Université de Liège

Projet 2 - Ligne de production

Éléments du Calcul des Probabilités

François Rozet (s161024)
Jules Remes (s162964)

2ème année de Bachelier Ingénieur civil

Année académique 2017 - 2018

1 Manipulation des lois de probabilités

1.a Lois de probabilités marginales

Pour déterminer la probabilité qu'une variable aléatoire (discrète) $\mathcal{X}$ prenne une valeur spécifique de son domaine, il faut considérer tous les cas où elle prend cette valeur et additionner leur probabilité d'occurrence individuelle.

Ce processus est implémenté dans le script `Q1a.m`[1] par le biais d'une contraction sommatoire sur deux indices. Les résultats sont exposés dans la(es) table(s) 1.

$\mathcal{M}$	$P(\mathcal{M})$
1	$\frac{7}{20}$
2	$\frac{37}{100}$
3	$\frac{3}{25}$
4	$\frac{4}{25}$

$\mathcal{F}$	$P(\mathcal{F})$
1	$\frac{17}{50}$
2	$\frac{31}{100}$
3	$\frac{7}{20}$

$\mathcal{C}$	$P(\mathcal{C})$
1	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{31}{100}$
3	$\frac{11}{50}$
4	$\frac{6}{25}$
5	$\frac{3}{100}$

Tableau 1 – Lois de probabilités marginales des variables $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

On remarque que les sommes des probabilités marginales associées aux valeurs respectivement admises par $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ valent toutes 1 vérifiant ainsi le second axiome de Kolmogorov.

$$\sum_i P(\mathcal{X} = x_i) = 1 \tag{1}$$

Puisque les trois axiomes sont établis, le premier et le troisième axiomes étant triviaux, il nous est permis d'utiliser les lois et théorèmes vus en cours pour étudier ce tableau dans le cadre du calcul de probabilité.

1.b Lois de probabilités conjointes

De façon équivalente à la sous-question précédente, pour établir la probabilité qu'un couple de variables aléatoires (discrètes) $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ représente un point spécifique de leur plan, il suffit de sommer les probabilités d'occurrence de tous les cas où il le représente.

En exécutant le script `Q1b.m`, qui effectue une contraction sommatoire sur un seul indice, on obtient les valeurs contenues dans le(s) tableau(x) 2.

1. Les scripts, et les fonctions qu'ils utilisent, sont disponibles dans l'annexe.

$P(\mathcal{M},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{M}$	1	$\frac{7}{100}$	$\frac{217}{2000}$	$\frac{77}{1000}$	$\frac{21}{250}$	$\frac{21}{2000}$
	2	$\frac{37}{500}$	$\frac{1147}{10000}$	$\frac{407}{5000}$	$\frac{111}{1250}$	$\frac{111}{10000}$
	3	$\frac{3}{125}$	$\frac{93}{2500}$	$\frac{33}{1250}$	$\frac{18}{625}$	$\frac{9}{2500}$
	4	$\frac{4}{125}$	$\frac{31}{625}$	$\frac{22}{625}$	$\frac{24}{625}$	$\frac{3}{625}$

$P(\mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{119}{1000}$	$\frac{217}{2000}$	$\frac{49}{400}$
	2	$\frac{629}{5000}$	$\frac{1147}{10000}$	$\frac{259}{2000}$
	3	$\frac{51}{1250}$	$\frac{93}{2500}$	$\frac{21}{500}$
	4	$\frac{34}{625}$	$\frac{31}{625}$	$\frac{7}{125}$

$P(\mathcal{F},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{F}$	1	$\frac{41}{500}$	$\frac{527}{5000}$	$\frac{407}{5000}$	$\frac{81}{1250}$	$\frac{4}{625}$
	2	$\frac{8}{125}$	$\frac{217}{2500}$	$\frac{187}{2500}$	$\frac{51}{625}$	$\frac{7}{2500}$
	3	$\frac{27}{500}$	$\frac{589}{5000}$	$\frac{319}{5000}$	$\frac{117}{1250}$	$\frac{13}{625}$

Tableau 2 – Lois de probabilités conjointes une à une des variables $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

On note que la somme de toutes les probabilités conjointes associées à une valeur fixe d'un des membres du couple est égale à la probabilité marginale de ce membre pour cette valeur.

$$\sum_j P(\mathcal{X} = x, \mathcal{Y} = y_j) = P(\mathcal{X} = x) \tag{2}$$

1.c Lois de probabilités conditionnelles

Pour déterminer les lois de probabilités conditionnelles, nous avons développé l'expression originale de l'énoncé à partir de la relation suivante.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cap P(B)}{P(B)} \tag{3}$$

Ainsi, on obtient une expression [2] facilement utilisable d'un point de vue numérique puisque autant le numérateur que le dénominateur sont connus.

$$\begin{aligned} P(\mathcal{M} = x|\mathcal{F} = y, \mathcal{C} = z) &= \frac{P(\mathcal{M} = x) \cap P(\mathcal{F} = y, \mathcal{C} = z)}{P(\mathcal{F} = y, \mathcal{C} = z)} \\ &= \frac{P(\mathcal{M} = x, \mathcal{F} = y, \mathcal{C} = z)}{P(\mathcal{F} = y, \mathcal{C} = z)} \end{aligned}$$

Pour simplifier le script `Q1c.m`, dont les résultats sont présentés dans la(es) table(s) 3, nous avons utilisé la fonction `shiftdim` sur la matrice `MFC` pour nous permettre d'effectuer une division « element-by-element » par le biais de la fonction `bsxfun`. Ce mécanisme est utilisé dans la plupart de nos scripts et il en est de même pour la contraction sommatoire sur les indices, déjà présente dans les premiers scripts.

2. Les expressions sont similaires pour $P(\mathcal{F}|\mathcal{M},\mathcal{C})$ et $P(\mathcal{C}|\mathcal{M},\mathcal{F})$.

$P(\mathcal{M}=1 \mid \mathcal{F},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{F}$	1	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$
	2	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$
	3	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{7}{20}$

$P(\mathcal{M}=2 \mid \mathcal{F},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{F}$	1	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$
	2	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$
	3	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{37}{100}$

$P(\mathcal{M}=3 \mid \mathcal{F},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{F}$	1	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$
	2	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$
	3	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$

$P(\mathcal{M}=4 \mid \mathcal{F},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{F}$	1	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
	2	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$
	3	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$

$P(\mathcal{F}=1 \mid \mathcal{M},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{M}$	1	$\frac{41}{100}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{16}{75}$
	2	$\frac{41}{100}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{16}{75}$
	3	$\frac{41}{100}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{16}{75}$
	4	$\frac{41}{100}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{37}{100}$	$\frac{27}{100}$	$\frac{16}{75}$

$P(\mathcal{F}=2 \mid \mathcal{M},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{M}$	1	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{7}{75}$
	2	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{7}{75}$
	3	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{7}{75}$
	4	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{17}{50}$	$\frac{7}{75}$

$P(\mathcal{F}=3 \mid \mathcal{M},\mathcal{C})$		$\mathcal{C}$				
		1	2	3	4	5
$\mathcal{M}$	1	$\frac{27}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{39}{100}$	$\frac{52}{75}$
	2	$\frac{27}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{39}{100}$	$\frac{52}{75}$
	3	$\frac{27}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{39}{100}$	$\frac{52}{75}$
	4	$\frac{27}{100}$	$\frac{19}{50}$	$\frac{29}{100}$	$\frac{39}{100}$	$\frac{52}{75}$

$P(\mathcal{C}=1 \mid \mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{41}{170}$	$\frac{32}{155}$	$\frac{27}{175}$
	2	$\frac{41}{170}$	$\frac{32}{155}$	$\frac{27}{175}$
	3	$\frac{41}{170}$	$\frac{32}{155}$	$\frac{27}{175}$
	4	$\frac{41}{170}$	$\frac{32}{155}$	$\frac{27}{175}$

$P(\mathcal{C}=2 \mid \mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{31}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{589}{1750}$
	2	$\frac{31}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{589}{1750}$
	3	$\frac{31}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{589}{1750}$
	4	$\frac{31}{100}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{589}{1750}$

$P(\mathcal{C}=3 \mid \mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{407}{1700}$	$\frac{187}{775}$	$\frac{319}{1750}$
	2	$\frac{407}{1700}$	$\frac{187}{775}$	$\frac{319}{1750}$
	3	$\frac{407}{1700}$	$\frac{187}{775}$	$\frac{319}{1750}$
	4	$\frac{407}{1700}$	$\frac{187}{775}$	$\frac{319}{1750}$

$P(\mathcal{C}=4 \mid \mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{81}{425}$	$\frac{204}{775}$	$\frac{234}{875}$
	2	$\frac{81}{425}$	$\frac{204}{775}$	$\frac{234}{875}$
	3	$\frac{81}{425}$	$\frac{204}{775}$	$\frac{234}{875}$
	4	$\frac{81}{425}$	$\frac{204}{775}$	$\frac{234}{875}$

$P(\mathcal{C}=5 \mid \mathcal{M},\mathcal{F})$		$\mathcal{F}$		
		1	2	3
$\mathcal{M}$	1	$\frac{8}{425}$	$\frac{7}{775}$	$\frac{52}{875}$
	2	$\frac{8}{425}$	$\frac{7}{775}$	$\frac{52}{875}$
	3	$\frac{8}{425}$	$\frac{7}{775}$	$\frac{52}{875}$
	4	$\frac{8}{425}$	$\frac{7}{775}$	$\frac{52}{875}$

Tableau 3 – Lois de probabilités conditionnelles des variables $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

1.d Dépendance entre variables aléatoires

En étudiant les résultats du script précédant, on peut affirmer que la variable $\mathcal{M}$ est indépendante de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{C}$ mais que ces dernières sont inter-dépendantes.

2 Probabilités des pannes

2.a Panne quelconque au cours du prochain moins

L'usine sera en panne au cours du mois prochain si au moins une panne à lieu. Or, la probabilité qu'un évènement se produise est égal à 1 diminué de la probabilité que l'évènement conjugué se produise.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \tag{4}$$

Dès lors la probabilité qu'au moins une panne ait lieu est égale à 1 moins la probabilité qu'il n'y ait pas de panne [3].

$$\begin{aligned} P(\text{panne}) &= 1 - P(\text{aucune panne}) \\ &= 1 - \texttt{MFC}(1, 1, 1) \\ &= 0{,}9713 \end{aligned}$$

2.b Panne du processus de fermentation uniquement

De la même manière que précédemment, la probabilité que le processus de fermentation soit soumis à une panne en sachant que les autres ne le seront pas est égale à 1 diminué de la probabilité qu'il n'y soit pas soumis sous les mêmes conditions [4]. Or, cette dernière valeur, nous l'avons déjà calculée dans la section 1.c (cf. table 3).

$$\begin{aligned} P(\mathcal{F} \neq 1 | \mathcal{M} = 1, \mathcal{C} = 1) &= 1 - P(\mathcal{F} = 1 | \mathcal{M} = 1, \mathcal{C} = 1) \\ &= 0{,}59 \end{aligned}$$

3. Voir l'implémentation dans le script `Q2a.m`.
4. Voir l'implémentation dans le script `Q2b.m`.

3 Coût moyen des pannes

3.a Coûts moyens de réparation

Le coût moyen lié à la nécessité de réparer une machine est, en fait, la définition de l'espérance liée à ce coût. Dès lors, pour l'obtenir, il suffit de calculer cette dernière.

$$E\left\{\mathcal{X}\right\} = \sum_i x_i P(\mathcal{X} = x_i) \tag{5}$$

Pour ce faire, nous avons implémenté une fonction `getEsp` qui calcule cette somme à partir d'une matrice [5] des gains et de la matrice de leur probabilité respective.

Il nous est aussi demandé explicitement de calculer la variance du coût ce que nous faisons à partir d'une relation dérivée de sa définition.

$$\begin{aligned}
V\left\{\mathcal{X}\right\} &= E\left\{(X - E\left\{X\right\})^2\right\} && (6)\\
&= \sum_i \left(x_i - E\left\{X\right\}\right)^2 P(\mathcal{X} = x_i)\\
&= \sum_i {x_i}^2 P(\mathcal{X} = x_i) - 2E\left\{X\right\}\sum_i x_i P(\mathcal{X} = x_i) + E\left\{X\right\}^2 \sum_i P(\mathcal{X} = x_i)\\
&= E\left\{X^2\right\} - \cancel{2}E\left\{X\right\}E\left\{X\right\} + \cancel{E\left\{X\right\}^2}\\
&= E\left\{X^2\right\} - E\left\{X\right\}^2 && (7)
\end{aligned}$$

Les coûts nous étant fournis et leur probabilité marginale étant connue (cf. table 1), on les utilise directement dans le script `Q3a.m` pour obtenir les résultats suivants.

$\mathcal{X}$	$\mathcal{K}_\mathcal{M}$	$\mathcal{K}_\mathcal{F}$	$\mathcal{K}_\mathcal{C}$
$E\left\{\mathcal{X}\right\}$ [€]	$7{,}76 \times 10^3$	$9{,}09 \times 10^3$	$2{,}879 \times 10^4$
$V\left\{\mathcal{X}\right\}$ [€^{2}]	$4{,}230\,24 \times 10^7$	$5{,}588\,19 \times 10^7$	$3{,}955\,059 \times 10^8$

Tableau 4 – Espérance et variance des coûts de réparation pour chaque machine.

3.b Espérance de la fonction coût

i. Puisque nous connaissons les vecteurs coûts de chaque machine, il est facile de construire la matrice Φ dans laquelle chaque configuration possible est représentée. Par simplicité, dans le script `Q3b.m`, nous donnons à cette matrice la même forme que la matrice `MFC` qui est, par ailleurs, la matrice des probabilités respectives aux éléments de Φ.

   Ensuite, comme à la question précédente, on applique `getEsp` sur Φ et `MFC` ce qui nous donne les valeurs du tableau 5.

5. Une matrice de dimension n.

$\mathcal{X}$	ϕ
$E\{\mathcal{X}\}$ [€]	$4{,}564 \times 10^4$
$V\{\mathcal{X}\}$ [€^{2}]	$5{,}325\,216 \times 10^8$

Tableau 5 – Espérance et variance de la fonction coût.

ii. Concrètement, cette espérance représente le coût en réparation que l'entreprise *Bièrenoulli* devra payer chaque mois en moyenne.

iii. On sait que l'espérance d'une somme de variables aléatoires est égale à la somme des espérances de chaque variable.

$$E\left\{\sum_i \mathcal{X}_i\right\} = \sum_i E\{\mathcal{X}_i\} \tag{8}$$

Dès lors, puisque la fonction coût est déterminée par la somme de trois coûts, son espérance est égale à la somme des espérances individuelles de chaque coût.

$$\begin{aligned} E\{\phi\} &= E\{\mathcal{K}_\mathcal{M} + \mathcal{K}_\mathcal{F} + \mathcal{K}_\mathcal{C}\} \\ &= E\{\mathcal{K}_\mathcal{M}\} + E\{\mathcal{K}_\mathcal{F}\} + E\{\mathcal{K}_\mathcal{C}\} \end{aligned}$$

Cette relation est vérifiée par les calculs.

Quant à elle, la variance d'une somme de variables aléatoires est égale à la double somme de leurs covariances[6] une à une.

$$\begin{aligned} V\left\{\sum_i \mathcal{X}_i\right\} &= \sum_i \sum_j \operatorname{cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) && (9) \\ &= \sum_i \operatorname{cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \operatorname{cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) \\ &= \sum_i V\{\mathcal{X}_i\} + \sum_i \sum_{j \neq i} \operatorname{cov}(\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_j) && (10) \end{aligned}$$

Ainsi, pour que la variance totale soit égale à la somme des variances individuelles, il faut que chaque covariance croisée soit nulle[7] c.-à-d. que chaque variable soit indépendante des autres. Or, ce n'est pas le cas dans cet exemple.

3.c Espérance conditionnelle de la fonction coût

i. La seule différence entre cette question et la précédente est la matrice des probabilités qui est influencée par la condition. Dès lors, il nous suffit de manipuler `MFC` pour obtenir une nouvelle matrice et d'appliquer la fonction `getEsp` pour chaque valeur de $\mathcal{M}$[8].

6. D'après la définition de la covariance, lorsque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont égaux, elle est égale à leur variance.
7. La somme pourrait aussi être nulle par compensation des contributions, mais c'est un cas à part.
8. Dans le script `Q3c.m` nous avons implémenté les manipulations i, ii et iii pour $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

$\mathcal{X}$	$\phi(\mathcal{F},\mathcal{C}\vert\mathcal{M}=1)$	$\phi(\mathcal{F},\mathcal{C}\vert\mathcal{M}=2)$	$\phi(\mathcal{F},\mathcal{C}\vert\mathcal{M}=3)$	$\phi(\mathcal{F},\mathcal{C}\vert\mathcal{M}=4)$
$E\{\mathcal{X}\}$ [€]	$3{,}788\times10^4$	$4{,}988\times10^4$	$4{,}2880\times10^4$	$5{,}488\times10^4$
$V\{\mathcal{X}\}$ [€^{2}]	$4{,}902\,192\times10^8$	$4{,}902\,192\times10^8$	$4{,}902\,192\times10^8$	$4{,}902\,192\times10^8$

Tableau 6 – Espérance et variance de la fonction coût sachant $\mathcal{M}$.

On en déduit une nouvelle fois que la variable aléatoire $\mathcal{M}$ est indépendante de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

ii. Selon le théorème de l'espérance totale, l'espérance de l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ est la même que l'espérance de $\mathcal{X}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} &= \sum_i \left[\sum_j x_j P(\mathcal{X}=x_j|\mathcal{Y}=y_i)\right] P(\mathcal{Y}=y_i)\\
&= \sum_i \left[\sum_j x_j \frac{P(\mathcal{X}=x_j\cap\mathcal{Y}=y_i)}{\cancel{P(\mathcal{Y}=y_i)}}\right] \cancel{P(\mathcal{Y}=y_i)}\\
&= \sum_j x_j \underbrace{\sum_i P(\mathcal{X}=x_j\cap\mathcal{Y}=y_i)}_{P(\mathcal{X}=x_j)}\\
&= E\{\mathcal{X}\} \qquad (11)
\end{aligned}$$

■

Pour notre problème, ce théorème prend une forme légèrement différente.

$$\begin{aligned}
E\{\phi\} &= E\{E\{\phi|\mathcal{M}\}\}\\
&= \sum_i E\{\phi|\mathcal{M}=x_i\} P(\mathcal{M}=x_i)
\end{aligned}$$

En implémentant séparément les deux membres de cette relation, on s'aperçoit qu'elle est vérifiée.

iii. Selon le théorème de la variance totale, la somme de l'espérance de la variance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ et de la variance de l'espérance conditionnelle de $\mathcal{X}$ sachant $\mathcal{Y}$ est égale à la variance de $\mathcal{X}$.

Preuve.

$$\begin{aligned}
E\{V\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} + V\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\} &= E\left\{E\left\{\mathcal{X}^2|\mathcal{Y}\right\}\right\} - \cancel{E\left\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}^2\right\}}\\
&\quad + \cancel{E\left\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}^2\right\}} - E\{E\{\mathcal{X}|\mathcal{Y}\}\}^2\\
&= E\left\{\mathcal{X}^2\right\} - E\{\mathcal{X}\}^2\\
&= V\{\mathcal{X}\} \qquad (12)
\end{aligned}$$

■

Encore une fois, ce théorème prend une forme légèrement différente pour notre cas.

$$\begin{aligned} V\{\phi\} &= E\{V\{\phi|\mathcal{M}\}\} + V\{E\{\phi|\mathcal{M}\}\} \\ &= \sum_i V\{\phi|\mathcal{M} = x_i\} P(\mathcal{M} = x_i) + \sum_i E\{\phi|\mathcal{M} = x_i\}^2 P(\mathcal{M} = x_i) - E\{\phi\}^2 \end{aligned}$$

Et cette relation est, elle aussi, confirmée par l'implémentation numérique séparée des deux membres.

4 Borne supérieure du coût des pannes

4.a Borne supérieur pour chaque panne et chaque machine

i. L'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev permet de borner la probabilité qu'une variable aléatoire $\mathcal{X}$, *peu importe sa répartition*, s'éloigne de son espérance μ d'une certaine distance α (> 0), en fonction de sa variance σ^2. En d'autres mots, elle relie le caractère exceptionnel d'un évènement à sa rareté.

$$P(|\mathcal{X} - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2} \tag{13}$$

Dans notre cas, la probabilité maximale p de l'évènement est 0,05 et k_x, la borne du coût $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$, est supérieure à μ.

$$\begin{cases} p = \dfrac{\sigma^2}{\alpha^2} \\ k_x - \mu = \alpha \end{cases} \Rightarrow \quad k_x = \frac{\sigma}{\sqrt{p}} + \mu$$

Or, pour chaque panne et chaque machine, nous connaissons l'espérance et l'écart-type du coût. Ainsi, en appliquant cette formule pour toutes les pannes, on trouve les résultats de(s) table(s) suivante(s).

$\mathcal{M}$	k_m [€]
1	`NaN`
2	$1{,}4683 \times 10^4$
3	$6{,}3416 \times 10^3$
4	$1{,}8789 \times 10^4$

$\mathcal{F}$	k_f [€]
1	`NaN`
2	$9{,}6708 \times 10^3$
3	$1{,}9789 \times 10^4$

$\mathcal{C}$	k_c [€]
1	`NaN`
2	$3{,}7236 \times 10^4$
3	$1{,}6565 \times 10^4$
4	$6{,}0143 \times 10^4$
5	$5{,}3367 \times 10^4$

Tableau 7 – Bornes supérieures du coût telles que la probabilité qu'il y soit supérieur est inférieure à 0,05, selon Bienaymé-Tchebyshev.

Les `NaN` signifient qu'il n'existe pas de borne satisfaisant la condition pour ces valeurs d'espérance et de variance.

En effet, lorsque la variance est nulle, la densité de probabilité devient un delta de Dirac [9] et la répartition de probabilité une marche unitaire [10] toutes les deux centrées en μ. Dès lors, il n'est pas possible de trouver une borne de probabilité associée intermédiaire.

ii. Connaître la répartition de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ signifie que nous possédons une fonction $F(x)$ telle que $p = F(x)$ si p est la probabilité que $\mathcal{X}$ appartienne à l'intervalle $[-\infty, x]$. Dans le cas de la répartition normale, cette fonction est définie par l'expression suivante.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{14}$$

Dès lors, il est possible de renverser le processus pour obtenir une fonction $G(p)$ telle que $x = G(p)$ si x définit l'intervalle $[-\infty, x]$ tel que $\mathcal{X}$ y appartient avec une probabilité p.

Cette fonction G n'est pas définie analytiquement pour une répartition normale, mais il en existe des approximations numériques comme la fonction `norminv` que nous avons utilisée dans le script `Q4a.m` pour déterminer les bornes supérieures.

$\mathcal{M}$	k_m [€]
1	`NaN`
2	$1{,}2987 \times 10^4$
3	$5{,}4935 \times 10^3$
4	$1{,}7658 \times 10^4$

$\mathcal{F}$	k_f [€]
1	`NaN`
2	$9{,}2467 \times 10^3$
3	$1{,}8658 \times 10^4$

$\mathcal{C}$	k_c [€]
1	`NaN`
2	$3{,}5822 \times 10^4$
3	$1{,}5576 \times 10^4$
4	$5{,}6892 \times 10^4$
5	$4{,}9974 \times 10^4$

Tableau 8 – Bornes supérieures du coût telles que la probabilité qu'il y soit supérieur est inférieure à 0,05, pour une répartition normale.

iii. On remarque que, peu importe la panne, la borne obtenue selon Bienaymé-Tchebyshev est supérieure à celle obtenue pour une répartition normale.

Ce résultat est parfaitement naturel puisque l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev définit une borne maximale absolue pour toutes les répartitions possibles, comme mentionné précédemment.

Dès lors, la borne trouvée pour une répartition spécifique sera toujours inférieure ou égale à celle de Bienaymé-Tchebyshev.

9. C.-à-d. $\delta(x) = 0 \ \forall x \neq \mu$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$.
10. C.-à-d. $F(x) = 0 \ \forall x < \mu$ et $F(x) = 1 \ \forall x \geq \mu$.

A Scripts

```
load resources\MFC.mat;
load resources\cost.mat;
load resources\dev.mat;

dim = size(MFC);
l = length(dim);
```

Listing 1 – `loadMat.m`

```
%% Calls

loadMat;

%% Code

P1a = cell(l,1);

for i = 1:l
    P1a{i} = doSum(shiftdim(MFC,i-1), 2); % Contraction sur deux
        indices
end
```

Listing 2 – `Q1a.m`

```
%% Calls

loadMat;

%% Code

P1b = cell(l,1);

for i = 1:l
    P1b{i} = doSum(shiftdim(MFC,i), 1); % Contraction sur un indices
end
```

Listing 3 – `Q1b.m`

```
%% Calls

Q1b;
loadMat;

%% Code

P1c = cell(l,1);

for i = 1:l
    P1c{i} = bsxfun(@rdivide, shiftdim(MFC,i), P1b{i}); % Mise en
        place de la condition
```

```
end

clearvars -except P1c;
```

Listing 4 – Q1c.m

```
%% Calls

loadMat;

%% Code

P2a = 1 - MFC(1,1,1);
```

Listing 5 – Q2a.m

```
%% Calls

Q1c;
loadMat;

%% Code

P2b = 1 - P1c{2}(1,1,1);
```

Listing 6 – Q2b.m

```
%% Calls

Q1a;
loadMat;

%% Code

[EspK3a, VarK3a] = deal(zeros(l,1));

for i = 1:l
    EspK3a(i) = getEsp(cost{i}, P1a{i});
    VarK3a(i) = getEsp(cost{i}.^2, P1a{i}) - EspK3a(i)^2;
end

clearvars -except EspK3a VarK3a;
```

Listing 7 – Q3a.m

```
%% Calls

loadMat;

%% Code

K = cell(l,1);
```

```
for i = 1:l
    order = circshift((1:l)', i-1, 1);
    K{i} = permute(cost{i}, order); % Permutation des incides 1 et i
end

Phi = bsxfun(@plus, K{1}, bsxfun(@plus, K{2}, K{3})); % Calcul de la fonction cout

EspPhi3b = getEsp(Phi, MFC);
VarPhi3b = getEsp(Phi.^2, MFC) - EspPhi3b^2;

clearvars -except EspPhi3b VarPhi3b Phi;
```

Listing 8 – `Q3b.m`

```
%% Calls

Q3b;
Q1a;
loadMat;

%% Code

%i

[P3c, Esp3ci, Var3ci, Esp3cii, Var3ciii] = deal(cell(l,1));

for i = 1:l
    P3c{i} = bsxfun(@rdivide, shiftdim(MFC,i-1), P1a{i}); % Mise en place de la condition
    [Var3ci{i}, Esp3ci{i}] = deal(zeros(dim(i),1));
    for j = 1:dim(i)
        shiftPhi = shiftdim(Phi, i-1); % Permutation des indices
        Esp3ci{i}(j) = getEsp(shiftPhi(j,:,:), P3c{i}(j,:,:));
        Var3ci{i}(j) = getEsp(shiftPhi(j,:,:).^2, P3c{i}(j,:,:)) - Esp3ci{i}(j)^2;
    end
    P3c{i} = shiftdim(P3c{i}, l-i+1); % Permutation inverse des indices
end

%ii & iii

for i = 1:l
    Esp3cii{i} = getEsp(Esp3ci{i},P1a{i});
    Var3ciii{i} = getEsp(Var3ci{i}, P1a{i}) + getEsp(Esp3ci{i}.^2, P1a{i}) - Esp3cii{i}^2;
end

clearvars -except P3c Esp3ci Esp3cii Var3ci Var3ciii;
```

Listing 9 – `Q3c.m`

```
%% Calls

```

```
loadMat;

%% Parameters

p = 0.05;

%% Code

[boundaryi,boundaryii] = deal(cell(l,1));

%i

for i = 1:l
    boundaryi{i} = dev{i} / sqrt(p) + cost{i}; % Selon
        Bienayme-tchebyshev
    boundaryi{i}(1) = NaN;
end

%ii

for i = 1:l
    boundaryii{i} = norminv(1-p, cost{i}, dev{i}); % Pour une
        repartition normale
end

clearvars -except boundaryi boundaryii;
```

Listing 10 – `Q4a.m`

B Fonctions

Lors de l'écriture des fonctions, nous avons fait le choix de ne pas les rendre robustes, c.-à-d. que nous supposons leurs entrées valides et ne les vérifions pas.

```
function A = doSum(A,n)
    l = ndims(A);
    for i = l-n+1:l
        A = sum(A,i);
    end
end
```

Listing 11 – `doSum.m`

```
function e = getEsp(C,P)
    e = doSum(P.*C, ndims(C));
end
```

Listing 12 – `getEsp.m`