academiacesarvallejo.edu.pe

Ciclo

INTENSIVO UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

TRIGONOMETRÍA

Tema:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS II

SENO DEL ÁNGULO DOBLE

Sabemos:

$$sen(\alpha+\theta) = sen\alpha cos\theta + cos\alpha sen\theta$$

Hacemos: $\alpha = \theta$

$$sen(\theta+\theta) = sen\theta cos\theta + cos\theta sen\theta$$

$$\boldsymbol{sen(2\theta) = 2sen\theta cos\theta}$$

CONSECUENCIAS

- ❑ $\boldsymbol{(sen\theta + cos\theta)^2 = 1 + sen(2\theta)}$
- ❑ $\boldsymbol{(sen\theta - cos\theta)^2 = 1 - sen(2\theta)}$

Ejemplo

Calcular el valor de $\cos\left(\frac{45°}{2}\right)$

Resolución

Consideremos la siguiente fórmula: $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta$

Reemplacemos a $\theta = \frac{45°}{2}$

$$2\cos^2\left(\frac{45°}{2}\right) = 1 + \cos(45°)$$

$$2\cos^2\left(\frac{45°}{2}\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2\cos^2\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \rightarrow \cos\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULO DOBLE

Digamos que queremos determinar el $\cos\left(\frac{45°}{2}\right)$.

Observamos que el doble de $\frac{45°}{2}$ es el ángulo notable de 45°.

La idea para resolver el problema es determinar una fórmula que nos permita relacionar el ángulo de $\frac{45°}{2}$ con el doble de ese ángulo.

Veamos

Tenemos que

$$cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Hacemos: $x = \theta$ y también que $y = \theta$

$$cos(\theta+\theta) = \cos\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta$$

Entonces tenemos:

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

COSENO DEL ÁNGULO DOBLE

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

Considerando las identidad pitagórica:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$cos(2\theta) = cos^2\theta - (1 - cos^2\theta)$$

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = 2cos^2\theta - 1}$$

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = 2(1 - sen^2\theta) - 1}$$

$$\boldsymbol{cos(2\theta) = 1 - 2sen^2\theta}$$

FÓRMULAS DE DEGRADACIÓN

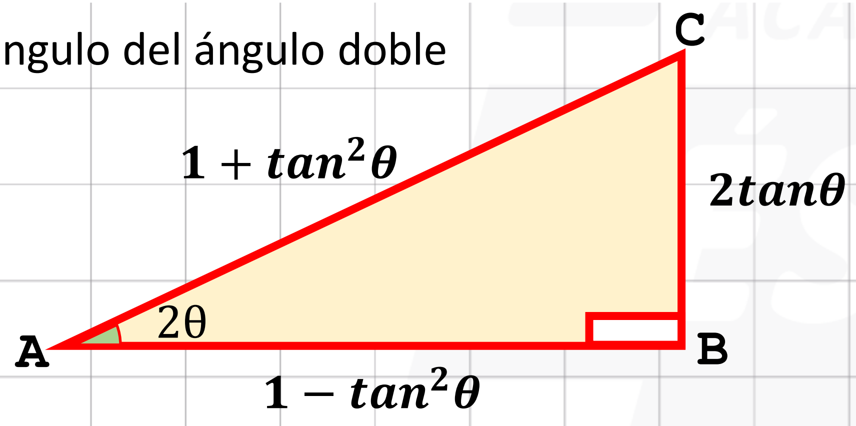
$$\boldsymbol{2sen^2\theta = 1 - cos2\theta}$$

$$\boldsymbol{2cos^2\theta = 1 + cos2\theta}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO DOBLE

$$tan2\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

Triángulo del ángulo doble



IDENTIDADES AUXILIARES

$cot\theta + tan\theta = 2csc2\theta$	$cot\theta - tan\theta = 2cot2\theta$
$cot\dfrac{\theta}{2} = \csc\theta + \cot\theta$	$\tan\dfrac{\theta}{2} = \csc\theta - \cot\theta$

SENO Y COSENO DE ÁNGULO TRIPLE

$$\mathbf{sen(3\theta) = 3\,sen\,\theta - 4\,sen^3\,\theta}$$

$$\mathbf{cos(3\theta) = 4\,cos^3\,\theta - 3\,cos\,\theta}$$

FÓRMULA DE DEGRADACIÓN

$$4\,sen^3\,\theta = 3\,sen\,\theta - sen\,3\theta$$

$$4\,cos^3\,\theta = 3\cos\theta + \cos 3\theta$$

IDENTIDADES AUXILIARES

- ❑ $\mathbf{sen\,3x = sen\,x\,(2\cos 2x + 1)}$
- ❑ $\mathbf{sen\,3x = 4\,sen\,x\,sen(60° - x)\,sen(60° + x)}$
- ❑ $\mathbf{\cos 3x = \cos x\,(2\cos 2x - 1)}$
- ❑ $\mathbf{\cos 3x = 4\cos x\cos(60° - x)\cos(60° + x)}$

UNI 2009-I

Simplificando la siguiente expresión

$$K = \text{sen}^2 3A \csc^2 A + \cos^2 3A \sec^2 A + 2\cos 4A$$

A) $6\cos^2 2A$ B) $6\cos 2A$ C) $6\text{sen}^2 A$

D) $12\text{sen } A$ E) $12\cos^2 2A$

Resolución

En la expresión

$$K = \left(\frac{\text{sen } 3A}{\text{sen } A}\right)^2 + \left(\frac{\cos 3A}{\cos A}\right)^2 + 2\cos 4A$$

$$K = \underbrace{(2\cos 2A + 1)^2 + (2\cos 2A - 1)^2}_{2\left(4\cos^2 2A + 1\right)} + 2\cos 4A$$

$$K = 8\cos^2 2A + 2 + 2\cos 4A$$

$$K = 8\cos^2 2A + 2(1 + \cos 4A)$$

$$K = 8\cos^2 2A + 4\cos^2 2A = \mathbf{12\cos^2 2A}$$

TANGENTE DEL ÁNGULO TRIPLE

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

IDENTIDADES AUXILIARES

- $\tan 3x = \tan x \left(\frac{2\cos 2x + 1}{2\cos 2x - 1}\right)$
- $\tan 3x = \tan x \tan(60° - x)\tan(60° + x)$

DE SUMA O DIFERENCIA A PRODUCTO

$$sen\alpha + sen\theta = 2sen\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$sen\alpha - sen\theta = 2cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$cos\alpha + cos\theta = 2cos\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

$$cos\alpha - cos\theta = -2sen\left(\frac{\alpha+\theta}{2}\right)sen\left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$$

Aplicación 1 Simplificar la siguiente expresión:

$$F = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen}\frac{3x}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Resolución

$$F = \frac{\mathbf{2\,sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{x}{2}\right) + \mathbf{2\,sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\mathbf{cos}\left(\frac{3x}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$F = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$F = \frac{4\,\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cos x}{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$\therefore \boldsymbol{F = 4\cos x}$$

DE PRODUCTO A SUMA O DIFERENCIA

$$2sen\alpha cos\theta = sen(\alpha+\theta) + sen(\alpha-\theta)$$

$$2cos\alpha cos\theta = cos(\alpha+\theta) + cos(\alpha-\theta)$$

$$2sen\alpha sen\theta = cos(\alpha-\theta) - cos(\alpha+\theta)$$

Propiedades adicionales:

Si $A+B+C=180°$ se establece

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) + 1$$

Aplicación 2 Calcule

$$F = 2\cos 40° - 4\operatorname{sen} 50°\cos 80°$$

A) -1 B) $\frac{-1}{2}$ C) 0 D) $\frac{1}{2}$ E) 0

Resolución

$$F = 2\cos 40° - 2\,(\mathbf{2\,sen\,50°\,cos\,80°})$$

$$F = 2\cos 40° - 2(\operatorname{sen} 130° + \underbrace{\operatorname{sen}(-30°)}_{-\operatorname{sen} 30°})$$

Si $x+y=90° \rightarrow \operatorname{sen} x = \cos y$

Si $x+y=180° \rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y$

$$F = \underbrace{2\cos 40°}_{\mathbf{sen\,50°}} - \underbrace{2\operatorname{sen} 130°}_{\mathbf{sen\,50°}} + 2\operatorname{sen} 30°$$

$$F = 2\operatorname{sen} 30°$$

$$\therefore \boldsymbol{F = 1}$$

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe