1}{4}$ E) $\sqrt{3}$

4. Halle el módulo de z, donde

$$z=\frac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}$$

A) $5\sqrt{2}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $7\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

UNI 2022 - I

5. Calcule la suma de todos los $z\in\mathbb{C}$ de manera que cumpla la igualdad $z^2=2\overline{z}i$.

A) 1 B) 0 C) 2
D) $\dfrac{1}{2}$ E) -2

6. Si $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$, entonces, determine

$(\overline{z}-z^2)^5+z^3$

A) 0 B) 2 C) 1
D) 3 E) -1

7. Exprese en su forma cis el resultado de la división $\dfrac{2+2i}{\sqrt{3}+i}$.

A) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ B) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ C) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$
D) $\sqrt{2}\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$ E) $\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

8. Si $z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{24}\right)$, entonces, determine la parte real de $(z^{12}+z^8+z^6)$.

A) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt[3]{2}$
D) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}$

9. Determine el valor de la siguiente expresión.
$i+3i^2+5i^3+7i^4+...+39i^{20}$

A) $20(1-i)$ B) $10(1+i)$ C) $10(1-i)$
D) $20(1+i)$ E) 0

10. Calcule la parte imaginaria del resultado de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3+\left(\frac{5+2i}{2-5i}\right)^4+\frac{1}{1+i}$$

A) 3 B) $-\dfrac{3}{2}$ C) $-\dfrac{1}{2}$
D) $-\dfrac{3}{4}$ E) -1

11. Si $z=\dfrac{n+2i}{4-6i}$ es un complejo real y $w=\dfrac{3+mi}{2+4i}$ es un imaginario puro, entonces, determine mn.

A) 6 B) 2 C) 1
D) 3 E) −1

12. Determine el $|z|$ si se sabe que

$$\bar{z}^2 i=z\left(\frac{(2+i)^3}{(2-i)}\cdot\frac{(3+4i)}{2(1-i)^2}\right)$$

A) $\frac{25}{4}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{1}{4}$
D) 3 E) 1

13. Determine el resultado de la siguiente expresión.

$$\frac{|z+1|^2+|z-1|^2}{|z+1|^2-|z-1|^2}$$

A) $\dfrac{|z|^2+1}{2z}$ B) $\dfrac{z^2+1}{\bar{z}+z}$ C) $\dfrac{|z|^2+1}{\bar{z}+z}$
D) $\dfrac{z^2+1}{2z}$ E) $\dfrac{|z|^2+1}{2\bar{z}}$

14. Si $z=1+i$ y la sumatoria

$$S=\sum_{n=0}^{999} z^n$$

entonces, el valor $1+iS$ es

A) 0 B) 1 C) 2^{1000}
D) 2^{500} E) −1

15. El número complejo z_0 satisface la ecuación:

$$\frac{5+3i}{-4+i}=\frac{2i}{z_0}-2i$$

Determine el valor de $f(z_0)$, donde
$f(x)=x^2-3x+3$

A) $1+i$ B) $1-i$ C) $-2+i$
D) $2+\sqrt{2}i$ E) i

16. Sean z_1 y z_2 complejos opuestos, de manera que

$$z_1=\frac{m}{1+i}+n \quad \text{y} \quad z_2=-m-\frac{1}{i}$$

Calcule el valor de mn.

A) −2 B) 2 C) 6
D) 4 E) −6

17. Si $z=\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{5-\sqrt{3}}\,i$ y
$w=\sqrt{1+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\,i$
calcule el valor de $|z\bar{w}+1|^2-|z+w|^2$.

A) 4 B) 8 C) 24
D) 30 E) 41

18. Si $|z+ai|=|z+bi|$ con $a; b\in\mathbb{R}$; $a\neq b$; $z\in\mathbb{C}$, determine $z-\bar{z}$.

A) $-(a+b)i$ B) $(a+b)i$ C) $2(a+b)i$
D) $(a-b)i$ E) $(a^2-b^2)i$

19. Si $z\in\mathbb{C}/\left|z*\left(1-\sqrt{3}i\right)\right|=4$ y $\arg(zi)=315°$, determine z^8.

A) 64 B) 256 C) 128
D) 32 E) 512

20. Calcule el módulo de z.

$$z=\frac{\left(2e^{\frac{\pi}{8}i}\right)^3}{\left(e^{\pi i}+e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5}$$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1
D) 3 E) 4

21. Determine $|ze^i|$ si $z=|z|e^{\theta i}$ de modo que cumpla lo siguiente:
$2z+|z|e^{(\theta+\pi)i}=(1-i)(4-3i)$

A) $5e\sqrt{2}$ B) $3e\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$
D) 5 E) $4\sqrt{2}$

22. Calcule el valor reducido de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}+\sqrt{3}i+e^{\frac{3\pi}{2}i}}{1-\sqrt{3}i}\right)^{31}$$

A) $-\frac{1}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ C) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

D) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ E) 1

23. Si $z\in\mathbb{C}$ de modo que $e^{z}=2$, entonces, determine el valor de $\mathrm{Re}(z)+\frac{\mathrm{Im}(z)}{|e^{z}|}$.

A) $\ln 2+k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$
B) $\ln 2+2k\pi i;\ \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$
C) $\ln 2+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$
D) $\ln 4+k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$
E) $\ln 3+2k\pi i;\ k\in\mathbb{Z}$

24. Determine todos los $x\in\mathbb{R}$; i es la unidad imaginaria, de modo que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{\pi+ei}{e-\pi i}=e^{2xi}$$

A) $\frac{\pi}{4}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

B) $\frac{\pi}{4}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

C) $\frac{\pi}{3}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

D) $\frac{\pi}{8}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

E) $\frac{\pi}{4}+4k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$