MODELO DE TRANSPORTE

El problema del transporte es una aplicación especial de la programación lineal. Su objetivo es minimizar el costo total de envío de un producto (o productos) desde los centros de suministro a los centros de demanda bajo las siguientes restricciones:

1. cada centro de demanda recibe su requerimiento;
2. los envíos desde un centro de suministro no exceden su capacidad disponible.

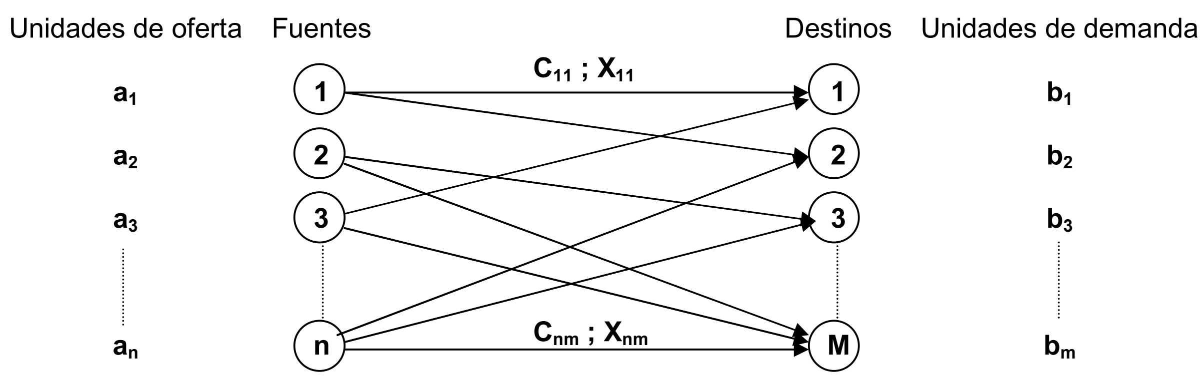
El modelo de transporte es, básicamente, un programa lineal que puede resolverse a través del método Simplex, sin embargo, su estructura especial permite resolverlo rápida y eficientemente mediante algoritmos especiales.

Modelo matemático del problema del transporte

Si se define como:

X_{ij} cantidad de unidades a enviar desde el origen i al destino j ⇒ Cantidad a transportar
C_{ij} costo de enviar una unidad desde el origen i al destino j ⇒ Costo unitario de transporte[1]
a_i cantidad de unidades de oferta del origen i ⇒ Nivel de oferta
b_j cantidad de unidades de demanda del destino j ⇒ Cantidad demandada

Se puede representar el modelo mediante una red cuyos nodos indicarán las fuentes y destinos, y los arcos las rutas de transporte.



[1] El modelo supone que el costo del transporte es directamente proporcional al número de unidades transportadas.

Función Objetivo: *minimizar* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij} \quad \forall\, i=1, ..., n \text{ y } j=1, ...,m$

Sujeto a:

$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} \le a_i$ la suma de los envíos no puede ser mayor que la oferta.

$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j$ la suma de los envíos debe satisfacer la demanda.

$X_{ij} \ge 0$ *condición de no negatividad*

Puede observarse que el modelo tiene (n+m) restricciones, además de las condiciones de no negatividad, esto llevado a los problemas reales implica un número levado de restricciones. Por este motivo, se prefieran utilizar algoritmos específicos que han sido desarrollados para lograr mayor rapidez y eficiencia de cálculo en lugar del método Simplex.

El modelo presentado, implica que la oferta total deba ser superior a la demanda total, es decir: $\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{j=1}^{m} b_j$

Cuando la oferta total es igual a la demanda total se dice que se está ante un modelo de transporte equilibrado, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = b_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^{m} X_{ij} = a_i$$

En la vida real se pueden presentar variantes adicionales al problema de transporte que pueden resolverse realizando ligeras modificaciones al modelo. Estos casos especiales son:

1. La oferta total no es igual a la demanda total.
2. El problema se degenera.
3. El objetivo es de maximización.
4. Existen rutas inaceptables de transporte.

1. En el caso que la oferta total no es igual a la demanda total se soluciona incorporando un origen o un destino ficticio.

   Si la oferta total es mayor que la demanda total, se introduce un *destino ficticio* con una demanda exactamente igual al exceso de oferta sobre la demanda. El o los orígenes que, en la solución óptima, abastecerían a ese destino ficticio quedarían con stock.

   Del mismo modo, si la demanda total es mayor que la oferta total, se introduce un *origen ficticio* con una oferta exactamente igual al exceso de demanda sobre la oferta. En este caso el o los destinos que debieran ser abastecidos por ese origen ficticio, en la solución óptima, quedarían con una demanda insatisfecha.

En cualquiera de los casos mencionados se pueden asignar coeficientes de costos:

- cero a cada una de las rutas de transporte desde el origen ficticio o hacia el destino ficticio. Esto es así, porque no existe transferencia real hacia o desde un nodo ficticio;
- máximo a cada una de las rutas de transporte desde el origen ficticio o hacia el destino ficticio. Esto posibilita obtener la solución óptima con Costo mínimo o Voguel.

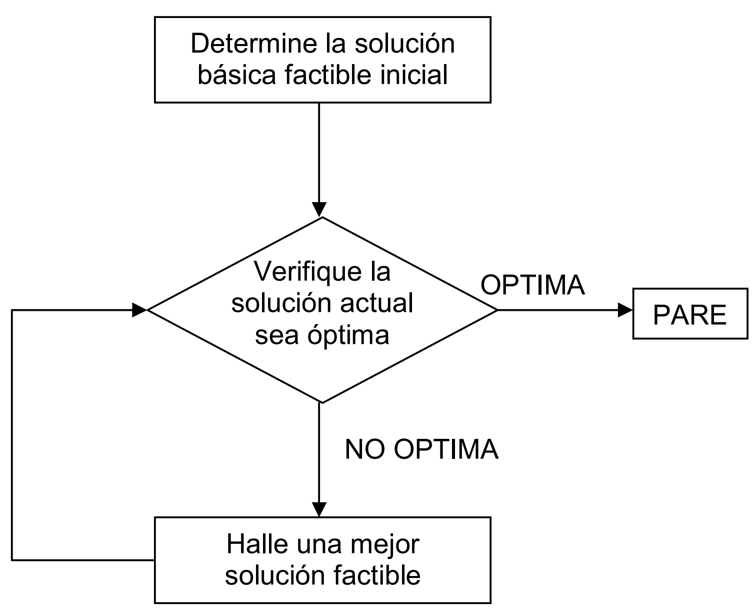
2. Salvamos la degeneración descompensando las filas y columnas (no la oferta y la demanda) con un valor ε que al encontrar la solución óptima le asignaremos valor cero.

3. Si el objetivo es de maximización, se realiza una transformación en la tabla de ingresos o beneficios a una de costos. Se toma el mayor valor de la tabla y se arma una nueva haciendo la resta de ese valor con el correspondiente en la celda a calcular. Una vez encontrada la solución óptima no olvidarse calcular el valor de dicha solución con los valores originales de la tabla (antes de la transformación).

4. Si existiesen rutas inaceptables de transporte, se le asignan a los arcos no factibles un costo extremadamente alto, M, con objeto de mantenerlos fuera de la solución. En los problemas de maximización ese costo se toma infinitamente pequeño, -M.

¿Cómo trabajaremos con los modelos especiales?

El siguiente diagrama de flujo esquematiza la metodología a utilizar:



Ejemplo:

Una empresa que fabrica y vende autopartes desea optimizar su sistema de distribución. La firma cuenta con tres centros de distribución (CD), y tres locales de venta mayorista (LV). En la siguiente tabla se presentan los costos de transporte (en pesos por miles de unidades), las disponibilidades de los centros de distribución y las demandas de los puntos de venta (ambas en miles de unidades mensuales).

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	Oferta
CD1	600	500	400	30
CD2	400	300	500	30
CD3	500	300	200	20
Demanda	20	20	30	70 \ 80

La oferta y la demanda no son iguales entonces debemos equilibrarlas

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

FASE I

Paso 1: Hallar una solución inicial por alguno de los métodos conocidos.

- **Método de la celda de Costo Mínimo (MM)**

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

- **Método de la celda del Noroeste (NWC)**

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

♦ **Método de aproximación de Voguel (VAM)**

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	Penalización de filas
CD1	600	500	400	600	30	
CD2	400	300	500	600	30	
CD3	500	300	200	600	20	
Demanda	20	20	30	10	80 / 80	
Penalización de columnas						

FASE II

Test de optimalidad (Métodos MODI y Cruce del Arroyo)

Paso 1: Verificar el número de celdas ocupadas. Si ese número es menor que n+m-1 el problema se degenerará.

en nuestro ejemplo: 3+4-1=6 por lo tanto no estamos en presencia, de una degeneración.

Si se verifica que los Costos Directos - Costos Indirectos ≥ 0 para todas las celdas no ocupadas se está ante la solución óptima. De lo contrario, identificar la celda a asignar unidades.

Tabla de costos directos

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta
CD1	600	500	400	600	30
CD2	400	300	500	600	30
CD3	500	300	200	600	20
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80

Tabla de costos indirectos con la solución por celda de costo mínimo

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	u_i
CD1					30	
CD2					30	
CD3					20	
Demanda	20	20	30	10	80 \ 80	
v_i						

Como los Costos Directos – Costos Indirectos $\geq 0 \Rightarrow$ se está en presencia de la solución óptima.

Tabla de costos indirectos con la solución por celda del noroeste

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	u_i
CD1					30	
CD2					30	
CD3					20	
Demanda	20	20	30	10	80 / 80	
v_i						

Como no se cumple que los Costos Directos – Costos Indirectos $\geq 0 \Rightarrow$ debemos optimizar la solución.

Paso 2: Aplicar el método del cruce del arroyo.

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	u_i
CD1					30	
CD2					30	
CD3					20	
Demanda	20	20	30	10	80 / 80	
v_i						

¿Cómo salvamos una degeneración?

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta
CD1	600	500	400	600	30+ε
CD2	400	300	500	600	30+ε
CD3	500	300	200	600	20+ε
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε / 80+3ε

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	u_i
CD1					30+ε	
CD2					30+ε	
CD3					20+ε	
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε / 80+3ε	
v_i						

CD \ LV	LV1	LV2	LV3	LVficticio	Oferta	u_i
CD1					30+ε	
CD2					30+ε	
CD3					20+ε	
Demanda	20	20	30	10+3ε	80+3ε / 80+3ε	
v_j						

Si hubiésemos plateado el problema por programación lineal general tendríamos:

Variables: X_{ij} cantidad en miles de unidades a transportar del CD_i al LV_j

Coeficientes: C_{ij} costo de transportar mil de unidades del CD_i al LV_j
a_i cantidad de miles de unidades de oferta del CD_i
b_j cantidad de miles de unidades de demanda del LV_j

Función Objetivo:

Minimizar $600.X_{11}+500.X_{12}+400.X_{13}+$
$400.X_{21}+300.X_{22}+500.X_{23}+$
$500.X_{31}+300.X_{32}+200.X_{33}$

sujeto a:

Restricciones de Oferta

$X_{11}+X_{12}+X_{13}\leq 30$

$X_{21}+X_{22}+X_{23}\leq 30$

$X_{31}+X_{32}+X_{33}\leq 20$

Restricciones de Demanda

$X_{11}+X_{21}+X_{31}=20$

$X_{12}+X_{22}+X_{32}=20$

$X_{13}+X_{23}+X_{33}=30$

Restricciones de contorno

$X_{11}; X_{12}; X_{13}; X_{21}; X_{22}; X_{23}; X_{31}; X_{32}; X_{33} \geq 0$

PROBLEMA DE ASIGNACIÓN

Los problemas de asignación presentan una estructura similar a los de transporte, pero con dos diferencias:

1. asocian igual número de orígenes con igual número de demandas y
2. las ofertas en cada origen es de valor uno, como lo es la demanda en cada destino.

El problema de asignación debe su nombre a la aplicación particular de asignar hombres a trabajos (o trabajos a máquinas), con la condición de que cada hombre puede ser asignado a un trabajo y que cada trabajo tendrá asignada una persona.

La condición necesaria y suficiente para que este tipo de problemas tenga solución, es que se encuentre balanceado, es decir, que los recursos totales sean iguales a las demandas totales.

El modelo de asignación tiene sus principales aplicaciones en: Trabajadores, Oficinas al personal, Vehículos a rutas, Máquinas, Vendedores a regiones, productos a fabricar, etc.

Modelo Matemático:

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{sujeto a :}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,\ j = 1 \cdots n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1 \cdots m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}$$

<u>Casos especiales del modelo de asignación</u>

- *Oferta y demanda desiguales.*
  Cuando la oferta y la demanda son desiguales, se asigna una actividad ficticia con un costo de cero para mantener la condición de método que deben ser igual número de ofertas y demandas.

- *Problemas de maximización.*
  Considere un problema de asignación en el que la respuesta a cada asignación es una utilidad en vez de un costo. Convierta la matriz de utilidades del problema en una nueva la cual consiste en que el número que aparece en cada celdilla representa un costo en lugar de un beneficio.

- Problemas con asignación inaceptable.
  Supóngase que se está resolviendo un problema de asignación y que se sabe que ciertas asignaciones son inaceptables. Para alcanzar esta meta, simplemente asigna un costo arbitrariamente grande representado mediante la letra M. M es un número tan grande que si se le resta un número finito cualquiera, queda todavía un valor mayor que los demás.