

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng, Francois Dupré

Mai 2016

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Intersection cellule avec domaine non-convexe

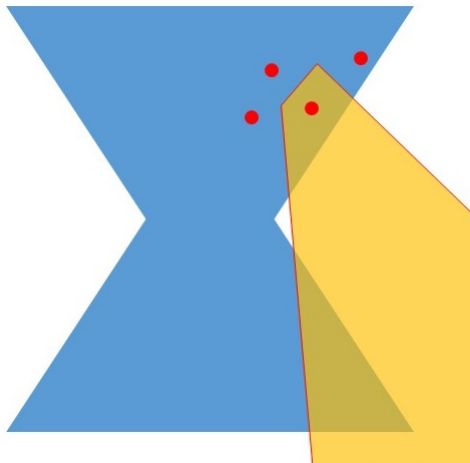


Figure: L'intersection de la cellule Voronoi et un polygone non-convexe donne deux parties non-connexes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
François Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Centroïde en dehors du domaine

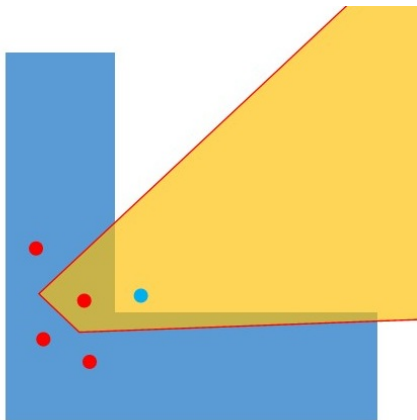


Figure: Le centroïde est en dehors du domaine

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

**Centroïde en dehors
du domaine**

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Calcul de l'énergie

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

On note \mathbf{P} l'ensemble de sites Voronoi, Ω le domaine.
L'énergie est définie comme :

$$E = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbf{P}} \|x - p\|^2 dx$$

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Soit $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ une variable aléatoire uniforme dans le domaine Ω . La mesure de probabilité est \mathbb{P} et on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. On crée une autre variable aléatoire \mathbf{Y} défini par :

$$\mathbf{Y} = \min_{p \in \mathbb{P}} \|\mathbf{X} - p\|^2 \quad (1)$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{Y}) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} \|x - p\|^2 \mathbb{P}(dx) = \int_{\Omega} \min_{p \in \mathbb{P}} \|x - p\|^2 \frac{dx}{|\Omega|} = \frac{E}{|\Omega|} \quad (2)$$

Par la loi des grands nombres, on a

$$E = |\Omega| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i$$

Nous avons choisi $N = 10000$, nous allons ensuite comparer cette méthode avec un calcul exact.

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur

site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

moment

Figure: Décomposition du polygone en triangles pour le calcul de l'inertie

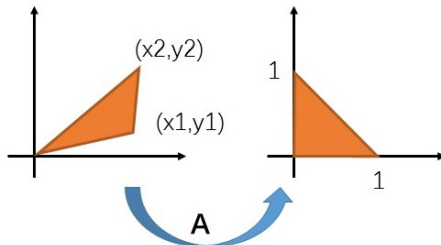


Figure: Se ramener au cas simple par une transformation affine

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Pour calculer le moment d'inertie de tel triangle, on peut toujours se ramener au cas d'un triangle simple par une transformation affine **A**.

En effectuant un changement de variable par **A**, on trouve la formule du moment d'inertie de polygone :

$$I = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^N (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2 + y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

où (x_i, y_i) sont des coordonnées des sommets dans CCW.

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

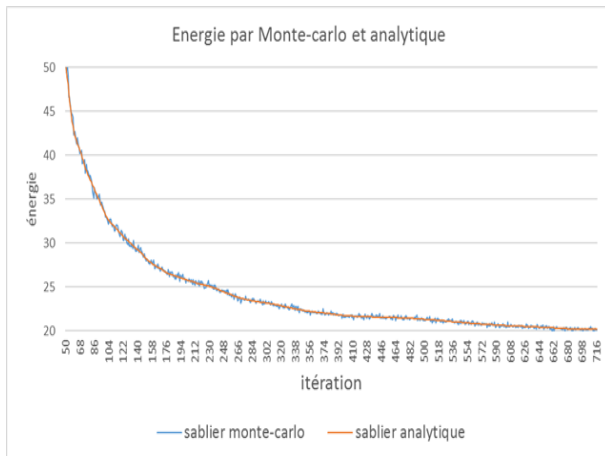


Figure: Différentes méthodes de calcul de l'énergie

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

- Pour initialiser des sites Voronoi, on échantillonne 180 points uniformément dans un petit domaine circulaire \mathcal{C} . à \mathcal{C} donné, y a t-il une différence entre deux échantillonnages différents?
- La réponse est non. On a effectué trois essais dans un domaine de forme sablier (Figure 7). Par conséquent, on s'autorise par la suite à ne pas effectuer plusieurs échantillonnages.

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

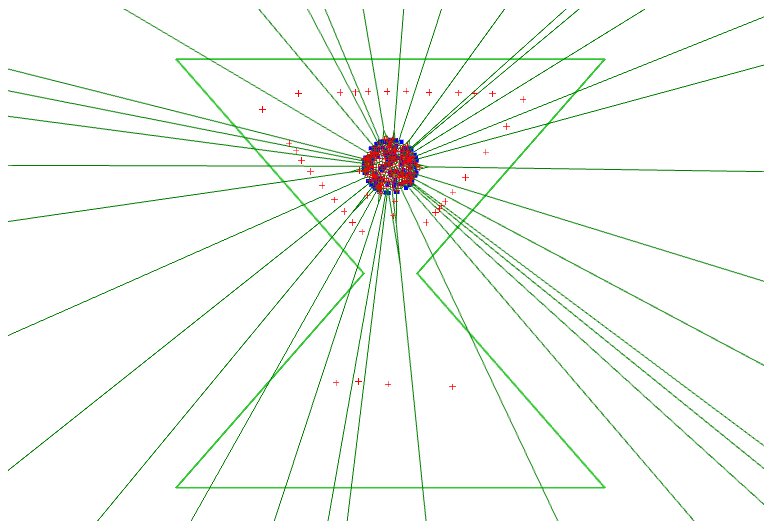


Figure: *Initialisation domaine sablier*

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

- ▶ On souhaite étudier l'influence du domaine sur la vitesse de convergence.
- ▶ On propose trois critères possibles :
 1. La régularité du bord (serpent et serpent mou)
 2. Visibilité polygone
 3. Squeletisation

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

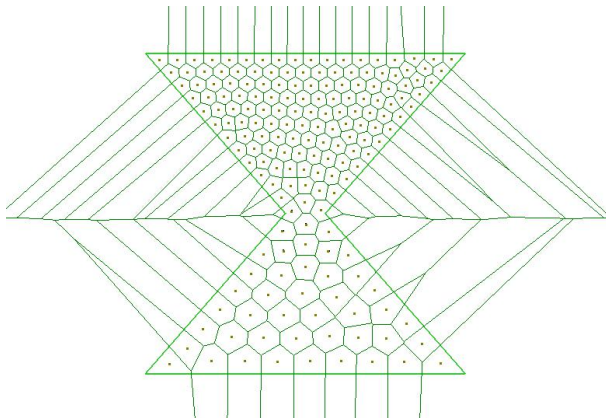


Figure: *Domaine sablier*

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

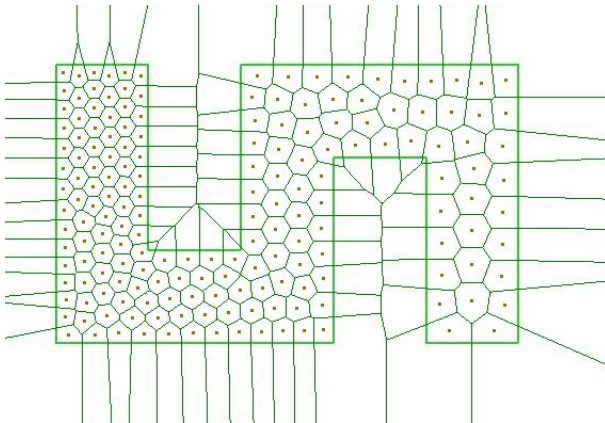


Figure: *Domaine serpent*

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule
Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents
Contrôle d'oscillation
Momentum
Combinaison des 2
méthodes

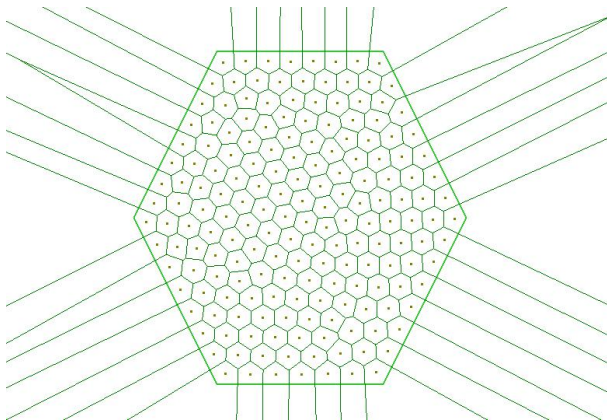


Figure: *Domaine hexagone*

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

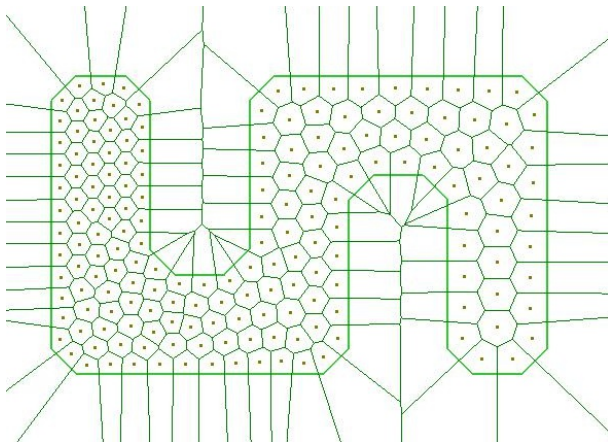


Figure: *Domaine serpent mou (on a coupé les bords)*

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

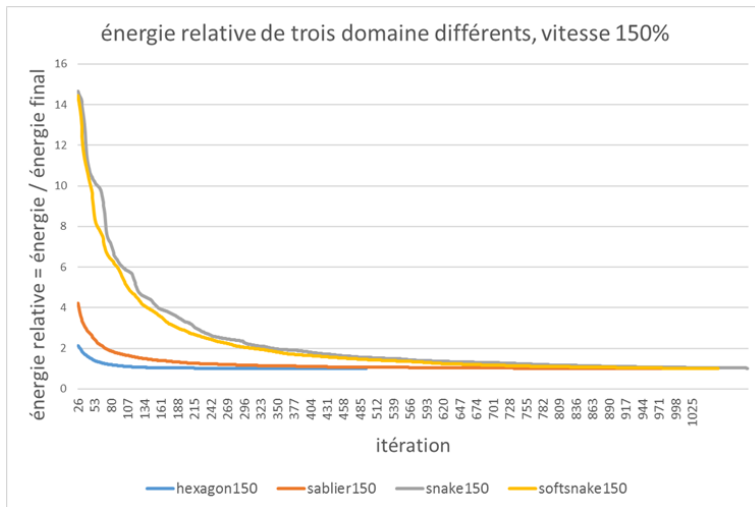
Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes



Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule
Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules
Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents
Contrôle d'oscillation
Momentum
Combinaison des 2
méthodes

Figure: Convergence de l'énergie pour différents domaines

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

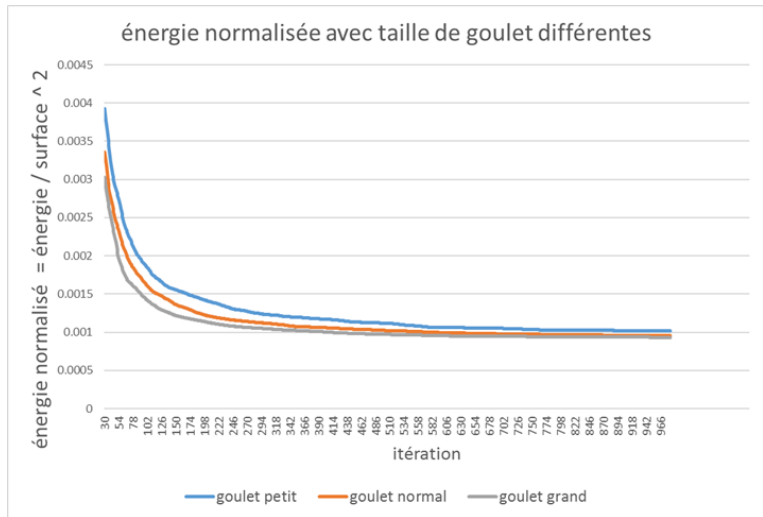
ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

On essaie pour différents sabliers, en l'occurrence en changeant la taille du goulot d'étranglement. Parce que la taille de goulot influence la surface de domaine, on normalise l'énergie par la surface au carré (Figure 13).



Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

On étudie ensuite la norme maximale des déplacements en faisant varier la table du goulot du sabliers (Figure 14).

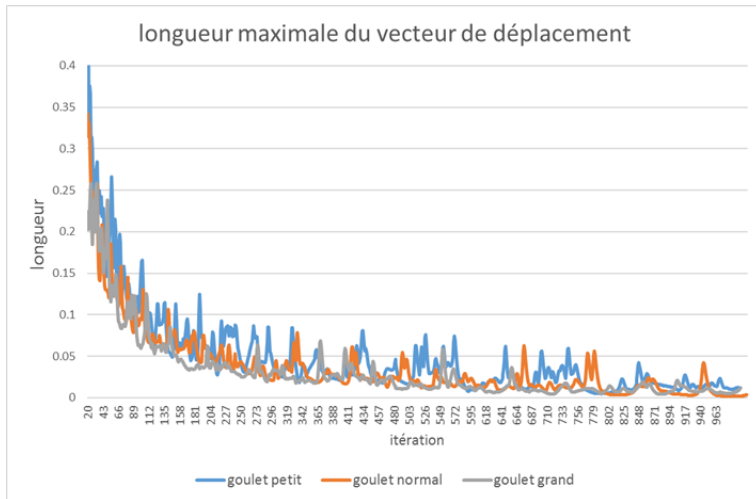


Figure: Etude du pas pour différentes tailles de goulot

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulot
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Convergence, vecteur site-centroïde

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

- ▶ Pour accélérer la convergence, on essaie de déplacer les site plus vite. On appelle ω l'amplification de déplacement. $\omega = 100\%$ correspond à l'algorithme de Lloyd normal
- ▶ On étudie l'évolution de l'énergie pour différents choix de ω
- ▶ On appelle $V_{j,n}$ (resp. $C_{j,n}$) la position du site de Voronoi de la cellule R_j à l'itération n (resp centroïde de la cellule R_j à l'itération n).

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Pour le domaine en forme de sablier, avec initialisation dans un cercle en haut du sablier, l'énergie évolue de la manière suivante (Figure 15).

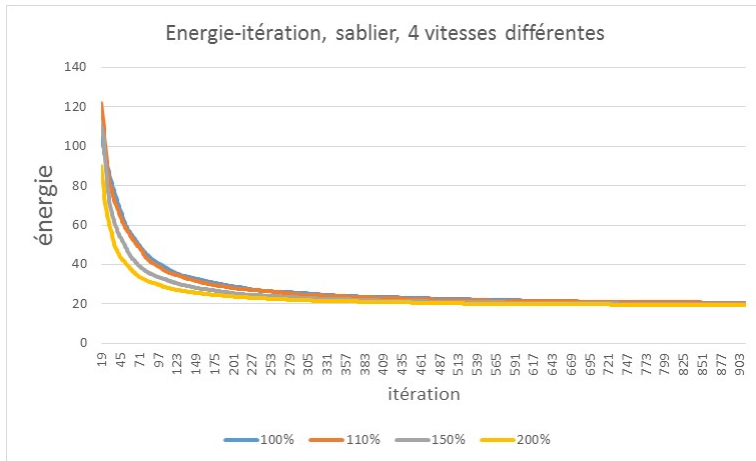


Figure: Energie pour domaine sablier, pas fixes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Pour l'observer plus clairement, on trace les dernières 200 itérations en plus grand (Figure 16).

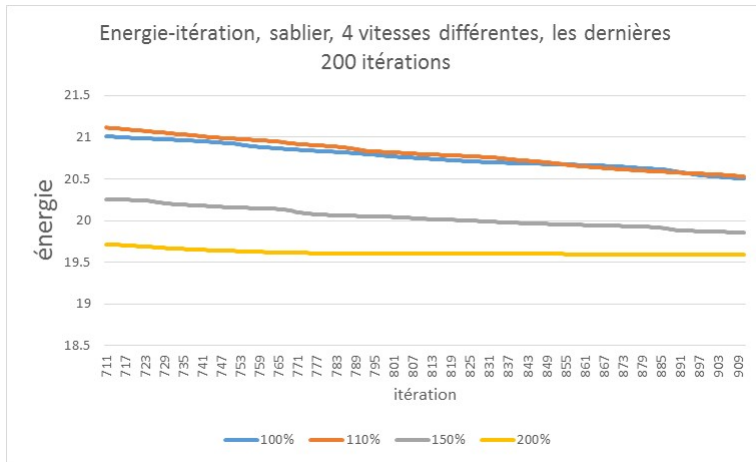


Figure: Energie des dernières 200 itérations pour domaine sablier, pas fixes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

A ω fixe, en pratique, il y a assez peu de différence. Peut-on augmenter encore ω pour accélérer ?

Non. Quand ω dépasse 200%, on observe un phénomène d'oscillation comme Figure 17. $\overrightarrow{V_{j,n-1}C_{j,n-1}}$ et $\overrightarrow{V_{j,n}C_{j,n}}$ ont des sens opposés, comme on peut l'observer sur le schéma suivant. Cela est principalement causé par un ω trop élevé : on peut penser à une descente de gradient, où on oscille au fond d'une cuve, parce que le pas est trop élevé.

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

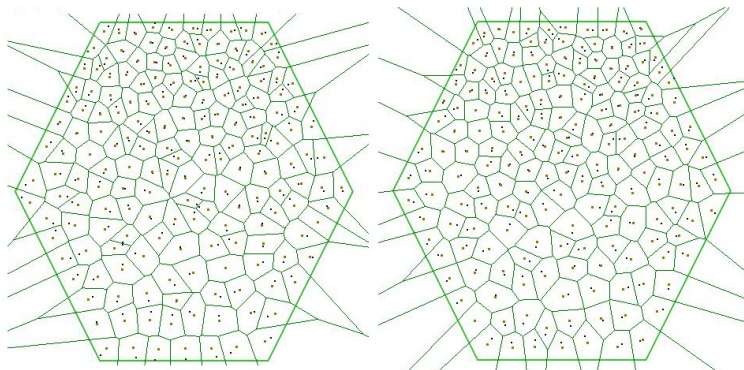


Figure: Exemple d'oscillations, deux itérations successives, avec $\omega = 200\%$

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Contrôle d'oscillation

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

On a vu que quand ω est trop grand, les sites oscillent autour du centroïde. Donc, on pense à détecter l'oscillation et diminuer ω seulement pour les sites qui oscillent, mais augmenter ω pour les sites qui sont "en route".

Dans cette perspective, on associe un ω_j pour chaque cellule R_j . La stratégie de mise-à-jour des ω_j est :

A chaque itération n , on observe la quantité $\overrightarrow{V_{j,n-1} V_{j,n}} \cdot \overrightarrow{V_{j,n} C_{j,n}}$. Si elle est positive, on augmente ω par 20% si ω ne dépasse pas un seuil plafond. Si elle est négative, on le met à 150%.

Cette stratégie est très efficace, avant de montrer les résultats, on introduit une autre technique "Momentum".

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Inspiré par la technique Momentum dans l'algorithme de descente-gradient stochastique qui est appliqué dans le domaine de l'apprentissage automatique, on modifie la mise-à-jour des sites Voronoi :

$$V_{j,n+1} = V_{j,n} + \omega(C_{j,n} - V_{j,n}) + \alpha(V_{j,n+1} - V_{j,n}) \quad (3)$$

Cette méthode permet elle aussi de limiter les oscillations en introduisant une inertie. On essaie différentes valeurs de α dans le domaine sablier (Figure 18).

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

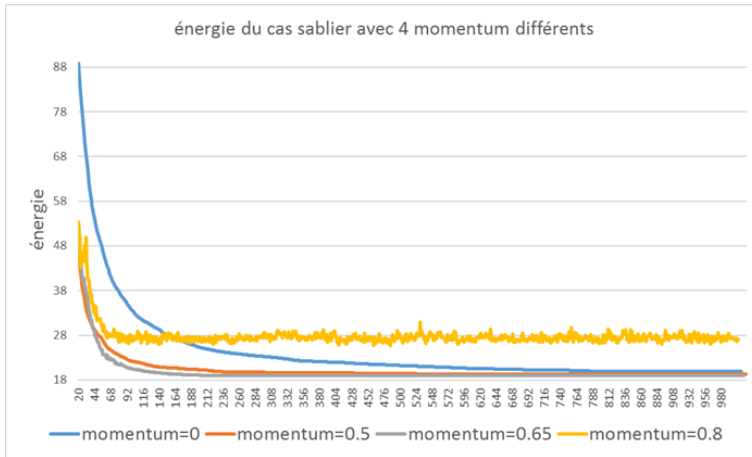


Figure: Momentum appliqué pour 4 valeurs différentes de α

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule
Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules
Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents
Contrôle d'oscillation
Momentum
Combinaison des 2
méthodes

On voit que prendre α entre 0.5 et 0.65 permet de stabiliser l'algorithme et d'accélérer la convergence, en empêchant les oscillations. Cependant, au-delà d'une certaine seuil, le terme de momentum écrase le terme de gradient et empêche la convergence de l'algorithme. Nous avons enfin essayé de compiler les deux méthodes : ω et momentum

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Table des matières

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes connexes dans une cellule

Centroïde en dehors du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de cellules

Sabliers avec goulet de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Combinaison des 2 méthodes

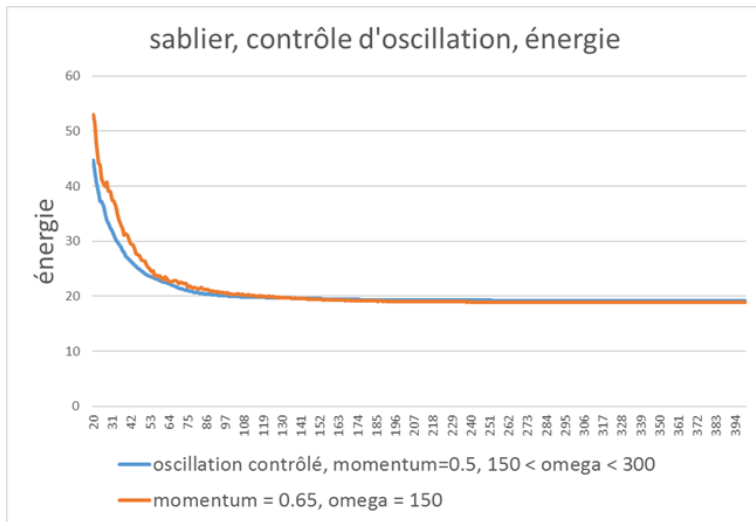


Figure: Etude comparée de l'énergie sur le sablier en utilisant les 3 méthodes

Convergence de l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,

vecteur

site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Combinaison des 2 méthodes

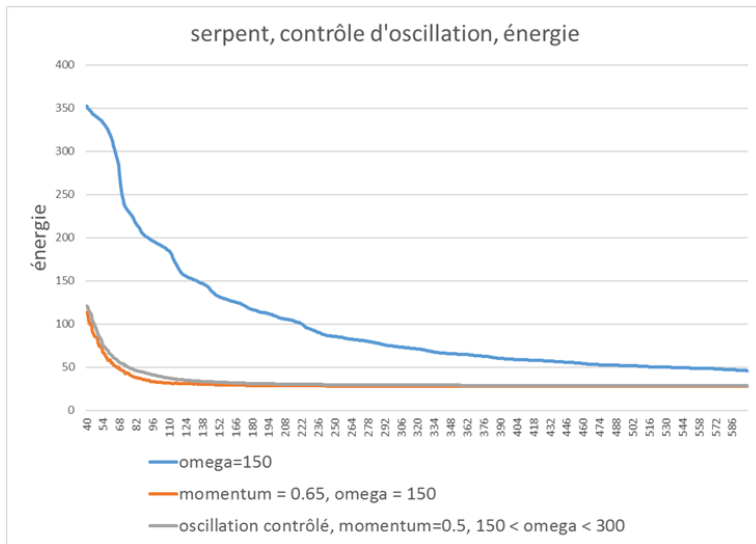


Figure: Etude comparée de l'énergie sur le serpent en utilisant les 3 méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule
Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules
Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents
Contrôle d'oscillation
Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Combinaison des deux méthodes

Convergence de
l'itération de Lloyd

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

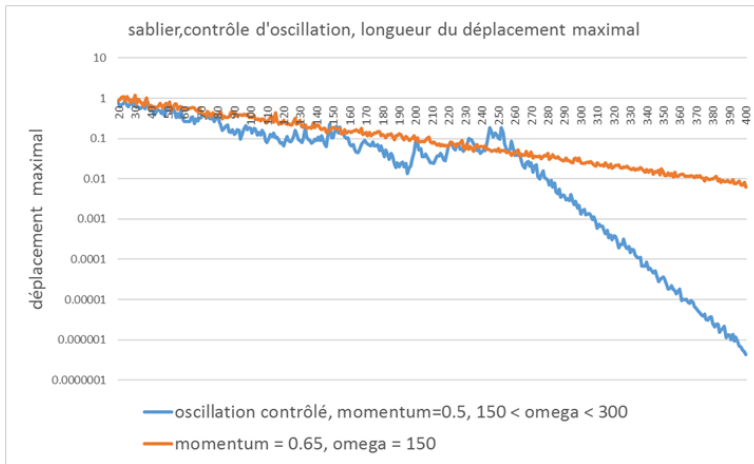


Figure:

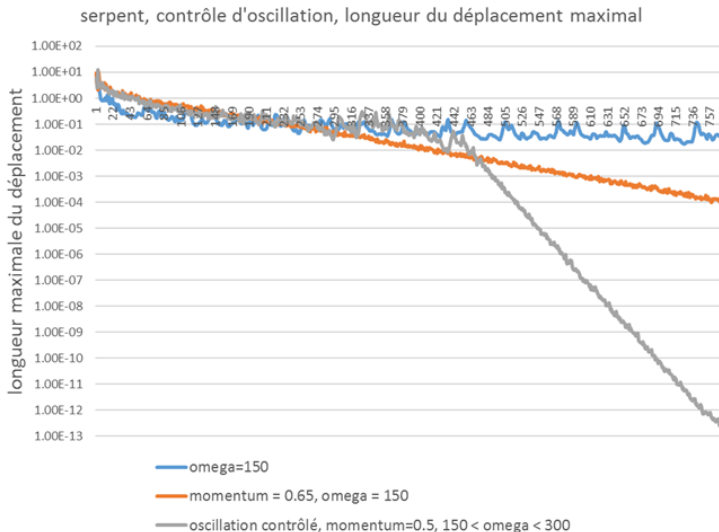


Figure:

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule
Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo
Méthode analytique
Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules
Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents
Contrôle d'oscillation
Momentum
Combinaison des 2
méthodes

- ▶ Momentum+Variation du pas gain significatif. On trace en échelle log la décroissance du pas.
- ▶ Pour le serpent, en particulier, on peut imaginer que le vecteur "vitesse" change régulièrement pour correspondre aux différentes directions du serpent.
- ▶ Si on implémente le momentum, la direction des vecteurs vitesses aura plus du mal à changer.

Problèmes au bord
: polygones
non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence,
vecteur
site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes

Leman Feng,
Francois Dupré

Problèmes au bord : polygones non-convexes

Plusieurs composantes
connexes dans une
cellule

Centroïde en dehors
du domaine

Calcul de l'énergie

Monte-Carlo

Méthode analytique

Comparaison entre les
deux méthodes

Initialisation

Aléas de l'initialisation

Forme de domaine

Différentes formes de
cellules

Sabliers avec goulet
de tailles différentes

Convergence, vecteur site-centroïde

ω différents

Contrôle d'oscillation

Momentum

Combinaison des 2
méthodes