TSP - INV. OPERATIVA - Nº 9

Capítulo 6

Programación lineal: modelo de transporte

En este capítulo se presentan el modelo de transporte y sus variantes. En el sentido obvio, el modelo tiene que ver con la determinación de un plan de costo mínimo para transportar una mercancía desde varias fuentes (por ejemplo, fábricas) a varios destinos (por ejemplo, almacenes o bodegas). El modelo se puede extender de manera directa para abarcar situaciones prácticas de las áreas de control del inventario, programación del empleo y asignación de personal, entre otros.

El modelo de transporte es básicamente un programa lineal que se puede resolver a través del método símplex regular. Sin embargo, su estructura especial hace posible el desarrollo de un procedimiento de solución, conocido como técnica de transporte, que es más eficiente en términos de cálculo.

La técnica de transporte puede presentarse, y a menudo se hace, en forma elemental que parezca completamente separada del método símplex. No obstante, debemos destacar que la "nueva" técnica sigue esencialmente los pasos *exactos* del método símplex.

Inv. Operativa

6.1 DEFINICION Y APLICACION DEL MODELO DE TRANSPORTE

En esta sección presentamos la definición estándar del modelo de transporte. Después describimos variantes del modelo que extienden su campo de aplicación a una clase más vasta de problemas reales.

En sentido estricto, el modelo de transporte busca determinar un plan de transporte de una mercancía de varias fuentes a varios destinos. Entre los datos del modelo se cuentan

1. Nivel de oferta en cada fuente y la cantidad de la demanda en cada destino.
2. El costo de transporte *unitario* de la mercancía de cada fuente a cada destino.

Como sólo hay una mercancía, un destino puede recibir su demanda de una o más fuentes. El objetivo del modelo es el de determinar la cantidad que se enviará de cada fuente a cada destino, tal que se minimice el costo de transporte total.

La suposición básica del modelo es que el costo de transporte en una ruta es directamente proporcional al número de unidades transportadas. La definición de "unidad de transporte" variará dependiendo de la "mercancía" que se transporte. Por ejemplo, podemos hablar de una unidad de transporte como cada una de las vigas de acero que se necesitan para construir un puente. O bien, podemos utilizar el equivalente a la carga de un camión de la mercancía como unidad de transporte. En cualquier caso, las unidades de oferta y demanda deben ser consistentes con nuestra definición de "unidad de transporte".

La figura 6-1 representa el modelo de transporte como una red con m fuentes y n destinos. Una *fuente* o un *destino* está representado por un nodo. El arco que une una fuente y un destino representa la ruta por la cual se transporta la mercancía. La cantidad de la oferta en la fuente i es a_i y la demanda en el destino j es b_j. El costo de transporte *unitario* entre la fuente i y el destino j es c_{ij}.

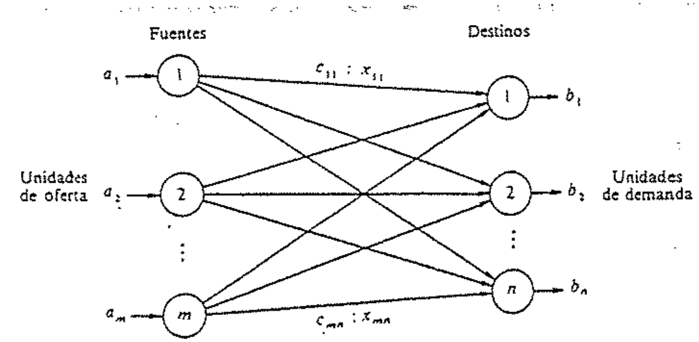

Figura 6-1

CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA U.N.M.D.P.

Si x_{ij} representa la cantidad transportada desde la fuente i al destino j, entonces, el modelo general de PL que representa el modelo de transporte es

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$

El primer conjunto de restricciones estipula que la suma de los envíos *desde* una fuente no puede ser mayor que su oferta; en forma análoga, el segundo conjunto requiere que la suma de los envíos *a* un destino satisfaga su demanda.

El modelo que acabamos de describir implica que la oferta total $\Sigma_{i=1}^{m} a_i$ debe ser cuando menos igual a la demanda total $\Sigma_{j=1}^{n} b_j$. Cuando la oferta total *es igual* a la demanda total ($\Sigma_{i=1}^{m} a_i = \Sigma_{j=1}^{n} b_j$), la formulación resultante recibe el nombre de **modelo de transporte equilibrado**. Este difiere del modelo sólo en el hecho de que todas las restricciones son ecuaciones, es decir

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

En el mundo real, no es necesariamente cierto que la oferta sea igual a la demanda o, a ese respecto, mayor que ella. Sin embargo, un modelo de transporte siempre puede equilibrarse. El equilibrio, además de su utilidad en la representación a través de modelos de ciertas situaciones prácticas, es importante para el desarrollo de un método de solución que explote completamente la estructura especial del modelo de transporte. Los dos ejemplos que siguen presentan la idea del equilibrio y también sus implicaciones prácticas.

Ejemplo 6.1-1 (Modelo de transporte estándar)

MG Auto Company tiene plantas en Los Angeles, Detroit y Nueva Orleans. Sus centros de distribución principales están ubicados en Denver y Miami. Las capacidades de las tres plantas durante el trimestre próximo son de 1 000, 1 500 y 1 200 automóviles. Las demandas trimestrales en los dos centros de distribución son de 2 300 y 1 400 vehículos. El costo del transporte de un automóvil por tren es aproximadamente de 8 centavos por milla. El diagrama de la distancia recorrida entre las plantas y los centros de distribución es el siguiente:

	Denver	Miami
Los Angeles	1 000	2 690
Detroit	1 250	1 350
Nueva Orleans	1 275	850

El diagrama de la distancia de recorrido puede traducirse en costo por automóvil a razón de 8 centavos por milla recorrida. Esto produce los costos siguientes (redondeados a números enteros), que representan a c_{ij} del modelo original:

	Denver (1)	Miami (2)
Los Angeles (1)	80	215
Detroit (2)	100	108
Nueva Orleans (3)	102	68

Mediante el uso de códigos numéricos para representar las plantas y centros de distribución, hacemos que x_{ij} represente el número de automóviles transportados de la fuente i al destino j. Como la oferta total (= 1 000 + 1 500 + 1 200 = 3 700) es igual a la demanda total (= 2 300 + 1 400 = 3 700), el modelo de transporte resultante está *equilibrado*. Por lo tanto, el siguiente modelo de PL que representa el problema tiene todas las restricciones de *igualdad*:

$$\text{minimizar } z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

sujeto a

$$\begin{array}{llllllll}
x_{11} & + x_{12} & & & & & = 1\,000 \\
& & + x_{21} & + x_{22} & & & = 1\,500 \\
& & & & + x_{31} & + x_{32} & = 1\,200 \\
x_{11} & & + x_{21} & & + x_{31} & & = 2\,300 \\
& + x_{12} & & + x_{22} & & + x_{32} & = 1\,400
\end{array}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$

Un método más resumido para representar el modelo de transporte consiste en utilizar lo que se llama **tabla de transporte**. Esta es una forma de matriz donde sus renglones representan las fuentes y sus columnas el destino. Los elementos de costo c_{ij} se resumen en la esquina noreste de la celda de la matriz (i, j). Por lo tanto, el modelo de MG se puede resumir como se ilustra en la tabla 6-1.

Veremos en la sección que sigue que la tabla de transporte es la base para estudiar el método especial basado en el modelo símplex para resolver el problema de transporte.

Tabla 6-1

		Destinos: Denver (1)	Destinos: Miami (2)	Oferta
Fuentes	Los Angeles (1)	80 / x_{11}	215 / x_{12}	1 000
	Detroit (2)	100 / x_{21}	108 / x_{22}	1 500
	Nueva Orleans (3)	102 / x_{31}	68 / x_{32}	1 200
	Demanda	2 300	1 400	

Ejercicio 6.1-1

Supóngase que se desea no enviar ningún automóvil de la planta de Detroit al centro de distribución de Denver. ¿Cómo se puede incorporar esta condición en el modelo de MG?
[*Resp.* Asigne un costo de transporte unitario muy elevado, M, a la ruta de Detroit a Denver; compare el método de penalización de la sección 3.3.1.]

Sucede que el modelo de MG tuvo la misma oferta y demanda. El ejemplo 6.1-2 demuestra cómo se puede balancear siempre un modelo de transporte. Téngase en mente que la razón principal para desear equilibrar el problema de transporte (es decir, convertir todas las restricciones a ecuaciones) es que permite el desarrollo de un procedimiento de cálculo eficiente basado en la representación que se ilustra en la tabla 6-1.

Ejemplo 6.1-2 (Modelo de transporte con equilibrio)

En el ejemplo 6.1-1, supóngase que la capacidad de la planta de Detroit es de 1 300 automóviles (en vez de 1 500). Se dice que la situación está desequilibrada (o sin equilibrio) debido a que la oferta total (= 3 500) no es igual a la demanda total (= 3 700). Dicho de otra manera, esta situación desequilibrada significa que no será posible cubrir *toda* la demanda en los centros de distribución. Nuestro objetivo consiste en volver a formular el modelo de transporte de manera que distribuya la cantidad faltante (= 3 700 − 3 500 = 200 vehículos) en forma óptima entre los centros de distribución.

Como la demanda es mayor que la oferta, se puede agregar una fuente (planta) ficticia con una capacidad de 200 automóviles. Se permite que la planta ficticia, en condiciones normales, envíe su "producción" a todos los centros de distribución. Físicamente, la cantidad de unidades enviadas a un destino desde una planta ficticia representará la cantidad faltante en ese destino.

La única información que falta para completar el modelo son los costos de "transporte" unitarios de la planta ficticia a los destinos. Como la planta no existe, no habrá ningún envío físico y el costo de transporte unitario correspondiente es cero. Sin embargo, podemos enfocar la situación desde otro ángulo diciendo que se incurre en un costo de penalización por cada unidad de demanda insatisfecha en los centros de distribución. En este caso los costos de transporte unitarios serán iguales a los costos de penalización unitarios en los diversos destinos.

Tabla 6-2

	Denver	Miami	
Los Angeles	80	215	1 000
Detroit	100	108	1 300
Nueva Orleans	102	68	1 200
Planta ficticia	0	0	200
	2 300	1 400	

En la tabla 6-2 se presenta un resumen del modelo equilibrado con la nueva restricción de capacidad de la planta de Detroit. La planta ficticia (que se muestra en una región sombreada) tiene una capacidad de 200 automóviles.

De manera análoga, si la oferta es mayor que la demanda, podemos agregar un destino ficticio que absorberá la diferencia. Por ejemplo, supóngase en el ejemplo 6.1-1 que la demanda en Denver disminuye a 1 900 vehículos. La tabla 6-3 resume el modelo con el centro de distribución ficticio. Cualquier automóvil enviado de una planta a un centro de distribución ficticio representa una cantidad *excedente* en la planta.

Tabla 6-3

	Denver	Miami	Centro de distribución ficticio	
Los Angeles	80	215	0	1 000
Detroit	100	108	0	1 500
Nueva Orleans	102	68	0	1 200
	1 900	1 400	400	

IMPRESIONES CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

El costo de transporte unitario asociado es cero. Sin embargo, podemos cobrar un costo *de almacenamiento* por guardar el automóvil en la planta, y en este caso el costo de transporte unitario será igual al costo de almacenamiento unitario.

Ejercicio 6.1-2

(a) ¿Será necesario agregar una fuente ficticia y un destino ficticio para producir un modelo de transporte equilibrado?
[*Resp.* No.]

(b) Supóngase en la tabla 6-2 que los costos de penalización por cada automóvil no recibido en Denver y Miami son $200 y $260. Cambie el modelo de modo que incluya esta información.
[*Resp.* El costo de transporte unitario del renglón ficticio debe ser 200 y 260 en vez de 0.]

(c) Interprete la solución de la tabla 6-2 si el número de automóviles "enviados" de la planta ficticia a Denver y Miami son 150 y 50, respectivamente.
[*Resp.* Ordenes faltantes a Denver y Miami de 150 y 50 automóviles.]

(d) Supóngase en la tabla 6-3 que la planta de Detroit debe enviar *toda* su producción de 1 500 vehículos. ¿Cómo podemos implantar esta restricción?
[*Resp.* Asigne un costo muy elevado M a la ruta del centro de distribución ficticio de Detroit.]

(e) En cada uno de los casos siguientes, indique si se debe agregar una fuente o destino ficticios para equilibrar el modelo.
(1) $a_1 = 10,\ a_2 = 5,\ a_3 = 4,\ a_4 = 6$
$b_1 = 10,\ b_2 = 5,\ b_3 = 7,\ b_4 = 9$
[*Resp.* Agregue una fuente ficticia con una capacidad de 6 unidades.]
(2) $a_1 = 30,\ a_2 = 44$
$b_1 = 25,\ b_2 = 30,\ b_3 = 10$
[*Resp.* Sume un destino ficticio con demanda de 9 unidades.]

La aplicación del modelo de transporte no se limita al problema del "transporte" de mercancías entre la procedencia geográfica y destinos. Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso del modelo de transporte en otros campos no relacionados. La siguiente sección presenta el modelo de asignación que trata sobre la asignación de trabajo a máquinas o personal.

Ejemplo 6.1-3 (Modelo de inventario de producción)

Una compañía construye una planta maestra para la producción de un artículo en un periodo de cuatro meses. Las demandas en los cuatro meses son 100, 200, 180 y 300 unidades, respectivamente. Una demanda para el mes en curso puede satisfacerse a través de:

1. Producción excesiva en un mes anterior almacenada para su consumo posterior.
2. Producción en el mes actual.
3. Producción excesiva en un mes posterior para cubrir pedidos de meses anteriores.

El costo de producción variable por unidad en un mes cualquiera es de $4.00. Una unidad producida para consumo posterior incurrirá en un costo de almacenamiento a razón de $0.50 por unidad por mes. Por otra parte, los artículos ordenados en meses anteriores incurren en un costo de penalización de $2.00 por unidad por mes.

La capacidad de producción para elaborar el producto varía cada mes. Los cálculos de los cuatro meses siguientes son 50, 180, 280 y 270 unidades, respectivamente.

El objetivo es el de formular el plan de inventario de producción a costo mínimo.

Este problema se puede formular como un modelo de "transporte". La equivalencia entre los elementos de los sistemas de producción y transporte se establece de la manera siguiente:

Sistema de transporte	Sistema de producción
1. Fuente i	1. Periodo de producción i
2. Destino j	2. Periodo de demanda j
3. Oferta en la fuente i	3. Capacidad de producción del periodo i
4. Demanda en el destino j	4. Demanda del periodo j
5. Costo de transporte de la fuente i al destino j	5. Costo de producción e inventario del periodo i al j

En la tabla 6-4 se presenta un resumen del problema como un modelo de transporte. El costo de "transporte" unitario del periodo i al j es

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{costo de producción en } i, & i = j \\ \text{costo de producción en } i + \text{costo de almacenamiento de } i \text{ a } j, & i < j \\ \text{costo de producción en } i + \text{costo de penalización de } i \text{ a } j, & i > j \end{cases}$$

La definición de c_{ij} indica que la producción en el periodo i para el mismo periodo ($i = j$) sólo iguala el costo unitario de producción. Si el periodo i se produce para periodos futuros j ($i < j$), se incurre en un costo de almacenamiento adicional. De la misma manera, la producción en i para cubrir j pedidos hechos con anterioridad ($i > j$) incurre en un costo de penalización adicional. Por ejemplo,

Tabla 6-4

	Periodo 1	2	3	4	Capacidad
Periodo 1	4.	4.5	5.	5.5	50
2	6.	4.	4.5	5.	180
3	8.	6.	4.	4.5	280
4	10	8.	6.	4.	270
Demanda	100	200	180	300	

$$c_{11} = \$4$$
$$c_{24} = 4 + (.5 + .5) = \$5$$
$$c_{41} = 4 + (2 + 2 + 2) = \$10$$

Ejercicio 6.1-3

En la tabla 6-4, supóngase que los costos de almacenamiento por unidad cambian con los periodos y están dados por \$0.4, \$0.3 y \$0.7 para los periodos 1, 2 y 3. Los costos de penalización se mantienen sin variación. Vuelva a calcular c_{ij} de la tabla 6-4.
[*Resp.* c_{ij} por renglón son (4, 4.4, 4.7, 5.4), (6, 4, 4.3, 5.0), (8, 6, 4, 4.7) y (10, 8, 6, 4).]

La solución óptima del modelo (lograda con TORA) se muestra en la figura 6-2. Se ve que se deben satisfacer 50 unidades de la demanda para el periodo 1, con una producción de pedidos pendientes en el periodo 2. Mientras tanto, 70 unidades de la demanda para el periodo 2 se satisfacen con una producción de un pedido por surtir en el periodo 3. Esta solución puede parecer económicamente inaceptable, ya que el periodo 2 proporciona una producción de un pedido pendiente para el periodo 1 y recibe, simultáneamente, una producción de un pedido por surtir del periodo 3. El argumento se puede refutar si se observa que en el periodo 2 no tenemos más que la opción de proporcionar al periodo 1 con 50 unidades del pedido pendiente porque la capacidad de producción del periodo 1 (= 50 unidades) no es suficiente para cubrir su propia demanda (= 100 unidades).

Ejemplo 6.1-4 (Problema del proveedor de banquetes)

Se contrata a un proveedor para suministrar servilletas limpias durante N días sucesivos. La demanda para el día i es de d_i servilletas. Existen tres fuentes a partir de las cuales se puede satisfacer la demanda diaria:

1. Comprar servilletas nuevas al precio de a unidades monetarias (u.m.) cada una.
2. Enviar las servilletas sucias a un servicio de lavado rápido (las servilletas enviadas al final del día i se recuperan al principio del día $i + 1$) a un costo de b u.m. cada una.

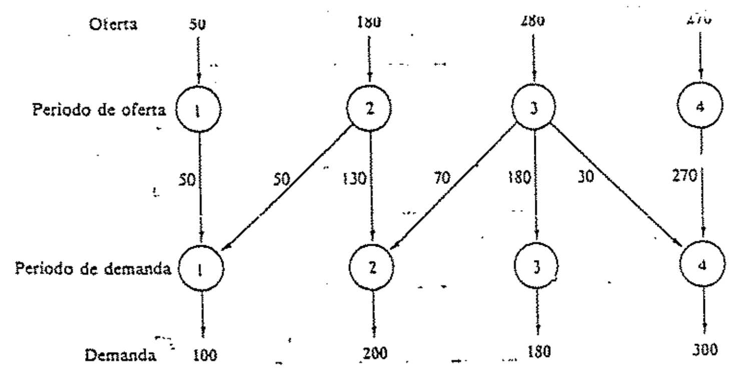

Figura 6-2

3. Enviar las servilletas sucias a un servicio de lavado lento (las servilletas enviadas al final del día i se recuperan al principio del día $i + 3$) a un costo de c u.m. cada una.

El problema clásico del proveedor recuerda el problema del mantenimiento de un motor de aeroplano, donde se tienen las opciones de comprar motores nuevos o reparar los usados (véase el problema 6-11). En un sentido directo, la situación no parece seguir el formato del problema clásico de transporte. Sin embargo, demostraremos que el problema se puede formular usando dicho modelo. Se utilizarán los siguientes datos para 7 días, que ilustran el procedimiento:

Día, i	1	2	3	4	5	6	7
Demanda, d_i	240	120	140	200	180	140	200

Los parámetros de costo a, b y c son \$1.20, \$0.60 y \$0.30, respectivamente.

La idea es considerar 7 nodos de destino, cada uno representando un día en el periodo de planeación. En el cuadro anterior se da la demanda en cada uno de esos destinos. En lo que respecta a las fuentes, observamos que al final de cada día tendremos un número de servilletas sucias igual al número de servilletas limpias necesarias para ese día. Tenemos entonces, siete fuentes con las cantidades respectivas de suministro, de nuevo iguales a las cantidades enlistadas antes. Se necesita una fuente adicional para tomar en cuenta el suministro de servilletas nuevas. Es plausible que todas las demandas para el periodo de 7 días se satisfagan con la fuente de servilletas nuevas. En consecuencia, el suministro en la fuente de servilletas nuevas se puede fijar igual a la suma de las demandas para todos los destinos (= 1 240 servilletas). Para tener la opción de no usar todas las servilletas nuevas, se añade al modelo un nodo destino de disposición con una demanda de 1 240 servilletas. En realidad, como es más barato reciclar las servilletas sucias, nunca será necesario usar servilletas nuevas para cubrir las demandas de los 7 días. Sin embargo, desde el punto de vista de la optimización, este detalle no tiene importancia porque el excedente de todas las servilletas nuevas, estará disponible para su uso.

La tabla 6-5 resume el modelo de transporte que consta de 8 fuentes y 8 destinos. Es claro que todas las rutas del periodo corriente a cualesquiera periodos anteriores son no factibles y por ello, deben bloquearse, asignando a cada una de ellas un costo M muy alto. La unidad "costo de transporte" desde las 8 fuentes al punto de disponibilidad es 0. Los costos unitarios restantes se establecen como sigue. Costará \$1.20 entre la fuente 1 (servilletas nuevas) y cada uno de los 7 destinos del modelo. Para las fuentes de la 2 a la 8 (días 1 al 7), el costo unitario desde el nodo i a cada uno de los nodos $i + 1$ e $i + 2$ es de \$0.60 y desde el nodo i a cada uno de los nodos $i + 3$, $i + 4$, ..., $i + 7$, es de \$0.30 (servicio rápido y lento de lavado, respectivamente.) Observe cuidadosamente el significado de la ruta i a la $i + 2$. Representa enviar servilletas sucias al final del día i, recuperarlas al principio del día $i + 1$ (servicio rápido) y "almacenarlas" para usarlas el día $i + 2$. Una interpretación similar se puede dar a las rutas de servicio lento.

CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

Tabla 6-5

	1	2	3	4	5	6	7	Disponibilidad	
Nuevas	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	1.20	0	1240
1	M	.60	.60	.30	.30	.30	.30	0	240
2	M	M	.60	.60	.30	.30	.30	0	120
3	M	M	M	.60	.60	.30	.30	0	140
4	M	M	M	M	.60	.60	.30	0	200
5	M	M	M	M	M	.60	.60	0	180
6	M	M	M	M	M	M	.60	0	140
7	M	M	M	M	M	M	M	0	220
	240	120	140	200	180	140	220	1240	

Ejercicio 6.1-4

Suponga que una servilleta limpia cuesta 2/100 de u.m. adicionales por almacenamiento por día, si no se usa el mismo día que se recibe de la lavandería. Revise los elementos de costo en la tabla 6-5.

[*Res.*: En cada renglón reemplace el segundo $0.60 por $0.62 y el segundo $0.30 superior por $0.32.]

La solución óptima del problema (lograda con TORA) se resume en la figura 6-3. Estos datos se pueden abreviar en un formato "listo para usarse" como se muestra en la tabla 6-6. Observe la interpretación de la solución respecto al servicio de lavandería. Por ejemplo, al final del día 1, se envían 180 servilletas sucias a servicio rápido, 100 de las cuales se usan el día 2 y las 80 restantes se almacenan para usarse el día 3. Esta información se muestra en la figura 6-3 con un arco de 100 servilletas que va del nodo 1 al 2 y con un arco de 80 servilletas del nodo 1 al 3.

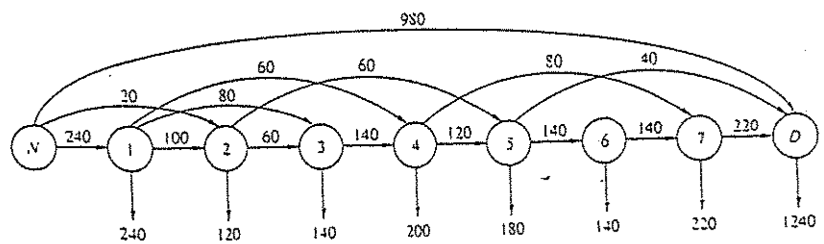

Figura 6-3

Tabla 6-6

		Servicio de lavandería		
Periodo	Servilletas nuevas	rápido	lento	disponibilidad
1	240	180	60	0
2	20	60	60	0
3	0	140	0	0
4	0	120	80	0
5	0	140	0	40
6	0	140	0	0
7	0	0	0	220

6.2 SOLUCION DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE

En esta sección presentamos los detalles para resolver el modelo de transporte. El método aplica los pasos del método símplex en forma directa, y difiere sólo en los detalles de la implantación de las condiciones de optimidad y factibilidad.

6.2.1 TECNICA DE TRANSPORTE

Los pasos básicos de la técnica de transporte son

Paso 1: determínese una solución factible inicial.

Paso 2: determínese la variable que entra, que se elige entre las variables no básicas. Si todas estas variables satisfacen la condición de optimidad (del método símplex), deténgase; de lo contrario, diríjase al paso 3.

Paso 3: determínese la variable que sale (mediante el uso de la condición de factibilidad) de entre las variables de la solución básica actual; después obténgase la nueva solución básica. Regrese al paso 2.

Estos pasos se considerarán a fondo. La explicación es el problema de la tabla 6-7. El costo de transporte unitario c_{ij} se expresa en unidades monetarias. La oferta y la demanda están dadas en número de unidades.

A. Determinación de la solución inicial

La definición general del modelo de transporte de la sección 6.1 requiere que $\Sigma_{i=1}^{m} a_i = \Sigma_{j=1}^{n} b_j$. Este requisito da origen a una ecuación dependiente, lo que significa que el modelo de transporte tiene sólo $m + n - 1$ ecuaciones independientes. Por

Tabla 6-7

	Destino 1	2	3	4	Oferta
Fuente 1	x_{11} [10]	x_{12} [0]	x_{13} [20]	x_{14} [11]	15
2	x_{21} [12]	x_{22} [7]	x_{23} [9]	x_{24} [20]	25
3	x_{31} [0]	x_{32} [14]	x_{33} [16]	x_{34} [18]	5
Demanda	5	15	15	10	

lo tanto, como en el método símplex, una solución factible básica inicial debe incluir $m + n - 1$ variables básicas.

Normalmente, si el modelo de transporte se formula como una tabla símplex, sería necesario utilizar variables artificiales para asegurar una solución básica inicial. Sin embargo, cuando se utiliza la tabla de transporte, una solución factible básica inicial se puede obtener fácil y directamente. Presentamos un procedimiento llamado regla de la **esquina noroeste** para este fin. En la sección 6.2.2 se presentan otros dos procedimientos, llamados métodos del **costo mínimo** y **aproximación de Vogel**. Estos procedimientos suelen producir soluciones iniciales óptimas en el sentido de que los valores asociados de la función objetivo son más chicos.

El método de la *esquina noroeste* comienza asignando la máxima cantidad posible a la variable x_{11}, de manera que se satisfaga totalmente la demanda (columna), o bien, se agote la oferta (renglón). Como en el primer caso se satisface la demanda, se tacha la columna y, en el segundo caso, como lo que se agota es la oferta, se tacha el renglón, indicando que las variables son iguales a cero. Cuando se satisfacen si- [illegible] el renglón o la columna. Esta condición garantiza la ubicación automática de variables básicas cero, si las hay. (Véase la tabla 6.9, donde se da un ejemplo ilustrativo.) Después de ajustar las cantidades de oferta y demanda de todos los renglones y columnas no tachados, la cantidad factible máxima se asigna al primer elemento de la nueva columna (renglón). El proceso se termina cuando se deja de tachar *exactamente* un renglón *o* una columna.

El procedimiento descrito se aplica ahora a la tabla 6-7.

1. $x_{11} = 5$, como se satisface la demanda se tacha la columna 1. La oferta excedente es de 10 unidades en el renglón 1.
2. $x_{12} = 10$, como se agota la oferta se tacha el renglón 1. Falta satisfacer una demanda de 5 unidades de la columna 2.
3. $x_{22} = 5$, como se satisface la demanda se tacha la columna 2. La oferta excedente es de 20 unidades en el renglón 2.

CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

Tabla 6-8

	1	2	3	4	
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				5	5
	5	15	15	10	

4. $x_{23} = 15$, como se satisface la demanda se tacha la columna 3. La oferta excedente es de 5 unidades en el renglón 2.
5. $x_{24} = 5$, como se agota la oferta se tacha el renglón 2. Falta satisfacer una demanda de 5 unidades en la columna 4.
6. $x_{34} = 5$, como se satisface simultáneamente la demanda y se agota la oferta, sólo se tacha el renglón 3 o la columna 5. Así, sólo uno de los dos queda sin tachar y el proceso llega a su fin.

La solución básica inicial resultante se presenta en la tabla 6-8. Las variables *básicas* son $x_{11} = 5$, $x_{12} = 10$, $x_{22} = 5$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 5$ y $x_{34} = 5$. Las variables restantes son *no básicas* en el nivel cero. El costo de transporte asociado es

$$5 \times 10 + 10 \times 0 + 5 \times 7 + 15 \times 9 + 5 \times 20 + 5 \times 18 = \$410.$$

Cuando se satisfacen al mismo tiempo una columna y un renglón, la siguiente variable que se agregará a la solución básica estará necesariamente en el nivel cero. La tabla 6-9 ilustra este aspecto, donde la columna 2 y el renglón 2 se satisfacen simultáneamente. Si se tacha la columna 2, x_{23} se vuelve básica en el nivel cero en el paso siguiente, ya que la demanda restante del renglón 2 vale ahora cero. (Este caso se presenta en la tabla 6-9). Si en cambio se cruza el renglón 2, x_{32} sería la variable básica cero.

Las soluciones iniciales de las tablas 6-8 y 6-9 incluyen el número adecuado de [illegible] La regla de la esquina noroeste produce siempre el número adecuado de variables básicas.

Tabla 6-9

	1	2	3	4	
1	5	5			$\cancel{10}$ $\cancel{5}$
2		5	0		$\cancel{5}$ 0
3			8	7	15
	$\cancel{5}$	$\cancel{10}$ $\cancel{5}$	8	7	

B. Determinación de la variable de entrada (método de multiplicadores)

La variable que entra se determina mediante el uso de la condición de optimidad del método simplex. Los cálculos de los coeficientes de la función objetivo están basados en las relaciones primales-duales que se presentaron en la sección 5.2. Primero presentamos la mecánica del método y después damos una explicación rigurosa del procedimiento con base en la teoría de la dualidad. Otro método, llamado procedimiento **saltando piedras**, también sirve para determinar la variable que entra. Aunque los cálculos de los dos métodos son exactamente equivalentes, el procedimiento del método saltando piedras da la impresión que es completamente independiente del método símplex.

En el método de multiplicadores asociamos los multiplicadores u_i y v_j con el renglón i y la columna j de la tabla de transporte. Para cada variable *básica* x_{ij} de la solución actual, los multiplicadores u_i y v_j deben satisfacer la ecuación que sigue:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ para cada variable } \textit{básica } x_{ij}$$

Estas ecuaciones producen $m + n - 1$ ecuaciones (porque sólo hay $m + n - 1$ variables básicas) con $m + n$ incógnitas. Los valores de los multiplicadores se pueden determinar a partir de estas ecuaciones suponiendo un valor *arbitrario* para *cualquiera* de los multiplicadores (por lo general u_1 se hace igual a cero) y resolviendo las $m + n - 1$ ecuaciones de los $m + n - 1$ multiplicadores desconocidos restantes. Al hacer esto, la evaluación de cada variable no básica x_{pq} está dada por

$$\bar{c}_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}, \text{ para cada variable } \textit{no básica } x_{pq}$$

(Estos valores serán los mismos sin importar la elección arbitraria del valor de u_1. Véase el siguiente ejercicio con la computadora.) Después se selecciona la variable que entra como la variable no básica con la variable $\bar{c}_{pq}$ *más positiva* (compárese con la condición de optimidad de minimización del método símplex).

Si aplicamos este procedimiento a las variables básicas de la tabla 6-8 (solución actual), las ecuaciones asociadas con las variables básicas están dadas como

$$
\begin{aligned}
x_{11}&: \quad u_1 + v_1 = c_{11} = 10 \\
x_{12}&: \quad u_1 + v_2 = c_{12} = 0 \\
x_{22}&: \quad u_2 + v_2 = c_{22} = 7 \\
x_{23}&: \quad u_2 + v_3 = c_{23} = 9 \\
x_{24}&: \quad u_2 + v_4 = c_{24} = 20 \\
x_{34}&: \quad u_3 + v_4 = c_{34} = 18
\end{aligned}
$$

Haciendo $u_1 = 0$, los valores de los multiplicadores se determinan sucesivamente como $v_1 = 10$, $v_2 = 0$, $u_2 = 7$, $v_3 = 2$, $v_4 = 13$ y $u_3 = 5$. Las evaluaciones de las variables no básicas están dadas de la manera siguiente:

$$
\begin{aligned}
x_{13}&: \quad \bar{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 20 = -18 \\
x_{14}&: \quad \bar{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 13 - 11 = 2 \\
x_{2}&: \quad \bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5 \\
x_{31}&: \quad \bar{c}_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = 5 + 10 - 0 = \boxed{15} \\
x_{32}&: \quad \bar{c}_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 5 + 0 - 14 = -9 \\
x_{33}&: \quad \bar{c}_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = 5 + 2 - 16 = -9
\end{aligned}
$$

Como x_{31} tiene la variable $\bar{c}_{pq}$ más positiva, ésta se selecciona como la variable que entra.

Las ecuaciones $u_i + v_j = c_{ij}$, que utilizamos para determinar los multiplicadores, tienen una estructura tan sencilla que en realidad es innecesario escribirlos en forma explícita. Por lo general resulta mucho más sencillo determinar los multiplicadores directamente a partir de la tabla de transporte, observando que u_i del renglón i y v_j de la columna j se suman a c_{ij} cuando el renglón i y la columna j se intersecan en una celda que contiene una variable *básica* x_{ij}. Cuando se determinan u_i y v_j, podemos calcular $\bar{c}_{pq}$ para toda x_{pq} no básica, sumando u_p del renglón p y v_q de la columna q y después restando c_{pq} de la celda en la intersección del renglón p y la columna q.

Ejercicio con la computadora

Use la opción "guía para el usuario" de TORA para observar la iteración que corresponde al cálculo anterior. El lector verá que TORA calcula u_i y v_j, comenzando con $v_4 = 0$ (en vez de $u_1 = 0$). Aunque los valores de u_i y v_j son diferentes, la $\bar{c}_{ij}$ resultante y, por consiguiente, la variable entrante ($= x_{31}$), permanecen iguales. El ejercicio demuestra que a cualquiera u_i y v_j se les puede asignar un valor arbitrario. (Véase el problema 6-41.)

Ejercicio con la computadora

Introdúzcase al modelo de transporte en la tabla 6-7 como a un modelo regular de PL con 12 variables y 7 restricciones (de igualdad) (en realidad sólo 6, ya que una restricción es redundante). (Será de utilidad usar los nombres de las variables definidas por el usuario x_{11}, x_{12}, ...). Escoja el símplex primal con la solución inicial M. Ahora utilice la opción "próxima iteración (guía para el usuario)" y seleccione sucesivamente las variables entrantes 1, 2, 6, 7, 8 y 12, correspondientes a x_{11}, x_{12}, ..., x_{23}, x_{24} y x_{34}, respectivamente. En cada caso la variable saliente se selecciona aceptando la opción que presenta el programa. Se descubrirá que el renglón objetivo proporciona los mismos valores de $\bar{c}_{pq}$ dados antes. El ejercicio demuestra que los cálculos, usando los multiplicadores u_i y v_j, conducen a los mismos resultados que el método símplex.

C. Determinación de la variable que sale (construcción de un ciclo)

Este paso es equivalente a aplicar la condición de factibilidad del método símplex. Sin embargo, como todos los coeficientes de restricciones del modelo de transporte original son cero o uno, las razones de la condición de factibilidad tendrán siempre su denominador igual a uno. Por lo tanto, los valores de las variables básicas producirán directamente las razones asociadas.

Para el fin de determinar la razón mínima, construimos un *ciclo cerrado* para la variable actual que entra (x_{31} en la iteración actual). El ciclo empieza y termina en la variable no básica designada. Este consta de los segmentos *sucesivos* horizontales y verticales (conectados) cuyos puntos extremos deben ser variables básicas, salvo para los puntos extremos que están asociados con la variable que entra. Esto significa que todo elemento de esquina del ciclo debe ser una celda que contenga una variable básica. La tabla 6-10 ilustra un ciclo para la variable que entra x_{31} dada en la solución básica de la tabla 6-8. Este ciclo se puede definir en términos de las variables básicas como $x_{31} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{24} \rightarrow x_{34} \rightarrow x_{31}$. *Es irrelevante si el ciclo es en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario.* Obsérvese que para una solución básica dada sólo se puede construir un ciclo *único* para cada variable no básica.

Podemos apreciar en la tabla 6-10 que si x_{31} (la variable que entra) se incrementa en una unidad entonces, para mantener la factibilidad de la solución, las variables básicas *de esquina* del ciclo x_{31} deben ajustarse como sigue. Disminúyase x_{11} en una unidad, increméntese x_{12} en una unidad, disminúyase x_{22} en una unidad, increméntese x_{24} en una unidad y por último disminúyase x_{34} en una unidad. Este proceso se resume a través de los signos de más ⊕ y de menos ⊖ de las esquinas adecuadas de la tabla 6-10. El cambio mantendrá satisfechas las restricciones de oferta y demanda.

La variable que sale se selecciona de entre las variables de esquina del ciclo que disminuirán cuando la variable que entra x_{31} aumente arriba del nivel cero. Estas situaciones se indican en la tabla 6-10 a través de las variables contenidas en el cuadro etiquetado con los signos menos ⊖. De la tabla 6-10, x_{11}, x_{22} y x_{34} son las variables básicas que disminuirán cuando aumente x_{31}. Después se selecciona la variable que sale como la que tiene el valor *más pequeño*, ya que será la primera

Tabla 6-10

	1	2	3	4	
1	10 / 5 ⊖	0 / 10 ⊕	20	11	15
2	12	7 / 5 ⊖	9 / 15	20 / 5 ⊕	25
3	0 / x_{31} ⊕	14	16	18 / 5 ⊖	5
	5	15	15	10	

en llegar al valor cero y cualquier disminución adicional la volverá negativa (compárese la condición de factibilidad del método simplex, donde la variable que sale está asociada con la razón mínima). En este ejemplo las tres variables ⊖-x_{11}, x_{22} y x_{34} tienen el mismo valor (= 5) y en este caso se puede seleccionar *cualquiera* de ellas como la variable que sale. Supóngase que x_{34} se toma como la variable que sale; después se incrementa a 5 el valor de x_{31} y los valores de las variables *de esquina* (básicas) se ajustan según este incremento (es decir, cada una se incrementa o disminuye en 5, dependiendo de si tiene el signo ⊕ o ⊖ asociado con ella). La nueva solución se presenta en la tabla 6-11. Su nuevo costo es $0 \times 10 + 15 \times 0 + 0 \times 7 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 = \$335$. Este costo difiere del asociado con la solución inicial de la tabla 6-8 en $410 - 335 = \$75$, que es igual al número de unidades asignadas a x_{31} (= 5) multiplicado por $\bar{c}_{31}$ (= \$15).

La solución básica de la tabla 6-11 es degenerada, ya que las variables básicas x_{11} y x_{22} son cero. Sin embargo, la degeneración no requiere precauciones especiales y las variables básicas cero se consideran como cualquier otra variable básica positiva.

Ahora se revisa la optimidad de la nueva solución básica de la tabla 6-11 calculando los *nuevos* multiplicadores como se indica en la tabla 6-12. Los valores de $\bar{c}_{pq}$ están dados por los números de la esquina *suroeste* de cada celda no básica. La variable no básica x_{21} con la variable $\bar{c}_{pq}$ positiva mayor entra en la solución. El ciclo cerrado asociado con x_{21} muestra que x_{11} o x_{22} pueden ser la variable que sale. Seleccionamos arbitrariamente x_{11} como la que sale de la solución.

Ejercicio 6.2-1

Verifique los valores de u_i, v_j y $\bar{c}_{pq}$ de la tabla 6-12.

Tabla 6-11

	1	2	3	4	
1	10 / 0	0 / 15	20	11	15
2	12	7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
3	0 / 5	14	16	18	5
	5	15	15	10	

CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

Tabla 6-12

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	[10] 0 ⊖	[0] 15 ⊕	[20] −18	[11] +2	15
$u_2 = 7$	[12] x_{21} +5 ⊕	[7] 0 ⊖	[9] 15	[20] 10	25
$u_3 = -10$	[0] 5	[14] −24	[16] −24	[18] −15	5
	5	15	15	10	

La tabla 6-13 muestra la nueva solución básica que sigue de la tabla 6-12 (x_{21} entra y x_{11} sale). Los nuevos valores de u_i, v_j y $\bar{c}_{pq}$ se vuelven a calcular. La tabla 6-13 muestra la variable que entra y la que sale como x_{14} y x_{24}, respectivamente. Al efectuar este cambio en la tabla 6-13, obtenemos la nueva solución de la tabla 6-14. Como todas las variables $\bar{c}_{pq}$ de la tabla 6-14 son *no positivas*, se ha llegado a la

Tabla 6-13

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	[10] −5	[0] 15 ⊖	[20] −18	[11] x_{14} +2 ⊕	15
$u_2 = 7$	[12] 0	[7] 0 ⊕	[9] 15	[20] 10 ⊖	25
$u_3 = -5$	[0] 5	[14] −19	[16] −19	[18] −10	5
	5	15	15	10	

Tabla 6-14

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1 = 0$	[10] −5	[0] 5	[20] −18	[11] 10	15
$u_2 = 7$	[12] 0	[7] 10	[9] 15	[20] −2	25
$u_3 = -5$	[0] 5	[14] −19	[16] −19	[18] −12	5
	5	15	15	10	

solución óptima (compárese con la condición de optimidad de minimización del método símplex).

La solución óptima se resume como sigue. Envíense cinco unidades de (la fuente) 1 a (el destino) 2 a 5 × 0 = $0, 10 unidades de 1 a 4 a 10 × 11 = $110, 10 unidades de 2 a 2 a 10 × 7 = $70, 15 unidades de 2 a 3 a 15 × 9 = $135 y 5 unidades de 3 a 1 a 5 × 0 = $0. El costo de transporte total del programa es $315.

Ejercicio 6.2-2

Considere el problema de transporte que se analizó antes.

(a) Calcule las mejoras (reducciones) en el valor de la función objetivo en cada uno de los casos siguientes mediante el uso de los valores de $\bar{c}_{pq}$ directamente.
   (1) La solución pasa de la tabla 6-10 a la tabla 6-11.
   [*Resp.* 5 × 15 = $75.]
   (2) La solución pasa de la tabla 6-12 a la tabla 6-13.
   [*Resp.* 0 × 5 = $0.]
   (3) La solución cambia de la tabla 6-13 a la tabla 6-14.
   [*Resp.* 10 × 2 = $20.]

(b) Determine en la tabla 6-12 el cambio (aumento o disminución) en el valor de la función objetivo cuando se obligue a cada una de las variables no básicas siguientes a entrar en la solución básica.

(1) x_{13}. [*Resp.* +$270.]
(2) x_{14}. [*Resp.* −$20.]
(3) x_{32}. [*Resp.* +$120.]
(4) x_{33}. [*Resp.* +$120.]
(5) x_{34}. [*Resp.* $75.]

Ejercicio con la computadora

(a) Modifique el costo de la unidad de transporte en la columna 1 (destino D1) de la tabla 6-7, sumando 10 a cada costo unitario en esa columna. Resuelva el problema con TORA y observe que el plan horario óptimo de transporte permanece sin cambio, excepto en el valor de z que se incrementa en $5 \times 10 = 50$.
(b) Repita la parte (a), sumando esta vez 10 a los costos unitarios de *todas* las rutas. El plan horario óptimo de transporte también permanecerá sin cambio, pero el valor de z se incrementará en $45 \times 10 = 450$.

D. Explicación del método de multiplicadores como un método símplex†

La relación que existe entre el método de multiplicadores y el método símplex se puede establecer demostrando que $\bar{c}_{pq}$, según se define, es igual directamente a los coeficientes de la función objetivo de la tabla símplex asociada con la iteración actual. Hemos visto en los cálculos primales-duales de la sección 5.2 que, dados los multiplicadores símplex de la iteración actual, los coeficientes de la función objetivo se obtienen tomando la diferencia entre los miembros primero y segundo de las restricciones duales. Esta relación se utilizará para mostrar que el método de multiplicadores es esencialmente equivalente al método símplex. En realidad, los multiplicadores u_i y v_j no son más que las variables duales (o los multiplicadores símplex).

Para demostrar cómo se obtiene el problema dual general para el modelo de transporte, considérese primero el caso especial de $m = 2$ y $n = 3$ que se indica en la tabla 6-15. Sean las variables duales u_1 y u_2 para las restricciones de las fuentes y v_1, v_2 y v_3 para las restricciones de los destinos. El problema dual se convierte en (véase la sección 5.1)

$$\text{maximizar } w = (a_1u_1 + a_2u_2) + (b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3)$$

sujeto a

$$\begin{aligned}
u_1 \quad + v_1 \quad\quad\quad &\leq c_{11}\\
u_1 \quad\quad + v_2 \quad\quad &\leq c_{12}\\
u_1 \quad\quad\quad\quad + v_3 &\leq c_{13}\\
u_2 + v_1 \quad\quad\quad &\leq c_{21}\\
u_2 \quad\quad + v_2 \quad\quad &\leq c_{22}\\
u_2 \quad\quad\quad\quad + v_3 &\leq c_{23}\\
u_1, u_2, v_1, v_2, v_3 &\text{ irrestrictas}
\end{aligned}$$

La estructura especial de las restricciones duales resulta del arreglo especial de los elementos "1" y "0" del problema primal. Cada restricción incluye una variable

† En lo que resta de esta sección se supone que el lector tiene conocimiento de la teoría de la dualidad (capítulo 5). Esta se puede omitir sin que se pierda la continuidad del estudio.

Tabla 6-15

	z	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{13}	R.H.S.
		Variables de la fuente 1			Variables de la fuente 2			
Función objetivo	1	$-c_{11}$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{21}$	$-c_{22}$	$-c_{23}$	0
Restricciones de las fuentes	0	1	1	1				a_1
	0				1	1	1	a_2
Restricciones de los destinos	0	1			1			b_1
	0		1			1		b_2
	0			1			1	b_3

u y una variable v exclusivamente. Asimismo, para cada restricción dual, los subíndices de u y v coinciden con los subíndices dobles del elemento c. Por lo tanto, en términos generales, si u_i y v_j son las variables duales que corresponden a las restricciones de la i-ésima fuente y el j-ésimo destino ($i = 1, 2,\dots, m$; $j = 1, 2,\dots, n$) el problema dual correspondiente está dado por

$$\text{maximizar } w = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad \text{para todas las } i \text{ y } j$$
$$u_i \text{ y } v_j \text{ irrestrictas}$$

Según la sección 5.2, los coeficientes de la función objetivo (y por lo tanto, la evaluación de las variables no básicas) se determinan mediante la sustitución de los valores actuales de las variables duales (multiplicadores símplex) en las restricciones duales y después tomando la diferencia entre sus miembros primero y segundo. Los valores de las variables duales se pueden determinar, observando que las restricciones duales correspondientes a una variable básica se deben satisfacer como ecuaciones estrictas; o sea,

$$u_i + v_j = c_{ij}, \text{ para toda variable } \textit{básica } x_{ij}$$

que produce $m + n - 1$ ecuaciones. Por lo tanto, suponiendo un valor arbitrario para u_1 ($= 0$), se pueden determinar los multiplicadores que faltan.

El coeficiente de la variable no básica x_{pq} de la función objetivo está dado ahora por la diferencia entre los miembros primero y segundo de la restricción dual correspondiente, es decir, $u_p + v_q - c_{pq}$. Como el problema de transporte es un problema de *minimización*, la variable que entra es aquella que tiene la mayor expresión $u_p + v_q - c_{pq}$ *positiva*.

IMPRESIONES
CENTRO DE ESTUDIANTES
FACULTAD DE INGENIERÍA

La relación entre el método de multiplicadores y los métodos símplex debe estar clara ahora. En realidad, en la iteración óptima los multiplicadores producen los valores duales *óptimos* directamente. De la sección 5.2, estos valores deben producir el mismo valor objetivo óptimo en el primal y el dual. Los multiplicadores símplex asociados con la solución *óptima* de la tabla 6-14 son $u_1 = 0$, $u_2 = 7$, $u_3 = -5$, $v_1 = 5$, $v_2 = 0$, $v_3 = 2$ y $v_4 = 11$. El valor correspondiente de la función objetivo dual es

$$\sum_{i=1}^{3} a_i u_i + \sum_{j=1}^{4} b_j v_j = (15 \times 0 + 25 \times 7 + 5 \times -5)$$
$$+ (5 \times 5 + 15 \times 0 + 15 \times 2 + 10 \times 11)$$
$$= 315$$

que es el mismo que el del primal.

En lo antes expuesto, se asigna un valor arbitrario a una de las variables duales (por ejemplo, $u_1 = 0$), que indica que los multiplicadores símplex asociados con una solución básica dada no son únicos. Esto puede parecer inconsistente con los resultados del capítulo 5, donde los multiplicadores símplex deben ser únicos. El problema 6-41 resuelve esta paradoja aparente y muestra que en realidad no hay inconsistencia.

6.2.2 SOLUCION INICIAL MEJORADA

El método de la esquina noroeste que se presentó en la sección 6.2.1 no produce necesariamente una "buena" solución inicial para el modelo de transporte. En esta sección presentamos dos procedimientos que determinan la solución inicial a través de la selección de las rutas "económicas" del modelo.

A. Método del costo mínimo

El procedimiento es como sigue. Asígnese el valor más grande posible a la variable con el menor costo *unitario* de toda la tabla. (Los empates se rompen en forma arbitraria). Táchese el renglón o columna satisfecho. (Como en el método de la *esquina noroeste*, si una columna y un renglón se satisfacen de manera simultánea, sólo uno puede tacharse). Después de ajustar la oferta y la demanda de todos los renglones y columnas *no* tachados, repítase el proceso asignando el valor más grande posible a la variable con el costo unitario no tachado más pequeño. El procedimiento está completo cuando queda exactamente un renglón *o* bien una columna sin tachar.

El problema de transporte de la tabla 6-7 se utiliza una vez más para ilustrar la aplicación del método del costo mínimo. La tabla 6-16 presenta la solución inicial resultante. Los pasos de la solución son los siguientes: x_{12} y x_{31} son las variables asociadas con los menores costos unitarios ($c_{12} = c_{31} = 0$). Rompiendo el empate o coincidencia en forma arbitraria, selecciónese x_{12}. Las unidades de oferta y demanda asociadas producen $x_{12} = 15$, lo que satisface el renglón 1 y la columna 2. Tachando la columna 2, la oferta que queda en el renglón 1 es cero. Después, x_{31} tiene el me-

Tabla 6-16

	1	2	3	4	
1	$\boxed{10}$ 0	$\boxed{0}$ 15	$\boxed{20}$	$\boxed{11}$ 0	15
2	$\boxed{12}$	$\boxed{7}$	$\boxed{9}$ 15	$\boxed{20}$ 10	25
3	$\boxed{0}$ 5	$\boxed{14}$	$\boxed{16}$	$\boxed{18}$	5
	5	15	15	10	

nor costo unitario no tachado. Por lo tanto $x_{31} = 5$ satisface el renglón 3 y la columna 1. Tachando el renglón 3, la demanda en la columna 1 es cero. El menor elemento no tachado es $c_{23} = 9$. Las unidades de oferta y demanda producen $x_{23} = 15$, que elimina la columna 3 y deja 10 unidades de oferta en el renglón 2. El menor elemento no tachado es $c_{11} = 10$. Como la oferta restante en el renglón 1 y la demanda restante en la columna 1 son cero, $x_{11} = 0$. Al tachar la columna 1, la oferta "que queda" en el renglón 1 es cero. Las variables básicas remanentes se obtienen, respectivamente, como $x_{14} = 0$ y $x_{24} = 10$. El costo total asociado con esta solución es $0 \times 10 + 15 \times 0 + 0 \times 11 + 15 \times 9 + 10 \times 20 + 5 \times 0 =$ \$335, que es mejor (menor) que el que produce el método de la esquina noroeste.

Ejercicio 6.2-3

Vuelva a resolver este problema suponiendo que el método del costo mínimo comienza con una asignación a x_{31} en vez de a x_{12} (c_{31} y c_{12} son igual a cero) y compare la solución inicial resultante con la que se da.

[*Resp.* Las variables positivas son las mismas. La única diferencia se presenta en la asignación de las variables cero. Sin embargo, éste no es un resultado general.]

B. Método de aproximación de Vogel (VAM)

Este método es heurístico y suele producir una mejor solución inicial que los dos métodos antes descritos. De hecho, VAM suele producir una solución inicial óptima, o próxima al nivel óptimo.

Los pasos del procedimiento son los siguientes.

Paso 1: evalúese una penalización para cada renglón (columna) restando el *menor* elemento de costo del renglón (columna) del elemento de costo *menor siguiente* en el mismo renglón (columna).

Paso 2: identifíquese el renglón o columna con la mayor penalización, rompiendo empates en forma arbitraria. Asígnese el mayor valor posible a la variable con el costo más bajo del renglón o columna seleccionado. Ajústense la oferta y la demanda y táchese el renglón *o* columna satisfecho. Si un renglón y una columna se satisfacen al mismo tiempo, sólo uno de ellos se tacha y al renglón (columna) restante se le asigna una oferta (demanda) cero. *Cualquier renglón o columna con oferta o demanda cero no debe utilizarse para calcular penalizaciones futuras (en el paso 3).*

Paso 3: (a) si sólo hay un renglón o columna sin tachar, deténgase.
(b) si sólo hay un renglón (columna) con oferta (demanda) *positiva* sin tachar, determínense las variables básicas del renglón (columna) a través del método del costo mínimo.
(c) si todos los renglones y columnas sin tachar tienen oferta y demanda cero (asignadas), determínense las variables básicas *cero* a través del método del costo mínimo. Deténgase.
(d) de lo contrario, calcúlense las penalizaciones de los renglones y columnas no tachados y después diríjase al paso 2. (Obsérvese que los renglones y columnas con oferta y demanda cero asignadas no deben utilizarse para determinar estas penalizaciones.)

Aplicamos VAM al problema de la tabla 6-7. La tabla 6-17 muestra el primer conjunto de penalizaciones de renglones y columnas. Como el renglón 3 tiene la mayor penalización (= 14) y como $c_{31} = 0$ es el menor costo unitario del mismo renglón, se asigna la cantidad 5 a x_{31}. El renglón 3 y la columna 1 se satisfacen simultáneamente. Supóngase que se tacha la columna 1. La oferta restante para el renglón 3 es cero.

La tabla 6-18 muestra el nuevo conjunto de penalizaciones después de tachar la columna 1 en la tabla 6-17. (Nótese que el renglón 3 con oferta cero no se utiliza al determinar penalizaciones.) El renglón 1 y la columna 3 tienen las mismas penalizaciones. Al seleccionar la columna 3 en forma arbitraria, la cantidad 15 se asigna a x_{23}, que elimina la columna 3 y ajusta la oferta del renglón 2 a 10.

Las aplicaciones sucesivas de VAM producen $x_{22} = 10$ (se tacha el renglón 2), $x_{12} = 5$ (se tacha la columna 2), $x_{14} = 10$ (se tacha el renglón 1) y $x_{34} = 0$. (Verifíquese esto.) El costo del programa es $315, que es óptimo.

La versión dada de VAM rompe empates entre penalizaciones de manera arbitraria. No obstante, el rompimiento de empates puede ser decisivo para producir una buena solución inicial. Por ejemplo, en la tabla 6-18, si se selecciona el renglón 1 en lugar de la columna 3, se produce una solución inicial menos óptima. (Verifíquese que esta solución sea $x_{12} = 15$, $x_{23} = 15$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$, que producirá un costo total de $335.) El procedimiento VAM completo ofrece detalles para romper algunos de los empates en forma ventajosa. (Véase la obra de N. Reinfeld y W. Vogel, *Mathematical Programming*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1958.)

Tabla 6-17

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	0	20	11	15	10
2	12	7	9	20	25	2
3	0 5	14	16	18	5	14
	5	15	15	10		
Penalización de columna	10	7	7	7		

Tabla 6-18

	1	2	3	4		Penalización de renglón
1	10	0	20	11	15	11
2	12	7	9 15	20	25 10	2
3	0 5				5 0	—
	5	15	15	10		
Penalización de columna	—	7	11	9		

EXPRESIONES
CENTRO DE ESTUDIANTES
FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejercicio 6.2-4

Vuelva a resolver el problema a través del método VAM después de sustituir el valor de c_{12} por 2 (en vez de cero). Para los fines de este problema, cuando un renglón y una columna se satisfagan simultáneamente, táchese siempre el renglón.

[*Resp.* Las asignaciones sucesivas son $x_{31} = 5$, $x_{23} = 15$, $x_{22} = 10$, $x_{14} = 10$, $x_{12} = 5$ y $x_{11} = 0$.]

6.3 MODELO DE ASIGNACION

Considérese la situación de asignar m trabajos (o trabajadores) a n máquinas. Un trabajo i (= 1, 2,..., m) cuando se asigna a la máquina j (= 1, 2,..., n) incurre en un costo c_{ij}. El objetivo es el de asignar los trabajos a las máquinas (un trabajo por máquina) al menor costo total. La situación se conoce como **problema de asignación**.

La formulación de este problema puede considerarse como un caso especial del modelo de transporte. Aquí los trabajos representan "fuentes" y las máquinas representan "destinos". La oferta disponible en cada fuente es 1; es decir, $a_i = 1$ para toda i. De manera análoga, la demanda requerida en cada destino es 1; esto es, $b_j = 1$ para toda j. El costo de "transportar" (asignar) el trabajo i a la máquina j es c_{ij}. Si un trabajo no puede asignarse a cierta máquina, el elemento c_{ij} correspondiente se toma igual a M, que es un costo muy elevado. La tabla 6-19 muestra una representación general del modelo de asignación.

Antes de que el modelo se pueda resolver a través de la técnica de transporte, es necesario equilibrar el problema sumando trabajos o máquinas ficticios, dependiendo de si $m < n$ o $m > n$. Por lo tanto, se supondrá que $m = n$ sin que se pierda la generalidad.

El modelo de asignación se puede expresar matemáticamente de la manera siguiente:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si el } i\text{-ésimo trabajo } no \text{ se asigna a la } j\text{-ésima máquina} \\ 1, & \text{si el } i\text{-ésimo trabajo se asigna a la } j\text{-ésima máquina} \end{cases}$$

Por lo tanto, el modelo está dado por

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Tabla 6-19

		Máquina 1	2	...	n	
Trabajo	1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	1
	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
	m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	1
		1	1	...	1	

sujeto a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \quad \text{o bien} \quad 1$$

Para ilustrar el modelo de asignación, considérese el problema de la tabla 6-20 con tres trabajos y tres máquinas. La solución inicial (mediante el uso de la regla de la esquina noroeste) es claramente degenerada. Este será siempre el caso en el modelo de asignación, sin importar el método que se aplique para obtener la base inicial. De hecho, la solución seguirá siendo degenerada en todas y cada una de las iteraciones.

La estructura especial del modelo de asignación hace posible crear un método de solución eficiente llamado, **método húngaro**. Este método lo ilustrará el ejemplo que acabamos de presentar.

La solución óptima del modelo de asignación sigue siendo la misma si se suma o resta una constante a cualquier renglón o columna de la matriz de costo. Esto se demuestra como sigue. Si p_i y q_j se restan del i-ésimo renglón y la j-ésima columna, los nuevos elementos se convierten en $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - q_j$. Esto produce la nueva función objetivo

Tabla 6-20

		Máquina 1	2	3	
Trabajo	1	5 1	7	9	1
	2	14	10 1	12	1
	3	15	13	16 1	1
		1	1	1	

Tabla 6-21

$$\|c'_{ij}\| = \begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 0 & 2 & 4 \\
2 & 4 & 0 & 2 \\
3 & 2 & 0 & 3
\end{array} \quad \begin{array}{l} p_1 = 5 \\ p_2 = 10 \\ p_3 = 13 \end{array}$$

$$z' = \sum_i \sum_j c'_{ij} x_{ij} = \sum_i \sum_j (c_{ij} - p_i - q_j) x_{ij}$$
$$= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_i p_i \sum_j x_{ij} - \sum_j q_j \sum_i x_{ij}$$

Como $\Sigma_j x_{ij} = \Sigma_j x_{ij} = 1$, se obtiene $z' = z -$ constante. Esto demuestra que la minimización de la función objetivo original z produce la misma solución que la minimización de z'.

Esta idea indica que si se puede generar una nueva matriz c'_{ij} con cero registros, y si estos elementos cero o un subconjunto de éstos constituyen una solución factible, esta solución es óptima, puesto que el costo no puede ser negativo.

En la tabla 6-20 los elementos cero se generan restando el menor elemento de cada renglón (columna) del renglón (columna) correspondiente. Si se considera el renglón en primer término, la nueva matriz c'_{ij} se muestra en la tabla 6-21.

Se puede hacer que la última matriz incluya más ceros restando $q_3 = 2$ de la tercera columna. Esto produce la tabla 6-22.

Los cuadros de la tabla 6-22 dan la asignación factible (y por lo tanto, óptima) (1, 1) (2, 3) y (3, 2), que cuesta 5 + 12 + 13 = $30. Nótese que este costo es igual a $p_1 + p_2 + p_3 + q_3$.

Lamentablemente, no siempre es posible obtener una asignación factible como en el ejemplo. Por lo tanto, se requieren otras reglas para obtener la solución óptima. Estas reglas las ilustra el ejemplo de la tabla 6-23.

Tabla 6-22

$$\|c'_{ij}\| = \begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 2 & 3 \\
1 & \boxed{0} & 2 & 2 \\
2 & 4 & 0 & \boxed{0} \\
3 & 2 & \boxed{0} & 1
\end{array}$$

Tabla 6-23

	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

Tabla 6-24

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Tabla 6-25

	1	2	3	4
1	0	3	2	2
2	2	0	0	2
3	0	1	4	3
4	3	2	0	0

Ahora, ejecutando los mismos pasos iniciales del ejemplo anterior, se obtiene la tabla 6-24.

En este caso no es posible una asignación factible a los elementos cero. Por lo tanto, el procedimiento consiste en trazar un número *mínimo* de líneas a través de algunos de los renglones y columnas tal que se tachen todos los ceros. La tabla 6-25 muestra la aplicación de esta regla.

El paso siguiente consiste en seleccionar el *menor* elemento no tachado (= 1 en la tabla 6-25). Este elemento se sustrae de todos y cada uno de los elementos *no* tachados y se suma a todo elemento situado en la intersección de dos líneas. Esto produce la tabla 6-26, que da la asignación óptima (1, 1), (2, 3), (3, 2) y (4, 4). El costo total correspondiente es 1 + 10 + 5 + 5 = 21.

Debe advertirse que si la solución óptima no se obtuvo en el paso anterior, el procedimiento dado de trazo de líneas debe repetirse hasta que se logre una asignación factible.

Ejercicio con la computadora

Aplique el método del transporte al problema de la tabla 6-23 y demuestre que se logra la misma solución. Por consiguiente, concluya que el modelo de asignación se puede resolver en forma directa con el método del transporte.

Tabla 6-26

	1	2	3	4
1	$\boxed{0}$	2	1	1
2	3	0	$\boxed{0}$	2
3	0	$\boxed{0}$	3	2
4	4	2	0	$\boxed{0}$

IMPRESIONES
CENTRO DE ESTUDIANTES
FACULTAD DE INGENIERÍA

Explicación del algoritmo húngaro como un método símplex†

La motivación del método húngaro se puede explicar en términos del método símplex. Como sucede en el método del transporte, el dual del modelo de asignación está dado por

$$\text{maximizar } w = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{i=1}^{n} v_j$$

sujeto a

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$
$$u_i, v_j \text{ irrestrictos}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Una solución obvia dual factible esta dada por

$$p_i = \min_{j=1,2,\ldots,n} \{c_{ij}\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$q_j = \min_{i=1,2,\ldots,n} \{c_{ij} - p_i\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Lo que esta solución indica es que p_i es el valor más pequeño en el renglón i y q_j el valor más pequeño en la columna j, después que p_i se ha restado del renglón sucesivo. Los valores duales p_i y q_j se calculan como se ilustra en las tablas 6-21 y 6-22.

Si $p_i + q_j = c_{ij}$ (o en forma equivalente, $p_i + q_j - c_{ij} = 0$), entonces, de acuerdo con la teoría del método símplex (sección 5.2), el coeficiente objetivo de x_{ij} en la tabla símplex correspondiente es factible de ser una variable básica óptima. En realidad, el resultado también es evidente mediante el teorema de la holgura complementaria (sección 5.4), que establece que las u_i, v_j y x_{ij} óptimas deben satisfacer

$$(u_i + v_j - c_{ij})x_{ij} = 0, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Se concluye entonces que si después de restar p_i y q_j (como lo hicimos en las tablas 6-21 y 6-22), los elementos resultantes con $p_i + q_j - c_{ij} = 0$ dan una asignación factible, tendremos la solución óptima.

Si el proceso para determinar p_i y q_j no conduce a una asignación factible, será necesario buscar un conjunto diferente de valores duales que continúen satisfaciendo el teorema de la holgura complementaria y proporcionen una asignación factible. Esto se logra utilizando el procedimiento propuesto de abarcar todos los elementos cero con un número mínimo de líneas. No proporcionaremos los detalles de esta prueba (algo complicada) que, en general, es una variante de la aplicación del teorema de la holgura complementaria.

† Este material se puede pasar por alto sin perder continuidad.

6.4 MODELO DE TRANSBORDO

El modelo de transporte estándar supone que la ruta *directa* entre una fuente y un destino es una ruta de *costo mínimo*. Por lo tanto, en el ejemplo 6.1-1 la tabla de distancias recorridas desde las tres plantas de producción de automóviles a los dos centros de distribución da las *rutas más cortas* entre las fuentes y destinos. Esto quiere decir que debe realizarse algún trabajo preparatorio donde intervenga la determinación de las rutas más cortas antes de que se puedan obtener los costos unitarios del modelo de transporte. Estos cálculos se pueden efectuar aplicando el *algoritmo de la ruta más corta* (véase la sección 7.2) a cualquier par de nodos deseados.

Un método alternativo para obtener el costo de envío directo mínimo consiste en formular el problema como un modelo de transbordo. La nueva formulación tiene la característica adicional de permitir que las unidades transportadas desde *todas* las fuentes pasen a través de nodos intermedios o *transitorios*, antes de que lleguen por último a su destino designado. En efecto, el nuevo algoritmo combina tanto el de transporte regular como el de la ruta más corta en un solo procedimiento. Ilustraremos el nuevo método por medio de un ejemplo.

La figura 6-4 representa dos plantas de automóviles, dos centros de distribución y tres agentes vendedores. La oferta en las dos plantas, nodos 1 y 2, es de 1 000 y 1 200, respectivamente. Los autos se envían a los agentes 5, 6 y 7 a través de los centros de distribución 3 y 4. La demanda en las agencias es de 800, 900 y 300, respectivamente. En términos de las conexiones por arco de la figura 6-4, los nodos 1 y 2 están caracterizados sólo por arcos salientes, en tanto que el nodo 7 está caracterizado sólo por arcos entrantes. Todos los demás nodos poseen arcos entrantes y salientes. A este respecto, los nodos 1 y 2 son puntos de *oferta pura* y el nodo 7 es un punto de *demanda pura*. Los demás nodos son nodos de *transbordo* porque finalmente la oferta entera (= 1 000 + 1 200 = 2 200) podría pasar a través de ellos antes de llegar a sus destinos asignados.

Una vez definido lo que entendemos por transbordo, mostraremos cómo se construye el modelo. Primero, expresamos el modelo como un programa lineal regular y luego, mostramos cómo la formulación se convierte en forma equivalente en un modelo de transporte. Sea x_{ij} la cantidad enviada del nodo i al nodo j; el modelo PL se representa como se muestra en la tabla 6-27.

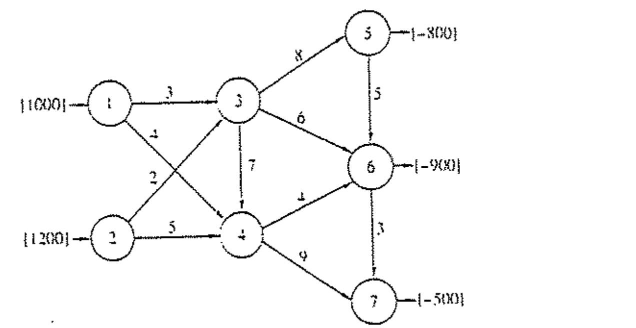

Figura 6-4

Tabla 6-27

	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{46}	x_{47}	x_{56}	x_{67}	
	3	4	2	5	7	8	6	4	9	5	3	mín
nodo 1	1	1										= 1000
nodo 2			1	1								= 1200
nodo 3	−1		−1		1	1	1					= 0
nodo 4		−1		−1	−1			1	1			= 0
nodo 5						−1				1		= −800
nodo 6							−1	−1		−1	1	= −900
nodo 7									−1		−1	= −500

En la formulación anterior cada restricción se asocia con un nodo. La ecuación de restricción representa simplemente la conservación del flujo entrante y saliente del nodo; esto es,

suma total de flujo entrante = suma total de flujo saliente

En realidad, las ecuaciones en la tabla 6-27 corresponden directamente a

suma total de flujo saliente — suma total de flujo entrante = 0

De esta manera, los segundos miembros de cada ecuación resultan positivos para la oferta en los nodos 1 y 2, y negativos para la demanda en los nodos 5, 6 y 7. Las demás ecuaciones tendrán un segundo miembro nulo, como se aprecia en la tabla anterior.

Observe el arreglo especial de los coeficientes 1 y −1 en la tabla 6-27. Cada variable x_{ij} tiene un +1 en el renglón i y un −1 en el renglón j. Esta estructura especial es característica de los problemas que se pueden representar con el modelo de transbordo, como se verá después.

En la tabla 6-27 el modelo de PL de transbordo se puede convertir al formato del modelo de transporte como sigue. Las ecuaciones asociadas con los nodos 1, 2 y 7 se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{nodo 1: } x_{13} + x_{14} = 1\,000\\
&\text{nodo 2: } x_{23} + x_{24} = 1\,200\\
&\text{nodo 7: } x_{47} + x_{67} = 500
\end{aligned}$$

Para los nodos restantes (3, 4, 5 y 6) reescribimos cada ecuación de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{nodo 3: } x_{34} + x_{35} + x_{36} = x_{13} + x_{23}\\
&\text{nodo 4: } x_{46} + x_{47} = x_{14} + x_{24} + x_{34}\\
&\text{nodo 5: } x_{56} = x_{35} - 800\\
&\text{nodo 6: } x_{67} = x_{36} + x_{46} + x_{56} - 900
\end{aligned}$$

Ahora sumamos finalmente una variable no negativa x_{ii} a cada miembro de la ecuación i, i = 3, 4, 5 y 6. Obtenemos así

$$\begin{aligned}
&\text{nodo 3: } x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = x_{33} + x_{13} + x_{23}\\
&\text{nodo 4: } x_{44} + x_{46} + x_{47} = x_{44} + x_{14} + x_{24} + x_{34}\\
&\text{nodo 5: } x_{55} + x_{56} = x_{55} + x_{35} - 800\\
&\text{nodo 6: } x_{66} + x_{67} = x_{66} + x_{36} + x_{46} + x_{56} - 900
\end{aligned}$$

Si B es un valor suficientemente grande, las ecuaciones anteriores se pueden reemplazar por las siguientes:

$$\begin{aligned}
&x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = B\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = B\\
&x_{44} + x_{46} + x_{47} = B\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = B\\
&x_{55} + x_{56} = B\\
&x_{35} + x_{55} = 800 + B\\
&x_{66} + x_{67} = B\\
&x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} = 900 + B
\end{aligned}$$

Podemos utilizar el mismo valor B en todas las ecuaciones porque las variables x_{ii}, i = 3, 4, 5 y 6, son arbitrarias. En realidad, si se considera x_{ii} como una variable de holgura y se escoge B lo suficientemente grande, de manera que represente un límite superior irrestricto en cada una de las sumas de los primeros miembros, las ecuaciones anteriores serán válidas. En efecto, podemos estimar con seguridad que B por lo menos sea igual a la suma de todos los envíos que puedan pasar a través de cualesquiera de los nodos de la red; o sea,

$$B \geq 1\,000 + 1\,200 = 2\,200$$

La cantidad B generalmente se denomina de amortiguamiento (buffer).

El último conjunto de ecuaciones, junto con la de los nodos 1, 2 y 7 definen directamente el modelo de transporte en la tabla 6-28 (verifíquelo). El modelo resultante tiene las siguientes propiedades:

1. Los nodos 1 y 2 son puntos "puros" de oferta y por ello sólo aparecen como renglones fuente.
2. El nodo 7 es un punto "puro" de demanda y por ello sólo aparece como columna destino.
3. Todos los nodos de transbordo (3, 4, 5 y 6) aparecen como puntos fuente y puntos demanda.
4. La oferta y la demanda para todos los nodos de transbordo están aumentados cada uno por la cantidad de amortiguamiento B (≥ 2 200).

Las propiedades anteriores representan las reglas para elaborar la tabla de transbordo, directamente a partir de una red similar a la dada en la figura 6-4.

IMPRESIONES
CENTRO DE ESTUDIANTES
FACULTAD DE INGENIERÍA

Tabla 6-28

	3	4	5	6	7	
1	3; x_{13}	4; x_{14}	M	M	M	1 000
2	2; x_{23}	5; x_{24}	M	M	M	1 200
3	0; x_{33}	7; x_{34}	8; x_{35}	6; x_{36}	M	B
4	M	0; x_{44}	M	4; x_{46}	9; x_{47}	B
5	M	M	0; x_{55}	5; x_{56}	M	B
6	M	M	M	0; x_{66}	3; x_{67}	B
	B	B	$800 + B$	$900 + B$	500	

Haciendo $B = 2\ 200$ y usando los valores de costo mostrados en la tabla 6-28, empleando TORA obtenemos la solución óptima mostrada en la figura 6-5. El nodo 3 de distribución recibe 1 200 autos del nodo planta 2 y el nodo 4 de distribución recibe 1 000 autos del nodo planta 1. De los 1 200 autos recibidos en el nodo 3,800 se envían para cubrir la demanda del nodo agente 5 y 400 al nodo agente 6. El nodo agente 6 también recibe 1 000 autos del nodo de distribución 4, guarda 900 autos para la demanda local y envía el excedente de 500 autos al nodo agente 7. Los nodos 3, 4 y 6 muestran el concepto de transbordo en la red.

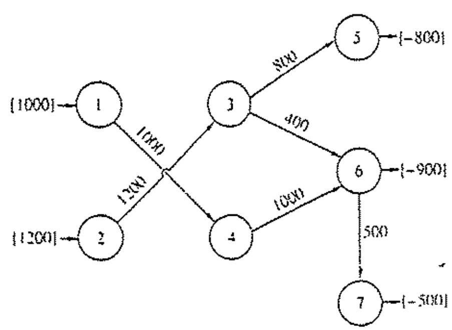

Figura 6-5

Ejercicio 6.4-1

Modifique el modelo de transbordo en la figura 6-4 para tomar en cuenta el siguiente cambio: el centro de distribución 3 tiene un suministro extra de 20 autos y los agentes 6 y 7 necesitan 10 autos adicionales cada uno.

[*Resp.*: $B = 2\ 220$, el suministro del renglón 3 en la tabla de transbordo es $20 + B$ y las demandas en las columnas de los nodos 6 y 7 son $910 + B$ y 510, respectivamente.]

Ejercicio 6.4-2

Verifique algebraicamente que con base en el modelo PL de la tabla 6-27, las cantidades de oferta y demanda en la tabla 6-28, se pueden cambiar en forma equivalente como sigue:

Nodo	1	2	3	4	5	6	7
Unidades de oferta	1000	1200	B	B	$-800 + B$	$-900 + B$	—
Unidades de demanda	—	—	B	B	B	B	500

Ahora mostraremos cómo un problema que en principio parece no tener relación con el modelo de transbordo, puede convertirse a ese formato por medio de un planteo adecuado.

Ejemplo 6.4-1 (Programación de empleo)

Una agencia de empleos debe proporcionar los siguientes trabajadores semiespecializados en los próximos 5 meses:

Mes	1	2	3	4	5
Número de trabajadores	100	120	80	170	50

Debido a la fluctuación en la demanda, sería más económico mantener más trabajadores de los necesarios durante algunos meses del periodo de planeación. La compañía estima que el costo de reclutamiento y mantenimiento de los trabajadores, es una función del tiempo de permanencia con la agencia. La siguiente tabla resume esta estimación:

Duración del periodo de empleo (meses)	1	2	3	4	5
Costo por trabajador (unidad monetaria)	100	130	180	220	250

Primero formulamos el problema como un programa lineal; luego, empleando el álgebra demostramos que el modelo resultante equivale a un problema de transbordo. Sea x_{ij} el número de trabajadores contratados al *principio* del periodo i y liquidados al *principio* del periodo j. Por ejemplo, x_{12} es el número de trabajadores contratados por un periodo al principio del mes 1, y x_{36} es el número de trabaja-

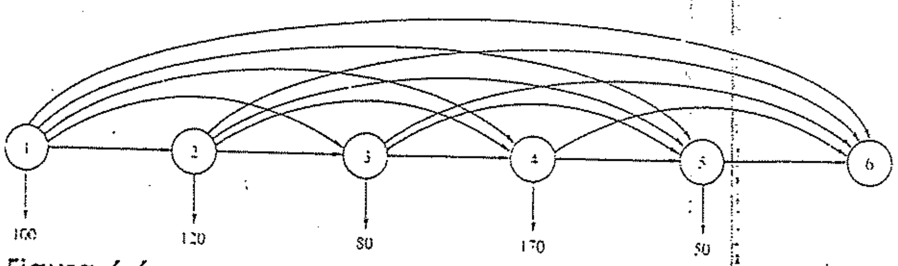

Figura 6-6

dores contratados al principio del mes 3 y liquidados al principio del mes 6 (en forma equivalente, al final del mes 5). La figura 6-6 define los arcos factibles del problema. Observe que se agrega el nodo 6 para permitirnos definir las variables que terminan al final del periodo de planeación (final del mes 5 o en forma equivalente, el principio del mes ficticio 6). El modelo de PL asociado se resume en la tabla 6-29.

Sean S_1, S_2, S_3, S_4 y S_5 las variables de exceso asociadas con las restricciones 1, 2, 3, 4 y 5 en la tabla 6-29. El problema aparece esquematizado en la tabla 6-30.

El último PL no tiene el formato de un modelo de transbordo. Sin embargo, las ecuaciones se pueden transformar fácilmente a este formato, llevando a cabo las siguientes operaciones algebraicas:

Deje la ecuación (1) sin cambio.
Reemplace (2) por (2) − (1).
Reemplace (3) por (3) − (2).
Reemplace (4) por (4) − (3).
Reemplace (5) por (5) − (4).
Agregue una nueva ecuación que corresponda a − (5).

Tabla 6-29

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	
	100	130	180	220	250	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100	mín
(1)	1	1	1	1	1											[illegible]
(2)		1	1	1	1	1	1	1	1							≥ 120
(3)			1	1	1		1	1	1	1	1	1				≥ 80
(4)				1	1			1	1		1	1	1	1		≥ 170
(5)					1				1			1		1	1	≥ 50

Tabla 6-30

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
100	130	180	220	250	100	120	180	220	100	130	180	100	130	100						mín
1	1	1	1	1											−1					100
	1	1	1	1	1	1	1	1								−1				120
		1	1	1		1	1	1	1	1	1						−1			80
			1	1			1	1		1	1	1	1					−1		170
				1				1			1		1	1					−1	50

Tabla 6-31

x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	x_{45}	x_{46}	x_{56}	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
100	130	180	220	250	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100						min
1	1	1	1	1											−1					100
−1					1	1	1	1							1	−1				20
	−1				−1				1	1	1					1	−1			−40
		−1				−1			−1			1	1				1	−1		90
			−1				−1			−1		−1		1				1	−1	−120
				−1				−1			−1		−1	−1					1	−50

En la tabla 6-31 se muestra el PL resultante (equivalente). Note que la nueva formulación tiene la estructura de un modelo de transbordo (cada columna tiene exactamente un "+1" y un "−1"; compárelo con el PL de la tabla 6-27).

Si reemplazamos S_1 por x_{21}, S_2 por x_{32}, S_3 por x_{43}, S_4 por x_{54} y S_5 por x_{65}, el PL de la tabla 6-31 se transformará directamente en el modelo de transbordo, como se muestra en la tabla 6-32. La magnitud del amortiguamiento B se puede tomar igual a la suma de todas las demandas durante el periodo total de planeación, esto es, $B = 520$. Utilizando el procedimiento dado al principio de esta sección, para definir el amortiguamiento B, las cantidades de oferta y demanda del modelo en la tabla 6-32 son como sigue (verifíquelo):

Nodo	1	2	3	4	5	6
Unidades de oferta	$100 + B$	$20 + B$	B	$90 + B$	B	B
Unidades de demanda	B	B	$40 + B$	B	$120 + B$	$50 + B$

Estos valores se obtienen directamente del modo como se definen las ecuaciones de PL. Entonces, el PL y las formulaciones de transbordo deben dar resultados idénticos (verifíquelo usando TORA). ◀

Tabla 6-32

	1	2	3	4	5	6	
1	0	100	130	180	220	250	$100 + B$
2	0	0	100	130	180	220	$20 + B$
3	M	0	0	100	130	180	B
4	M	M	0	0	100	130	$90 + B$
5	M	M	M	0	0	100	B
6	M	M	M	M	0	0	B
	B	B	$40 + B$	B	$120 + B$	$50 + B$	

CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejercicio 6.4-3

Verifique algebraicamente que, con base en el modelo PL de la tabla 6-30, las cantidades de oferta y demanda en la tabla 6-32 pueden cambiarse en forma equivalente como sigue:

Nodo	1	2	3	4	5	6
Unidades de oferta	$100 + B$	$20 + B$	$-40 + B$	$90 + B$	$-120 + B$	$-50 + B$
Unidades de demanda	B	B	B	B	B	B

La solución óptima del problema se resume gráficamente en la figura 6-7. Se necesita el siguiente criterio de contrataciones y despidos:

Contrataciones al inicio del periodo	Despidos al inicio del periodo	Número de trabajadores
1	5	100
2	5	20
4	6	50

Observe que la solución da $x_{43} = 40$. Por definición, x_{43} es realmente la variable de exceso S_3, y su valor positivo indica que para los costos dados es más económico retener 40 trabajadores adicionales, a los 80 necesarios durante el periodo 3.

Ejercicio 6.4-4

Demuestre cómo la solución en la figura 6-7 satisface los requisitos de demanda para el periodo de planeación de 5 meses.

6.5 RESUMEN

En un sentido obvio, el modelo de transporte tiene que ver con el acarreo de bienes entre localidades geográficas. [illegible] amplían la utilidad del modelo a otras áreas no convencionales, incluido el modelo

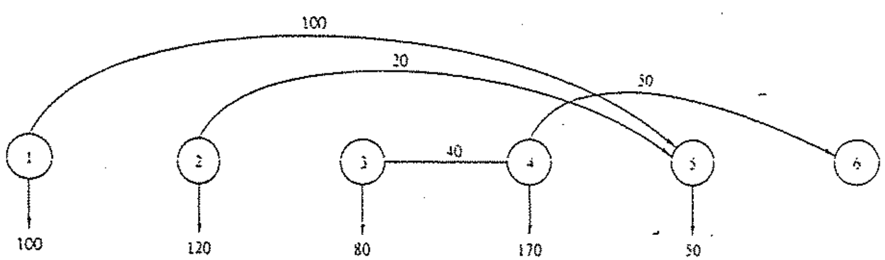

Figura 6-7

de inventario de producción del proveedor, de asignación y de la programación de empleos.

El modelo de transporte es un PL especial cuya estructura característica permite la creación de una técnica computacional eficiente para resolver el problema. La técnica se basa directamente en la teoría de la dualidad de la programación lineal. Los modelos afines también incluyen los problemas de asignación y de transbordo.

El modelo de transporte y sus variantes sólo son una clase de los modelos de redes generalizados (véase el capítulo 8). En la práctica, los modelos de redes parecen tener un éxito rotundo en la solución de problemas del mundo real. Algunos estudios recientes reportan que quizá el 70% de los problemas de programación matemática reales pueden tratarse como si fueran redes o como problemas relacionados con redes.

BIBLIOGRAFIA

Bazaraa, M., J. Jarvis, y H. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, 2da. ed., Wiley, Nueva York, 1990.

Dantzig, G., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

Elmaghraby, S. E., *The Design of Production Systems*, Reinhold, Nueva York, 1966. cap. 4.

Phillips, D., y A. Garcia-Diaz, *Fundamentals of Network Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1981.

PROBLEMAS

Sección	Problemas asignados
6.1	6-1 a 6-11
6.2.1	6-12 a 6-22, 6-41, 6-42
6.2.2	6-23 a 6-25
6.3	6-26 a 6-32
6.4	6-33 a 6-40

□ 6-1 Tres plantas generadoras de energía eléctrica, con capacidades de 25, 40 y 30 millones de kilowatts-hora (kWh), suministran electricidad a tres ciudades cuyas demandas máximas son de 30, 35 y 25 millones de kWh. El costo en unidades monetarias (u.m.) de la venta de corriente eléctrica a las diferentes ciudades, por millón de kWh, es como sigue:

Las fechas de entrega pueden satisfacerse agregando las restricciones siguientes. Suponga que la operación j debe terminarse en el tiempo d_j, entonces

$$x_j + a_j \leq d_j$$

Ahora, si t es el tiempo total necesario para terminar las n operaciones, el problema será

$$\text{minimizar } z = t$$

sujeto a

$$x_j + a_j \leq t, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

junto con las restricciones de secuencia, de no interferencia y de fecha de entrega anteriores.

9.1.4 DICOTOMIAS

Suponga que en cierta situación se necesita que *cualesquiera* k de m restricciones pudiera ser activa. Sin embargo, las restricciones específicas que deben ser impuestas, no se conocen de antemano. Esta situación puede considerarse como sigue. Sean las m restricciones de la forma

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Por definición

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{si la } i\text{-ésima restricción es activa} \\ 1, & \text{si la } i\text{-ésima restricción es inactiva} \end{cases}$$

Por consiguiente, cualesquiera k de las m restricciones se garantiza que son activas si, para una M suficientemente grande

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i + My_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

y

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = m - k$$

donde $y_i = 0$ o 1 para toda i. Esto demuestra que para $m - k$ restricciones, su segundo miembro asociado será de la forma $b_i + M$, lo cual hace la restricción redundante. Es importante notar que la formulación anterior elegirá el conjunto de restricciones *activas* que proporcionen el mejor valor de la función objetivo.

Una situación relacionada ocurre cuando en el segundo miembro de una sola restricción es indispensable que tenga *uno* de varios valores; o sea,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_1, b_2, \ldots, \text{ o bien } b_r$$

Esto puede lograrse transformando la restricción a

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \sum_{k=1}^{r} b_k y_k$$

y

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_r = 1$$

donde

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{si } b_k \text{ es el segundo miembro de la desigualdad} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Otra aplicación de programación entera para la aproximación de una función no lineal de una sola variable se da en la sección 20.2.1

9.2 METODOS DE SOLUCION DE PROGRAMACION ENTERA

En la PL, el método símplex se basa en aceptar que la solución óptima ocurre en un punto extremo del espacio de soluciones. Este poderoso resultado reduce la búsqueda de la solución óptima de un número infinito a un número finito de soluciones posibles. Por otra parte, la PLE comienza con un número finito de puntos solución (suponga un PLE puro acotado). Sin embargo, la naturaleza entera de las variables hace difícil diseñar un algoritmo eficaz que localice los puntos enteros factibles del espacio de soluciones. En vista de esta dificultad, los investigadores han creado un procedimiento de solución que se basa en el gran éxito obtenido al resolver problemas de PL. La estrategia de este procedimiento se puede resumir en tres pasos:

1. Relajar el espacio de soluciones del problema entero, ignorando las restricciones enteras por completo. Este paso convierte el PLE en un PL regular.
2. Resolver el modelo PL "relajado" e identificar su punto óptimo (continuo).
3. Comenzando con el punto óptimo continuo, agregar restricciones especiales que fuercen iterativamente el punto extremo óptimo del modelo PL resultante, hacia las restricciones enteras deseadas.

La razón para comenzar la búsqueda del PLE óptimo en el PL óptimo continuo que existe la posibilidad de que ambas soluciones resulten cercanas entre sí, y

IMPRESIONES CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

que de esta manera aumente la posibilidad de localizar rápidamente la solución entera. La característica principal del procedimiento propuesto es que resuelve problemas sucesivos de PL, que son más accesibles desde el punto de vista del cálculo que los problemas de PLE.

Existen dos métodos para generar las restricciones especiales que fuercen la solución óptima del problema PL relajado, hacia la solución entera deseada:

1. Método de ramificar y acotar.
2. Método del plano de corte.

En ambos métodos las restricciones agregadas eliminan partes del espacio de soluciones relajado, *pero nunca alguno de los puntos enteros factibles.* Desafortunadamente, ninguno de los dos métodos es efectivo en la solución de problemas de PLE. No obstante, los métodos de ramificar y acotar son mucho mejores en cuanto al cálculo se refiere que los métodos del plano de corte. Por esta razón, la mayoría de los códigos comerciales se basan en el procedimiento de ramificar y acotar.

Otra técnica para resolver programas enteros binarios (cero-uno) es el método llamado de **enumeración implícita**. Este método se incorporó en 1965, después de que los dos métodos anteriores se habían utilizado por lo menos durante 5 años, y se presentó como una "nueva dirección" para la solución del problema general de PLE, por medio de una conversión a una PLE binaria. Sin embargo, veremos más adelante que la enumeración implícita es, en realidad, un caso especial del método más general de ramificar y acotar.

Históricamente, los métodos del plano de corte fueron los primeros en aparecer en tratados de Investigación de Operaciones (IO). Sin embargo, comenzaremos nuestra exposición con el procedimiento de ramificar y acotar, debido a su importancia práctica.

9.3 ALGORITMO DE RAMIFICAR Y ACOTAR

En este momento será más conveniente explicar los fundamentos del algoritmo de ramificar y acotar (R y A), por medio de un ejemplo numérico. Al ejemplo le seguirá un resumen de los pasos del algoritmo.

(Fundamentos de R y A)

Considere el siguiente problema de PLE:

$$\text{maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ y entero}$$

En la figura 9-1 se muestra el espacio de soluciones de la PLE representado por puntos. El espacio de soluciones de PL asociado, PL0, se define por cancelación

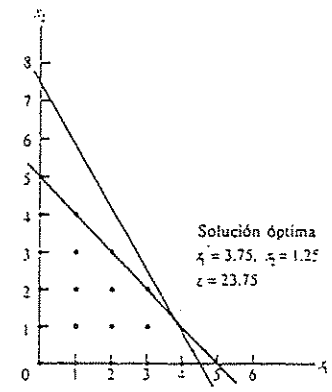

Figura 9-1

de las restricciones enteras. La solución óptima PL0 se da en la figura 9-1 como $x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$ y $z = 23.75$.

El procedimiento R y A se basa en tratar sólo con el problema PL. Como la solución óptima PL ($x_1 = 3.75$, $x_2 = 1.25$, $z = 23.75$) no satisface la necesidad de valores enteros, el algoritmo de R y A exige "modificar" el espacio de soluciones PL en forma tal, que nos permita identificar, finalmente, la solución óptima de la PLE. Primero seleccionamos una de las variables cuyo valor corriente en la solución óptima PL0 infringe el requisito de valor entero. Seleccionando x_1 (= 3.75) arbitrariamente, observamos que la región ($3 < x_1 < 4$) del espacio de soluciones PL0 no puede, por definición, incluir ninguna solución factible PLE. Entonces podemos modificar el espacio de soluciones PL eliminando esta región no prometedora, lo que, en realidad, es equivalente a reemplazar el espacio original PL0 por dos espacios PL, los PL1 y PL2, definidos de la manera siguiente:

1. Espacio PL1 = espacio PL0 + ($x_1 \leq 3$)
2. Espacio PL2 = espacio PL0 + ($x_1 \geq 4$)

[illegible] dos espacios contienen los mismos puntos enteros factibles del modelo PLE. Esto significa que, desde el punto de vista del problema original de PLE, tratar con PL1 y PL2 es igual que tratar con el original PL0. La diferencia principal es que la selección de las nuevas restricciones de acotamiento ($x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$) mejorarán la oportunidad de forzar a los puntos extremos óptimos de PL1 y PL2 hacia la satisfacción del requisito de valor entero. Además, el hecho que las restricciones de acotamiento están en la "vecindad inmediata" del óptimo continuo del PL0, incrementará las posibilidades de producir "buenas" soluciones enteras.

Como se puede ver en la figura 9-2, que las nuevas restricciones $x_1 \leq 3$ y $x_1 \geq 4$ son mutuamente excluyentes, PL1 y PL2 deben tratarse como dos programas lineales separados. Esta dicotomización da lugar al concepto de **ramificación** en el algoritmo de R y A. En efecto, ramificar significa subdividir un espacio de solu-

IMPRESIONES CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

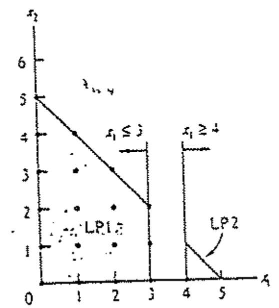

Figura 9-2

ciones corriente en subespacios mutuamente excluyentes. La figura 9-3 demuestra la creación de PL1 y PL2 a partir del PL. Las ramas asociadas se definen por las restricciones $x_1 \le 3$ y $x_1 \ge 4$, donde x_1 se denomina variable de ramificación.

Sabemos que la solución óptima del PLE debe encontrarse en el PL1 o en el PL2. Sin embargo, en ausencia del espacio gráfico de soluciones, no tenemos manera de determinar dónde puede encontrarse la solución óptima, por lo que nuestra única opción es investigar *ambos* problemas. Hacemos esto trabajando con un problema a la vez (PL1 o PL2). Supongamos que escogemos arbitrariamente al PL1, asociado con $x_1 \le 3$. En efecto, debemos resolver el siguiente problema:

$$\text{maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 5 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 45 \\ x_1 \qquad &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

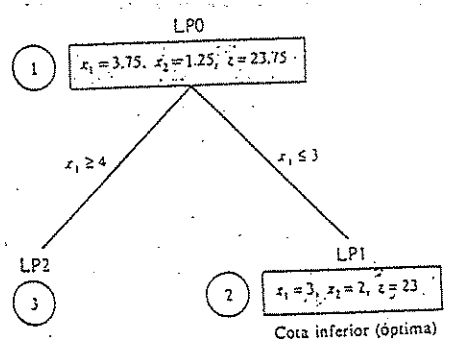

Figura 9-3

Como se indicó antes, el PL1 es el mismo que el PL0 con la restricción adicional $x_1 \le 3$. Así, podemos aplicar el algoritmo primal de acotamiento superior (sección 7.1) para resolver el problema. Esto da la nueva solución óptima

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 2 \qquad \text{y} \qquad z = 23$$

Como esta solución satisface el requisito de valor entero, se dice que el PL1 está agotado, vacío, lo que significa que el PL1 no puede producir ninguna solución *mejor* del PLE y no necesita investigarse más a fondo.

Determinar una solución factible entera en una etapa temprana de los cálculos es crucial para incrementar la eficiencia del algoritmo R y A. Tal solución fija una cota inferior al valor objetivo óptimo del problema PLE, que a su vez, se puede usar para descartar automáticamente cualesquiera subproblemas no explorados (como el PL2) que no dan una *mejor* solución entera. En términos de nuestro ejemplo, el PL1 produce la cota inferior $z = 23$. Esto significa que cualquier solución entera *mejorada* debe tener un valor de z mayor que 23. Sin embargo, como la solución óptima del problema PL0 (original) tiene $z = 23.75$ y *como todos los coeficientes de la función objetivo son enteros,* se infiere que ningún subproblema que proceda del PL0 puede producir un valor de z mejor que 23. En consecuencia, sin ulterior investigación, podemos descartar al PL2. En este caso se dice que el PL2 *está agotado* porque no puede dar una mejor solución entera.

Del análisis anterior vemos que un subproblema está *agotado* si se satisface una de las siguientes condiciones:

1. El subproblema da una solución factible entera del problema PLE.
2. El subproblema no puede dar una mejor solución que la mejor cota inferior disponible (valor z) del problema PLE. (Un caso especial de esta condición es que el subproblema no tendrá ninguna solución factible en absoluto.)

En nuestro ejemplo, PL1 y PL2 están agotados por las condiciones 1 y 2, respectivamente. Como no hay más subproblemas por investigar, el procedimiento termina y la solución entera óptima del problema PLE es la asociada con la cota inferior ..., esto es, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ y $z = 23$.

Si el lector analiza cuidadosamente el procedimiento ... descubrirá que un cierto número de preguntas ha quedado sin respuesta:

1. En el PL0, ¿podríamos haber seleccionado x_2 como la variable de ramificación, en vez de x_1?
2. Al seleccionar el siguiente subproblema por investigar, ¿podríamos haber resuelto primero el PL2 en vez del PL1?

La respuesta para ambas preguntas es "sí", pero los detalles de cálculo resultantes diferirían considerablemente. Ilustraremos este punto haciendo referencia a la figura 9-3. Suponga que decidimos investigar primero el PL2. La figura 9-4 da la solución resultante: $x_1 = 4$, $x_2 = 0.8333$, $z = 23.3333$ (verifíquelo con TORA). Como $x_2 = 0.83333$ no es entero, el PL2 debe investigarse más a fondo creándose el PL3 y el PL4, y usando las ramas respectivas $x_2 \geq 0$ y $x_2 \geq 1$. Esto significa que

$$\text{espacio PL3} = \text{espacio PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0)$$
$$\text{espacio PL4} = \text{espacio PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \geq 1)$$

En este momento tenemos para escoger tres subproblemas, el PL1, PL3 y PL4. (Observe nuevamente que estos tres subproblemas incluyen todas las soluciones enteras factibles del problema original PLE.) Si seleccionamos arbitrariamente el PL4, descubrimos que no tiene solución factible y por ello está agotado. A continuación seleccionamos (arbitrariamente) el PL3 para investigarlo. Su solución la da $x_1 = 4.5$, $x_2 = 0$ y $z = 22.5$. Como $x_1 = 4.5$ no es entero, creamos dos subproblemas, el PL5 y PL6 del PL4, usando las restricciones $x_1 \leq 4$ y $x_1 \geq 5$, respectivamente. Obtenemos entonces

$$\text{espacio PL5} = \text{espacio PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \leq 4)$$
$$\text{espacio PL6} = \text{espacio PL0} + (x_1 \geq 4) + (x_2 \leq 0) + (x_1 \geq 5)$$

Tenemos ahora el PL1, PL5 y PL6, y escogemos arbitrariamente el PL6 para investigarlo. Como el PL6 no tiene solución factible, está agotado. A continuación escogemos el PL5 cuya solución óptima ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$) satisface el requisito de valor entero. Finalmente, hemos encontrado una solución entera que fija una cota inferior ($z = 20$) a la solución entera óptima. Desafortunadamente, esta cota inferior es "muy débil" y "muy tardía" para ser útil. El único nodo restante, el PL1, queda agotado a continuación con $z = 23$, lo que fija una nueva cota inferior. Como no quedan ya subproblemas por investigar, la última cota inferior asocia la solución óptima del PLE con el PL1.

La peor secuencia posible de solución, mostrada en la figura 9-4, se ha escogido intencionalmente para evidenciar una de las principales debilidades del algoritmo R y A. Esto es, en un subproblema específico, ¿cómo seleccionamos a la variable de ramificación? y, de entre todos los subproblemas no explorados, ¿cuál debe investigarse a continuación? Observe que en la figura 9-3, encontramos una buena cota inferior en el primer subproblema PL1, lo que nos permitió declarar agotado al PL2 sin ninguna investigación ulterior. Básicamente, el problema PLE se resolvió investigando sólo un subproblema. En el caso de la figura 9-4 tuvimos que resolver seis subproblemas antes de [illegible] El caso extremo de la figura 9-4 no es raro y puede encontrarse en situaciones reales. Aunque existen muchos métodos heurísticos para aumentar la habilidad del algoritmo R y A de "ver adelante" y hacer una buena "conjetura", respecto a si una rama dada conducirá a una solución mejorada del PLE, no existe una teoría consistente que produzca resultados concretos uniformes para la solución del problema general de PLE. ◀

Resumiremos ahora los pasos del algoritmo R y A. Suponiendo un problema de maximización, definimos z como la cota inferior de la solución entera óptima del problema de PLE. Hacemos inicialmente $z = -\infty$ e $i = 0$.

Paso 1: Agotamiento y ramificación. Seleccione PLi como el próximo subproblema por investigarse. Resuelva el PLi y trate de agotarlo usando las condiciones apropiadas.

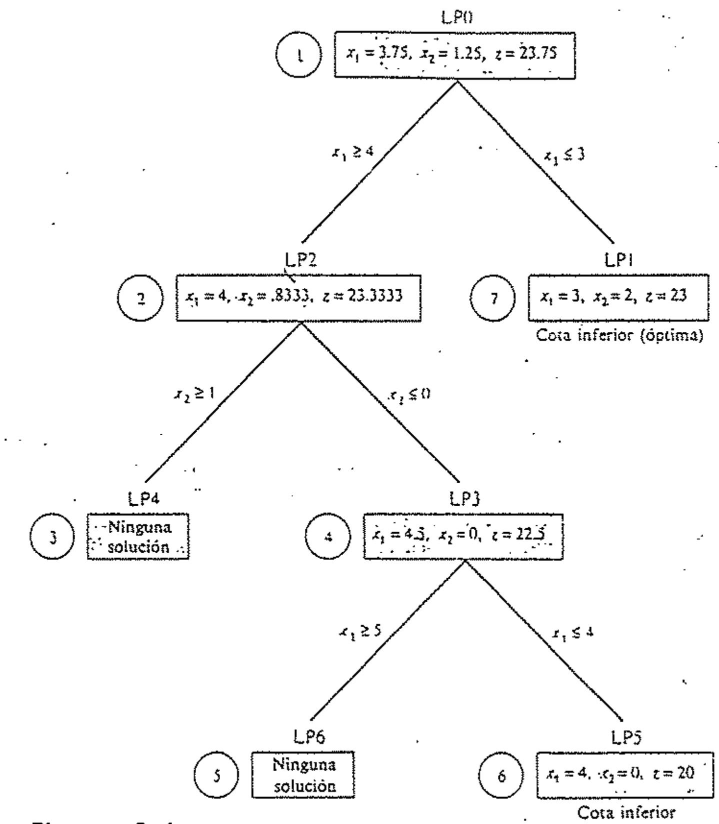

Figura 9-4

(a) Si el PLi se declara agotado (solución inferior, infactible o entera), ponga al día la cota inferior z si se encuentra una mejor solución del PLE; si no es así, seleccione un nuevo subproblema i y repita el paso 1. Si todos los subproblemas se han investigado, deténgase; la solución óptima del PLE está asociada con la última cota inferior z, en caso de que ésta exista. Si no es así,

(b) si el PLi no está agotado, siga con el paso 2 para efectuar la ramificación del PLi.

Paso 2: Ramificación. Seleccione una de las variables x_j cuyo valor óptimo x_j^* en la solución del PLi no satisfaga la restricción de valor entero. Elimine la región $[x_j^*] < x_j < [x_j^*] + 1$ (donde [A] define al mayor entero $\leq$ A), creando dos subproblemas PL que correspondan a las dos siguientes restricciones mutuamente excluyentes:

$$x_j \leq [x_j^*] \quad \text{y} \quad x_j \geq [x_j^*] + 1$$

Vuelva al paso 1.

IMPRESIONES CENTRO DE ESTUDIANTES FACULTAD DE INGENIERÍA

Ejercicio 9.3-1

Modifique el algoritmo R y A para adaptarlo a problemas de minimización.

[*Resp.*: Reemplace la cota inferior $\underline{z}$ por una cota superior $\bar{z}$. Inicialmente, $\bar{z} = +\infty$. Todos los demás detalles permanecen sin cambio.]

Ejercicio con la computadora

Resuelva el problema del ejemplo 9.3-1 comenzando con x_2 como la variable de ramificación. Utilice TORA con la opción MODIFY en las cotas superior e inferior para resolver los subproblemas resultantes. Comience el procedimiento resolviendo el subproblema asociado con la cota superior $x_2 \leq [x_2^*]$.

El algoritmo R y A se puede aplicar a problemas enteros puros y mixtos. Si una variable no está restringida a valores enteros, simplemente nunca la seleccionamos como variable de ramificación. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo 9.3-1 sólo la variable x_1 está restringida a valores enteros, lo que significa que x_2 es continua. En este caso, como el PL1 en la figura 9-3 da un valor entero para x_1 (= 3), los valores z asociados proporcionan una cota inferior legítima $z = 23$. Sin embargo, no es posible declarar agotado a PL2 con base en esta información solamente, ya que el valor óptimo de z para el PLE original puede ahora suponer un valor fraccionario. Debemos entonces resolver el PL2. Como puede verse en la figura 9-4, PL2 da un valor entero para x_1 (= 4), como se deseaba. Esto significa que el PL2 está agotado. Sin embargo, como $z = 23.3333$ en el PL2, la nueva cota inferior es $z = 23.3333$. El proceso termina en este momento y el PL2 da la solución óptima deseada.

Ejercicio 9.3-2

Suponga que comenzamos en la figura 9-3 resolviendo el PL2. ¿Es suficiente la información obtenida del PL2 para declarar agotado al PL1, sin tener que resolver realmente su programa lineal asociado?

[*Resp.*: No, porque el PL1 está agotado con base en su valor objetivo óptimo ($z = 23$) relativo a la cota inferior corriente $z = 23.3333$.]

Cálculos en métodos de ramificar y acotar

Los paquetes prácticos de computadora basados en la técnica de ramificar y acotar difieren de la parte anterior, principalmente en los detalles al seleccionar las variables ramificadoras en un nodo y la secuencia con que se generan los subproblemas. Estas reglas están basadas en métodos heurísticos desarrollados por medio de la experimentación.

Una desventaja básica del algoritmo R y A dada antes es que es necesario resolver un programa lineal completo en cada nodo. En problemas grandes, esto podría consumir mucho tiempo, sobre todo cuando la única información necesaria en el nodo puede ser su valor óptimo de la función objetivo. Este punto se aclara notando que una vez que se obtiene una "buena" cota, "muchos" nodos podrían descartarse del conocimiento de sus valores objetivos óptimos.

El punto anterior llevó a la creación de un procedimiento donde llega a ser innecesario resolver todos los subproblemas del árbol de ramificar y acotar. La idea es "estimar" una cota *superior* (suponga un problema de maximización) sobre el valor óptimo de la función objetivo en cada nodo. Si esta cota superior es más pequeña que el valor de la función objetivo asociado con la mejor solución entera disponible, entonces se descarta el nodo. La principal ventaja es la estimación rápida de estas cotas superiores con cálculos mínimos. La idea general es estimar las penalizaciones (esto es, el deterioro en el valor de la función objetivo) que resultan al introducir las condiciones $x_k \leq [\beta_k]$ y $x_k \geq [\beta_k] + 1$. Esto puede lograrse aumentando cada una de estas restricciones a la tabla óptima en el nodo (con el cual está asociada x_k). Entonces, *bajo la hipótesis de ningún cambio en la base*, la penalización requerida puede estimarse directamente a partir de los coeficientes de la función objetivo (véase el problema 9-32).

Aunque las penalizaciones son fáciles de calcular, tienen la desventaja de que no necesariamente son proporcionales al deterioro *real* del valor objetivo. En otras palabras, no proveen una cota exacta y entonces pueden no ser efectivas. Se han hecho varios intentos para "reforzar" estas penalizaciones. El más interesante de éstos es el que utiliza información de los métodos de corte (véase la sección 9.4). Sin embargo, aun estas penalizaciones "reforzadas" parecen ser inefectivas en cuanto al cálculo, en particular cuando el tamaño del problema aumenta. Parece que los paquetes comerciales han abandonado el uso de penalizaciones simples en favor de métodos heurísticos que han probado, a través de la experimentación con problemas grandes y complejos, ser muy efectivos [véase Taha (1975), págs. 165-171].

Independientemente de las desventajas del método de ramificar y acotar, puede establecerse que, a la fecha, estos métodos son los más efectivos para resolver problemas enteros de gran tamaño que se presentan en la práctica. Decididamente, todos los paquetes comerciales disponibles están basados en el método de ramificar y acotar. Esto *no* significa, sin embargo, que *cada* problema entero pueda resolverse con un método de ramificar y acotar. Unicamente quiere decir que cuando la elección está entre un método de corte y uno de ramificar y acotar, generalmente se ha comprobado que el último es superior.

9.4 ALGORITMOS DE PLANOS DE CORTE

El concepto de plano de corte se ilustrara primero con un ejemplo. Considere el problema de programación lineal entera

$$\text{maximizar } z = 7x_1 + 9x_2$$

sujeto a

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$7x_1 + x_2 \leq 35$$
$$x_1, x_2 \text{ enteros no negativos}$$

La solución continua óptima (ignorando la condición discreta) se muestra gráficamente en la figura 9-5. Está dada por $z = 63$, $x_1 = 9/2$, y $x_2 = 7/2$, la cual no es entera.