Esiee-Paris - cours d'algorithmique - feuille d'exercices numéro 4

février-mars 2021 – R. Natowicz, I. Alamé, A. Çela, D. Garrigue

Exercice 1. Spots et slots (exercice du contrôle du 29 mars 2019.) Quand une marque commerciale veut diffuser un "spot" à la télévision, elle s'adresse à une société de diffusion. Cette dernière dispose d'un "slot" : un intervalle de temps à l'intérieur duquel elle diffuse des spots que ses clients lui ont confiés. Le slot de la société de diffusion est de durée T et son carnet de commandes contient K spots. Le spot k, $0 \leq k < K$, est de durée $d(k)$. La diffusion du spot k lui apporte un gain $g(k)$. Ce gain est le prix négocié avec la marque commerciale diminué du montant lui-même négocié qui sera reversé à la chaîne de télévision.

Juliette, étudiante à l'ESIEE, est en stage dans cette société de diffusion. Elle observe le "commercial" de la société. Pour décider des spots qui seront diffusés dans le slot de durée T, il classe les spots par gains décroissants et les diffuse dans cet ordre. A chaque étape de son procédé il ajoute le spot de gain maximum dont la durée est inférieure ou égale au temps encore disponible dans le slot. Le slot est de durée $T = 100$ secondes. Le carnet de commandes contient les dix spots suivants. Quel est le gain total du "commercial" ?

k	$d(k)$	$g(k)$	k	$d(k)$	$g(k)$
0	20	25	5	40	35
1	20	25	6	10	15
2	70	65	7	80	75
3	10	15	8	10	15
4	10	5	9	40	45

Juliette a suivi l'excellent cours d'algorithmique de son école. Elle décide de traiter le problème d'une autre façon. Elle établit l'équation de récurrence du gain maximum, elle écrit un programme qui calcule et mémorise dans un tableau M les valeurs maximum de tous les sous-problèmes, puis elle écrit un programme d'affichage des spots à diffuser dans le slot pour obtenir le gain maximum.

Quelle est le gain total de la solution de Juliette ?

Exercice 2. Un ensemble de n entiers positifs est donné dans un tableau $Y[0 : n]$, ainsi qu'un entier S. On veut savoir s'il existe un sous-ensemble de Y de somme S et, s'il en existe, en afficher un. Exemple : il existe un sous-ensemble de $Y = [2, 3, 4, 1, 5]$ de somme $S = 9$; l'ensemble $Y' = \{3, 1, 5\}$ est un tel sous-ensemble.

On note $e(k, s)$ la vérité de la proposition " *Il existe un sous-ensemble des k premiers éléments de Y, sous-ensemble de somme s.* "

Donner l'équation de récurrence des valeurs $e(k, s)$; calculer un tableau $E[0 : n + 1][0 : S + 1]$ de terme général $E[k][s] = e(k, s)$, le calcul doit être en $\Theta(n \times S)$; écrire un programme `void ase(int[][] E, int[] Y, int k, int s)` qui affiche un sous-ensemble de $Y[0 : k]$ de somme s. L'appel principal de cette procédure est `ase(E,Y,n,S)`. Cet appel n'a de sens que s'il existe un sous-ensemble de Y de somme S.

Exercice 3. Un grossiste dispose d'un stock S d'un produit à répartir sur n entrepôts. Pour tout entrepôt i, $i \in [0 : n]$, et tout stock s, $s \in [0 : S + 1]$, ce grossiste connaît le gain $g(i, s)$ qu'il obtiendrait en livrant le stock s à l'entrepôt i.

Calculer le gain $m(n, S)$ d'une répartition optimale du stock S sur les n entrepôts. Le calcul doit être en complexité polynomiale. Donner cette complexité. Écrire un programme d'affichage d'une répartition optimale du stock S sur l'ensemble des n entrepôts.

Exercice 4. Dans une semaine Juliette aura les contrôles des n unités du semestre. Juliette souhaite maximiser la somme de ses notes. Elle a estimé pour chaque unité la note qu'elle obtiendrait en fonction du temps qu'elle consacrerait à sa révision. Pour chaque unité i, $i \in [0 : n]$, et pour chaque durée t, $t \in [0 : T + 1]$, Juliette pense obtenir la note $u(i, t)$ en consacrant t heures de révision à l'unité i. Elle regroupe toutes ces valeurs dans un tableau $U[0 : n][0 : T + 1]$ de terme général $U[i][t] = u(i, t)$.[1]

Juliette considère ensuite la valeur $m(k, t)$ qui est la somme maximum qu'elle estime pouvoir obtenir en consacrant t heures à la révision du sous-ensemble des k premières unités. La somme maximum des notes est donc $m(n, T)$. Pour connaître cette valeur $m(n, T)$ Juliette établit l'équation de récurrence des valeurs $m(k, t)$ puis elle écrit un programme `int[][][] calculerMA(int[][] U)`. L'appel de fonction `int[][][] MA = calculerMA(U)` retourne les tableaux `M = MA[0]` et `A = MA[1] = arg M`. Le tableau $M[0 : n + 1][0 : T + 1]$ est de terme général $m(k, t)$. Le tableau A est de terme général $a(k, t) = \arg m(k, t)$.

Enfin, Juliette écrit un programme `void aro(int[][] A, int k, int t)` qui affiche une répartition optimale de t heures de révision sur le sous-ensemble des k premières unités. L'appel principal `aro(A,n,T)` affiche donc une répartition optimale de T heures sur l'ensemble des n unités.

[1] Les notes $u(i, t)$ sont non décroissantes selon t.

```
/*
% javac TD4_2021_corrige.java
% java TD4_2021_corrige
Exercice 1 : spots & slots
durées des spots : [ 20, 20, 70, 10, 10, 40, 10, 80, 10, 40, 45 ]
gains des spots  : [ 25, 25, 65, 15, 5, 35, 15, 75, 15, 45, 50 ]
durée du slot : 100
gain maximum du slot : 125
sous-ensemble de spots de gain maximum :
0 1 3 6 9

Exercice 2 : sous-ensemble de somme S
Y = [ 2, 4, 6, 8 ]
sous-ensemble de somme 0 :
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 1
sous-ensemble de somme 2 : 2
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 3
sous-ensemble de somme 4 : 4
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 5
sous-ensemble de somme 6 : 2 4
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 7
sous-ensemble de somme 8 : 2 6
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 9
sous-ensemble de somme 10 : 4 6
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 11
sous-ensemble de somme 12 : 2 4 6
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 13
sous-ensemble de somme 14 : 2 4 8
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 15
sous-ensemble de somme 16 : 2 6 8
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 17
sous-ensemble de somme 18 : 4 6 8
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 19
sous-ensemble de somme 20 : 2 4 6 8
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 21
il n'y a pas de sous-ensemble de somme 22

Exercice 3 : répartition optimale d'un stock
tableau des gain : g(k,s) = gain obtenu en livrant s à k
10 12 12 14 14 15 15 15 17 17 17
10 10 12 12 16 16 16 16 16 16 16
10 10 14 14 14 14 14 14 14 16 16
10 14 14 14 16 16 16 16 16 16 16
10 10 10 12 12 13 13 14 15 16 16
8 8 10 10 10 12 12 14 14 14 14
5 5 5 7 7 10 10 12 12 13 13
tableau M des gains maximum :
63 67 69 71 73 73 75 77 79 79 81
53 57 57 61 61 63 63 67 67 69 69
43 47 47 51 51 53 53 53 56 56 58
33 37 37 39 39 39 42 42 44 44 46
23 23 25 25 25 28 28 30 30 32 32
13 13 15 15 15 18 18 20 20 22 22
5 5 5 7 7 10 10 12 12 13 13
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
une affectation optimale :
quantité 0 livrée à l'entrepôt 0
quantité 2 livrée à l'entrepôt 1
quantité 0 livrée à l'entrepôt 2
quantité 1 livrée à l'entrepôt 3
quantité 2 livrée à l'entrepôt 4
quantité 4 livrée à l'entrepôt 5
quantité 1 livrée à l'entrepôt 6

Exercice 4 : Juliette prépare ses contrôles...
Tableau U des notes estimées : u(k,t) = note unité k avec t heures de révision
10 12 12 14 14 15 15 15 17 17 17
10 10 12 12 16 16 16 16 16 16 16
10 10 14 14 14 14 14 14 14 16 16
10 14 14 14 16 16 16 16 16 16 16
10 10 10 12 12 13 13 14 15 16 16
8 8 10 10 10 12 12 14 14 14 14
5 5 5 7 7 10 10 12 12 13 13
Tableau M  de terme général m(k,t) :
63 67 69 71 73 73 75 77 79 79 81
63 67 67 71 71 73 73 77 77 79 79
63 67 67 71 71 73 73 73 76 76 78
63 67 67 69 69 69 72 72 74 74 76
63 63 65 65 65 68 68 70 70 72 72
63 63 65 65 65 68 68 70 70 72 72
63 63 63 65 65 68 68 70 70 71 71
63 63 63 63 63 63 63 63 63 63 63
Somme de notes maximum : 81
Meilleure répartition des 10 heures disponibles :
Unité      Temps de Révision      Note estimée
physique.          0                      5
maths              2                      10
algo               0                      10
anglais            1                      14
élec               2                      14
sc hu              4                      16
chinois            1                      12
%
*/
```