academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo
INTENSIVO UNI

ÁLGEBRA

Números Complejos

Semana 05

Docente: José Luis Vásquez Carhuamaca

OBJETIVOS:

- ✓ Conocer a las funciones, sus elementos, propiedades y gráficas.
- ✓ Calcular el dominio y rango en base a su regla de correspondencia .
- ✓ Desarrollar destrezas en la resolución de problemas tipo referidos al tema.

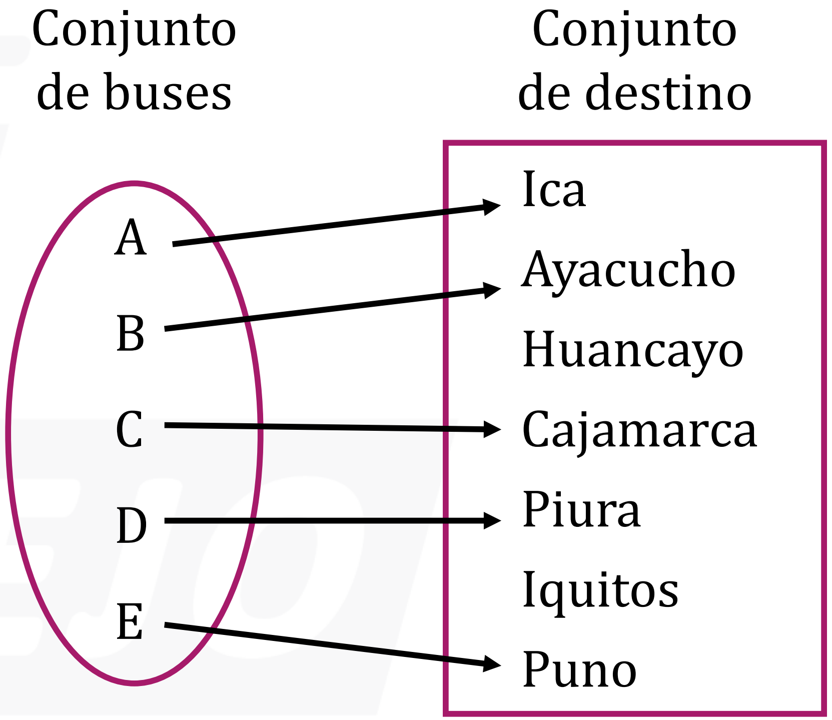
Introducción

Al observar la naturaleza detenidamente, podemos ver que muchas de las situaciones que suceden a nuestro alrededor están relacionadas.
Una de las situaciones cotidianas es el transporte de pasajeros a los distintos departamentos del Perú.

Veamos la siguiente situación :

Una empresa de transportes cuenta con 5 unidades de buses ,para transportar pasajeros a 6 ciudades del Perú, con horario de salida a las 8 de la mañana.

El siguiente diagrama muestra una posible distribución de bus y destino



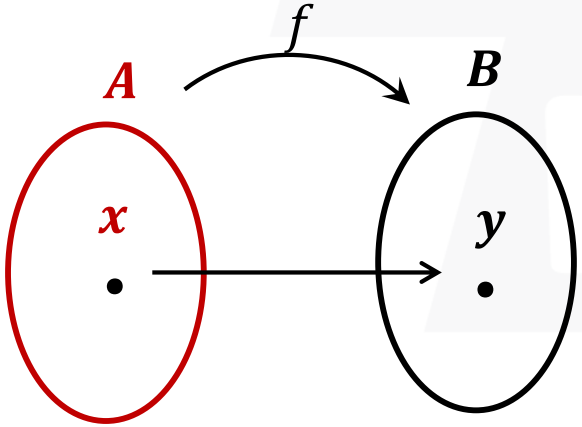
Del diagrama se observa que un bus solo puede ir a una sola ciudad

FUNCIÓN

Sean A y B conjuntos no vacíos. La función f de A en B es un conjunto de pares ordenados $(x; y)$ tal que a $x \in A$ le corresponde un único elemento $y \in B$.

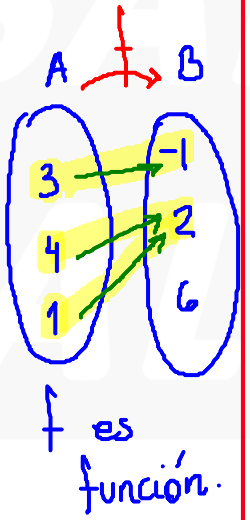
Notación: $f: A \longrightarrow B$ o $A \xrightarrow{f} B$

Gráficamente

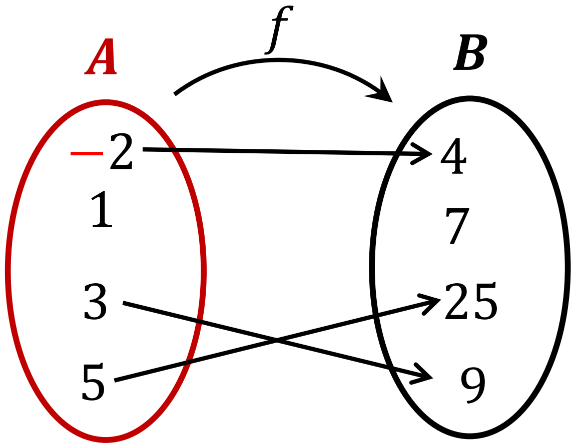


Conjunto de partida

Conjunto de llegada

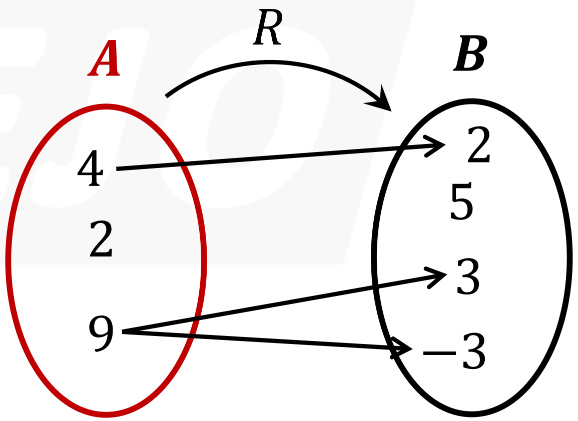


Ejemplos

- 

f es función

$f = \{(-2; 4); (3; 9); (5; 25)\}$

- 

R no es función

$R = \{(4; 2); (9; 3); (9: -3)\}$

CONDICIÓN DE UNICIDAD DE LA FUNCIÓN

Sea f una función.

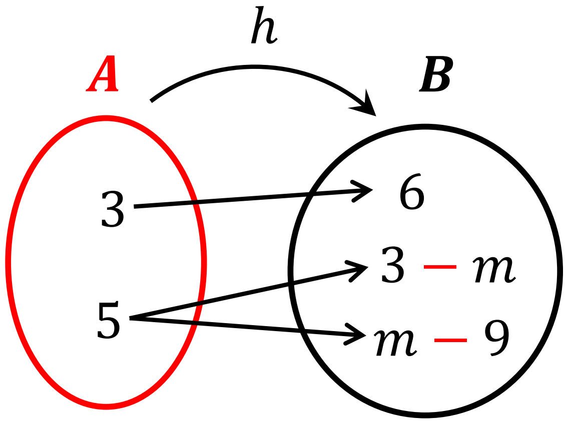
$$\text{Si } (\boldsymbol{x};y)\in f \;\wedge\; (\boldsymbol{x};z)\in f \;\rightarrow\; y=z$$

Ejemplos

- Sea g una función

$$g=\{(\mathbf{6};-3);(8;4);(\mathbf{6};p)\}\quad\rightarrow\; p=-3$$

- Sea h una función



$$\rightarrow\; 3-m=m-9$$

$$\rightarrow\; m=6$$

DOMINIO Y RANGO

Sea la función $f:A\longrightarrow B$

Dominio de *f*

Es el conjunto formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la función.

$$\boxed{\operatorname{Dom} f=\{x/(x;y)\in f\}\;\subseteq A}$$

Rango de *f*

Es el conjunto formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen la función.

$$\boxed{\operatorname{Ran} f=\{y/(x;y)\in f\}\;\subseteq B}$$

Ejemplo $\quad f=\{(-2;4);\;(3;9);\;(5;25)\}$

$$\operatorname{Dom} f=\{-2;3;5\}\qquad \operatorname{Ran} f=\{4;9;25\}$$

REGLA DE CORRESPONDENCIA

Sea $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ una función tal que $(x; y) \in f$. La regla de correspondencia de f es la igualdad que relaciona x e y.

Notación $y = f(x)$

x: Var. independiente

y: Var. dependiente

Ejemplo

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow{f} \boldsymbol{B}$$

$$\begin{array}{ccl}
\boldsymbol{1} & \longrightarrow & 6 = \boldsymbol{1}^2 + 5 \\
\boldsymbol{2} & \longrightarrow & 9 = \boldsymbol{2}^2 + 5 \\
\boldsymbol{3} & \longrightarrow & 14 = \boldsymbol{3}^2 + 5 \\
\boldsymbol{4} & \longrightarrow & 21 = \boldsymbol{4}^2 + 5 \\
\vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
\boldsymbol{x} & \longrightarrow & y = \boldsymbol{x}^2 + 5
\end{array}$$

Conj. Pre imagenes   Conj. imagenes.

Luego: $y = x^2 + 5$ o $f(x) = x^2 + 5$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

La función $f: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ es una función real de variable real, si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Ejemplos

- $$\begin{aligned} f: \langle -1;\ 6] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 2x - 3 \end{aligned}$$

  De donde podemos plantear que:

  $\operatorname{Dom} f = \langle -1; 6] \quad \wedge \quad f(x) = 2x - 3$

- $g = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, -2 < x \leq 5 \ \wedge\ y = 3x - 1\}$

  $\operatorname{Dom} g = \langle -2; 5] \ \wedge \ g(x) = 3x - 1$

Nota: Una función está **bien definida** si se conoce su dominio y regla de correspondencia.

CÁLCULO DE DOMINIO Y RANGO

Sea la función $f : A \rightarrow B$
$x \rightarrow f_{(x)}$

Dominio de f

Esta dada por la variación de x, si esta no se conoce entonces:

$$\text{Dom } f = A \cap (\text{CVA de } f_{(x)})$$

Para hallar el CVA consideramos:

- $\sqrt[\text{par}]{h(x)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow h(x) \geq 0$
- $\dfrac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Q_{(x)} \neq 0$

Ejemplo:

Halle el dominio de la función

$$f_{(x)} = \sqrt{9x - x^2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Resolución

$\text{Dom} f = \text{CVA}$

CVA :

$\Rightarrow 9x - x^2 \geq 0 \wedge x^2 - 1 \neq 0$

$0 \geq x^2 - 9x \wedge x \neq \pm 1$

$0 \geq x(x-9) \wedge x \neq \pm 1$

PC: 0; 9

$x \in [0;9]$

$\text{Dom} f = \text{CVA} = [0;9] - \{1\}$

Ejemplo:

Halle el dominio de la función si

$$g_{(x)} = \sqrt[4]{\frac{x+2}{x-4}} - \sqrt{9-|2x-3|}$$

Resolución

$\text{Dom} f = \text{CVA}.$

CVA:

$\frac{x+2}{x-4} \geq 0 \quad \wedge \quad 9-|2x-3| \geq 0 \quad \wedge \quad x \neq 4$

$(x-4)(x+2) \geq 0$

$\wedge \quad |2x-3| \leq 9$

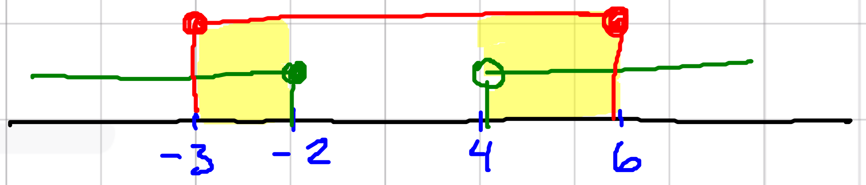
Pc: $4; -2$

$-9 \leq 2x-3 \leq 9$ $\Big) +3$

$x \in \langle -\infty; -2] \cup [4; +\infty\rangle$

$-3 \leq x \leq 6$ $\Big) \div 2$

Interfect.



$\therefore \text{Dom} f = [-3; -2] \cup \langle 4; 6]$

Rango de *f*

Esta dada por la variación de $f_{(x)}$, y se obtiene a partir del dominio.

Ejemplo:

- Halle el rango de la función f si

$$f_{(x)} = 3 + \frac{10}{x+5}; \quad \underbrace{x \in [-3;1\rangle}_{\text{Dom}f.}$$

Resolución

Como: $-3 \leq x < 1$

$$2 \leq x+5 < 6 \quad +5$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x+5} > \frac{1}{6} \quad \text{invertir}$$

$$5 \geq \frac{10}{x+5} > \frac{5}{3} \quad \times 10$$

$$8 \geq f_{(x)} > \frac{14}{3} \quad +3$$

$\therefore \text{Ran}f = \left\langle \frac{14}{3}; 8 \right]$

- Sea la función $g : [-2; 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(x) = -x^2 + 8x - 7$$

Halle el rango de la función.

Resolución

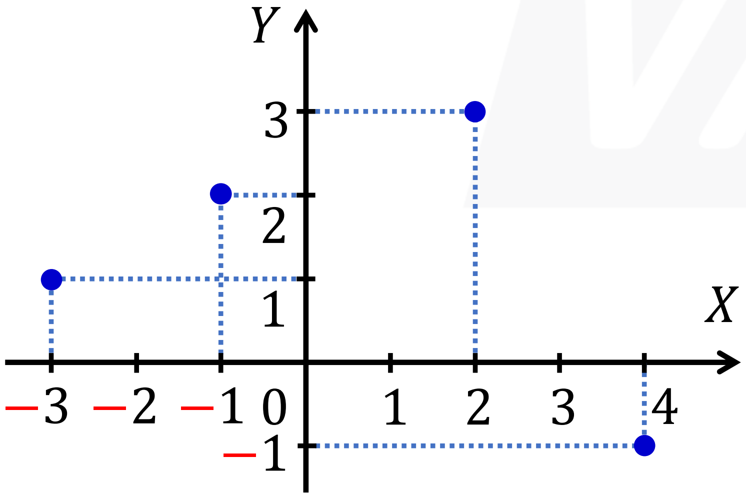
GRÁFICA DE FUNCIONES

La gráfica de una función f es la representación de todos sus pares ordenados (x, y) que pertenecen a la función en el plano cartesiano.

$$Graf\ (f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathrm{Dom}f\ \wedge\ y = f(x)\}$$

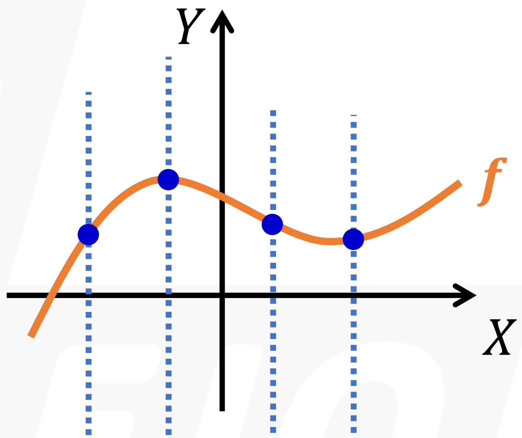
Ejemplo

$$f = \{(2; 3), (4; -1), (-1; 2), (-3; 1)\}$$

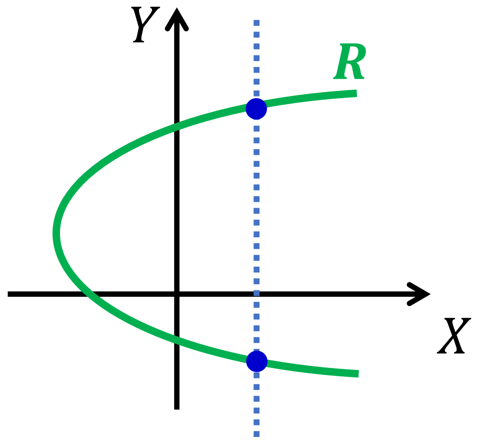


Propiedad

Una gráfica corresponde a una función, si al trazarle rectas verticales, estas la intersecan a lo más en un solo punto.



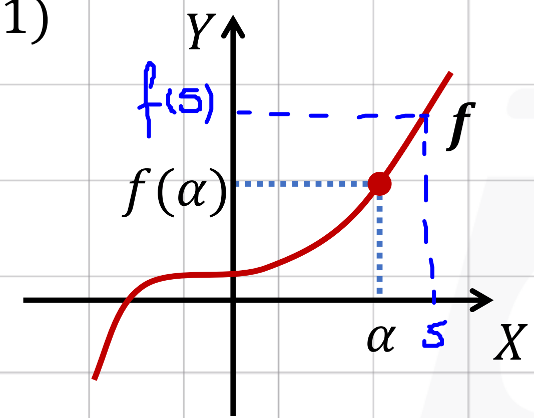
La gráfica de f sí corresponde a una función.



La gráfica de R no corresponde a una función.

Observaciones

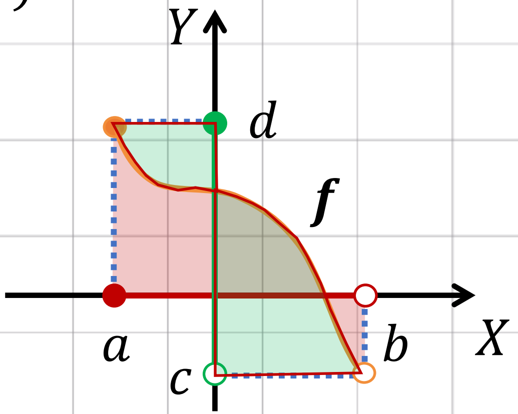
1)



$\Rightarrow f(5)$ es imagen de 5.

$\Rightarrow f(\alpha)$ es imagen de α.

2)



$\text{Dom } f = [a; b\rangle$

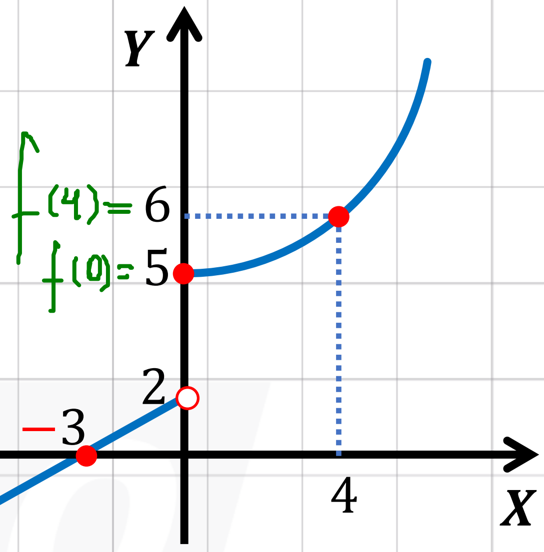
$\text{Ran } f = \langle c; d]$

Ejemplo:

Se muestra la gráfica de la función f.

Calcule el valor de $f(-3).f(5) + f(4).f(0)$

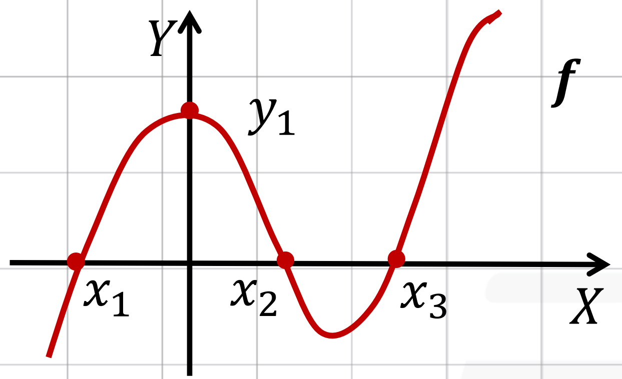
$f(-3) = 0$



Resolución

$f(-3).f(5) + f(4).f(0) = \underbrace{0(f(5))}_{0} + 6(5) = 30$

3)



Corte con el eje *Y*

$$\boxed{y_1 = f(0)}$$

Punto de intercepto con el eje ***Y***: $(0\,;\ y_1)$

Corte con el eje *X*

Se resuelve $\boxed{f(x) = 0}$

se obtiene $\text{CS} = \{x_1; x_2; x_3\}$

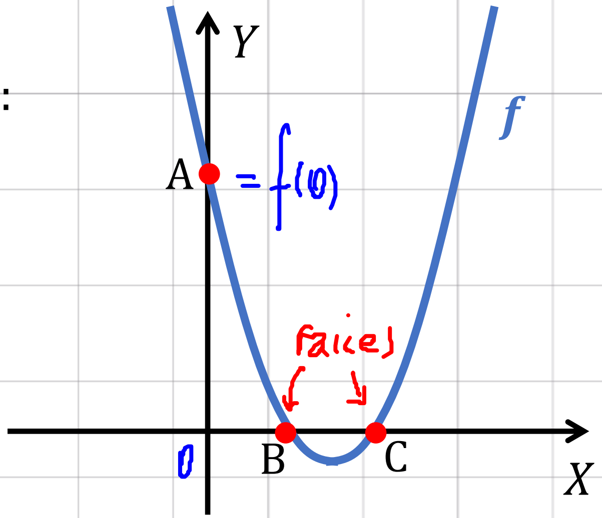
Puntos de intercepto con el eje ***X*** :

$$(x_1; 0)\ ,\quad (x_2; 0)\ ,\quad (x_3; 0)$$

Ejemplo:

La gráfica de la función:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$



Encuentre las coordenadas donde la gráfica corta a los ejes.

Resolución:

- Para A: $x = 0 \rightarrow f(0) = 8 \Rightarrow A = (0;8)$
- Para B y C:

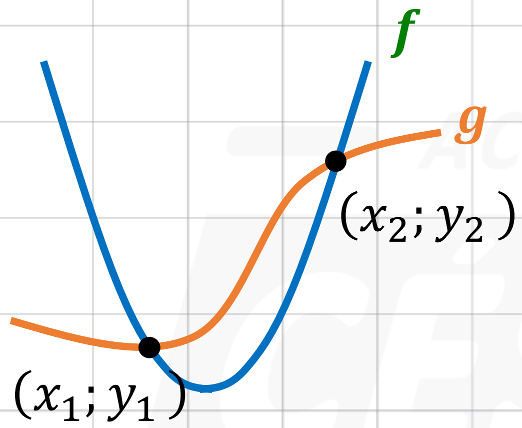
$$f(x) = x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$\begin{array}{ll} x & -4 \\ x & -2 \end{array}$$

$x_1 = 4 \vee x_2 = 2$

$\Rightarrow$ $(4; \underset{}{\overset{0}{f(4)}}) = C$

$(2; \underset{0}{f(2)}) = B$

4) Puntos de intercepto de las gráficas de dos funciones

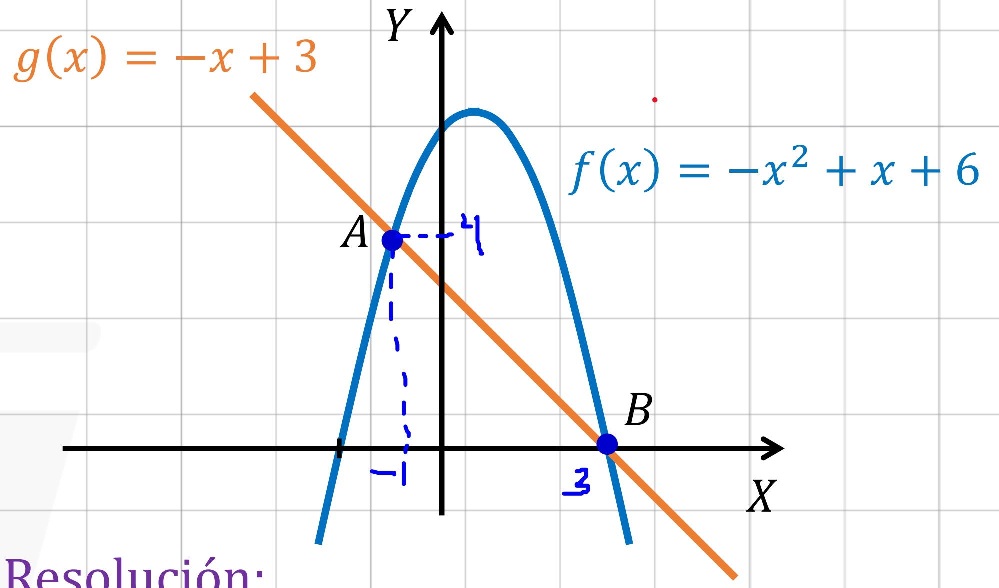


Para encontrar los puntos de intersección de dos gráficas, se deben igualar las reglas de correspondencias.

$$\boxed{f_{(x)} = g_{(x)}}$$

Ejemplo:

Halle los puntos de intersección (puntos A y B) entre las gráficas de f y g.



Resolución:

✓ Para A y B : $g_{(x)} = f_{(x)}$

$-x + 3 = -x^2 + x + 6$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x \quad -3$
$x \quad 1$

$x = 3 \vee x = -1$

$f(3) = 0 \qquad f(-1) = 4$

$\therefore A = (-1; 4) \; ; \; B = (3; 0)$

GRÁFICA DE FUNCIONES ESPECIALES

1.- Función constante

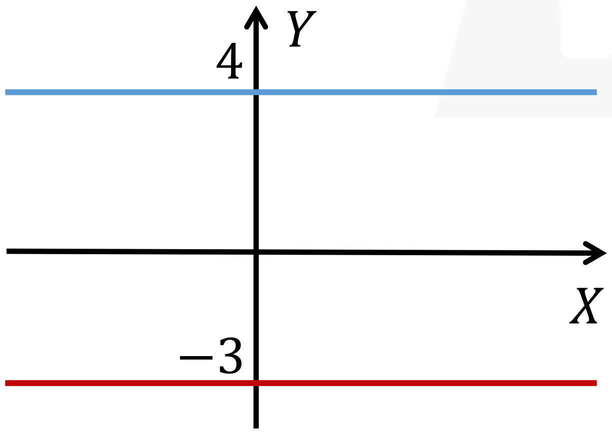
Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = k \quad ; \ k \in \mathbb{R}}$$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\text{Rang } f = \{k\}$

Ejemplos

Grafique: $f_{(x)} = 4$, $g_{(x)} = -3$

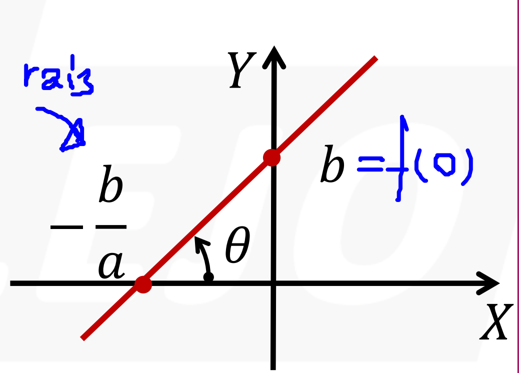
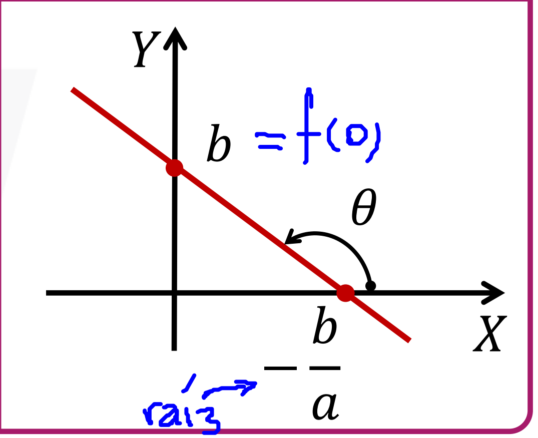


2.- Función lineal

Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = ax + b} \ ; a \neq 0$$

- $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\text{Rang } f = \mathbb{R}$

$a > 0$	$a < 0$
	

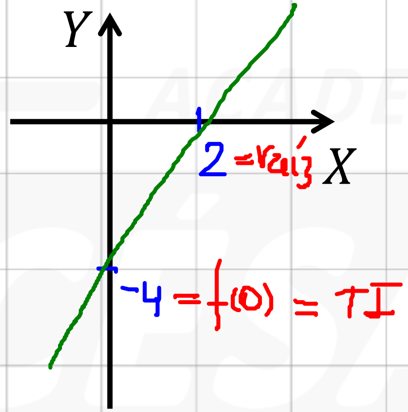
Donde :

- Raíz : $-\dfrac{b}{a}$
- $a = \tan\theta$

Ejemplos:

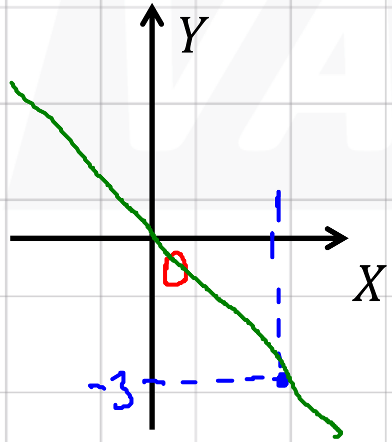
- Grafique $f_{(x)} = 2x - 4$

x	y
0	-4
2	0



- Grafique $g_{(x)} = -3x$

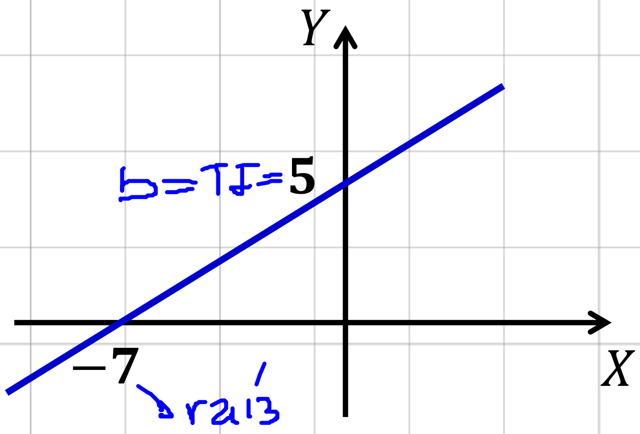
x	y
0	0
1	-3



- La gráfica de la función lineal

$$f(x) = \boldsymbol{a}x + b$$

es



Calcule ab

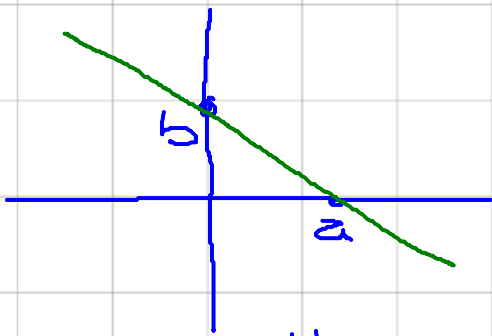
Resolución:

$f(x) = ax + 5$

$\rightarrow f(-7) = -7a + 5 = 0$

$a = 5/7$

$\therefore ab = \left(\frac{5}{7}\right)(5) = 25/7$



Ec. Simétrica

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

3.- Función cuadrática

Regla de correspondencia:

$$\boxed{f_{(x)} = ax^2 + bx + c \;\; ; \; a \neq 0}$$

- $\mathrm{Dom}f = \mathbb{R}$ (si no es dato)
- $\mathrm{Ran}f \subset \mathbb{R}$
- Su gráfica es una parábola vertical.

Completando cuadrados

$$\boxed{f_{(x)} = a(x-h)^2 + k}$$

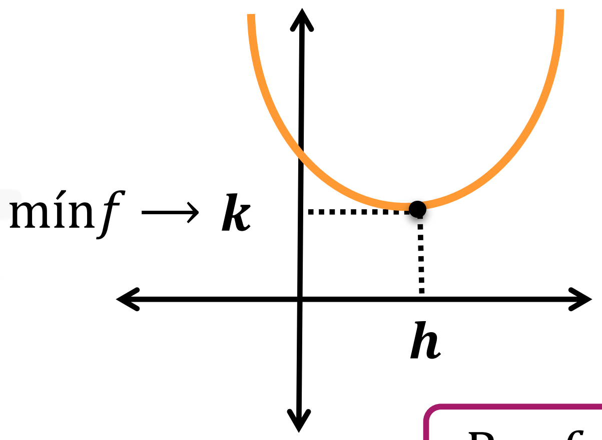
vértice: $\quad \mathrm{V} = (h;k)$

$$h = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad k = f_{(h)}$$

donde x_1 y x_2 son raíces de $f_{(x)}$

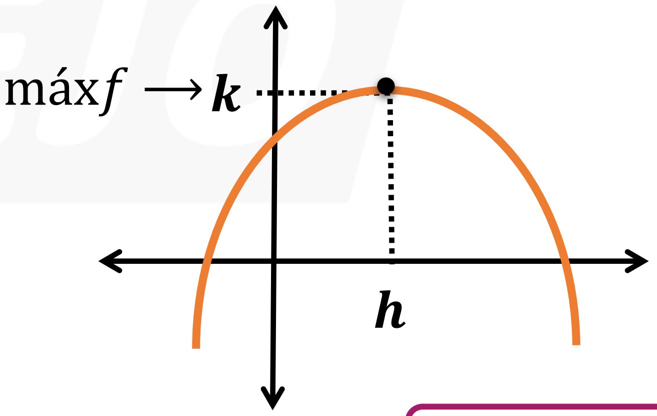
Grafiquemos considerando dos casos:

I) $a > 0$ Parábola cóncava hacia arriba



$$\boxed{\mathrm{Ran}f = [\,k\,; +\infty\rangle}$$

II) $a < 0$ Parábola cóncava hacia abajo



$$\boxed{\mathrm{Ran}f = \langle -\infty; k\,]}$$

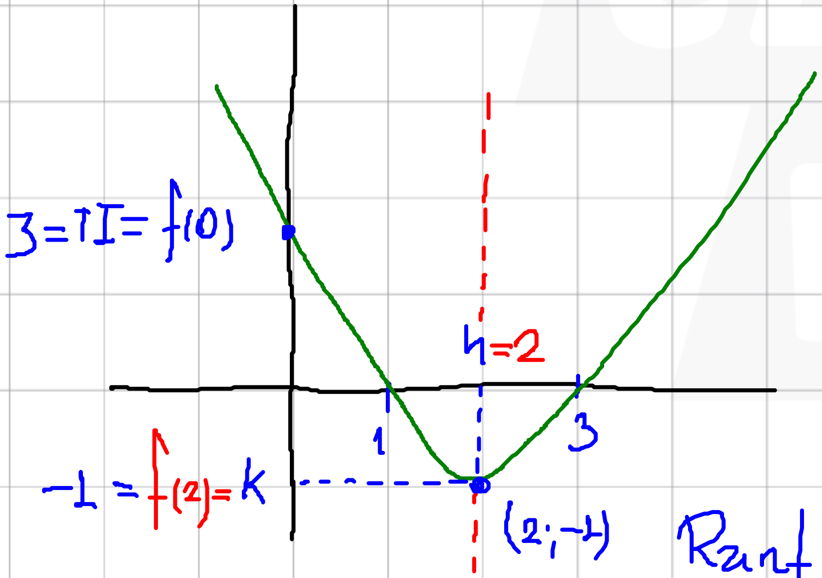
Ejemplo

- Grafique $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Resolución:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$$

raíces: $3;\ 1$



$$h = -\frac{(-4)}{2(1)} = 2$$

$$\operatorname{Ran} f = [-1; +\infty\rangle$$

- Hallemos el rango de la siguiente función

$$f(x) = -2x^2 + 12x + 14$$

Resolución:

Notamos: $a = -2 < 0 \rightarrow$

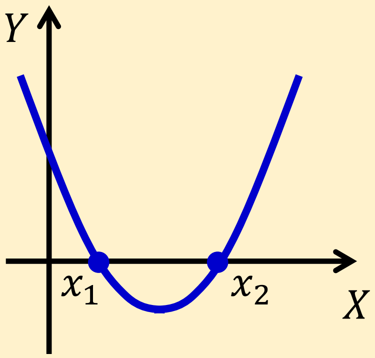
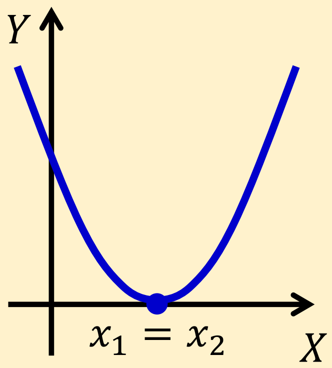
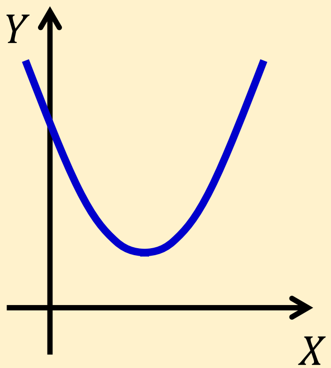
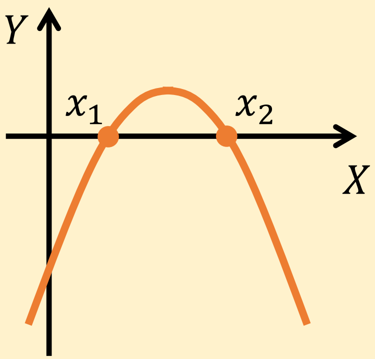
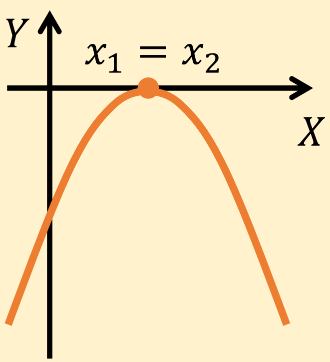
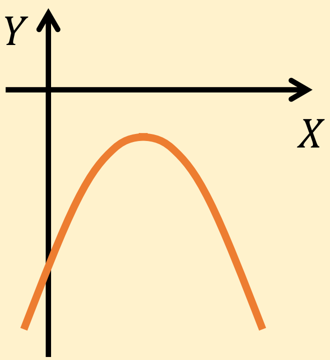
$\Rightarrow \operatorname{Ran} f = \langle -\infty; k]$

- $h = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{12}{2(-2)} = 3$

- $k = f(h) = f(3) = 32.$

$\therefore \operatorname{Ran} f = \langle -\infty; 32]$

Propiedades : Sea $f(x) = ax^2 + bx + c \quad ; a \neq 0$

<table>
<tr><th></th><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><th></th><th>Raíces reales y diferentes</th><th>Raíces reales e iguales</th><th>Raíces no reales</th></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS