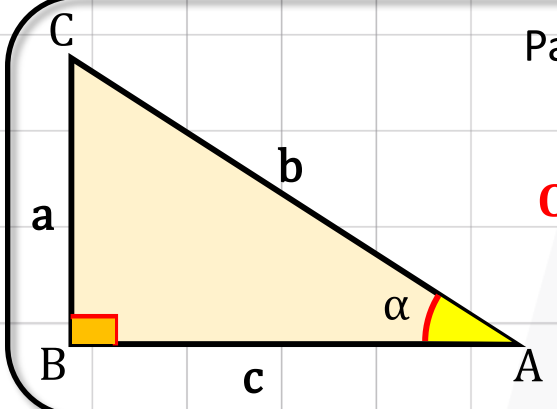
TRIGONOMETRÍA

Tema:

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Triángulo rectángulo



Para el ángulo α

Cateto Opuesto $= a$

Cateto Adyacente $= c$

Hipotenusa $= b$

Teorema de Pitágoras

$$b^2 = c^2 + a^2$$

Se define

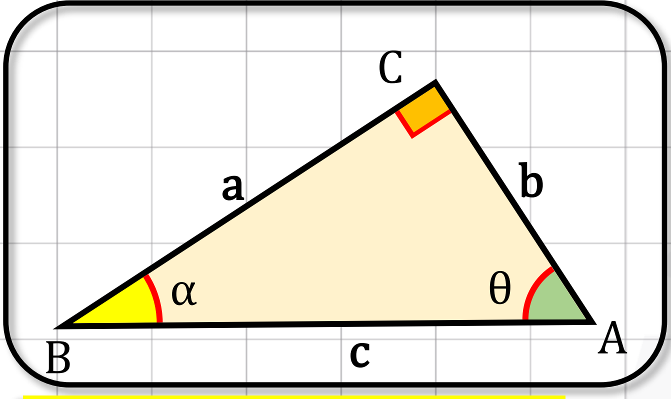
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{C.O}{H} = \frac{a}{b} \qquad \csc\alpha = \frac{H}{C.O} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{C.A}{H} = \frac{c}{b} \qquad \sec\alpha = \frac{H}{C.A} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{C.O}{C.A} = \frac{a}{c} \qquad \cot\alpha = \frac{C.A}{C.O} = \frac{c}{a}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$
$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$



Propiedad de ángulos complementarios

si , $\alpha + \theta = 90^{o}$ entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{sen\theta} &= \mathbf{cos\alpha}\\ \mathbf{tan\theta} &= \mathbf{cot\alpha}\\ \mathbf{sec\theta} &= \mathbf{csc\alpha}\end{aligned}$$

Propiedad de las razones recíprocas

Para ángulos agudos **X** e **Y**

$$\begin{aligned}\mathbf{sen\,X\cdot csc\,Y} &= \mathbf{1}\\ \mathbf{cos\,X\cdot sec\,Y} &= \mathbf{1}\\ \mathbf{tan\,X\cdot cot\,Y} &= \mathbf{1}\end{aligned} \Rightarrow X = Y$$

Aplicación UNI

Si $3x-2y$; $x+y$ son ángulos agudos

$$\operatorname{sen}(3x-2y)\cdot\sec(x+y)=1$$

Calcule

$$R=\frac{\tan(3x+2y)}{\cot(x-3y)}+\operatorname{sen}(2x-y)\sec 2x$$

Resolución

En el dato:

$$\operatorname{sen}(3x-2y)\cdot\underbrace{\sec(x+y)}_{\csc(90^\circ-x-y)}=1$$

Por complementarios

Por propiedad de recíprocas

$$3x-2y=90^\circ-x-y$$

$$4x-y=90^\circ\begin{cases}(3x+2y)+(x-3y)=90^\circ\ldots\text{(I)}\\ \text{O también}\\ (2x-y)+2x=90^\circ\ldots\text{(II)}\end{cases}$$

De (I)

$$\tan(3x+2y)=\cot(x-3y)$$

De (II)

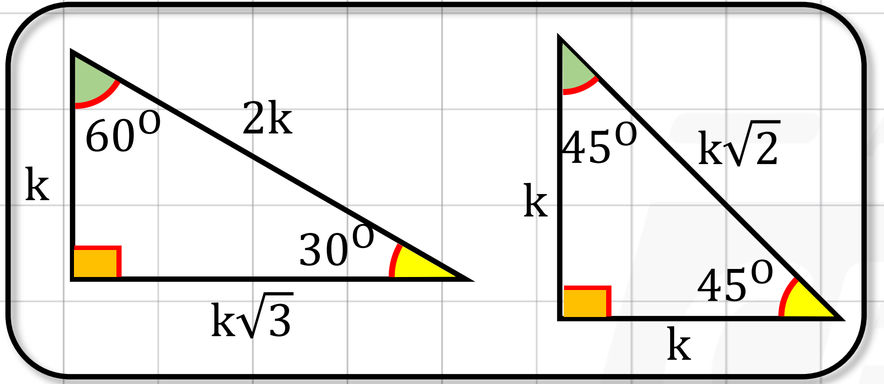
$$\operatorname{sen}(2x-y)=\cos(2x)$$

Luego:

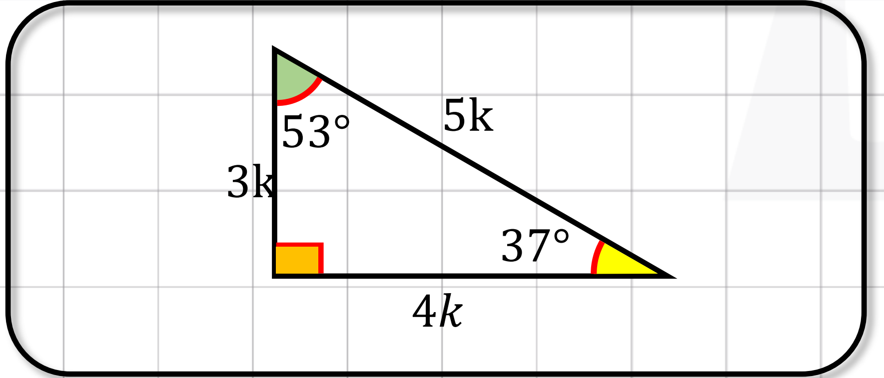
$$R=1+\underbrace{\cos(2x)\cdot\sec(2x)}_{1}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{R=2}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NOTABLES

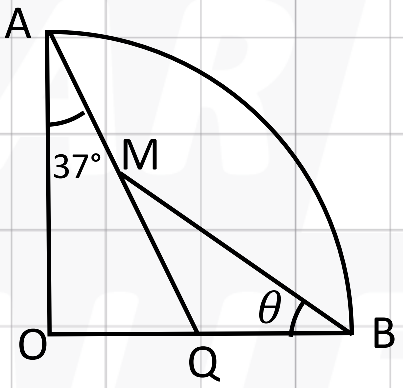


Triángulo aproximado



Aplicación UNI

En la figura mostrada AOB es un sector circular, $m\measuredangle AOB = 90°$ y $MQ = 2(AM)$. Calcule el valor aproximado de $\tan\theta$

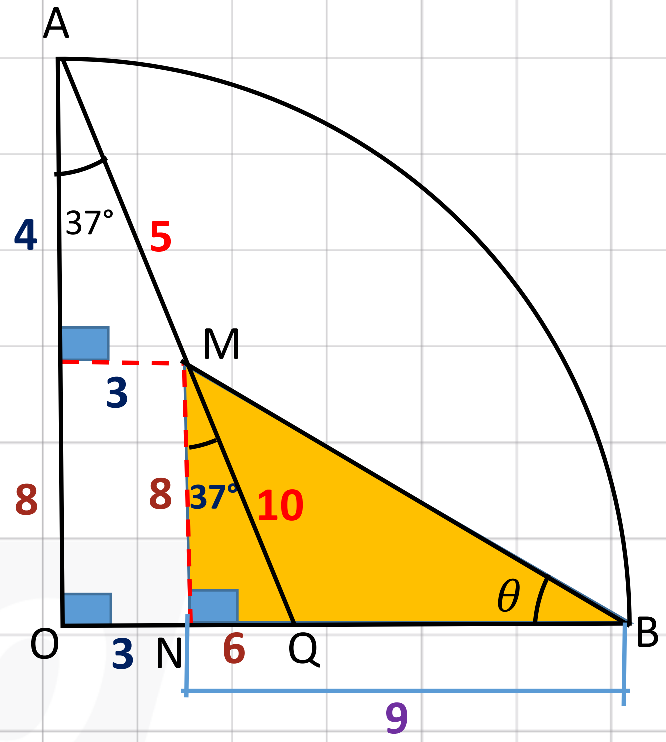


Resolución

Trazamos perpendiculares desde M

Del dato; consideramos: $AM = 5$

Entonces: $MQ = 10$



El radio del cuadrante AOB es: 12

En el triángulo rectángulo MNB

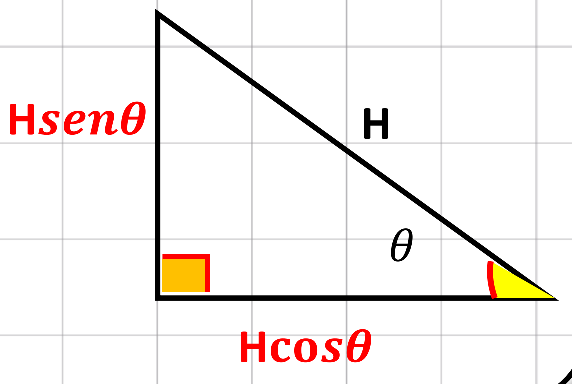
$$\therefore \tan\theta = \frac{8}{9}$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

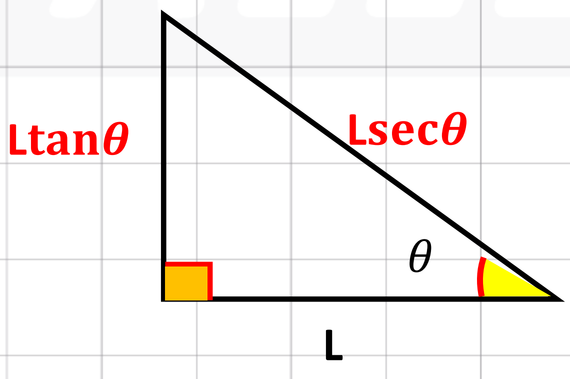
En general, resolver un triángulo es encontrar la medida de todos sus elementos, es decir, sus tres lados y sus tres ángulos.

De aquí, un triángulo queda solo determinado si tres de sus seis elementos son conocidos, tal como se muestran en los siguientes gráficos.

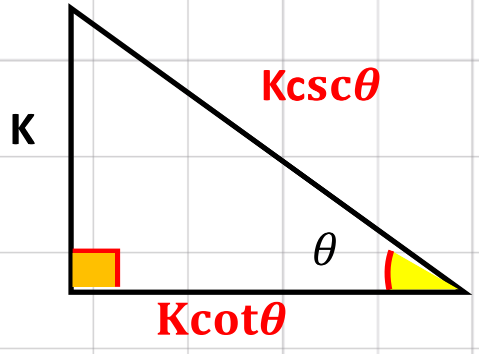
CASO I:
HIPOTENUSA
ÁNGULO AGUDO θ



CASO II:
CATETO ADYACENTE
ÁNGULO AGUDO θ



CASO III:
CATETO OPUESTO
ÁNGULO AGUDO θ



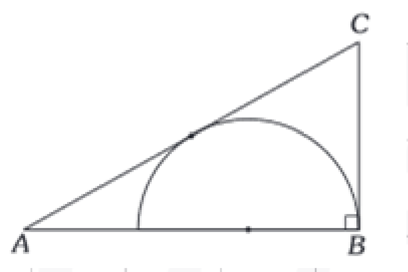
NOTA:

Para determinar los lados del triángulo rectángulo, de forma práctica, realizamos el cociente de la siguiente forma:

$$\frac{\text{LADO QUE QUIERO CALCULAR}}{\text{LADO QUE TENGO}} = \text{R.T.}(\text{ÁNGULO})$$

UNI 2009 II

En el triángulo ABC (recto en B) con $BC = h$ y $m\measuredangle CAB = \theta$, se tiene inscrita una semicircunferencia según se muestra en la figura. Exprese el radio de la circunferencia en función de h y θ



A) $\frac{h\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$ B) $\frac{h}{\operatorname{sen}\theta}$ C) $\frac{h}{\cos\theta}$

D) $\frac{h\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}$ E) $\frac{h\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}$

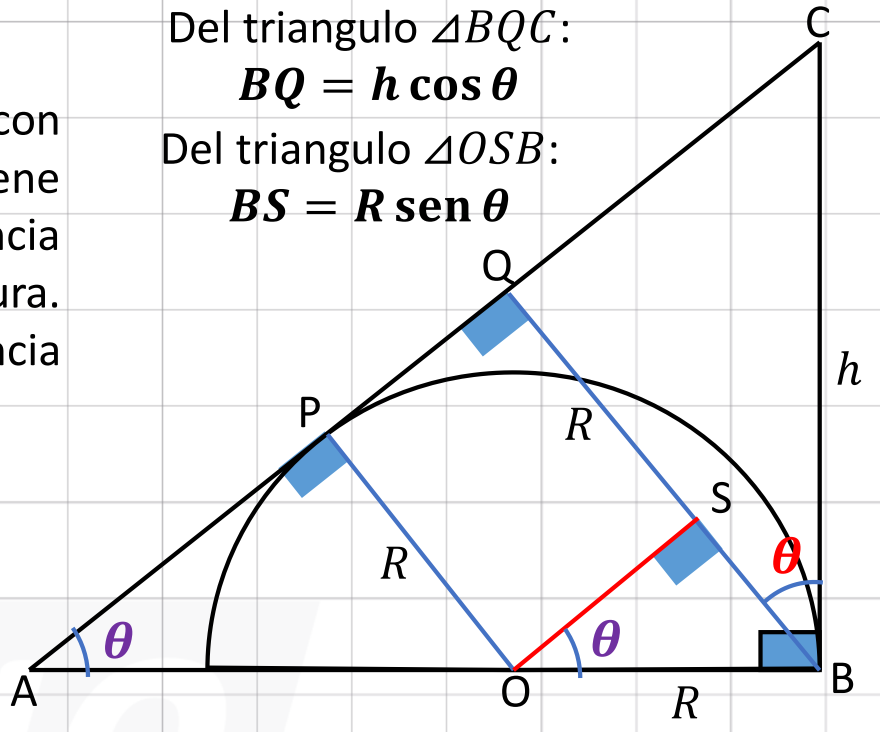
Piden: R en términos de h y θ

Del triangulo $\triangle BQC$:

$$\boldsymbol{BQ = h\cos\theta}$$

Del triangulo $\triangle OSB$:

$$\boldsymbol{BS = R\,\mathrm{sen}\,\theta}$$



Del gráfico, $\boldsymbol{BQ = BS + QS}$

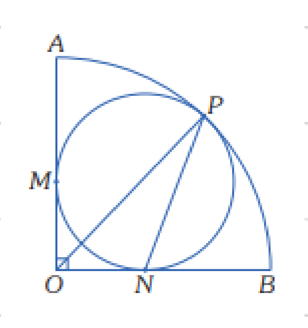
$$\boldsymbol{h\cos\theta = R\,\mathrm{sen}\,\theta + R}$$

$$\therefore \boldsymbol{R = \frac{h\cos\theta}{1+\mathrm{sen}\,\theta}}$$

Clave: A

UNI 2016 I

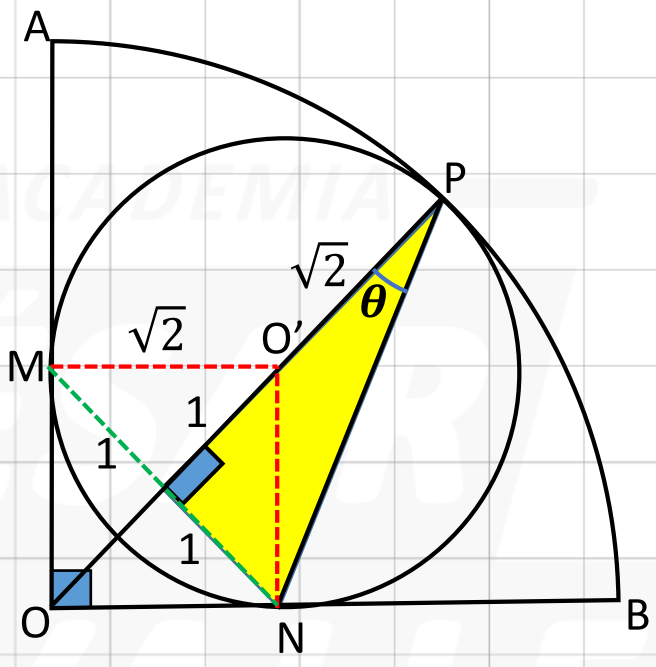
En la figura mostrada, M, N y P son puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el sector circular AOB. Si $m\measuredangle OPN = \theta\text{rad}$, entonces el valor de cot θ es:



A) $\sqrt{2}-1$
B) $2\sqrt{2}-1$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+1$
E) $\sqrt{2}+2$

Resolución

Piden: $\cot\theta$



O': centro de la circunferencia

O'MON: es un cuadrado

Consideramos radio de la circunferencia igual a: $\sqrt{2}$

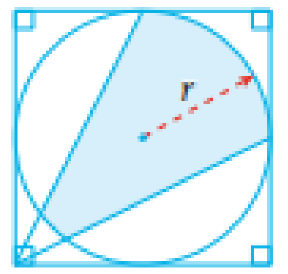
En el triángulo, rectángulo sombreado:

$\therefore \boldsymbol{\cot\theta = \sqrt{2}+1}$

Clave: D

Reto UNI

En la figura mostrada **r** mide 3cm. Determine el valor aproximado del área sombreada en cm^2



A) 15,52
B) 16,35
C) 17,40
D) 18,53
E) 19,23

UNI 2019 II

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe