Simulación de Sistemas

Autómatas Celulares

Autómata Celular

Ideas Básicas:

- En general, se discretiza el espacio en una **grilla** (celdas).

- Cada sitio de la grilla tiene un **estado** (puede ser ocupado o no por una partícula con velocidad, o el valor de alguna cantidad macroscópica, etc.)

- **Reglas** (Heurísticas) para definir **transición** de estados, entre celdas entre un paso temporal y el siguiente.

- En algunos casos el AC pertenece al dominio Microscópico y promediando sobre muchas celdas se llega al dominio Macroscópico.

Autómatas Celulares: Definición

- AC son arreglos regulares de celdas individuales de la misma clase

- Cada celda tiene un numero finito de estados discretos.

- Los estados se actualizan simultáneamente (sincrónicamente) en cada paso temporal.

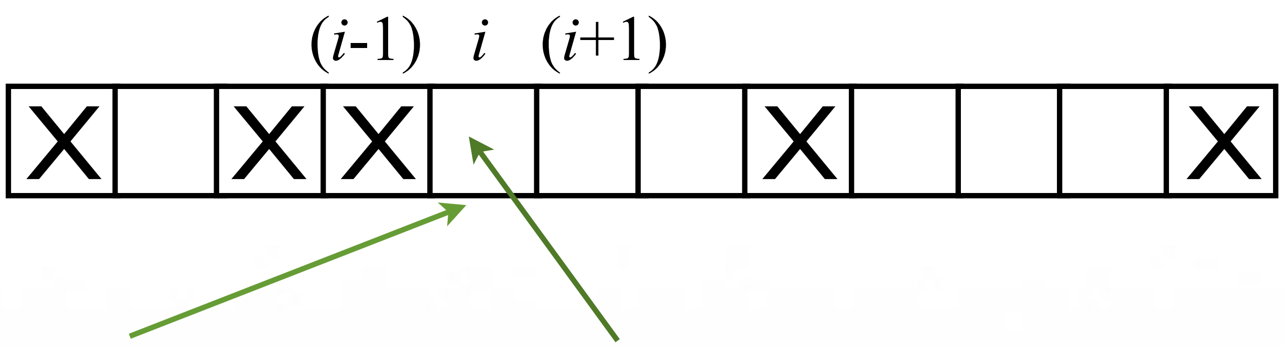
- Las reglas de actualización son determinísticas y uniformes en tiempo y espacio.

- Las reglas para la evolución de una celda depende solamente de un vecindario local a su alrededor.

Autómatas Celulares 1-D

Autómatas Celulares en una dimensión

Sea una cadena uniforme de celdas:

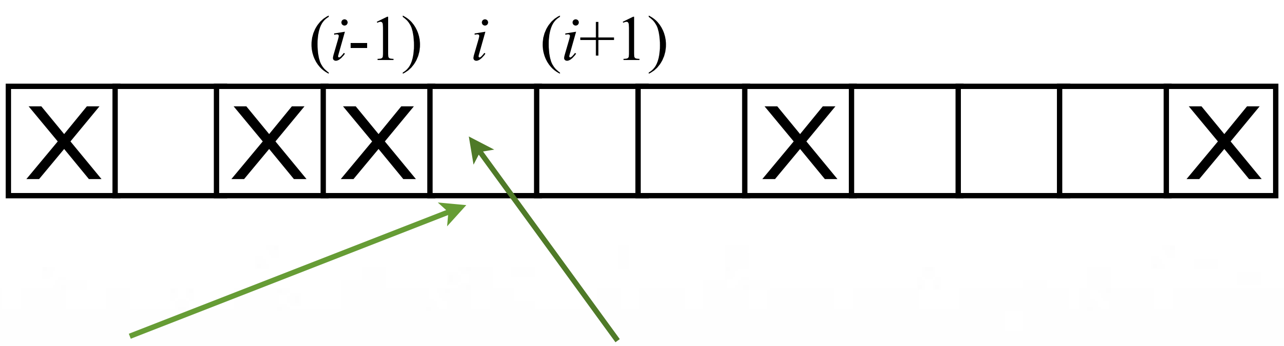


La celda i tiene un estado $a_i^{(t)}$ en el instante t.

Cada estado $a_i^{(t)}$ está definido por un nro. finito de enteros positivos (k) etiquetados desde 0 hasta (k-1).

Autómatas Celulares en una dimensión

Sea una cadena uniforme de celdas:



La celda i tiene un estado $a_i^{(t)}$ en el instante t.

La regla de evolución está dada por el mapeo:

$$a_i^{(t)} = f\left[\sum_{j=-r}^{j=r} \alpha_j a_{i+j}^{(t-1)}\right]$$

donde:

- r es el rango (nro.) de vecinos a considerar.
- α_j constantes enteras.
- f Función no lineal: “regla del autómata”.

Autómatas Celulares en una dimensión

Un ejemplo de AC con $k = 2$ y $r = 1$:

	$a_{i-1}^{(t-1)}$	$a_i^{(t-1)}$	$a_{i+1}^{(t-1)}$	$a_i^{(t)}$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

En general el nro. de posibles combinaciones es $N = k^{2r+1}$

El nro. total de reglas posibles es k^N,en este caso es $2^8 = 256$.

Un AC de 1D cuya regla de actualización solo depende de los primeros vecinos (y de sí mismo) se llama: “AC Elemental”.

Autómatas Celulares en una dimensión

Subclases de Reglas

- Regla Totalista: Todos los $\alpha_j = 1$.
- Regla Simétrica: $f\,[a_{i-r}\,, \ldots, a_{i+r}\,] = f\,[a_{i+r}\,, \ldots, a_{i-r}\,]$.
- Regla Legal: No cambia la configuración nula (todos ceros).
- ...

Autómatas Celulares en una dimensión

Hay 4 posibles patrones de Autómatas Celulares en 1-D

1) Desaparece con el tiempo.

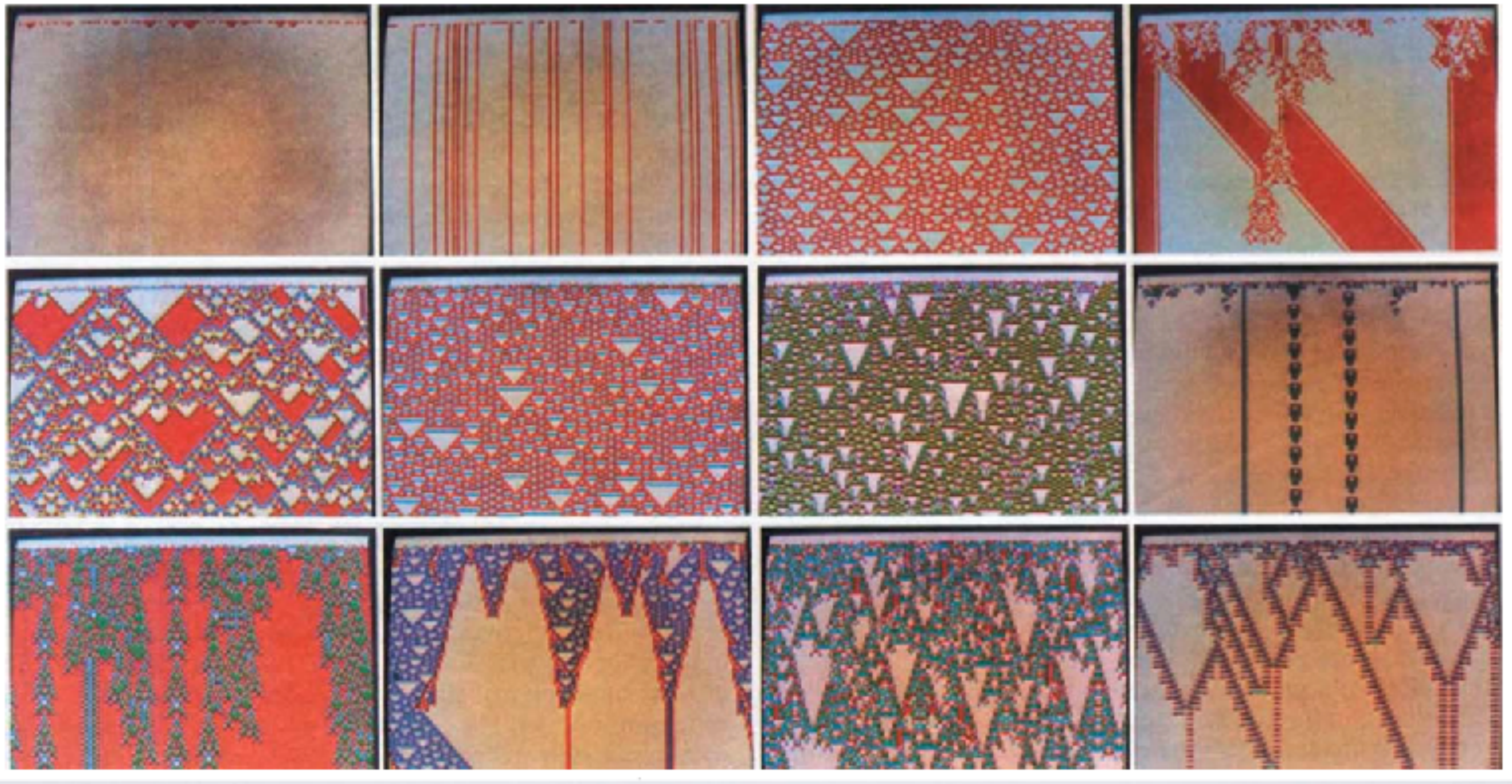
2) Evoluciona a un tamaño fijo finito.

3) Crece indefinidamente a una velocidad fija.

4) Crece y se contrae periódicamente.

Autómatas Celulares en una dimensión

Ejemplos de Wolfram (1984, Nature, 311 pp:419)



Autómatas Celulares 2-D

Autómatas Celulares 2D

Definiciones de Vecindad

Vecindario Von Neumann
de alcance r

$$N_{i,j}^{(vN)} := \left\{(k,l) \in L \middle| |k-i| + |l-j| \leq r\right\}$$

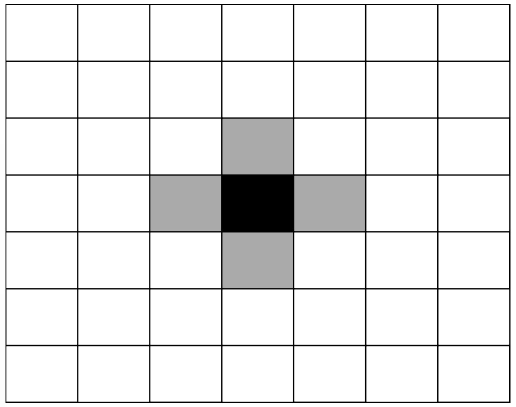
Vecindario Moore
de alcance r

$$N_{i,j}^{(M)} := \left\{(k,l) \in L \middle| |k-i| \leq r \quad \text{and} \quad |l-j| \leq r\right\}$$

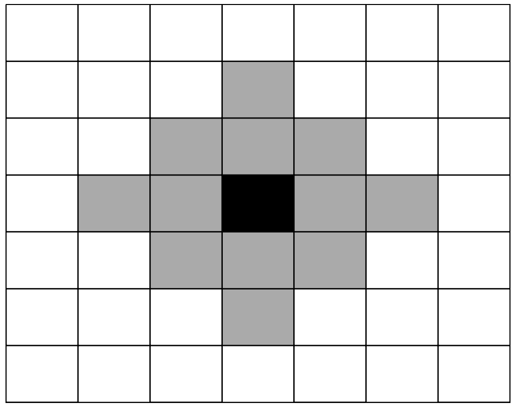
Autómatas Celulares 2D

Definiciones de Vecindad

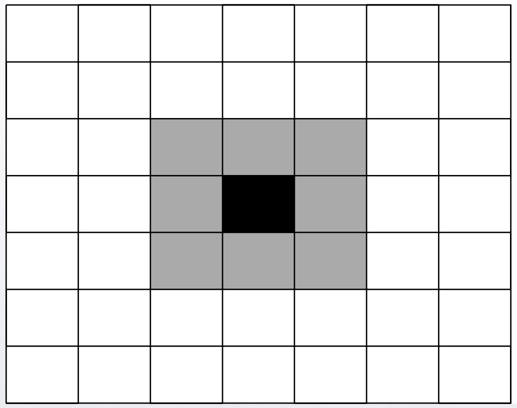
Von Neumann, $r = 1$



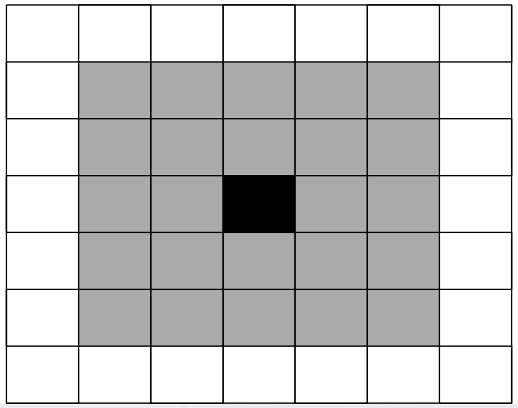
Von Neumann, $r = 2$



Moore, $r = 1$



Moore, $r = 2$



Autómatas Celulares 2D: “Juego de la vida”

Autómatas Celulares 2D: "Vida"

En la década de 1970, Conway definió un autómata celular que simula la evolución de colonias de organismos vivos.

Las reglas son:

- Se considera 8 vecinos (Vecindad de Moore, $r = 1$).

- Cada celda tiene dos estados posibles "Viva" o "Muerta" ($k = 2$).

- Las Celdas Vivas, permanecerán vivas en el siguiente paso temporal si tiene 2 o 3 vecinos vivos, de lo contrario morirá.

- Las Celdas Muertas se transformarán en Vivas solamente si tiene exactamente 3 vecinos vivos.

Autómatas Celulares 2D: "Vida"

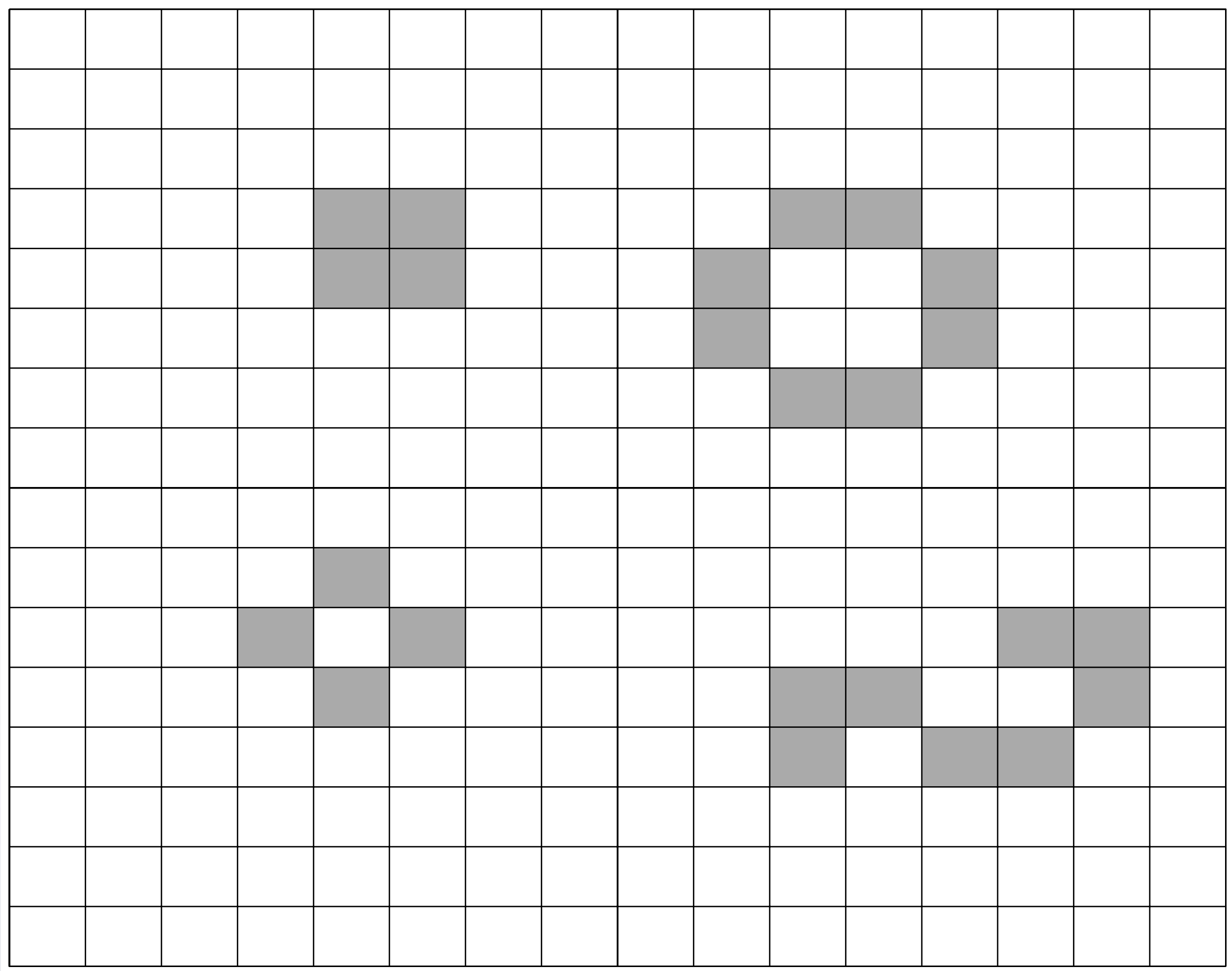
Implementación:

- Condición Inicial:
  Puede ser al azar (cada celda "Viva" o "Muerta").
  Puede ser una configuración predeterminada.

- Condición de Contorno:
  Puede ser periódica o no.

Autómatas Celulares 2D:“Vida”

Patrones Estables

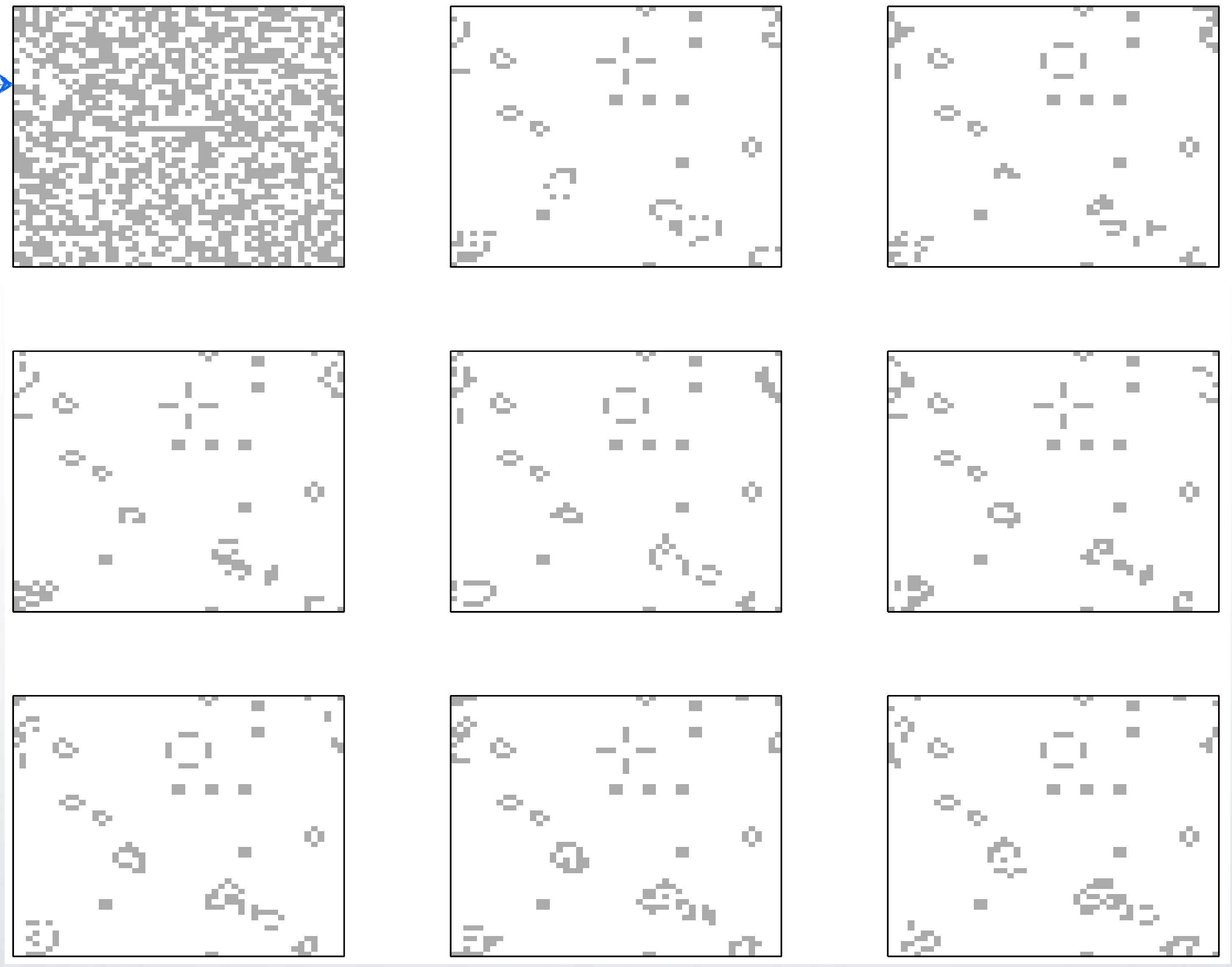


Autómatas Celulares 2D: “Vida”

Ejemplo de Evolución (50x50)

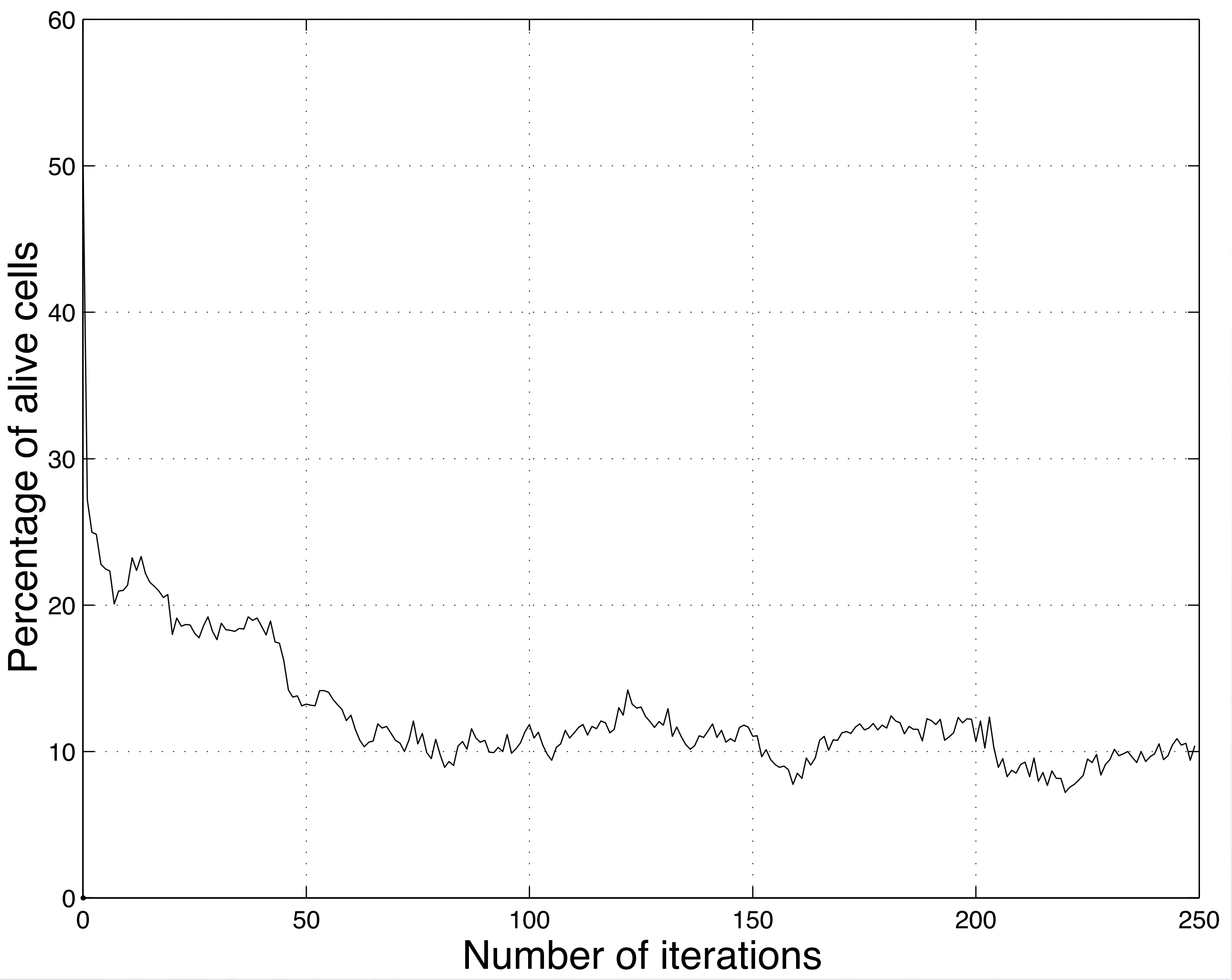
Estados a tiempos 141 a 148

Estado Inicial

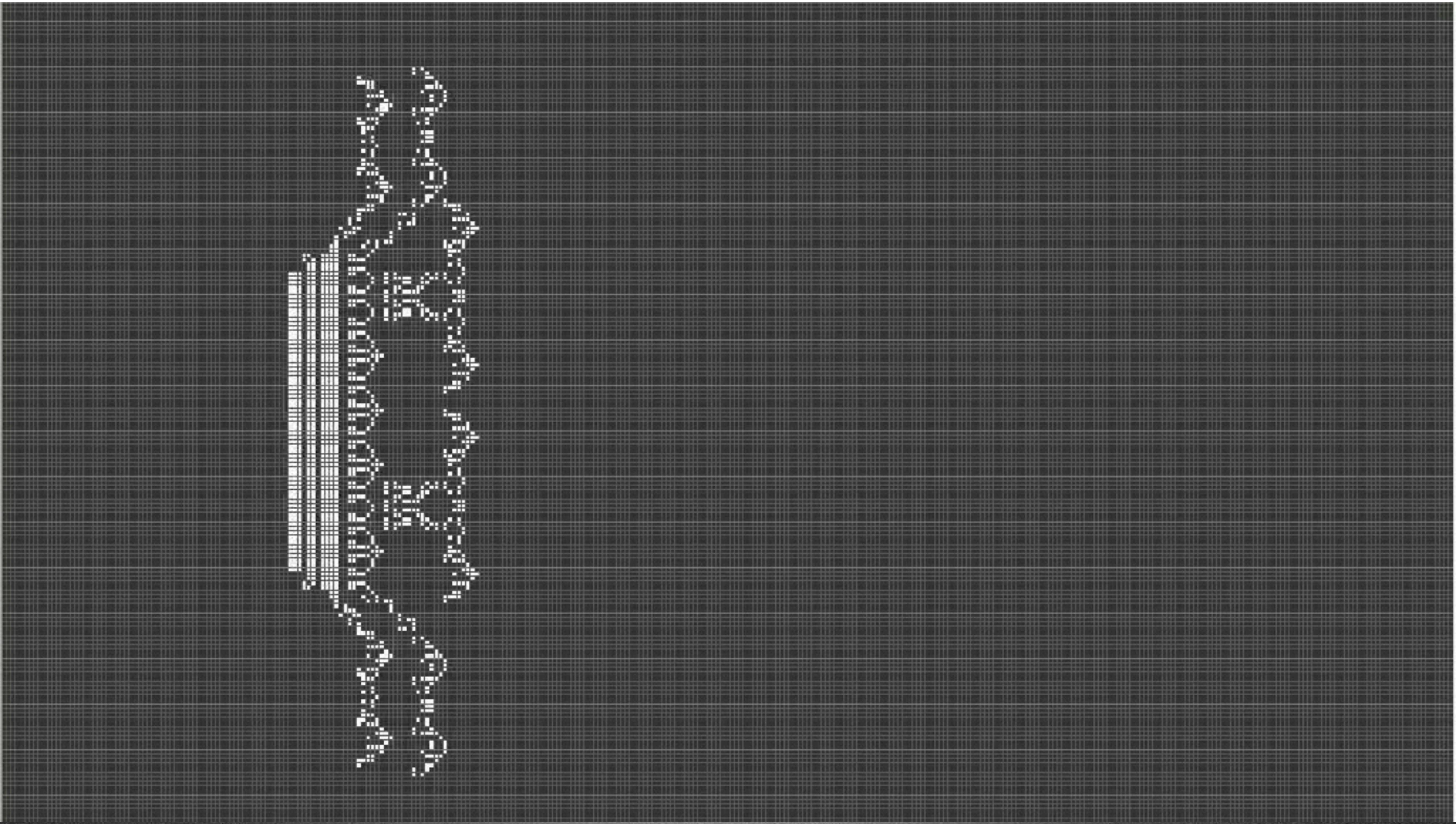


Autómatas Celulares 2D: "Vida"

Ejemplo de Evolución (50x50)

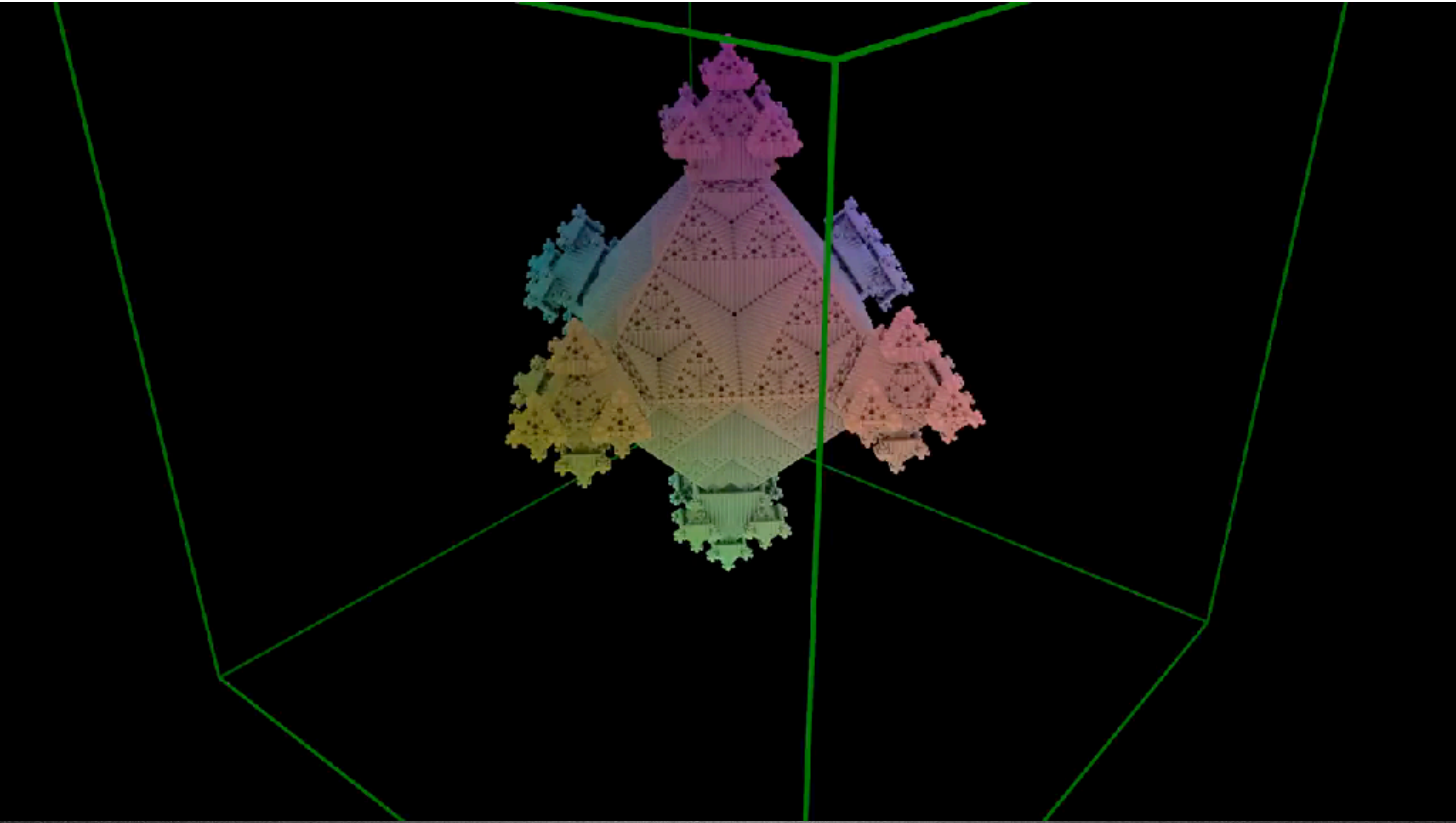


Autómatas Celulares 2D: "Vida"



"Game of life" 3D (tiempo)

Autómatas Celulares 3D (x,y,z)



Autómatas Celulares:
Modelos de Fluidos 2D “Lattice Gas”

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

(Antes) Ecuación de Navier Stokes

- Conservación de la masa
- Conservación de la energía
- Conservación del momento
- Hipótesis de medio Continuo

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla}P + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0 \longrightarrow \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$$

Ecuación de Continuidad

+ Condiciones de Contorno

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

(Antes) Ecuación de Navier Stokes

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} P + \nu \nabla^2 \boldsymbol{u}}$$

Velocidad

Presión Cinemática
$P = p/\rho_0$

viscosidad

- Ecuaciones Diferenciales No Lineales.
- Solución Analítica en pocos casos.
- En general se usan métodos numéricos.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Número de Reynolds

Velocidad Característica

Longitud Característica

$$\boxed{R_e = \frac{UL}{\nu}}$$

Número adimensional que considera fuerzas inerciales vs. viscosas

R_e << 1	Flujo Laminar
R_e >> 1	Flujo Turbulento

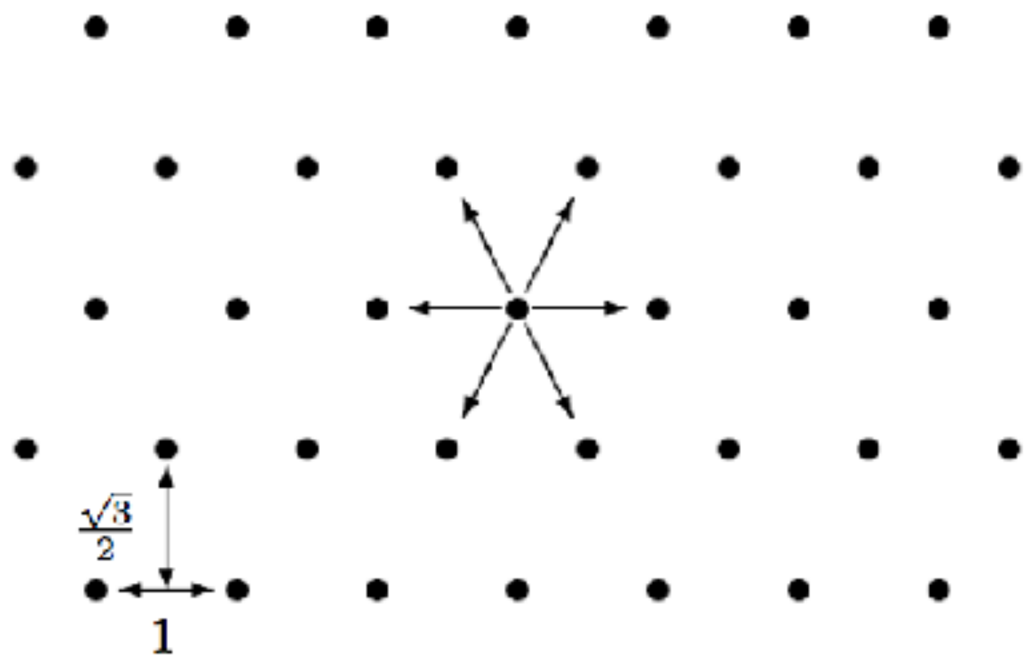
Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Modelo **FHP**

Frish, **H**asslacher, and **P**omeau (1986) definieron un modelo "lattice gas" que es equivalente a resolver las ecuaciones de Navier-Stokes

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Modelo **FHP**



- Retícula triangular con simetría hexagonal.

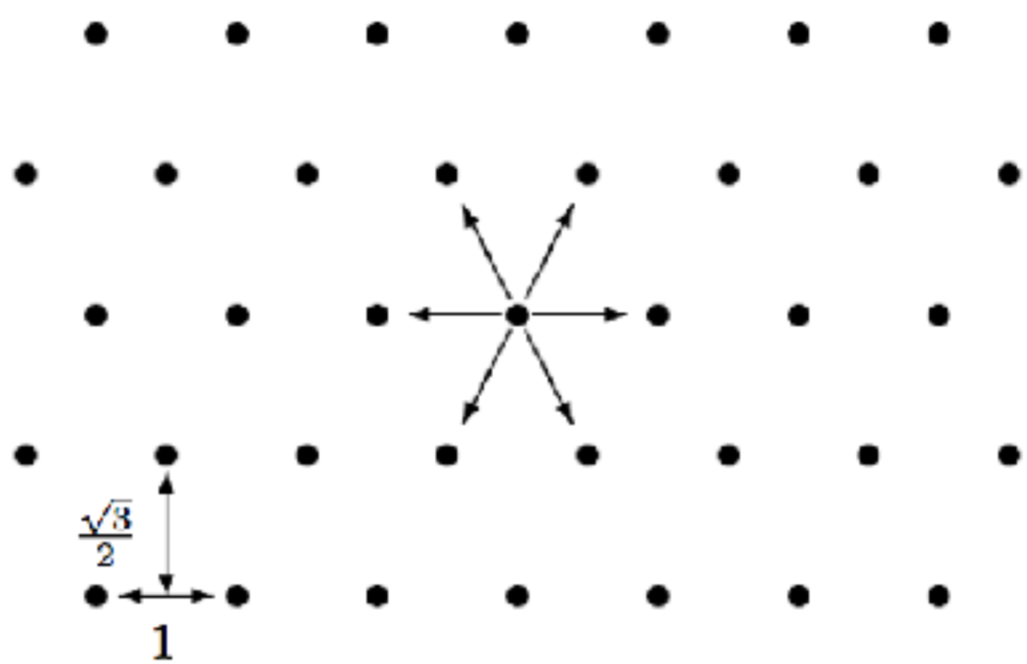
- Cada nodo tiene 6 primeros vecinos a la misma distancia.

- Los vectores que unen estos nodos se llaman “lattice vectors” o velocidades de la retícula:

$$\boldsymbol{c}_i = \left(\cos\frac{\pi}{3}i, \sin\frac{\pi}{3}i\right), \quad i = 1, ..., 6.$$

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Modelo **FHP**



$\boldsymbol{r}$ es el vector posición de un nodo.

$\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}_i$ son las posiciones de sus vecinos.

- Cada nodo tiene asociada una Celda.

- La Celda puede estar vacía u ocupada por varias partículas.

- Todas las partículas tienen la misma masa (=1) y son indistinguibles.

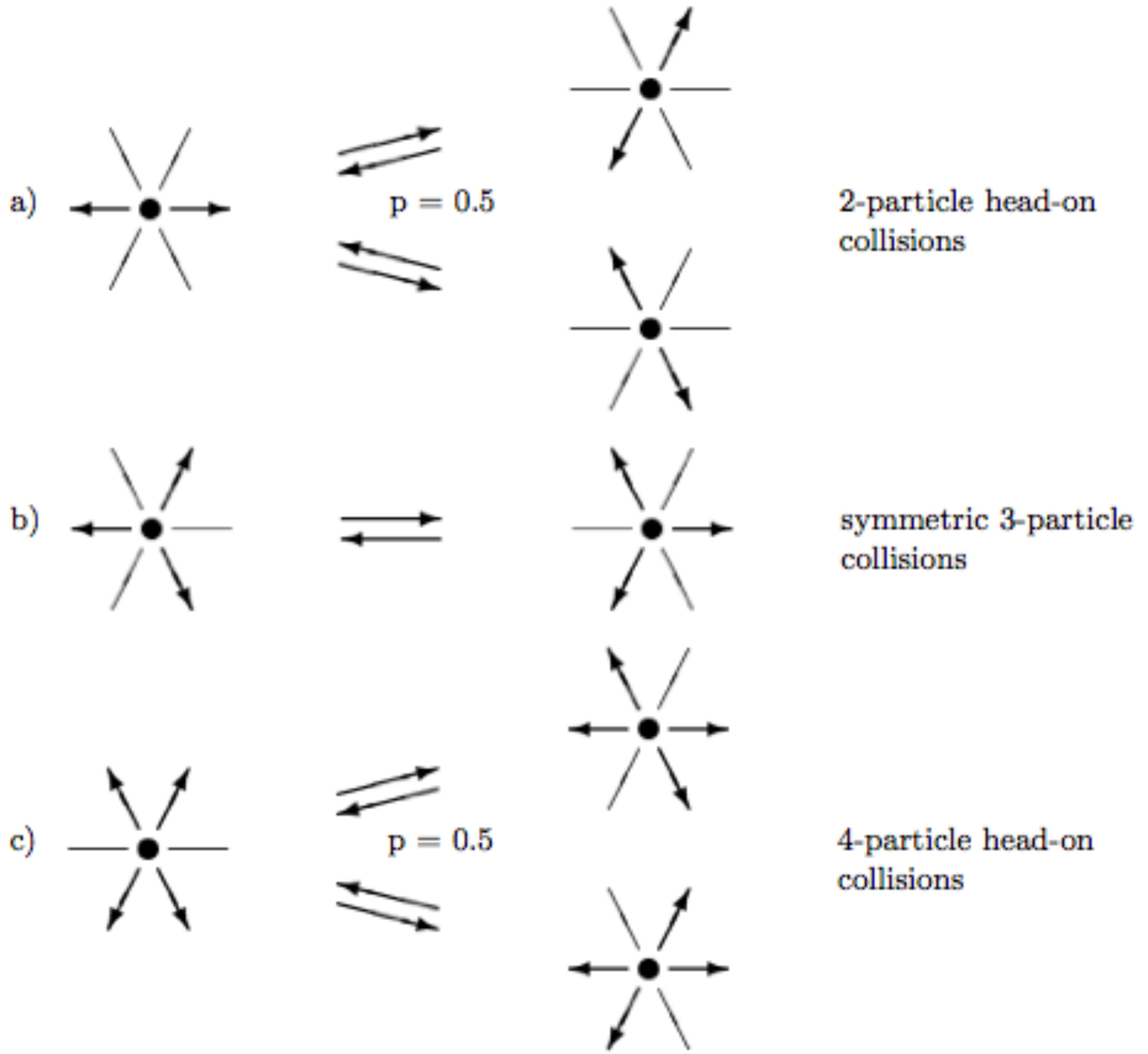
- Evolución. Cada paso temporal tiene 2 etapas:
  - Propagación (se mueve según velocidades).
  - Colisión (adquieren nuevas velocidades, según las reglas de colisión).

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

- **Todas las posibles colisiones deben conservar el momento (...además de la masa).**

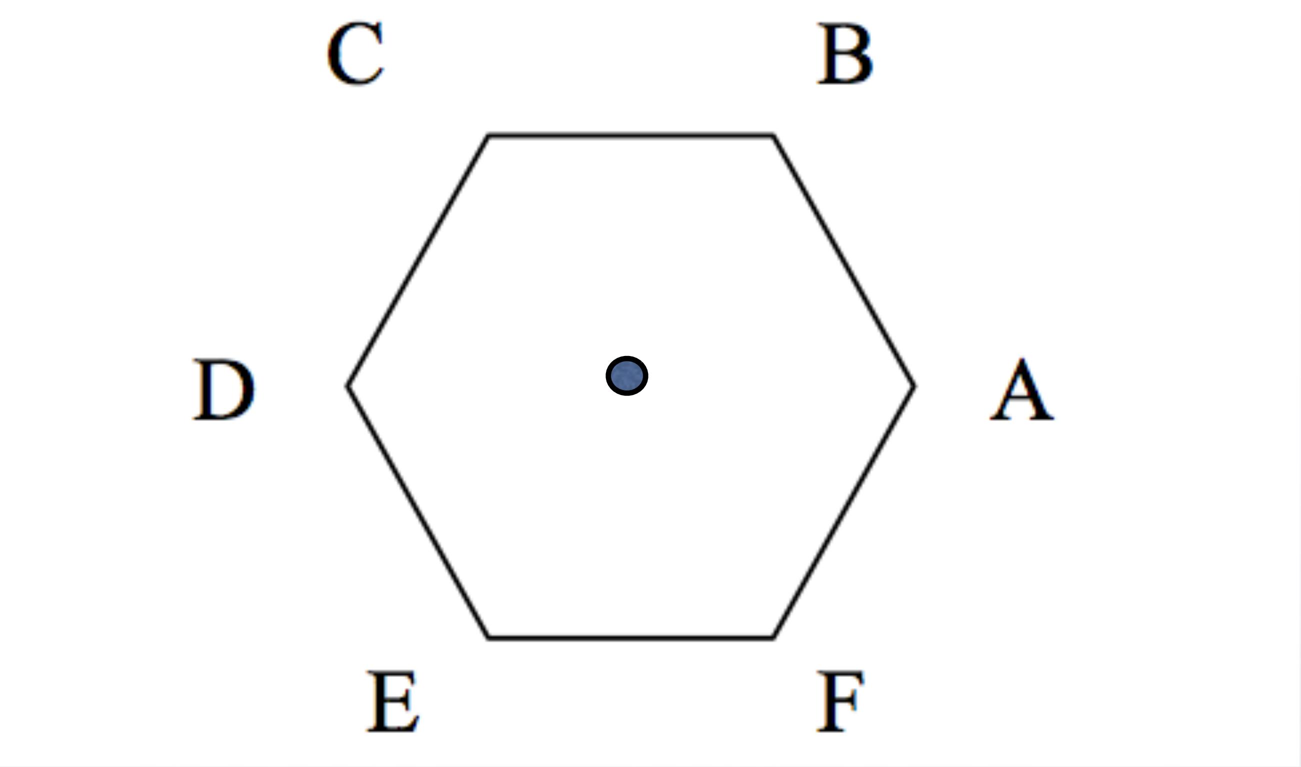
- Cómo serían las de 5 y 6 partículas?

- y las de 2 a 60º o 120º?



Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación: Codificación estado de cada Celda



Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación: Codificación estado de cada Celda

		Bit Value							
		128	64	32	16	8	4	2	1
Las 6 posibles direcciones	A	0	0	0	0	0	0	0	1
	B	0	0	0	0	0	0	1	0
	C	0	0	0	0	0	1	0	0
	D	0	0	0	0	1	0	0	0
	E	0	0	0	1	0	0	0	0
	F	0	0	1	0	0	0	0	0
Sólido	S	0	1	0	0	0	0	0	0
Random	R	1	0	0	0	0	0	0	0

Hay 256 estados posibles.

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Ejemplo Tabla de mapeo de estados (sin considerar colisiones de 4 partículas)

Primero los que no cambian:
Desde 00000000 hasta 00111111
(de 0 a 63)
y
desde 10000000 hasta 10111111
(de 128 a 191)

	Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	1	1
...								
255	1	1	1	1	1	1	1	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados

Presencia de sólido
Desde 01000000 hasta 01111111
(de 64 a 127)
y
desde 11000000 hasta 11111111
(de 192 a 255)

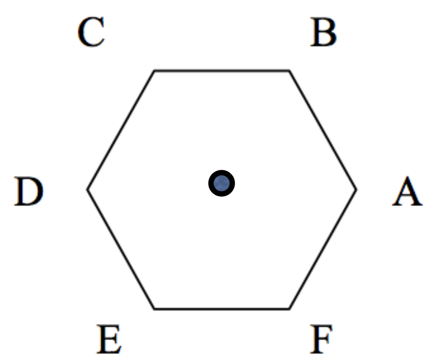
Al colisionar con un sólido la partícula regresa por donde vino:

A pasa a D,

B pasa a E,

C pasa a F,

…

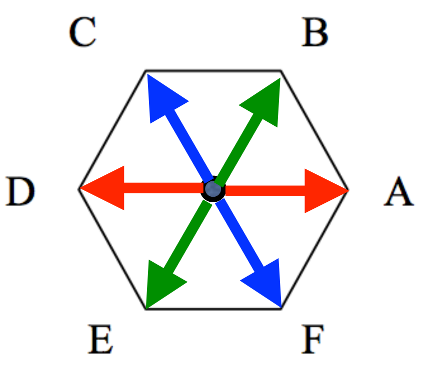


	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
64	0	1	0	0	0	0	0	0
65	0	1	0	0	0	0	0	1
66	0	1	0	0	0	0	1	0
…								
127	0	1	1	1	1	1	1	1

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
64	0	1	0	0	0	0	0	0
72	0	1	0	0	1	0	0	0
80	0	1	0	1	0	0	0	0
…								
127	0	1	1	1	1	1	1	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados



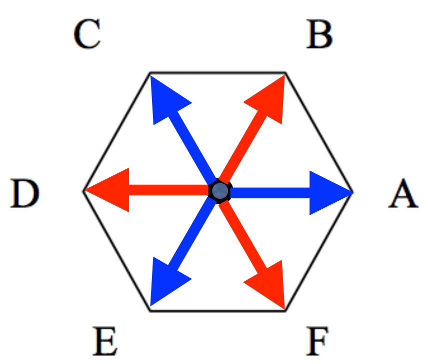
Colisión Frontal Binaria
AD, BE y CF cada una puede pasar a cualquiera de las otras 2 con igual probabilidad.
Ejemplo:

	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
9 (AD)	0	0	0	0	1	0	0	1
137 (AD)	1	0	0	0	1	0	0	1

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
18 (BE)	0	0	0	1	0	0	1	0
164 (CF)	1	0	1	0	0	1	0	0

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Implementación:
Tabla de mapeo de estados



Finalmente, Colisión de 3 partículas:

	In-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
21 (ACE)	0	0	0	1	0	1	0	1
42 (BDF)	0	0	1	0	1	0	1	0
149 (ACE)	1	0	0	1	0	1	0	1
170 (BDF)	1	0	1	0	1	0	1	0

	Out-State Bit Value							
	128 R	64 S	32 F	16 E	8 D	4 C	2 B	1 A
42 (BDF)	0	0	1	0	1	0	1	0
21 (ACE)	0	0	0	1	0	1	0	1
170 (BDF)	1	0	1	0	1	0	1	0
149 (ACE)	1	0	0	1	0	1	0	1

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Condimentos Finales.

1 - Promedios Macroscópicos. Por lo menos16 x16 celdas y 10 pasos temporales.

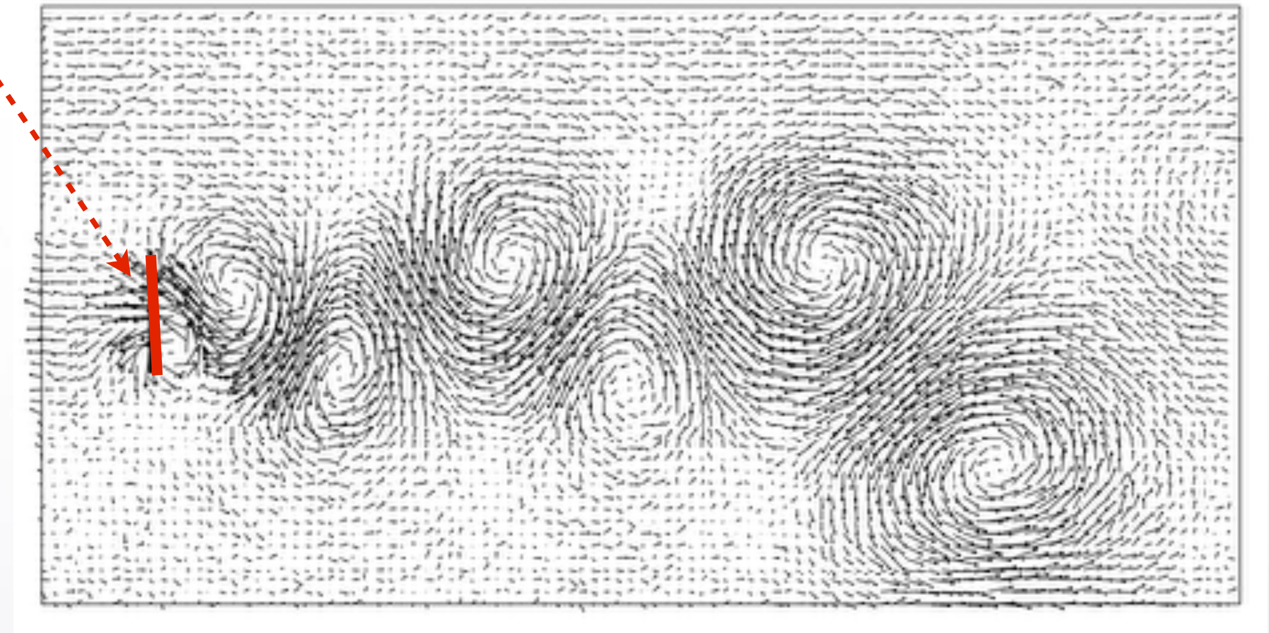
2 - Fuerza Impulsora. Incluir momentum desde los bordes o cambiando con alguna probabilidad las velocidades de algunas celdas en una dirección deseada.

3 - Remapeo de la grilla hexagonal para cálculo de vecinos (ver biblio).

Autómatas Celulares: Fluidos 2D

Ejemplo: Fluido alrededor de una barrera (de largo L).

- Grilla de 1929 x 960
- 100,000 pasos
- Promedios cada 32x32 celdas y cada 100 pasos temporales.



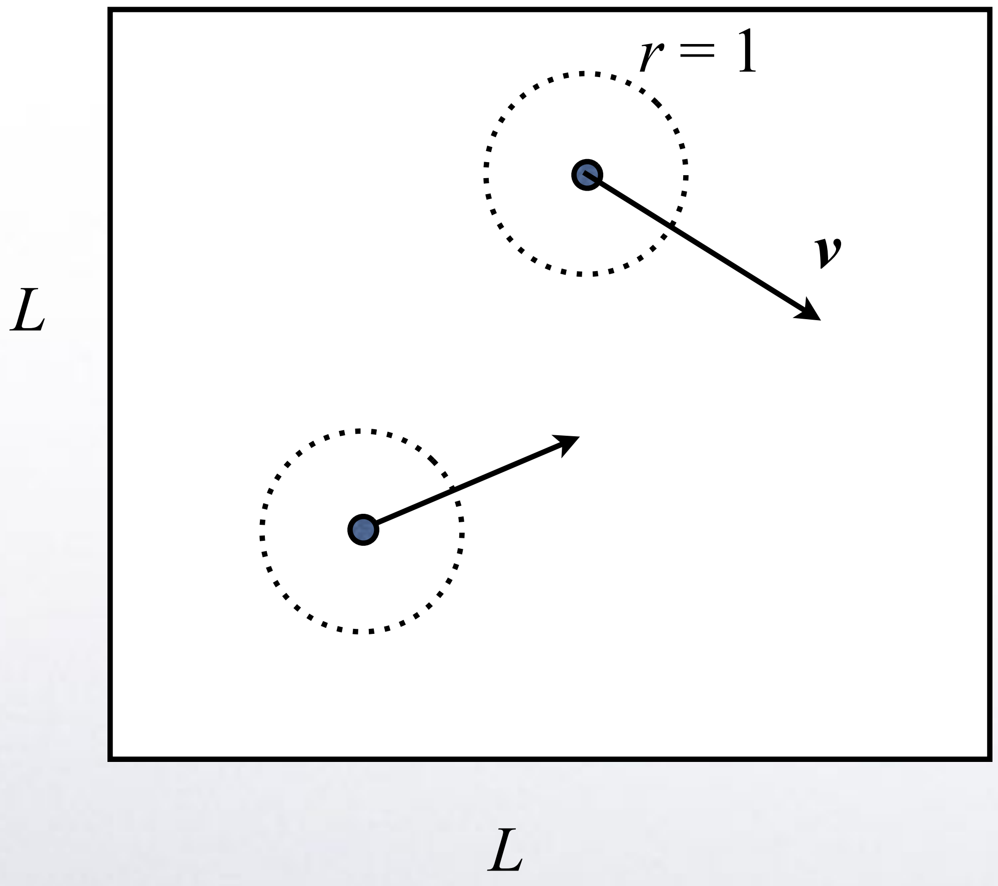
- Cómo se puede cambiar el nro. de Reynolds en estas simulaciones ?

Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados

Vicsek et al. (1995)



Definiciones:

- Cada partícula es puntual y se mueve en el continuo dentro de la celda de lado L.

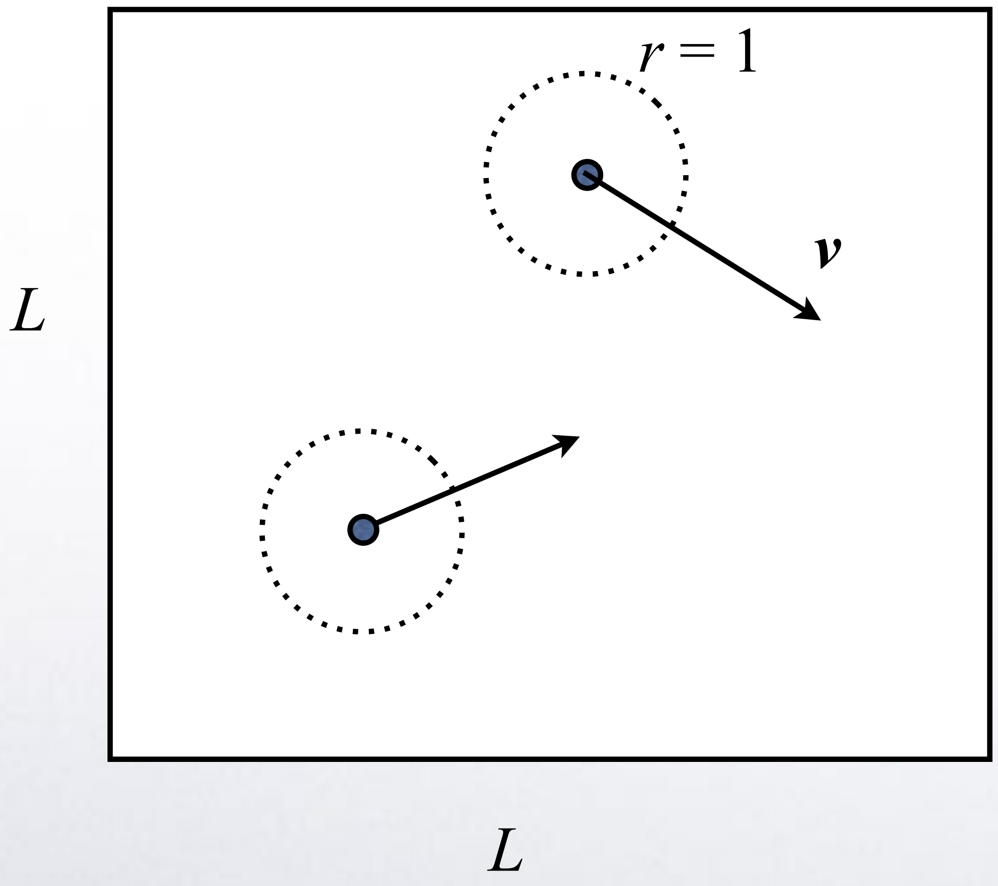
- r es el radio de interacción entre partículas.

- $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de módulo v y dirección dada por el ángulo θ.

- El paso temporal es $dt = 1$.

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados



Condiciones Iniciales:

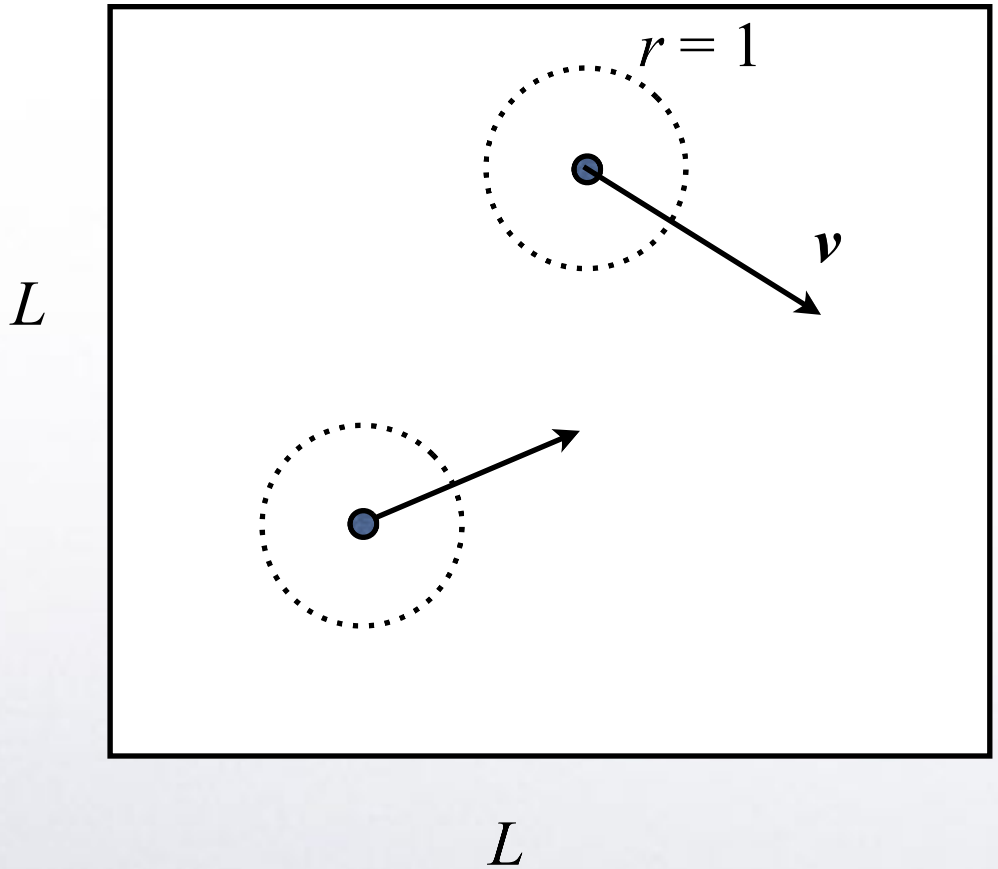
- a $t = 0$, se generan N partículas distribuidas rendom en la celda.

- Todas tienen igual modulo $v = 0.03$.

- Y direcciones θ distribuidas random.

Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

Bandadas de agentes autopropulsados



Evolución temporal:

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t.$$

$$\theta(t+1) = \langle\theta(t)\rangle_r + \Delta\theta,$$

donde $\langle\theta\ (t)\rangle_r$ es el promedio de los ángulos de todas las partículas dentro de r incluyendo la propia partícula:

$$\text{arctg}[\langle\sin(\theta(t))\rangle_r/\langle\cos(\theta(t))\rangle_r].$$

$$\text{atan2}[\qquad\qquad\qquad\qquad]$$

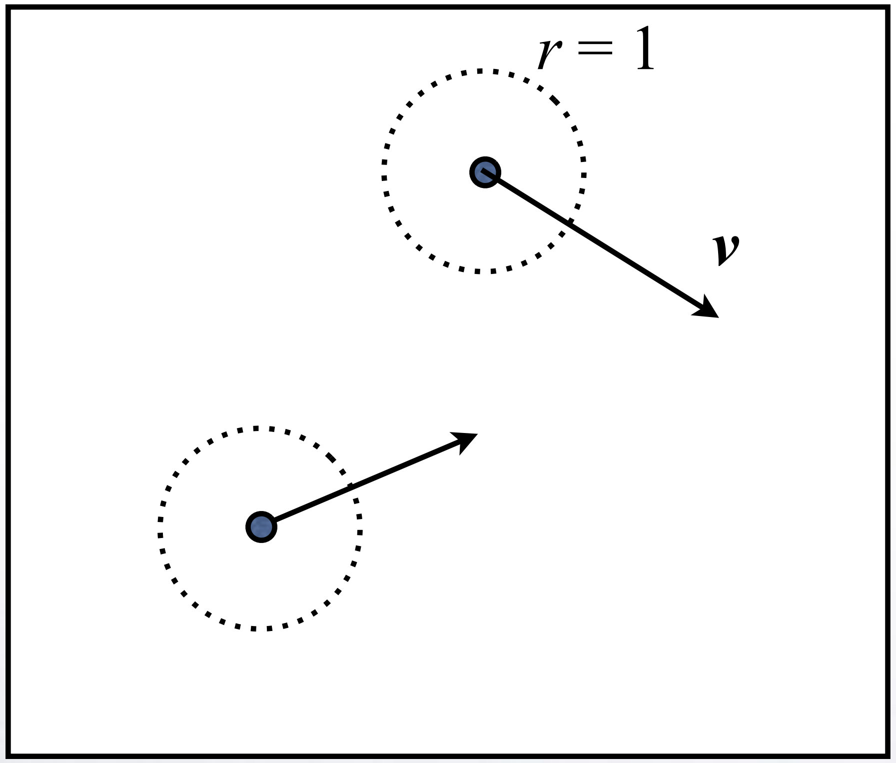
Y $\Delta\theta$ es un ruido uniforme entre [-η/2, η/2].

Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

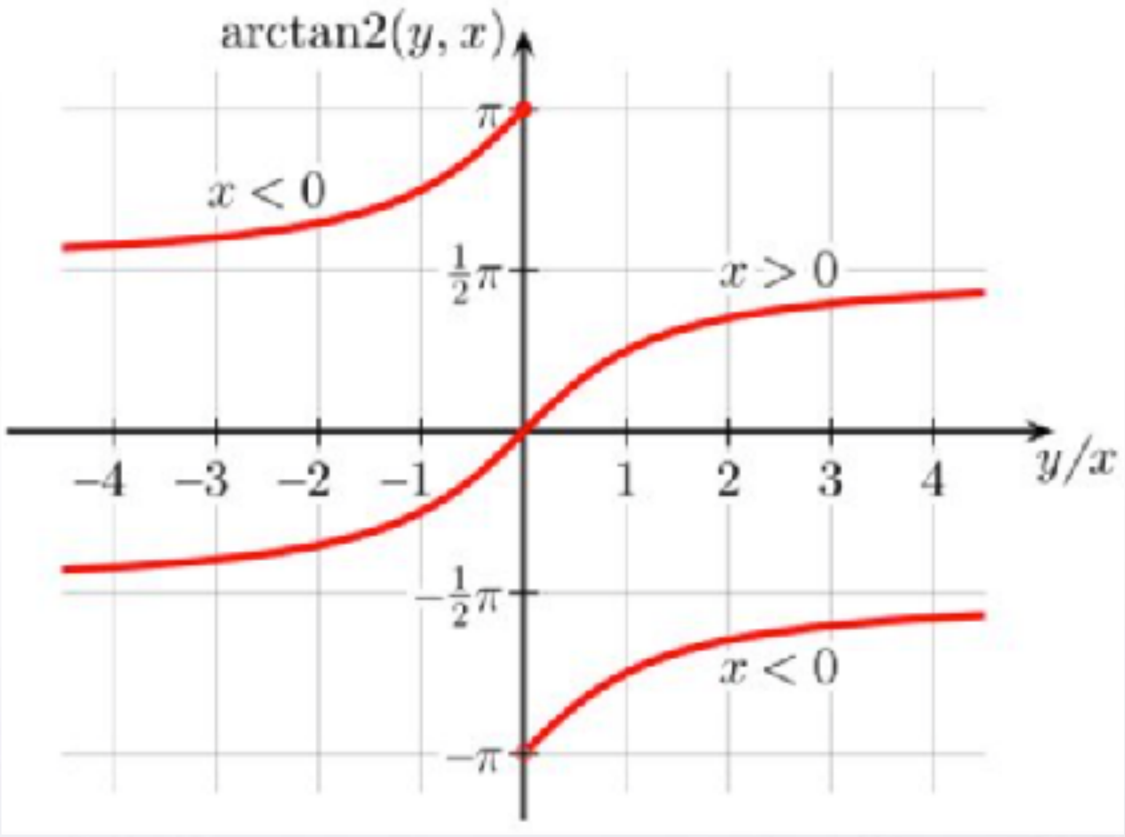
Bandadas de agentes autopropulsados

atan2[ ]

L

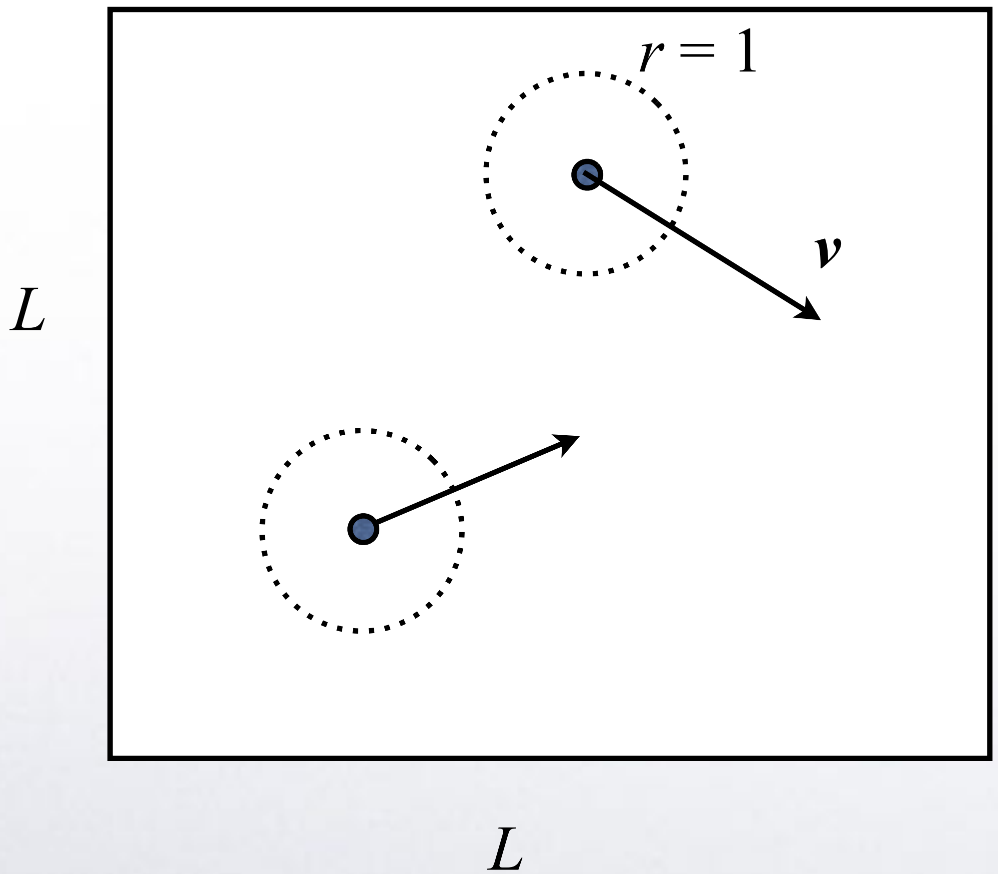


L



Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados



Entonces el sistema tiene 3 variables relevantes:

Modulo de la velocidad (v), Densidad ($\rho = N/L^2$) y Amplitud del ruido (η).

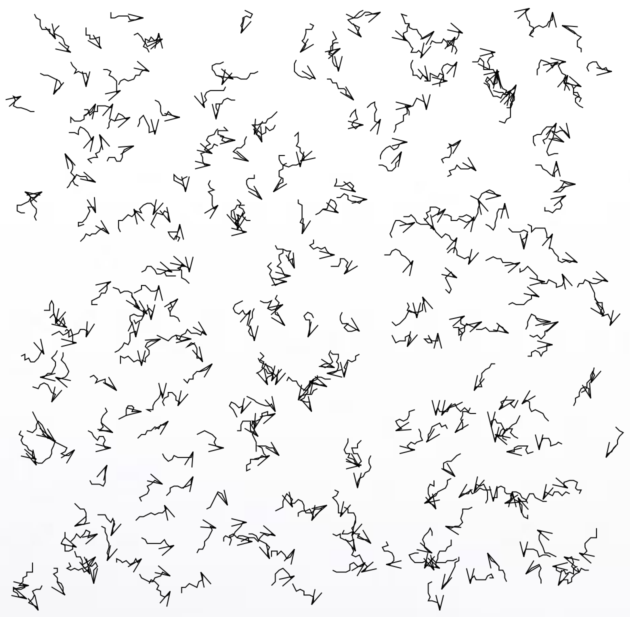
Se define el parámetro de orden (v_a) como:

$$v_a = \frac{1}{Nv}\left|\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}_i\right|$$

El cual tiende a cero para total desorden y a 1 para partículas "polarizadas".

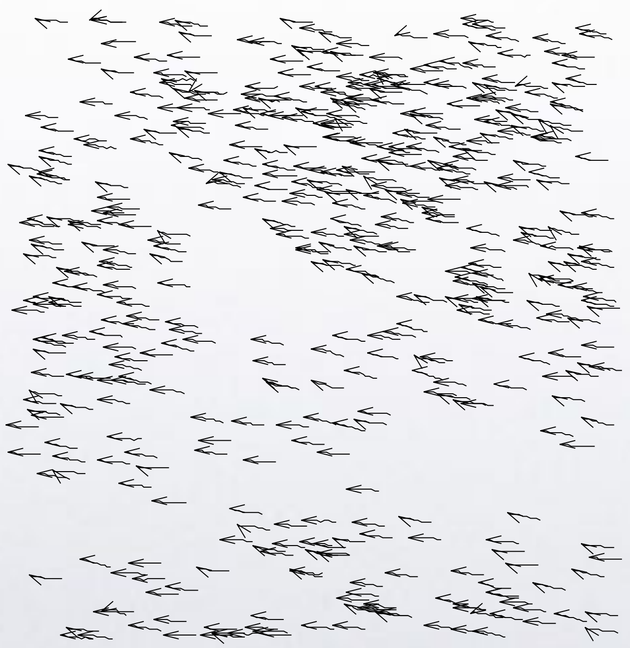
Autómatas Celulares: "Off - Lattice"

Bandadas de agentes autopropulsados



$v_a \longrightarrow 0$ para total desorden.

$(N=300, L=7, \eta=2)$



$v_a \longrightarrow 1$ para partículas "polarizadas".

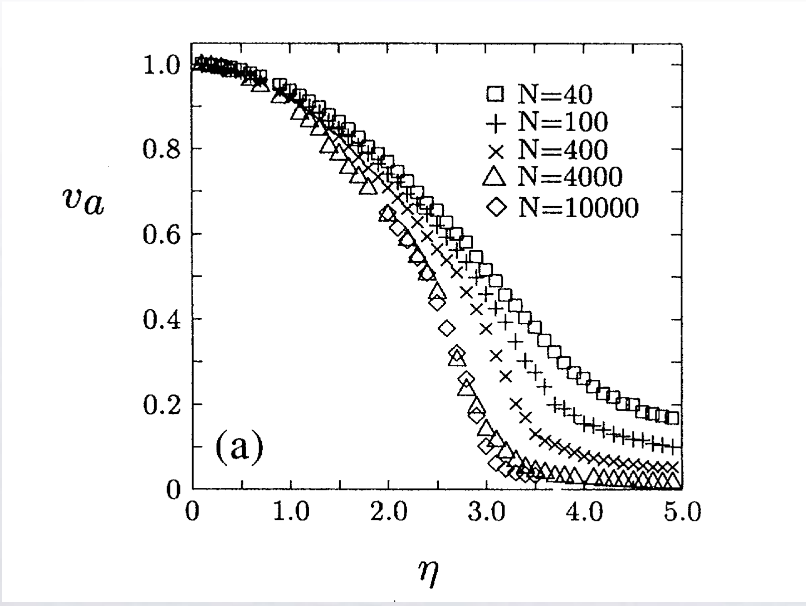
$(N=300, L=5, \eta=0.1)$

Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

Bandadas de agentes autopropulsados

Bajas densidades y bajo ruido, se tienden a formar grupos que se mueven coherentemente.

(N=300, L=25, η=0.1)



Se puede estudiar como varía v_a por ejemplo con η.

Autómatas Celulares: “Off - Lattice”

Bandadas de agentes autopropulsados

Trabajo Práctico:

1 - Implementar el algoritmo de bandadas descripto.

2 - Reproducir algunas curvas de Vicsek et al. (1995) v_a en función de η y de ρ.

3 - Estudiar el problema de las "visitas".

4 - Animaciones con distintos colores según la orientación de la velocidad.

5 - Redactar Informe.

Autómatas Celulares

Informe

- Formato:

  - Redacción Técnica.
  - Ecuaciones numeradas.
  - Afirmaciones, Conclusiones, descripciones BASADAS en DATOS
  - Figuras: Referenciarlas, Leyendas, Ejes, Tamaño de Fuente...
  - PROMEDIAR varias REALIZACIONES.
  - Usar Latex (Ej.: www.overleaf.com).

  - Ver documentación en “.../00_GuíasFormato/“.

Autómatas Celulares

Fin