Leman Feng, Francois Dupré

Mai 2016

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bor polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les

#### Initialisat

Aléas de l'initialisatio

fférentes formes de llules

abliers avec gou le tailles différent

#### Convergence, ecteur

recteur site-centroïd

### $\omega$ différen

Iomentum

Combinaison o

### Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

## Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

### Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

roblèmes au bor polygones on-convexes

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

u domaine

#### Calcul de l'énergie

Méthode analytique Comparaison entre les deux méthodes

### nitialisati

Aléas de l'initialisat

Différentes formes de cellules Sabliers avec goulet

Convergence

vecteur

 $\omega$  différents

Momentum Combinaison



Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différente

Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

roblèmes au bor polygones

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

du domaine

Monte-Carlo

Méthode analytique Comparaison entre les deux méthodes

Méas de l'initialisation

Aléas de l'initialisation

Différentes formes de cellules Sabliers avec goulet

Convergence,

site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'os Momentum

4 日 × 4 御 × 4 蓮 × 4 蓮 ×

Viomentum Combinaison de

néthodes

### Intersection cellule avec domaine non-convexe

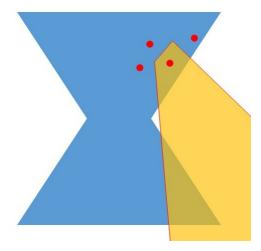


Figure: L'intersection de la cellule Voronoi et un polygone non-convexe donne deux partie non-connexe

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord polygones non-convexes Plusieurs composantes

#### connexes dans une cellule

du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Sabliers avec goule de tailles différente

#### Convergence vecteur

site-centroïde

ω différent

Momentum Combinaison de



### Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellul

Centroïde en dehors du domaine

## Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisatio

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellule

Sabliers avec goulet de tailles différente

### Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

roblèmes au bor polygones

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

### alcul de l'énergie

du domaine

Monte-Carlo Méthode analytique Comparaison entre les

### nitialisation

déas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de cellules

de tailles diffère Convergence,

vecteur

ite-centroïde  $\omega$  différents

ω différents Contrôle d'os

Momentum Combinaison des

<ロト < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 > < 回 >

## Centroïde en dehors du domaine

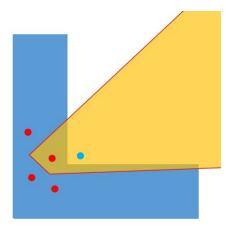


Figure: Le centroïde est en dehors du domaine

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bore : polygones

cellule

Centroïde en dehors

### du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

#### Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence vecteur

Site-centro

ω différen Contrôle d

Momentum Combinaison des 2

## Calcul de l'énergie

On note  ${\bf P}$  l'ensemble de sites Voronoi,  $\Omega$  le domaine. L'énergie est définie comme :

$$E = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} ||x - p||^2 dx$$

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bo : polygones

connexes dans une cellule

du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

offerentes formes d ellules abliers avec goulet e tailles différentes

#### onvergence, ecteur

recteur site-centroïde

## ω différen

Momentum Combinaison de



### Calcul de l'énergie

### Monte-Carlo

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

### Monte-Carlo



Soit  $\mathbf{X}:\Omega\to\mathbb{R}^2$  une variable aléatoire uniforme dans le domaine  $\Omega$ . La mesure de probabilité est  $\mathbb{P}$  et on a  $\mathbb{P}(\Omega)=1$ . On crée une autre variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  défini par :

$$\mathbf{Y} = \min_{p \in \mathbb{P}} ||\mathbf{X} - p||^2 \tag{1}$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} ||x - p||^2 \mathbb{P}(dx) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} ||x - p||^2 \frac{dx}{|\Omega|} = \frac{E}{|\Omega|}$$
(2)

Par la loi des grands nombres, on a

$$E = |\Omega| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{Y_i}$$

Nous avons choisi N = 10000, nous allons ensuite comparer cette méthode avec un calcul exact.

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord polygones non-convexes

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

Calcul do l'éporgio

#### Calcul de l'energie

### Monte-Carlo

Comparaison entre les deux méthodes

nitialisation

Aléas de l'initialisatio

Différentes formes de cellules Sabliers avec goulet

Convergence vecteur

site-centroïde

o différents Contrôle d'oscillation Momentum Combinaison des 2

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

## Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

### Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différente

## Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

oblèmes au bord polygones

iusieurs composantes onnexes dans une ellule entroïde en dehors

alcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique

deux méthodes

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

Sabliers avec goule de tailles différente

Convergence, ecteur

ite-centroïde  $\omega$  différents

ω différents Contrôle d'osc

Momentum Combinaison des

4 D > 4 P > 4 E > 4 E > 9 Q Q

#### moment

Figure: Décomposition du polygone en triangles pour le calcul de l'inertie

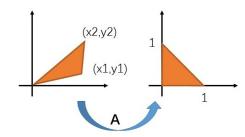


Figure: Se ramener au cas simple par une transformation affine

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

Méthode analytique

Méthode analytique

l'itération de Lloyd

Pour calculer le moment d'inertie de tel triangle, on peut toujours se ramener au cas d'un triangle simple par une transformation affine A.

En effectuant un changement de variable par A, on trouve la formule du moment d'inertie de polygone :

$$I = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{N} (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2)(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

où  $(x_i, y_i)$  sont des coordonnées des sommets dans CCW.

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellul

### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différente

### Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

roblèmes au bord polygones

onnexes dans une ellule entroïde en debors

al domaine

Monte-Carlo Méthode analytique Comparaison entre les

deux méthodes Initialisation

Aléas de l'initialisa

Aléas de l'initialisation

Différentes formes de cellules

Convergence,

recteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'osc Momentum



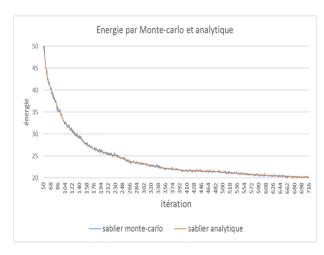


Figure: Différentes méthodes de calcul de l'énergie

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

roblèmes au bor polygones

connexes dans une cellule

du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisatio

\_\_\_\_\_

fférentes formes de llules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

onvergence, ecteur

a différents

ω différents Contrôle d'o

Momentum Combinaison

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellu

Centroïde en dehors du domaine

### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différente

### Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bor polygones

lusieurs composantes onnexes dans une ellule

alcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

### Initialisation

### Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de cellules

de tailles differe Convergence,

ite-centroïde

ω différents Contrôle d'osc

Momentum



# Pour initialiser des sites Voronoi, on échantillonne 180 points uniformément dans un petit domaine circulaire C. à C donné, y a t-il une différence entre deux échantillonnages différents?

► La réponse est non. On a effectué trois essais dans un domaine de forme sablier (Figure 7). Par conséquent, on s'autorise par la suite à ne pas effectuer plusieurs échantillonnages.

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

du domaine

#### Calcul de l'énergie

Méthode analytique Comparaison entre l deux méthodes

#### nitialisation

#### Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

abliers avec goulet e tailles différentes

Convergence, ecteur

site-centroïd

ω différents Contrôle d'oscillat Momentum

Combinaison



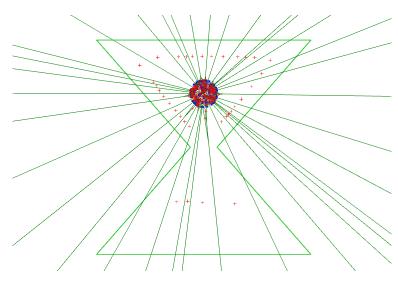


Figure: Initialisation domaine sablier

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre le
deux méthodes

#### initialisation

#### Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

ifférentes formes de Illules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

onvergence ecteur

. . différente

ω différents Contrôle d'oscill

Momentum Combinaison des 2

néthodes

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

Différentes formes de

cellules



## ► On souhaite étudier l'influence du domaine sur la vitesse de convergence.

- On propose trois critères possibles :
  - 1. La régularité du bord (serpent et serpent mou)
  - 2. Visibilité polygone
  - 3. Squeletisation

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

: polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre le

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

rme de domaine

### Différentes formes de

cellules
Sabliers avec goulet

onvergence.

Convergence vecteur

 $\omega$  différen

Contröle d'oscilla Momentum Combinaison des

Combinaison



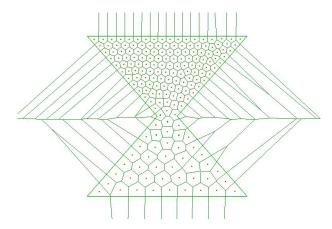


Figure: Domaine sablier

#### Leman Feng, Francois Dupré

#### Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

#### Initialisation

Aléas de l'initialisation

orme de domaine

#### Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

## Convergence,

vecteur site centroïd

#### ω différent

Contrôle d'osci

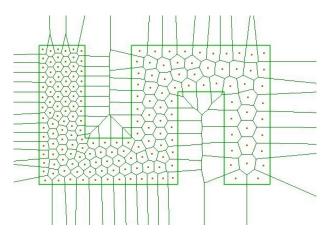


Figure: Domaine serpent

#### Leman Feng, Francois Dupré

### <sup>P</sup>roblèmes au bord polygones

connexes dans une

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

#### Initialisation

Aléas de l'initialisation

orme de domaine

## Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

#### Convergence, vecteur

site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscilla Momentum



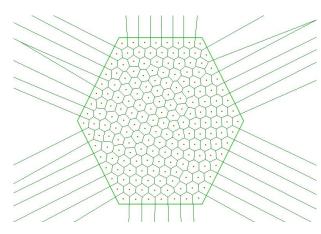


Figure: Domaine hexagone

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

Plusieurs composant connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre le
deux méthodes

#### Initialisatio

Aléas de l'initialisatio

orme de domaine

### Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

## Convergence,

vecteur site centroïda

#### ω différent

Contrôle d'oscillatio

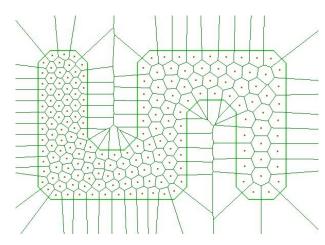


Figure: Domaine serpent mou (on a coupé les bords)

#### Leman Feng, Francois Dupré

### Problèmes au bord polygones

Plusieurs composant connexes dans une

Centroïde en dehors du domaine

### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

orme de domaine

## Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

#### Convergence, vecteur

site-centroïde

ω différent

Momentum Combinaison des 2

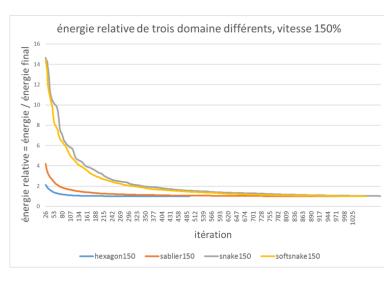


Figure: Convergence de l'énergie pour différents domaines

#### Leman Feng, Francois Dupré

## Problèmes au bord polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

orme de domaine

### Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

#### Convergence, vecteur

vecteur site-centroïde

## ω différen

omentum ombinaison de



### Forme de domaine

Sabliers avec goulet de tailles différentes

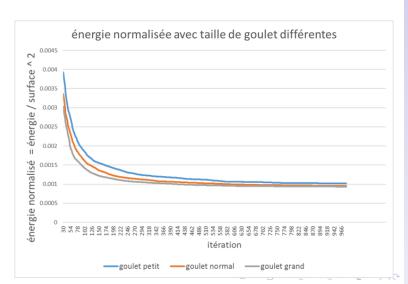
#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

Sabliers avec goulet de tailles différentes



On essaie pour différents sabliers, en l'occurence en changeant la taille du goulot d'étranglement. Parce que le taille de goulot influence le surface de domaine, on normalise l'énergie par le surface au carré (Figure 13).



## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

u domaine

Calcul de l'énergie

vionte-Cario Viéthode analytique Comparaison entre les

### nitialisation

déas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence,

site-centroïde

ω différents Contrôle d'

ontrole d'oscillatio lomentum

méthodes

On étudie ensuite la norme maximale des déplacements en faisant varier la table du goulot du sabliers (Figure 14).

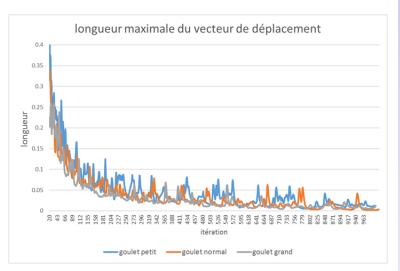


Figure: Etude du pas pour différentes tailles de goulot

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

lalcul de l'énergie

Monte-Carlo Méthode analytique

comparaison entre le eux méthodes

nitialisation

léas de l'initialisation

Différentes formes de

Sabliers avec goulet de tailles différentes

onvergence, ecteur

ω différents

ontrôle d'oscilla Iomentum

néthodes



## Convergence, vecteur site-centroïde

- Pour accélérer la convergence, on essaie de déplacer les site plus vite. On appelle  $\omega$  l'amplification de déplacement.  $\omega=100\%$  correspond à l'algorithme de Lloyd normal
- lackbox On étudie l'évolution de l'énergie pour différents choix de  $\omega$
- ▶ On appelle  $V_{j,n}$  (resp.  $C_{j,n}$ ) la position du site de Voronoi de la cellule  $R_j$  à l'itération n (resp centroïde de la cellule  $R_j$  à l'itération n).

## Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo Méthode analytique Comparaison entre le

nitialisation

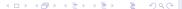
Aléas de l'initialisat

Forme de domaine Différentes formes de cellules Sabliers avec goulet

Convergence,

vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents Contrôle d'oscillation Momentum



## Convergence, vecteur site-centroïde

### $\omega$ différents

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

#### ω différents



Pour le domaine en forme de sablier, avec initialisation dans un cercle en haut du sablier, l'énergie évolue de la manière suivante (Figure 15).

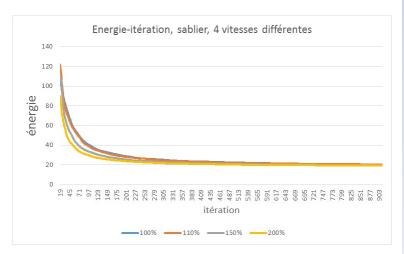


Figure: Energie pour domaine sablier, pas fixes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord polygones

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo Méthode analytique Comparaison entre les

nitialisation

léas de l'initialisation

Forme de domaine

cellules
Sabliers avec goulet

onvergence,

te-centroic

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillat Momentum

Combinaison de néthodes



Pour l'observer plus clairement, on trace les dernières 200 itérations en plus grand (Figure 16).

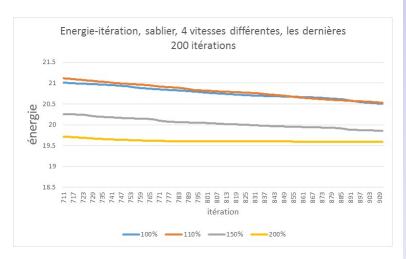


Figure: Energie des dernières 200 itérations pour domaine sablier, pas fixes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo Méthode analytique Comparaison entre les

nitialisation

léas de l'initialisation

Différentes formes d

abliers avec gou le tailles différent

onvergence, ecteur

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation Momentum Combinaison des 2



A  $\omega$  fixe, en pratique, il y a assez peu de différence. Peut-on augmente encore  $\omega$  pour accélérer ?

Non. Quand  $\omega$  dépasse 200%, on observe un phénomène d'oscillation comme Figure 17.  $V_{j,n-1}C_{j,n-1}$  et  $V_{j,n}C_{j,n}$  ont des sens opposés, comme on peut l'observer sur le schéma suivant. Cela est principalement causé par un  $\omega$  trop élevé : on peut penser à une descente de gradient, où on oscille au fond d'une cuve, parce que le pas est trop élevé.

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre le

nitialisation

déas de l'initialisatio

Forme de domaine Différentes formes de cellules

e tailles différen onvergence,

ecteur

ω différents

Contrôle d'oscillation Momentum Combinaison des 2

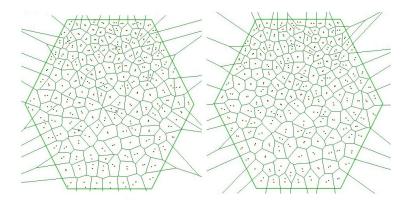


Figure: Exemple d'oscillations, deux itérations successives, avec  $\omega=200\%$ 

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre le
deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

cellules
Sabliers avec goulet
de tailles différentes

onvergence,

### ecteur

.....

#### $\omega$ différents

Contrôle d'oscillation Momentum

méthodes

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellu

Centroïde en dehors du domaine

### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellule

Sabliers avec goulet de tailles différente

## Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

### Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

oblèmes au bor oolygones

Plusieurs composantes onnexes dans une ellule

'alcul de l'énergie

### Monte-Carlo

Méthode analytique Comparaison entre les deux méthodes

### INITIAIISATION

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

Sabliers avec goule le tailles différente

Convergence, ecteur

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Contrôle d'oscilla Momentum



### Contrôle d'oscillation

On a vu que quand  $\omega$  est trop grand, les sites oscillent autour du centroïde. Donc, on pense à détecter l'oscillation et diminuer  $\omega$  seulement pour les sites qui oscillent, mais augmenter  $\omega$  pour les sites qui sont "en route".

Dans cette perspective, on associe un  $\omega_i$  pour chaque cellule  $R_i$ . La stratégie de mise-à-jour des  $\omega_i$  est :

A chaque itération n, on observe la quantité  $V_{i,n-1}V_{i,n}V_{i,n}C_{i,n}$ . Si elle est positive, on augmente  $\omega$  par 20% si  $\omega$  ne dépasse pas un seuil plafond. Si elle est négative, on le met à 150%.

Cette stratégie est très efficace, avant de montrer les résultats, on introduit une autre technique "Momentum".

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

Contrôle d'oscillation



## Convergence, vecteur site-centroïde

### Momentum

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

### Momentum



Inspiré par la technique Momentum dans l'algorithme de descente-gradient stochastique qui est appliqué dans le domaine de l'apprentissage automatique, on modifie la mise-à-jour des sites Voronoi :

$$V_{j,n+1} = V_{j,n} + \omega(C_{j,n} - V_{j,n}) + \alpha(V_{j,n+1} - V_{j,n})$$
 (3)

Cette méthode permet elle aussi de limiter les oscillations en introduisant une inertie. On essaie différentes valeurs de  $\alpha$ dans le domaine sablier (Figure 18).

#### Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng. Francois Dupré

Momentum



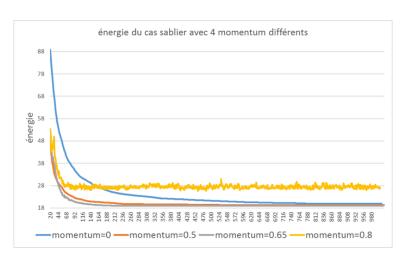


Figure: Momentum appliqué pour 4 valeurs différentes de  $\alpha$ 

#### Leman Feng. Francois Dupré

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Momentum



On voit que prendre  $\alpha$  entre 0.5 et 0.65 permet de stabiliser l'algorithme et d'accélerer la convergence, en empêchant les oscillations. Cependant, au-delà d'une certaine seuil, le terme de momentum écrase le terme de gradient et empêche la convergence de l'algorithme. Nous avons enfin essayé de compiler les deux méthodes :  $\omega$  et momentum

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au boro : polygones non-convexes

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

Calcal de l'Accessor

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo Méthode analytique

deux méthodes

#### nitialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

ellules abliers avec goulet e tailles différentes

Convergence, ecteur

 $\omega$  différents

Contrôle d'os

Momentum

méthodes

Hethodes



Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellu

Centroïde en dehors du domaine

### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

### Initialisatio

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différente

## Convergence, vecteur site-centroïde

 $\omega$  différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

oblèmes au bord polygones

lusieurs composantes onnexes dans une ellule

alcul de l'épergie

Monte-Carlo

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine Différentes formes de

Sabliers avec goule de tailles différentes

onvergence, cteur

te-centroïde

ω différents Contrôle d'osci



### Combinaison des 2 méthodes

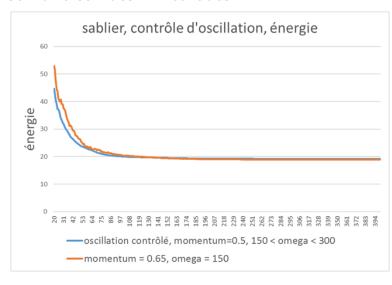


Figure: Etude comparée de l'énergie sur le sablier en utilisant les 3 méthodes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng. Francois Dupré



### Combinaison des 2 méthodes

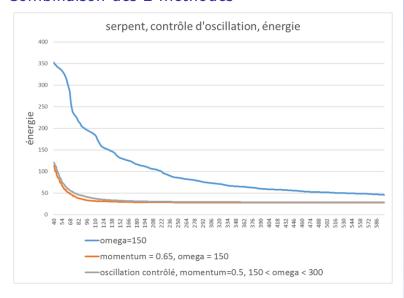


Figure: Etude comparée de l'énergie sur le serpent en utilisant les 3 méthodes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord polygones

connexes dans une cellule Centroïde en dehors

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique Comparaison entre les

nitialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes di cellules

de tailles différe .

ecteur ite-centroïde

différents

Momentum

Combinaison des 2

Combinaison des méthodes

4□ → 4□ → 4 □ → 4 □ → 9 0 0

### Combinaison des deux méthodes

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

## Problèmes au b : polygones

non-convexes

connexes dans une cellule

du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les

#### Initialisation

Aléas de l'initialisation

#### Fauncia de demoise

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

#### Convergence, vecteur

 $\omega$  différents

Contrôle d'

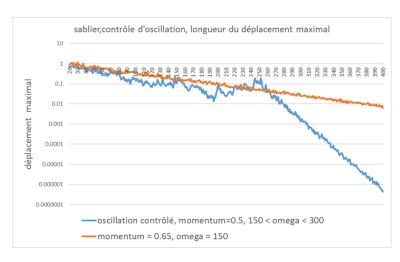
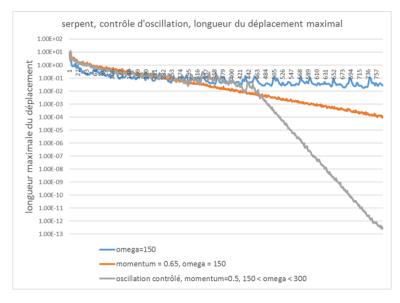


Figure:

#### Leman Feng, Francois Dupré

Différentes formes de

Sabliers avec goulet de tailles différentes



### Figure:

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les

#### Initialisation

Aléas de l'initialisation

### Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

### convergence, recteur

différents

Momentum

## ► Momentum+Variation du pas gain significatif. On trace en échelle log la décroissance du pas.

- ▶ Pour le serpent, en particulier, on peut imaginer que le vecteur "vitesse" change régulièrement pour correspondre aux différentes directions du serpent.
- ► Si on implémente le momentum, la direction des vecteurs vitesses aura plus du mal à changer.

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

Problemes au bor polygones non-convexes

connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

#### Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les

### nitialisation

Aléas de l'initialisation

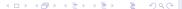
Forme de domaine

cellules Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur

 $\omega$  différents

Contrôle d'o



### Vidéo

## Convergence de l'itération de Lloyd

#### Leman Feng, Francois Dupré

: polygones

non-convexes

cellule Centroïde en dehors

Calcul de l'énergi

#### Calcul de l'energi

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre le

#### Initialisatio

Aléas de l'initialisation

#### orme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

#### Convergence, vecteur

site-centroid

#### ω différents Contrôle d'