

# Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Mai 2016

## 1 Problèmes au bord : polygones non-convexes

### 1.1 Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Si le domaine est non-convexe, les cellules de Voronoi peuvent avoir différentes composantes connexes. On traite ce cas de figure en conservant la cellule la "plus proche" du site : en pratique, on calcule les  $x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}$  pour toutes les composantes connexes, puis on regarde dans lequel le site est compris. On néglige les autres cellules dans le calcul de l'énergie.

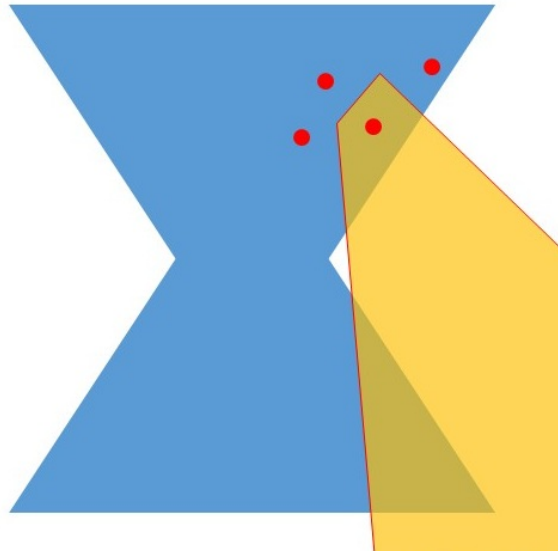


Figure 1: L'intersection de la cellule Voronoi et un polygone non-convexe donne deux parties non-connexes

### 1.2 Centroïde en dehors du domaine

On risque d'avoir un problème dans la mise-à-jour des sites si jamais un centroïde est en dehors du domaine, ce qui risque d'arriver si la cellule est non-convexe. Alors, on change la règle de mise-à-jour des sites. On regarde le milieu  $A$  du segment site-centroïde. S'il est dans le domaine, on déplace le site sur  $A$ . Sinon, on regarde le milieu du segment site- $A$  et ainsi de suite jusqu'à ce que  $A$  soit dans le domaine.

## 2 Calcul de l'énergie

On note  $\mathbf{P}$  l'ensemble de sites Voronoi,  $\Omega$  le domaine. L'énergie est définie comme :

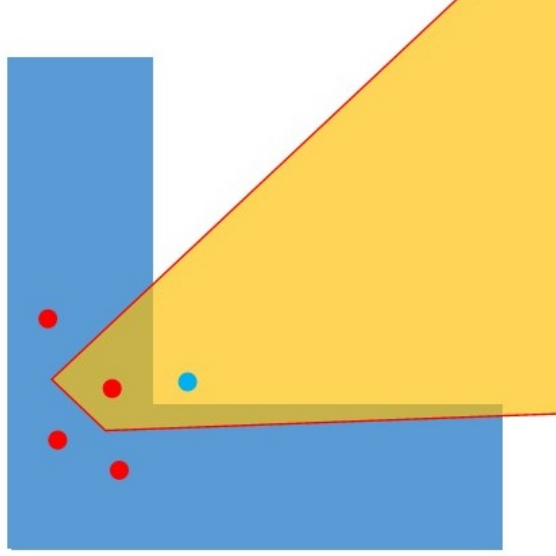


Figure 2: Le centroïde est en dehors du domaine

$$E = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} \|x - p\|^2 dx \quad (1)$$

## 2.1 Monte-Carlo

Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  une variable aléatoire uniforme dans le domaine  $\Omega$ . La mesure de probabilité est  $\mathbb{P}$  et on a  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

On crée une autre variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  défini par :

$$\mathbf{Y} = \min_{p \in \mathbb{P}} \|\mathbf{X} - p\|^2$$

L'espérance de  $\mathbf{Y}$  est :

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} \|x - p\|^2 \mathbb{P}(dx) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} \|x - p\|^2 \frac{dx}{|\Omega|} = \frac{E}{|\Omega|}$$

Par la loi des grands nombres, on a

$$E = |\Omega| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i$$

Nous avons choisi  $N = 10000$ , nous allons ensuite comparer cette méthode avec un calcul exact.

## 2.2 Méthode analytique

L'énergie qu'on cherche à calcul est en fait la somme du moment d'inertie des plusieurs cellules par rapport à leurs sites de Voronoi.

On suppose, quitte à traduire la cellule, que son site de Voronoi,  $P$ , est situé à l'origine du repère.

Nos cellules de Voronoi sont toujours des polygones. On cherche donc une formule générale pour le moment d'inertie de polygone par rapport à l'origine. Ce calcul peut être séparé en plusieurs triangles formés par l'origine et deux sommets sur un arrête du polygone.

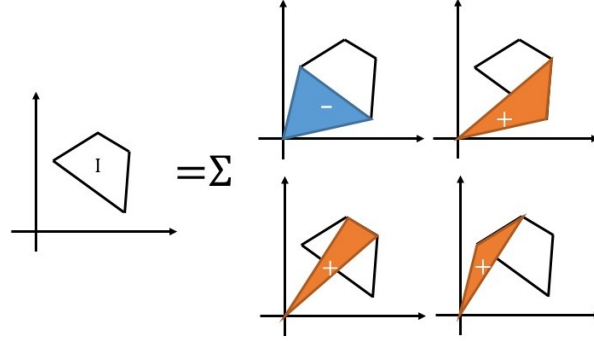


Figure 3: Décomposition du polygone en triangles pour le calcul de l'inertie

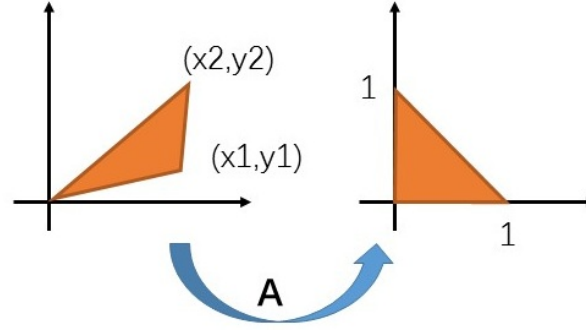


Figure 4: Se ramener au cas simple par une transformation affine

Pour calculer le moment d'inertie d'un tel triangle, on peut toujours se ramener au cas d'un triangle simple par une transformation affine  $\mathbf{A}$ . En effectuant un changement de variable par  $\mathbf{A}$ , on trouve la formule du moment d'inertie de polygone :

$$I = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

où  $(x_i, y_i)$  sont des coordonnées des sommets dans CCW.

### 2.3 Comparaison entre les deux méthodes

On compare la méthode analytique et la méthode de Monte-Carlo pour le calcul de l'énergie sur un domaine en forme de sablier. La méthode de Monte-carlo est une bonne approximation de l'énergie. Mais, par la suite, on utilisera la méthode analytique par la suite parce que notre cellule de Voronoi est un polygone. La méthode est utile pour un domaine décrit par des courbes, où la formule analytique peut être très difficile à trouver.

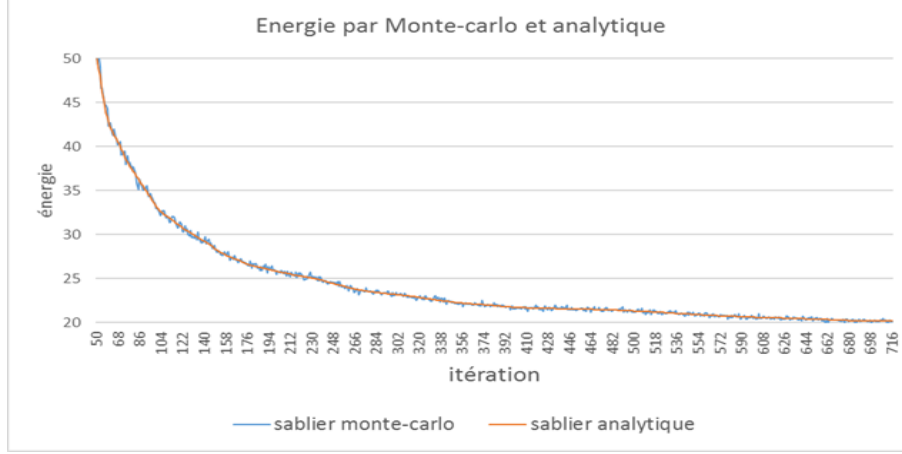


Figure 5: Différentes méthodes de calcul de l'énergie

### 3 Initialisation

#### 3.1 Aléas de l'initialisation

Pour initialiser des sites Voronoi, on échantillonne 180 points uniformément dans un petit domaine circulaire  $\mathcal{C}$ .

Cependant, comme pour tous les algorithmes d'optimisation, il est légitime de se demander dans quelle mesure l'initialisation joue : à  $\mathcal{C}$  donné, y a-t-il une différence entre deux échantillonnages différents?

La réponse est non. On a effectué trois essais dans un domaine de forme sablier (Figure 7). Par conséquent, on s'autorise par la suite à ne pas effectuer plusieurs échantillonnages.

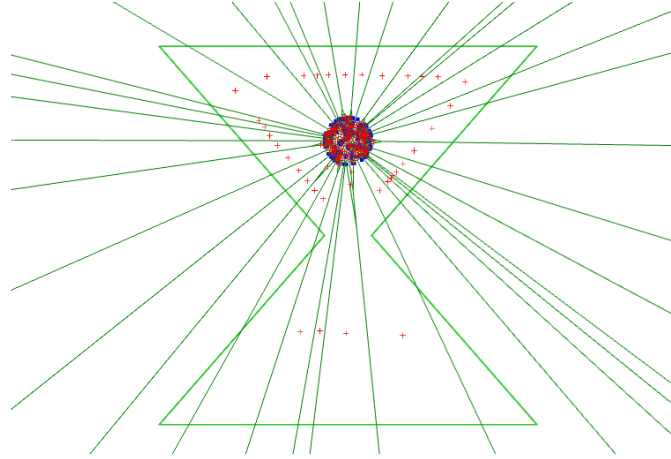


Figure 6: *Initialisation domaine sablier*

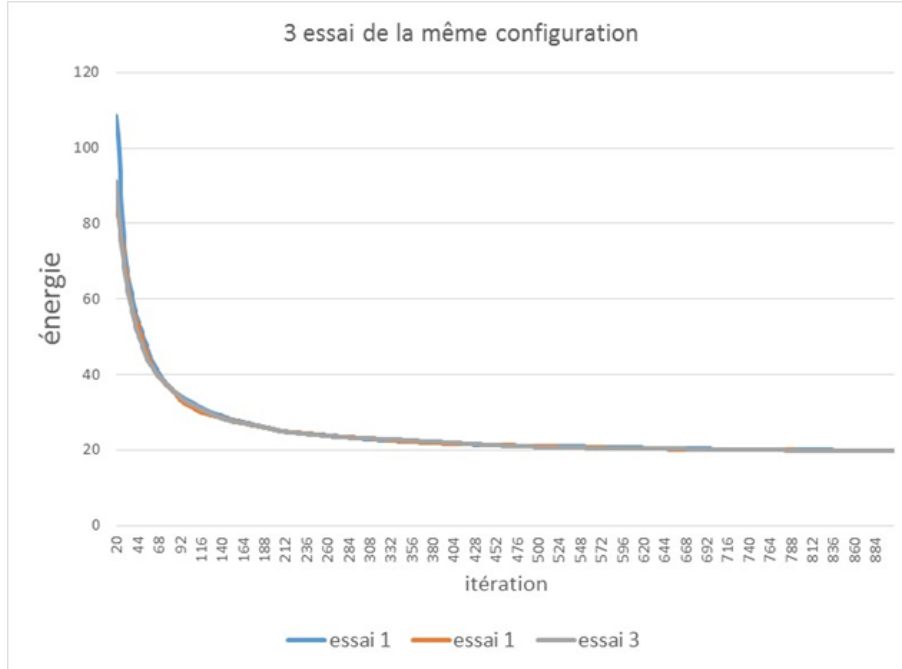


Figure 7: Evolution de l'énergie pour 3 échantillonnages différents

## 4 Forme de domaine

### 4.1 Différentes formes de cellules

On souhaite étudier l'influence du domaine sur la vitesse de convergence. On crée donc plusieurs domaines de formes différentes. Les résultats sont exposés dans Figure 12. On constate que plus la forme est régulière, plus vite qu'il converge. Mais quel sens qu'on doit donner à cette "régularité" ? On propose trois critères possibles :

1. La régularité du bord (serpent et serpent mou)
2. Visibilité polygone
3. Squelettisation

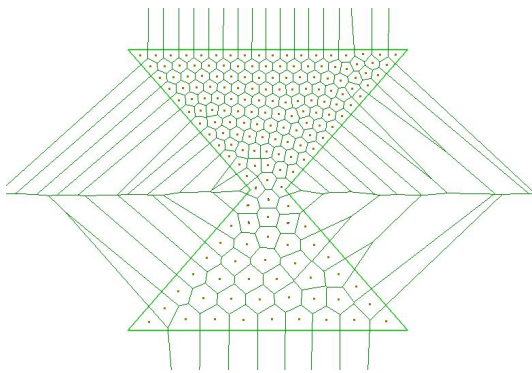


Figure 8: *Domaine sablier*

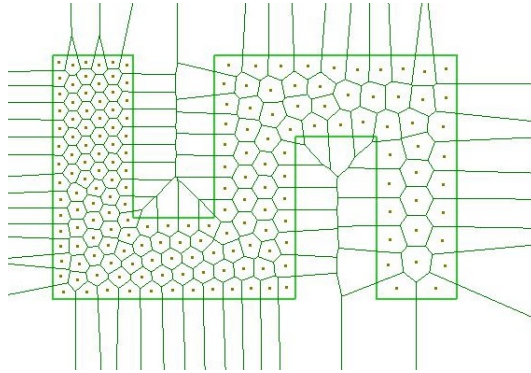


Figure 9: *Domaine serpent*

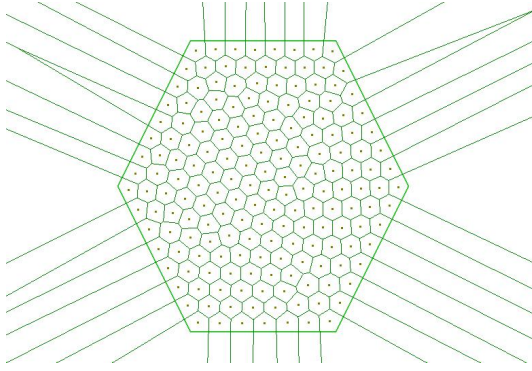


Figure 10: *Domaine hexagone*

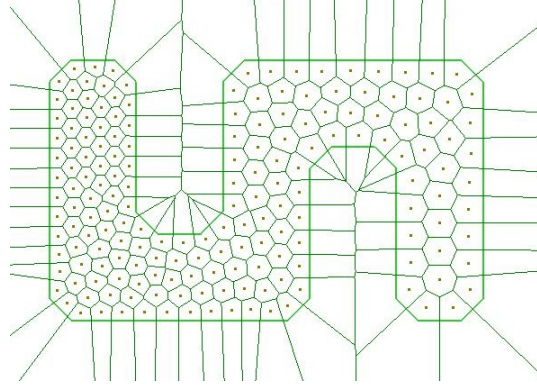


Figure 11: *Domaine serpent mou (on a coupé les bords)*

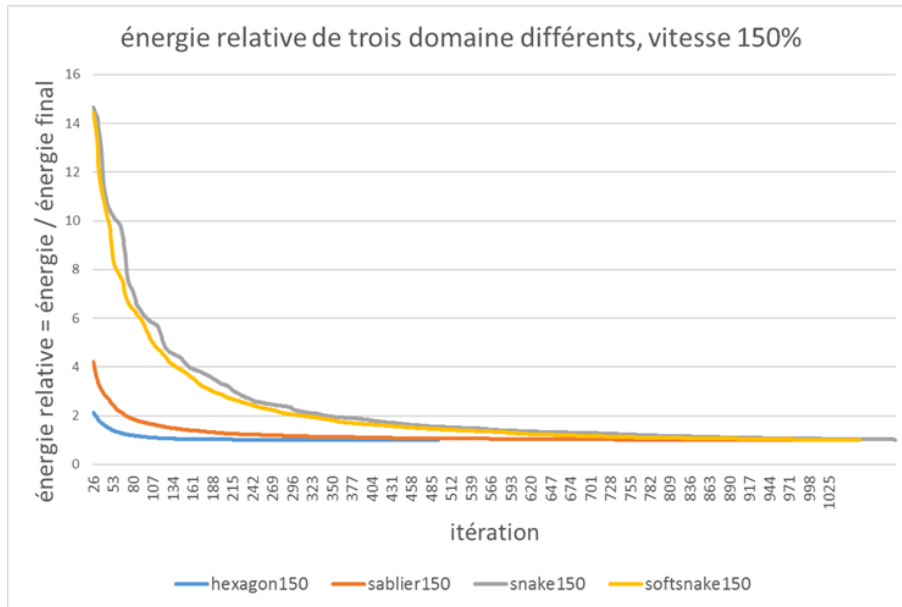


Figure 12: Convergence de l'énergie pour différents domaines

## 4.2 Sabliers avec goulet de tailles différentes

On essaie pour différents sabliers, en l'occurrence en changeant la taille du goulot d'étranglement. Parce que le taille de goulot influence le surface de domaine, on normalise l'énergie par le surface au carré (Figure 13).

On étudie ensuite la norme maximale des déplacements en faisant varier la table du goulot du sabliers (Figure 14).

## 5 Convergence, vecteur site-centroïde

Pour accélérer la convergence, on essaie de déplacer les site plus vite. C'est-à-dire aller plus loin que le centroïde. On appelle  $\omega$  l'amplification de déplacement.  $\omega = 100\%$  correspond à l'algorithme de lloyd normal. On étudie l'évolution de l'énergie pour différents choix de  $\omega$

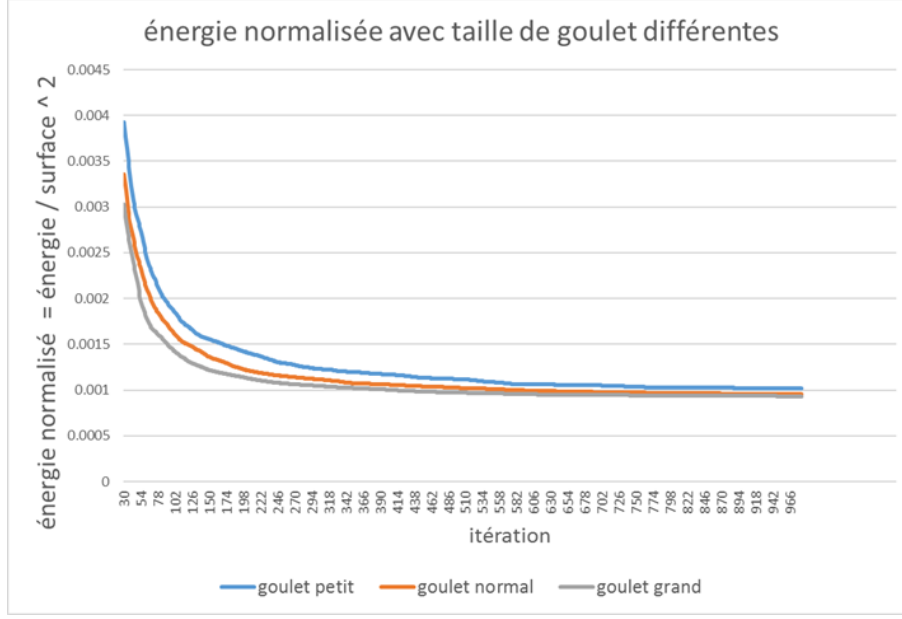


Figure 13: Convergence de l'énergie pour différentes tailles de goulot

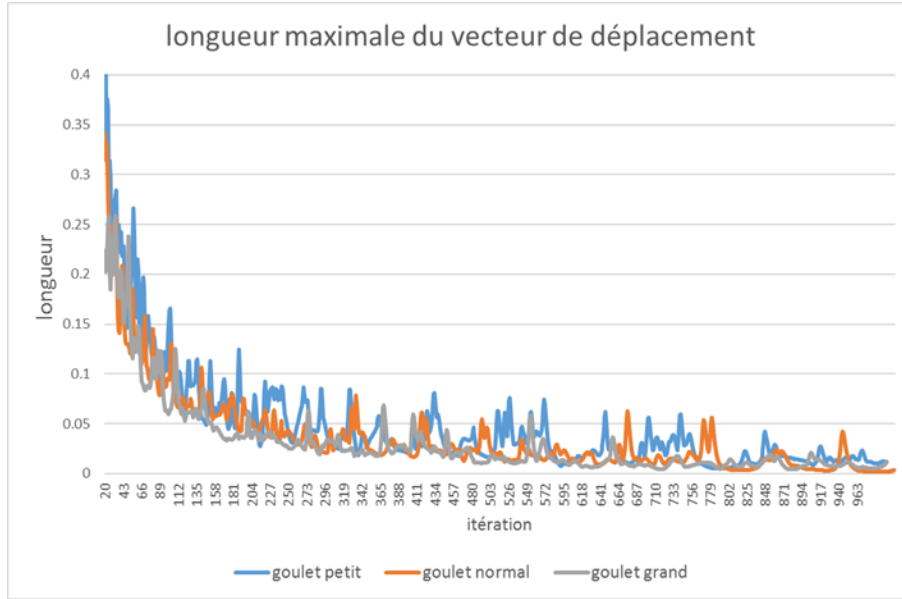


Figure 14: Etude du pas pour différentes tailles de goulot

On appelle  $V_{j,n}$  (resp.  $C_{j,n}$ ) la position du site de Voronoi de la cellule  $R_j$  à l'itération  $n$  (resp. centroïde de la cellule  $R_j$  à l'itération  $n$ ).

## 5.1 $\omega$ différents

Pour le domaine en forme de sablier, avec initialisation dans un cercle en haut du sablier, l'énergie évolue de la manière suivante (Figure 15).

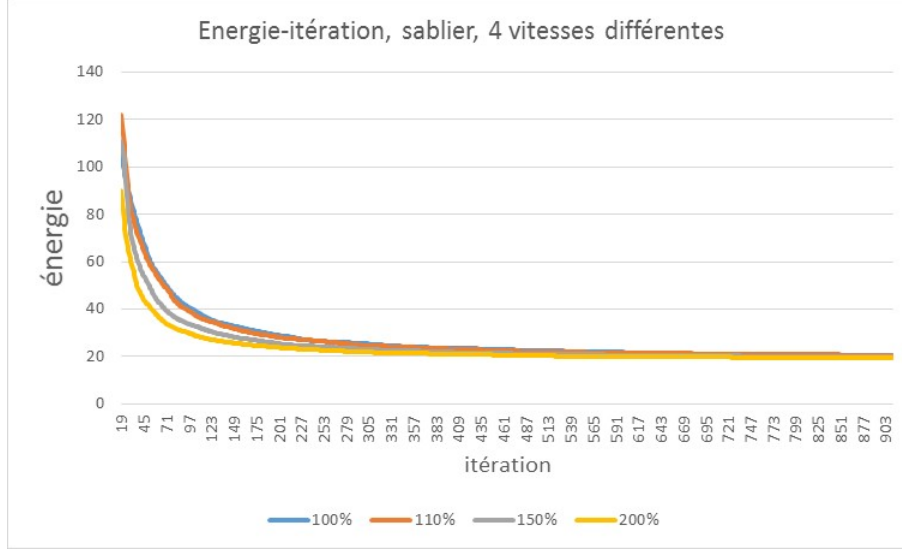


Figure 15: Energie pour domaine sablier, pas fixes

Pour l'observer plus clairement, on trace les dernières 200 itérations en plus grand (Figure 16).

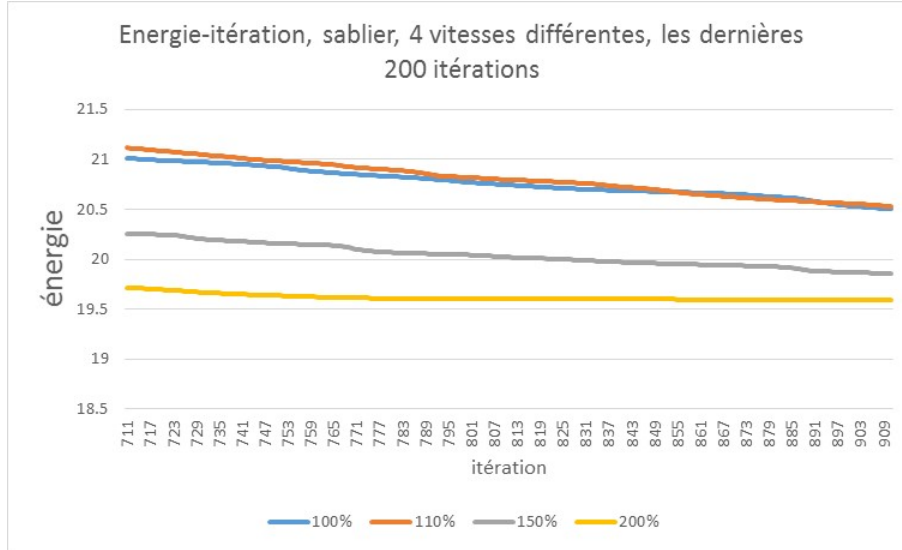


Figure 16: Energie des dernières 200 itérations pour domaine sablier, pas fixes

A  $\omega$  fixe, en pratique, il y a assez peu de différence. Peut-on augmenter encore  $\omega$  pour accélérer ?

Non. Quand  $\omega$  dépasse 200%, on observe un phénomène d'oscillation comme Figure 17.  $\overrightarrow{V_{j,n-1}C_{j,n-1}}$  et  $\overrightarrow{V_{j,n}C_{j,n}}$  ont des sens opposés, comme on peut l'observer sur le schéma suivant. Cela est principalement causé par un  $\omega$  trop élevé : on peut penser à une descente de gradient, où on oscille au fond d'une cuve, parce que le pas est trop élevé.



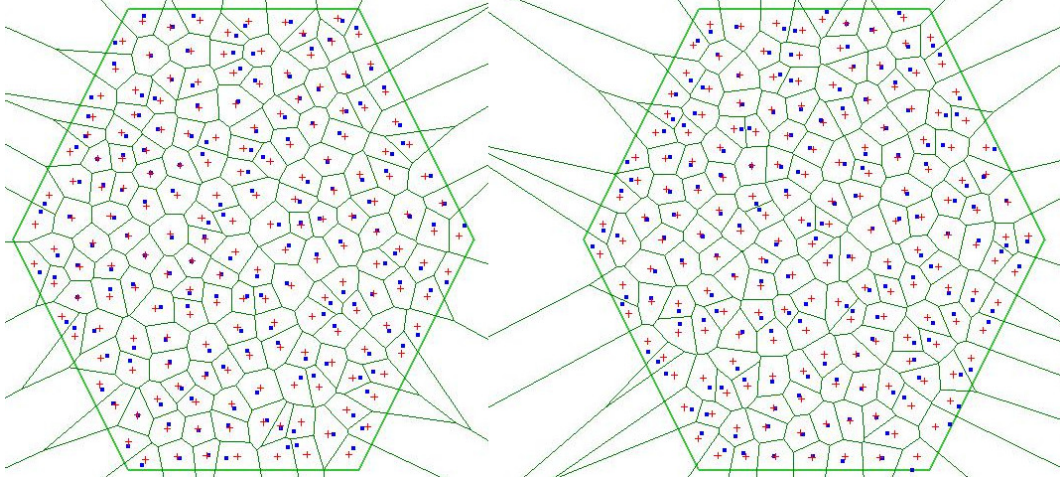


Figure 17: Exemple d'oscillations, deux itérations successives, avec  $\omega = 200\%$

## 5.2 Contrôle d'oscillation

On a vu que quand  $\omega$  est trop grand, les sites oscillent autour du centroïde. Donc on pense à détecter l'oscillation et diminuer  $\omega$  seulement pour les sites qui oscillent, mais augmenter  $\omega$  pour les sites qui sont "en route".

Partant de cette motivation, on associe un  $\omega_j$  pour chaque cellule  $R_j$ . La stratégie de mise-à-jour des  $\omega_j$  est :

A chaque itération  $n$ , on observe la quantité  $\overrightarrow{V_{j,n-1}V_{j,n}} \cdot \overrightarrow{V_{j,n}C_{j,n}}$ . Si elle est positive, on augmente  $\omega$  par 20% si  $\omega$  ne dépasse pas un seuil plafond. Si elle est négative, on le met à 150%.

Cette stratégie est très efficace, avant de montrer les résultats, on introduit une autre technique "Momentum".

## 5.3 Momentum

Inspiré par la technique Momentum dans l'algorithme de descente-gradient stochastique qui est appliqué dans le domaine de l'apprentissage automatique, on modifie la mise-à-jour des sites Voronoi :

$$V_{j,n+1} = V_{j,n} + \omega(C_{j,n} - V_{j,n}) + \alpha(V_{j,n+1} - V_{j,n}) \quad (2)$$

Cette méthode permet elle aussi de limiter les oscillations en introduisant une inertie. On essaie différentes valeurs de  $\alpha$  dans le domaine sablier (Figure 18).

On voit que prendre  $\alpha$  entre 0.5 et 0.65 permet de stabiliser l'algorithme et d'accélérer la convergence, en empêchant les oscillations. Cependant, au-delà d'une certaine seuil, le terme de momentum écrase le terme de gradient et empêche la convergence de l'algorithme. Nous avons enfin essayé de compiler les deux méthodes :  $\omega$  et momentum

## 5.4 Combinaison des 2 méthodes

On présente une dernière méthode où l'on combine le momentum et la variation de  $\omega$ . Pour certaines formes, comme le sablier, la combinaison du momentum et de la variation de  $\omega$  n'apporte pratiquement rien quant à la décroissance de l'énergie. On peut conjecturer que l'apport de ces méthodes est lié au degré de non-convexité du domaine, qu'on peut définir de la manière suivante : si on initialise les points autour de  $x_0$ , on définit le degré de non-convexité comme  $\max_{y \in \Omega} \text{nombre d'intersection du segment } [x_0, y] \text{ avec } \partial\Omega$  }

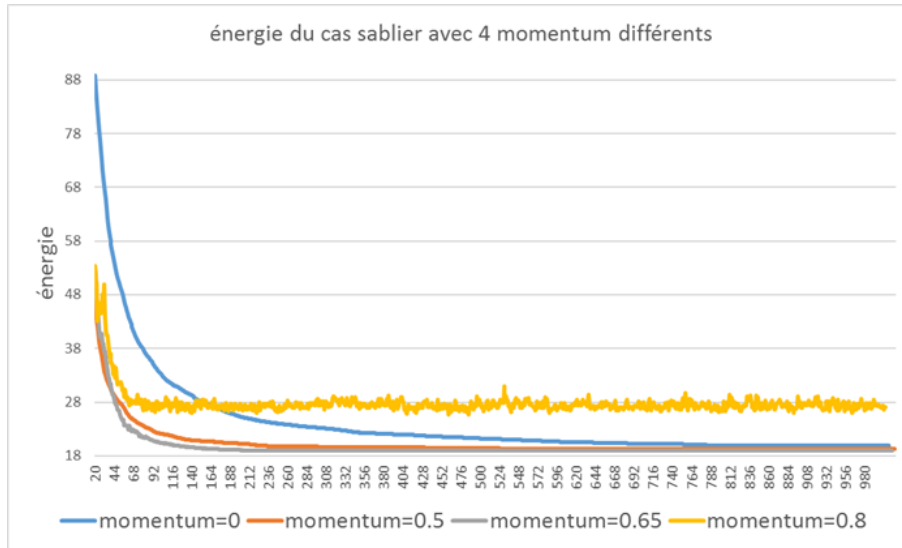


Figure 18: Momentum appliqué pour 4 valeurs différentes de  $\alpha$

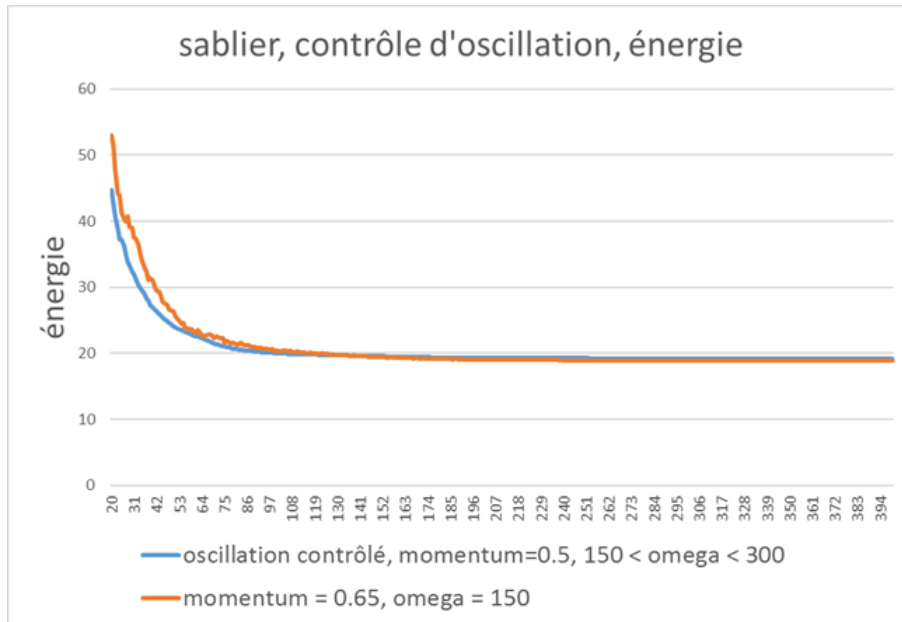


Figure 19: Etude comparée de l'énergie sur le sablier en utilisant les 3 méthodes

Pour l'hexagone, ce degré vaut 0, pour le sablier, il vaut 1, et pour le serpent, il vaut 2.

Cependant, si on observe l'évolution du max des pas, la méthode Momentum+Variation du pas apporte un gain significatif. On trace en échelle log la décroissance du pas. Pour le serpent, en particulier, on peut imaginer que le vecteur "vitesse" change régulièrement pour correspondre aux différentes directions du serpent. Si on implémente le momentum, la direction des vecteurs vitesses aura plus du mal à changer.

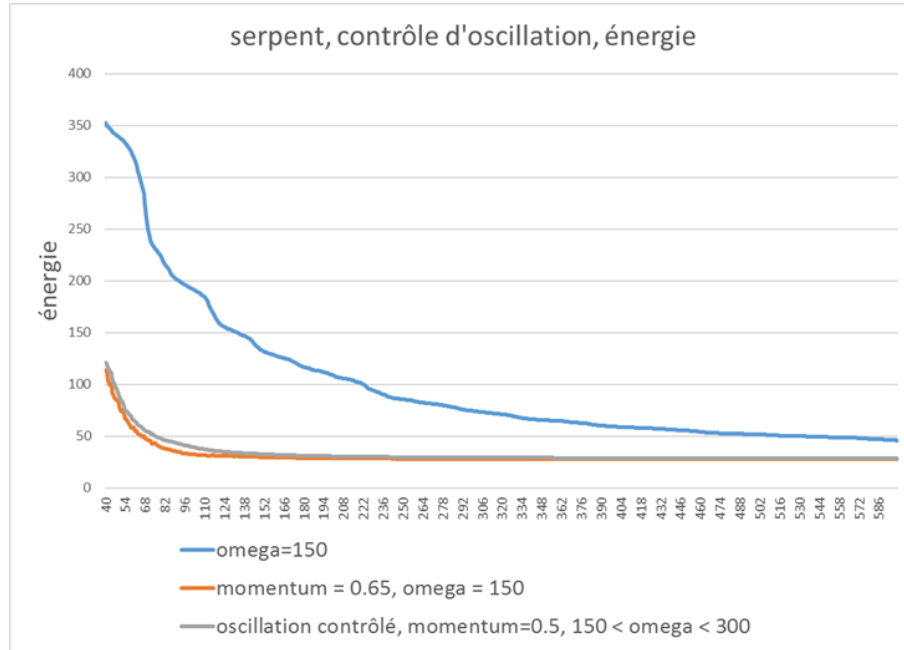


Figure 20: Etude comparée de l'énergie sur le serpent en utilisant les 3 méthodes

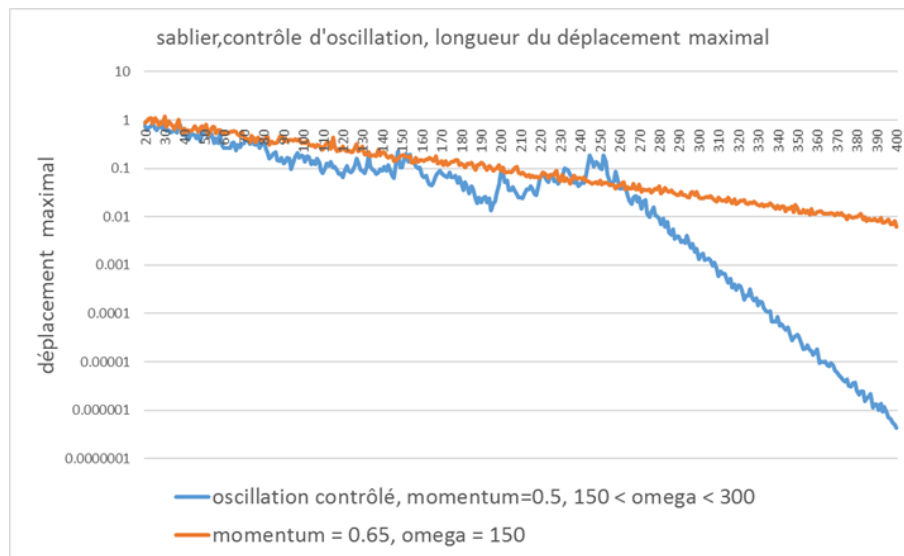


Figure 21:

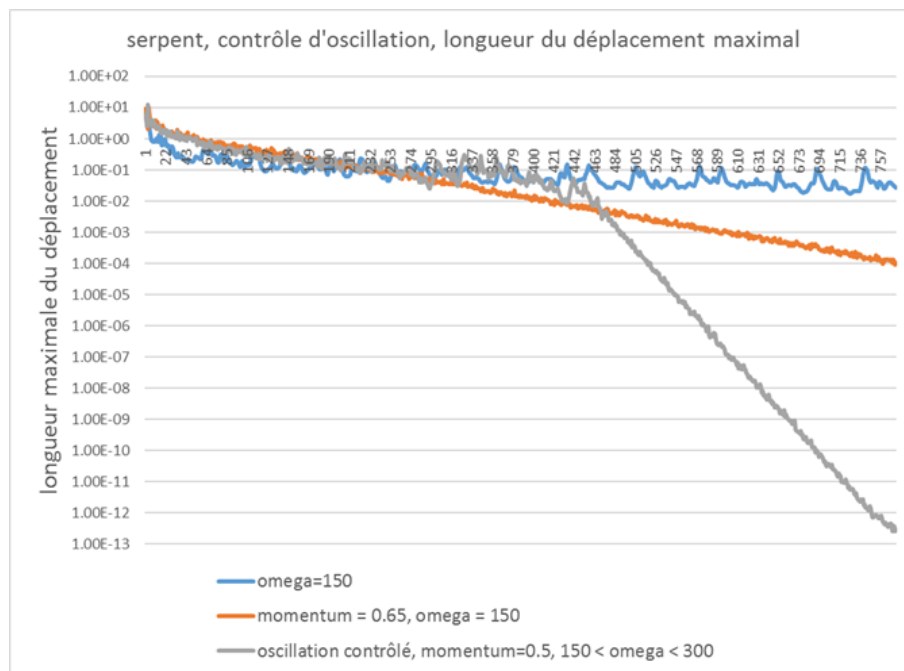


Figure 22: