PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

Programación Lineal Particular (PLP)

Problema de Transporte

Dr. Ing. Adolfo E. Onaine

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL Mar del Plata

LA IMPORTANCIA DE LA PLP

- Problemas de Transporte, Transbordo y Asignación son aplicaciones especiales de la programación lineal.

- Pueden resolverse a través del método Simplex, sin embargo, su estructura especial permite resolverlos rápida y eficientemente mediante algoritmos especiales.

PROBLEMA DE TRANSPORTE

Su objetivo es minimizar el costo total de envío de un producto (o productos) desde los centros de suministro a los centros de demanda bajo las siguientes restricciones:

- cada centro de demanda recibe su requerimiento;
- los envíos desde un centro de suministro no exceden su capacidad disponible.

MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

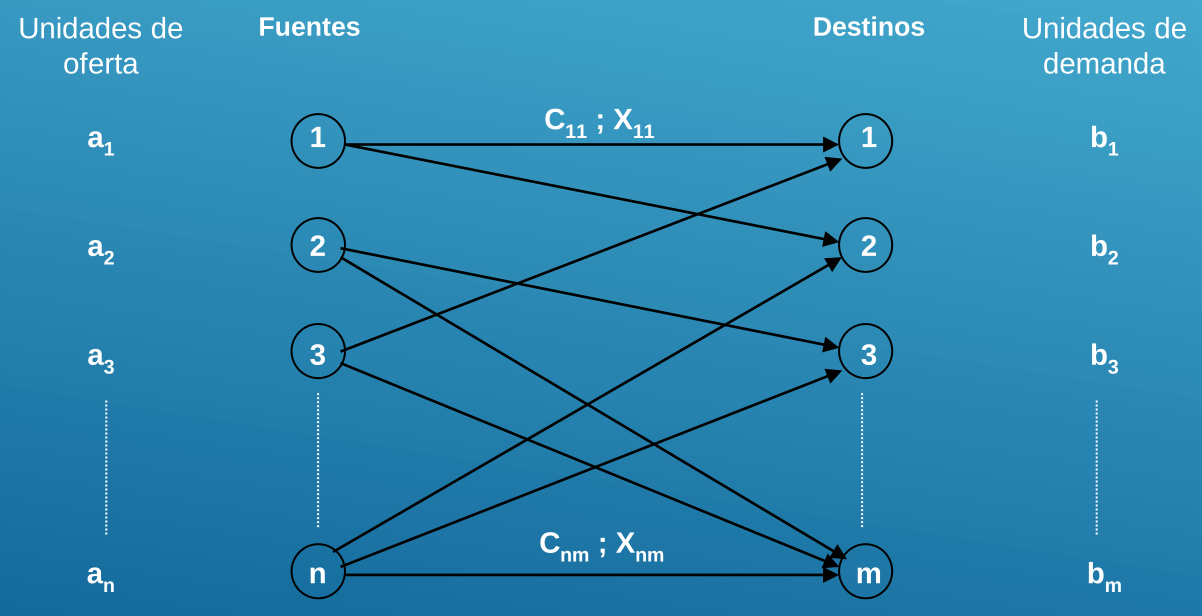
X_{ij} cantidad de unidades a enviar desde el origen i al destino j $\Rightarrow$ Cantidad a transportar

C_{ij} costo de enviar una unidad desde el origen i al destino j $\Rightarrow$ Costo unitario de transporte[1]

a_i cantidad de unidades de oferta del origen i $\Rightarrow$ Nivel de oferta

b_j cantidad de unidades de demanda del destino j $\Rightarrow$ Cantidad demandada

Se puede representar el modelo mediante una red cuyos nodos indicarán las fuentes y destinos, y los arcos las rutas de transporte.



1 El modelo supone que el costo del transporte es directamente proporcional al número de unidades transportadas.

Función Objetivo: *minimizar* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$ $\forall\, i=1, \ldots, n \text{ y } j=1, \ldots, m$

Sujeto a:

la suma de los envíos no puede ser mayor que la oferta $\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \leq a_i$

la suma de los envíos debe satisfacer la demanda $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$

condición de no negatividad $Xij \geq 0$

Puede observarse que el modelo tiene (n+m) restricciones, además de las condiciones de no negatividad, esto llevado a los problemas reales implica un número elevado de restricciones. Por este motivo, se prefieren utilizar algoritmos específicos que han sido desarrollados para lograr mayor rapidez y eficiencia de cálculo en lugar del método Simplex.

El modelo presentado, implica que la oferta total deba ser superior a la demanda total, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_j$$

Cuando la oferta total es igual a la demanda total se dice que se está ante un modelo de transporte equilibrado, es decir:

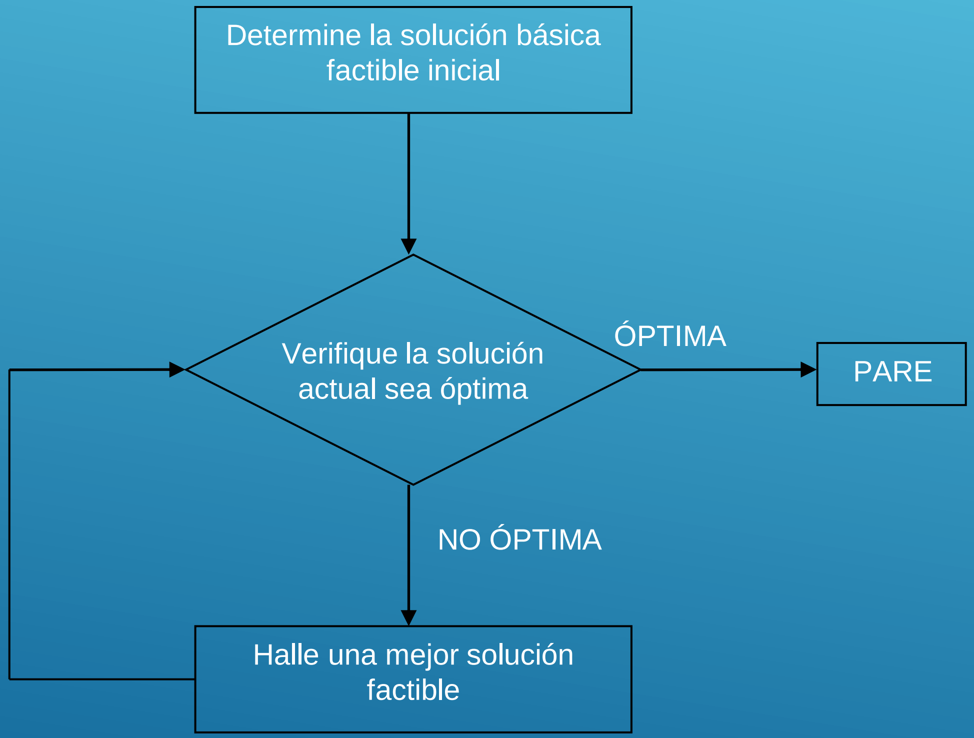
$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$$

En la vida real se pueden presentar variantes adicionales al problema de transporte que pueden resolverse realizando ligeras modificaciones al modelo. Estos casos especiales son:

1. La oferta total no es igual a la demanda total.
2. El objetivo es de maximización.
3. El problema se degenera.
4. Existen rutas inaceptables de transporte.

¿Cómo trabajaremos con los modelos especiales?

El siguiente diagrama de flujo esquematiza la metodología a utilizar:



FASE I: Hallar una solución inicial

Los métodos más conocidos:

- Costo mínimo (MM),
- Regla del Noroeste (NWC) o
- Ballas-Hammer o Método de aproximación de Vogel (VAM)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI

Si la solución es óptima terminar sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.

CASOS ESPECIALES EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Oferta total ≠ Demanda total

se soluciona incorporando un origen o un destino ficticio.

Si la oferta total es mayor que la demanda total, se introduce un *destino ficticio* con una demanda exactamente igual al exceso de oferta sobre la demanda. El o los orígenes que, en la solución óptima, abastecerían a ese destino ficticio quedarían con stock.

Del mismo modo, si la demanda total es mayor que la oferta total, se introduce un *origen ficticio* con una oferta exactamente igual al exceso de demanda sobre la oferta. En este caso el o los destinos que debieran ser abastecidos por ese origen ficticio, en la solución óptima, quedarían con una demanda insatisfecha.

En cualquiera de los casos mencionados se pueden asignar coeficientes de costos:

- cero a cada una de las rutas de transporte desde el origen ficticio o hacia el destino ficticio. Esto es así, porque no existe transferencia real hacia o desde un nodo ficticio;
- máximo a cada una de las rutas de transporte desde el origen ficticio o hacia el destino ficticio. Esto posibilita obtener la solución óptima con Costo mínimo o Voguel.

CASOS ESPECIALES EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Objetivo es de maximización
se realiza una transformación en la tabla de ingresos o beneficios a una de costos.

Se toma el mayor valor de la tabla (Cij máx) y se arma una nueva haciendo la resta de ese valor con el correspondiente en la celda a calcular (Cij) obteniendo el valor en la nueva tabla (C´ij).
Una vez encontrada la solución óptima no olvidarse calcular el valor de dicha solución con los valores originales de la tabla (antes de la transformación).

$$C'_{ij} = C_{ij}\,máx - C_{ij}$$

CASOS ESPECIALES EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Rutas inaceptables de transporte

se asignan costos altos para evitar su selección.

Si existiesen rutas inaceptables de transporte, se le asignan a los arcos no factibles un costo extremadamente alto, M, con objeto de mantenerlos fuera de la solución.

En los problemas de maximización ese costo se toma infinitamente pequeño, -M.

CASOS ESPECIALES EN EL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Degeneración

se bloquea el proceso para encontrar una solución.

Para salvar la **degeneración** se:

- descompensan las filas y columnas (no la oferta y la demanda) con un valor **ε** que al encontrar la solución óptima le asignaremos valor cero; o
- asignan un 0 (cero) en una ruta no utilizada de la tabla.

PROBLEMA DE TRANSPORTE

Ejemplo:

Una empresa que fabrica y vende autopartes desea optimizar su sistema de distribución. La firma cuenta con tres centros de distribución (CD), y tres locales de venta mayorista (LV). En la siguiente tabla se presentan los costos de transporte (en pesos por miles de unidades), las disponibilidades de los centros de distribución y las demandas de los puntos de venta (ambas en miles de unidades mensuales).

MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

Si plateamos el problema por programación lineal general tendríamos:

- Variables: X_{ij} cantidad en miles de unidades a transportar del CD_i al LV_j
- Coeficientes:

  C_{ij} costo de transportar mil de unidades del CD_i al LV_j
  a_i cantidad de miles de unidades de oferta del CD_i
  b_j cantidad de miles de unidades de demanda del LV_j

- **Función Objetivo**:

  Minimizar
  $Z=600.X_{11}+500.X_{12}+400.X_{13}+400.X_{21}+300.X_{22}+500.X_{23}+500.X_{31}+300.X_{32}+200.X_{33}$

  sujeto a:

  Restricciones de Oferta

  $X_{11}+X_{12}+X_{13}\leq 30$
  $X_{21}+X_{22}+X_{23}\leq 30$
  $X_{31}+X_{32}+X_{33}\leq 20$

  Restricciones de Demanda

  $X_{11}+X_{21}+X_{31}=20$
  $X_{12}+X_{22}+X_{32}=20$
  $X_{13}+X_{23}+X_{33}=30$

  Restricciones de contorno

  $X_{11}; X_{12}; X_{13}; X_{21}; X_{22}; X_{23}; X_{31}; X_{32}; X_{33} \geq 0$

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE POR MATRICES

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	Oferta
CD1	600	500	400	30
CD2	400	300	500	30
CD3	500	300	200	20
Demanda	20	20	30	80 / 70

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

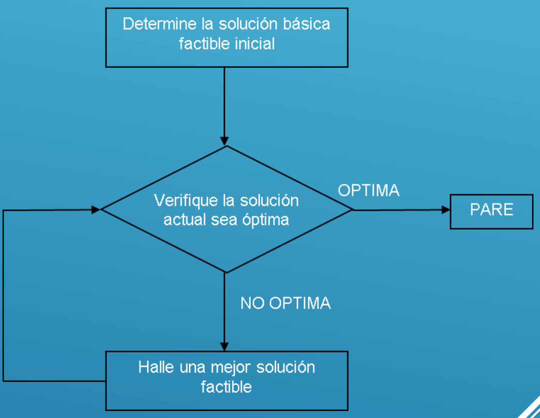
Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.



FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Método del Costo mínimo

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600 **10**	500	400 **10**	600 **10**	~~10~~ 0 ~~20~~ ~~30~~
CD2	400 **10**	300 **20**	500	600	0 ~~10~~ ~~30~~
CD3	500	300	200 **20**	600	0 ~~20~~
Demanda	~~20~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	80 \ 80

FASE II: Verificar si la solución básica factible inicial por el método de Costo mínimo es óptima.

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 / 10	500 / 0	400 / 10	600 / 10	30	0
CD2	400 / 10	300 / 20	200 / +	400 / +	30	-200
CD3	400 / +	300 / 0	200 / 20	400 / +	20	-200
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80	
v_j	600	500	400	600		

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

Tabla de Costos Directos

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

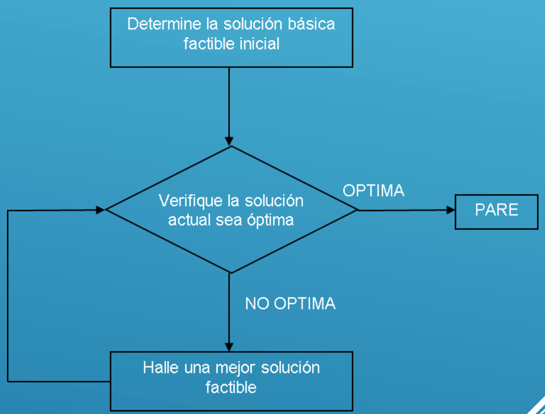
Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.



Plan de transporte

- Transportar 10 mil unidades del CD1 al LV1 a un costo de $ 6.000 mensuales
- Transportar 10 mil unidades del CD1 al LV3 a un costo de $ 4.000 mensuales
- Transportar 10 mil unidades del CD2 al LV1 a un costo de $ 4.000 mensuales
- Transportar 20 mil unidades del CD2 al LV2 a un costo de $ 4.000 mensuales
- Transportar 20 mil unidades del CD3 al LV3 a un costo de $ 6.000 mensuales

El costo del transporte mensual asciende a $ 24.000.- quedando un remanente de stock de 10 mil unidades en el CD1

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

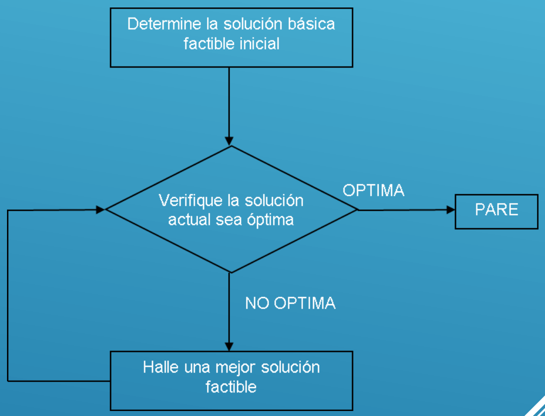
Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Método del Noroeste

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600 20	500 10	400	600	0 ~~10~~ ~~30~~
CD2	400	300 10	500 20	600	0 ~~20~~ ~~30~~
CD3	500	300	200 10	600 10	0 ~~10~~ ~~20~~
Demanda	~~20~~ 0	~~20~~ ~~10~~ 0	~~30~~ ~~10~~ 0	~~10~~ 0	80 \ 80



Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

¿Cómo salvar una degeneración?

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Método del Noroeste

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600 20	500 10+ε	400	600	0 ~~10+ε~~ ~~30+ε~~
CD2	400	300 10-ε	500 20+2ε	600	0 ~~20+2ε~~ ~~30+ε~~
CD3	500	300	200 10-2ε	600 10+3ε	0 ~~10+3ε~~ ~~20+ε~~
Demanda	~~20~~ 0	~~20~~ 0 ~~10-ε~~	~~30~~ 0 ~~10-2ε~~	~~10+3ε~~ 0	80+3ε\80+3ε

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20	500 10+ε	700 -300	1100 -500	30+ε	0
CD2	400 0	300 10-ε	500 20+2ε	900 -300	30+ε	-200
CD3	100 +	0 +	200 10-2ε	600 10+3ε	20+ε	-500
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	500	700	1100		

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20	500 10+ε	700 -300	1100 -500	30+ε	0
CD2	400 0	300 10-ε	500 20+2ε	900 -300	30+ε	-200
CD3	100 +	0 +	200 10-2ε	600 10+3ε	20+ε	-500
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	500	700	1100		

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20	0 +	200 +	600 10+ε	30+ε	0
CD2	900 -500	300 20	500 10+ε	900 -300	30+ε	300
CD3	600 -100	0 +	200 20-ε	600 2ε	20+ε	0
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	0	200	600		

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20	0 +	200 +	600 10+ε	30+ε	0
CD2	900 -500	300 20	500 10+ε	900 -300	30+ε	300
CD3	600 -100	0 +	200 20-ε	600 2ε	20+ε	0
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	0	200	600		

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I: Hallar una solución básica factible inicial

Costo mínimo (MM),

Regla del Noroeste (NWC)

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

FASE II: Aplicar Test de optimalidad

Paso 1: Aplicar el método MODI → Si la **solución es óptima terminar** sino ir al Paso 2.

Paso 2: Aplicar el método del Cruce del Arroyo y volver al Paso 1.

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20-2ε	500 0	700 -300	600 10+3ε	30+ε	0
CD2	400 2ε	300 20	500 10-ε	400 +	30+ε	-200
CD3	100 +	0 +	200 20+ε	100 +	20+ε	-500
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	500	700	600		

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 20-2ε	500 0	700 -300	600 10+3ε	30+ε	0
CD2	400 2ε	300 20	500 10-ε	400 +	30+ε	-200
CD3	100 +	0 +	200 20+ε	100 +	20+ε	-500
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	500	700	600		

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

Costos Directos = $u_i + v_j$ → N° celdas ocupadas = n+m-1

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta	u_i
CD1	600 10-ε	500 0	400 10-ε	600 10+3ε	30+ε	0
CD2	400 10+ε	300 20	200 +	400 +	30+ε	-200
CD3	400 +	300 0	200 20+ε	400 +	20+ε	-200
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε\80+3ε	
v_j	600	500	400	600		

Costos Directos – Costos Indirectos ≥ 0

ESTAMOS FRENTE A LA SOLUCIÓN ÓPTIMA con 2 soluciones alternativas

CD\LV	LV1	LV2	LV3	LVf	Oferta
CD1	600 **10**		400 **10**	600 **10**	30
CD2	400 **10**	300 **20**			30
CD3			200 **20**		20
Demanda	20	20	30	10	80\80

Plan de transporte

- Transportar 10 mil unidades del CD1 al LV1 a un costo de $ 6.000 mensuales
- Transportar 10 mil unidades del CD1 al LV3 a un costo de $ 4.000 mensuales
- Transportar 10 mil unidades del CD2 al LV1 a un costo de $ 4.000 mensuales
- Transportar 20 mil unidades del CD2 al LV2 a un costo de $ 6.000 mensuales
- Transportar 20 mil unidades del CD3 al LV3 a un costo de $ 4.000 mensuales

El costo del transporte mensual asciende a $ 24.000.- quedando un remanente de stock de 10 mil unidades en el CD1

Objective
- Maximize
- Minimize (selected)

Starting method: Minimum Cost Method

Optimal solution value = $24000	LV 1	LV 2	LV 3	Dummy
CD 1	10		10	10
CD 2	10	20		
CD 3			20	

Objective
- Maximize
- Minimize (selected)

Starting method: Minimum Cost Method

From	To	Shipment	Cost per unit	Shipment cost
CD 1	LV 1	10	600	6000
CD 1	LV 3	10	400	4000
CD 1	Dummy	10	0	0
CD 2	LV 1	10	400	4000
CD 2	LV 2	20	300	6000
CD 3	LV 3	20	200	4000