TD de topologie et analyse

François-Pierre Paty

1 TD du jeudi 12 novembre

1.1 Exercice II.9

Soit f une fonction uniformément continue sur $D \subset \mathbb{R}$.

Question 1. Soient (x_n), (y_n) deux suites de D telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n - y_n = 0$. Montrer que : $\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(y_n) = 0$.

Démonstration. f est uniformément continue. Donc soit $\epsilon > 0$. On dispose d'un $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in D$ tels que $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Comme $x_n - y_n \to 0$, on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|x_n - y_n| < \delta$. Donc par uniforme continuité de f, $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$. Finalement, on a prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, on dispose d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|f(x_n) - f(y_n)| < \epsilon$, *i.e.* $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$. $\square$

Question 2. $f(x) = 1/x$ est-elle uniformément continue sur $[1, +\infty[$?

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On veut trouver un $\delta > 0$ tel que que si $|x - y| < \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, *i.e.* $|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < \epsilon$ *i.e.* $|\frac{x-y}{xy}| < \epsilon$. Or $\frac{1}{xy} \leq 1$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Donc on choisit $\delta = \epsilon$ et on a bien que $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$. Donc f est uniformément continue sur $[1, +\infty[$. $\square$

Question 3. $f(x) = 1/x$ est-elle uniformément continue sur $]0, 1]$?

Démonstration. Soient $x_n = 1/n$ et $y_n = 1/(n^2)$. Alors $x_n - y_n \to 0$ mais $f(x_n) - f(y_n) = n - n^2$ ne tend pas vers 0. Donc d'après la question 1, f n'est pas uniformément continue. $\square$

Question 4. $f(x) = \sin(x^2)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

Démonstration. On pose $x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2n\pi}$. Donc $x_n - y_n \to 0$ mais $f(x_n) - f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2$ ne tend pas vers 0. Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

1.2 Exercice II.8

Soit f une fonction uniformément continue sur $]0, 1[$. Montrer que f est bornée.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On dispose d'un $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in]0, 1[$, si $|x - y| < \delta$ alors $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Posons $N = [\frac{1}{\delta}]$ (partie entière supérieure), et on considère les intervalles $I_0 =]0, \delta]$, $I_1 =]\delta, 2\delta]$ etc. jusqu'à $I_{N-1} =](N-1)\delta, 1[$. Chaque intervalle est de taille inférieure à δ, donc sur chaque intervalle I_i, $|f(x)| \leq \epsilon + f(i \times \delta + \frac{\delta}{2}) =: M_i$. Donc finalement sur $]0, 1[$, $|f(x)| \leq \max_{0 \leq i \leq N-1} M_i$. Donc f est bornée. $\square$

1.3 Exercice II.11

Soit l'application définie par $\Phi : (M, N) \mapsto \text{trace}(M^\top N)$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Question 1. Montrer que Φ est bilinéaire, symétrique et telle que $\Phi(M,M) \geq 0$ pour tout $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, avec égalité si et seulement si $M = 0$.

Démonstration. — **Bilinéaire** : évident.

— **Symétrique** : $\Phi(M,N) = \operatorname{trace}(M^\top N) = \operatorname{trace}((M^\top N)^\top) = \operatorname{trace}(N^\top M) = \Phi(N,M)$.

— **Séparation** : soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}\Phi(M,M) &= \operatorname{trace}(M^\top M)\\ &= \sum_{i=1}^n \left(M^\top M\right)_{ii}\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (M^\top)_{ij} M_{ji}\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij}^2 \geq 0\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $\forall 1 \leq i,j \leq n, M_{ij}^2 = 0$ *i.e.* M = 0.

Donc par définition, Φ est un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. □

Question 2. On a déjà prouvé en cours l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\operatorname{trace}(M^\top N)| \leq \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)}\sqrt{\operatorname{trace}(N^\top N)}.$$

Question 3. En déduire que $N_H : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to R_+$ définie par $N_H(M) = \sqrt{\Phi(M,M)} = \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)}$ définit une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. — **Positivité et séparation** : $N_H(M) \geq 0$ car $\Phi(M,M) \geq 0$ et $N_H(M) = 0$ si et seulement si $\Phi(M,M) = 0$, *i.e.* $M = 0$.

— **Multiplication par un scalaire** : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$N_H(\lambda M) = \sqrt{\operatorname{trace}(\lambda M^\top \lambda M)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)} = |\lambda| N_H(M).$$

— **Inégalité triangulaire** : soient $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}N_H(M+N) &= \sqrt{\operatorname{trace}\left((M+N)^\top (M+N)\right)}\\ &= \sqrt{\operatorname{trace}\left(M^\top M + M^\top N + N^\top M + N^\top N\right)}\\ &= \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M) + \operatorname{trace}(M^\top N + N^\top M) + \operatorname{trace}(N^\top N)}\\ &= \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M) + 2\operatorname{trace}(M^\top N) + \operatorname{trace}(N^\top N)}\\ &\leq \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M) + 2\sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)}\sqrt{\operatorname{trace}(N^\top N)} + \operatorname{trace}(N^\top N)}\\ &= \sqrt{\left(\sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)} + \sqrt{\operatorname{trace}(N^\top N)}\right)^2}\\ &= \sqrt{\operatorname{trace}(M^\top M)} + \sqrt{\operatorname{trace}(N^\top N)}\\ &= N_H(M) + N_H(M)\end{aligned}$$

Donc N_H est bien une norme. □

Question 4. En déduire que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^\top M = Id\}$ est compact.

Démonstration.
— **Fermé** : Soit $F : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $F(M) = M^\top M$. F est application continue (car polynomiale en les coefficients) et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(\{Id\})$. Or $\{Id\}$ est fermé, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
— **Borné** : soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $N_H(M) = \sqrt{\text{trace}(M^\top M)} = \sqrt{\text{trace}(Id)}$ car $M^\top M = Id$ et donc $N_H(M) = \sqrt{n}$. Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset \bar{B}_{N_H}(0, \sqrt{n})$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée.

Finalement, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est fermée et bornée dans l'espace vectoriel normé $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), N_H)$ qui est de dimension finie ($dim(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$), donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compacte. □

1.4 Exercice III.1

Soient

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$$

et $d_2 : \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|^2}.$$

Pour les suites suivantes, dire si elles convergent dans $\ell^2(\mathbb{N})$, et si oui, calculer leur limite. Notation : pour $(x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$, on note x_n^k le k-ème élément de la suite x_n, qui est elle-même le n-ème élément de la suite (x_n).

Question 1. Soit (x_n) définie par $x_n^k = \frac{1}{n}$ si $k = 1$ et $x_n^k = 0$ si $k > 1$.

Démonstration. On a : $d_2(x_n, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k|^2} = \sqrt{1/n^2} = 1/n \to 0$ donc (x_n) converge vers la suite nulle $0 = (0, 0, ...)$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$. □

Question 2. Soit (x_n) définie par $x_n^k = 1/k$ si $k \leq n$ et $x_n^k = 0$ sinon.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $y_k = 1/k$. Alors :

$$d_2(x_n, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - y_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |1/k|^2} \to 0$$

car $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |1/k|^2$ est le reste de la série de Riemann ($\sum_k 1/k^2$) qui converge. Donc $R_n \to 0$. □

Question 3. Soit (x_n) définie par $x_n^k = 1/\sqrt{k}$ si $k \leq n$ et $x_n^k = 0$ sinon.

Démonstration. Si (x_n) convergeait dans $\ell^2(\mathbb{N})$ vers une certaine suite y. Alors nécessairement, $y_k = 1/\sqrt{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En effet, s'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $y_k \neq 1/\sqrt{k}$, alors pour $n \geq k$, $d_2(x_n, y) \geq |x_n^k - y_k| = |\frac{1}{\sqrt{k}} - y_k| > 0$. Donc $d_2(x_n, y) \geq |\frac{1}{\sqrt{k}} - y_k|$ et donc $d_2(x_n, y)$ ne tend pas vers 0, ce qui est absurde car (x_n) convergeait vers y. Or la suite $y = (1/\sqrt{k})_k \notin \ell^2(\mathbb{N})$ puisque la série de terme général $1/k$ n'est pas sommable. Donc (x_n) ne converge pas dans $\ell^2(\mathbb{N})$. □

Question 4. Soit (x_n) définie par $x_n^k = 1$ si $k = n$ et 0 sinon.

Démonstration. Si (x_n) converge dans $\ell^2(\mathbb{N})$, c'est forcément vers la suite nulle (d'après le même raisonnement qu'à la question 3.). La suite nulle est bien dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On a :

$$d_2(x_n, 0) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_n^k - 0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

ce qui ne tend pas vers 0. Donc (x_n) ne converge pas dans $\ell^2(\mathbb{N})$. □

Question 5. Converge.

Question 6. Ne converge pas.

1.5 Rappel sur la complétude

Soit (E, d) un espace métrique. Une suite (x_n) sur (E, d) est dite de Cauchy si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) < \epsilon.$$

On dira que (E, d) est **complet** si toutes les suites de Cauchy de (E, d) convergent. Remarque (et exo) : toute suite convergente est de Cauchy.

L'espace $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet.

1.6 Exercice sur la complétude

Soient

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

et $d_1 : \ell^1(\mathbb{N}) \times \ell^1(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$d_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Question 1. Montrer que d_1 définit une distance sur $\ell^1(\mathbb{N})$.

Démonstration. OK. □

Question 2. Montrer que l'espace $\left(\ell^1(\mathbb{N}), d_1\right)$ est un espace métrique complet.

Démonstration. Soit $(x_n) \in \ell^1(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$ de Cauchy. Il faut montrer qu'elle converge dans $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$. On va procéder en trois étapes :

1. Construction d'une suite y qui soit un bon candidat pour être la limite de (x_n).
2. Montrer que $y \in \ell^1(\mathbb{N})$.
3. Montrer que $d_1(x_n, y) \to 0$.

Etape 1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on va construire y_k. On voudrait définir $y_k = \lim_{n\to+\infty} x_n^k$. Mais il faut montrer que la suite $(x_n^k)_n$ converge ! Pour cela, on va montrer que la suite $(x_n^k)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
Soit $\epsilon > 0$. Comme (x_n) est de Cauchy dans $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$, on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $d_1(x_p, x_q) < \epsilon$. Soient $p, q \geq N$. Alors :

$$|x_p^k - x_q^k| \leq \sum_{l=0}^{\infty} |x_p^l - x_q^l| = d_1(x_p, x_q) < \epsilon.$$

Donc pour tout $\epsilon > 0$, on a trouvé un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq N, |x_p^k - x_q^k| < \epsilon$. Donc $(x_n^k)_n$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Or $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, donc $(x_n^k)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ et on peut définir notre candidat :

$$y_k = \lim_{n\to\infty} x_n^k.$$

$\boxed{\textbf{Etape 2.}}$ Montrons que notre candidat y appartient bien à $\ell^1(\mathbb{N})$. Comme (x_n) est de Cauchy de $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ donc (en posant $\epsilon = 1$ dans la définition) on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait $d_1(x_n, x_N) < 1$, *i.e.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x_n^k - x_N^k| < 1.$$

On veut passer à la limite (sous le signe $\sum$) en $n \to +\infty$ pour transformer les x_n^k en y_k. Soit $K \in \mathbb{N}$. On a donc en particulier :

$$\sum_{k=0}^{K} |x_n^k - x_N^k| < 1.$$

C'est une somme d'un nombre fini de termes, donc on peut passer à la limite en $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{K} |x_n^k - x_N^k| = \sum_{k=0}^{K} \lim_{n\to\infty} |x_n^k - x_N^k| = \sum_{k=0}^{K} |y_k - x_N^k| < 1.$$

Par l'inégalité triangulaire inversée, prise terme à terme :

$$\sum_{k=0}^{K} |y_k| - |x_N^k| \leq \sum_{k=0}^{K} ||y_k| - |x_N^k|| \leq \sum_{k=0}^{K} |y_k - x_N^k| < 1$$

Et donc :

$$\sum_{k=0}^{K} |y_k| < 1 + \sum_{k=0}^{K} |x_N^k| \leq 1 + \sum_{k=0}^{\infty} |x_N^k|.$$

Ceci est vrai quel que soit K, donc en prenant $K \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_k| < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} |x_N^k|$$

or $x_N \in \ell^1(\mathbb{N})$ donc $\sum_{k=0}^{\infty} |x_N^k| < \infty$ et donc $y \in \ell^1(\mathbb{N})$.

$\boxed{\textbf{Etape 3.}}$ Il reste à montrer que $d_1(x_n, y) \to 0$. Soit $\epsilon > 0$. Comme (x_n) de Cauchy, on dispose d'un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq N$, on ait

$$d_1(x_p, x_q) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_p^k - x_q^k| < \epsilon.$$

Comme à l'étape 2, on fixe $K \in \mathbb{N}$ et on obtient

$$\sum_{k=0}^{K} |x_p^k - x_q^k| < \epsilon.$$

Cela nous permet de passer à la limite en $q \to \infty$ pour faire apparaître y :

$$\forall p \geq N, \sum_{k=0}^{K} |x_p^k - y_k| < \epsilon.$$

Ceci est vrai est pour tout K, donc en faisant $K \to \infty$:

$$\forall p \geq N, \sum_{k=0}^{\infty} |x_p^k - y_k| < \epsilon,$$

c'est-à-dire que pour tout $p \geq N$, $d_1(x_p, y) < \epsilon$. Si on résume, on a montré :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, d_1(x_p, y) < \epsilon.$$

On a donc montré que la suite (x_n) converge vers y dans $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$.

$\boxed{\textbf{Conclusion}}$ On a montré que toute suite de Cauchy de $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ converge, *i.e.* que $(\ell^1(\mathbb{N}), d_1)$ est complet.

$\square$

2 TD du jeudi 19 novembre

2.1 Exercice II.5

Soit E un ensemble et d, δ deux distances sur E. On dit que d et δ dont équivalentes s'il existe des constantes $0 < c \leq C$ telles que

$$\forall x, y \in E, c\delta(x,y) \leq d(x,y) \leq C\delta(x,y).$$

On dira par ailleurs que d et δ sont presque équivalentes (p-e) si tout suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge pour d et aussi pour δ ont les mêmes limites.

Question 1. On suppose que (E, d) et (E, δ) sont complets. Montrer que : $(E, d+\delta)$ est complet si et seulement si d et δ sont presque équivalentes.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $(E, d+\delta)$ est complet. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x dans (E, d) et vers y dans (E, δ). Il faut montrer que $x = y$. (x_n) converge pour d et pour δ, donc elle est de Cauchy dans (E, d) et dans (E, δ), c'est-à-dire que pour $\epsilon > 0$, on dispose de $N_d, N_\delta \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall p, q \geq N_d, d(x_p, x_q) < \epsilon$$
$$\forall p, q \geq N_\delta, \delta(x_p, x_q) < \epsilon$$

Donc pour tous $p, q \geq \max\{N_d, N_\delta\}$, on a :

$$d(x_p, x_q) + \delta(x_p, x_q) < 2\epsilon.$$

Donc on a montré que (x_n) est de Cauchy dans $(E, d+\delta)$. Comme $(E, d+\delta)$ est complet, (x_n) converge dans $(E, d+\delta)$. Notons $l \in E$ sa limite dans $(E, d+\delta)$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} (d+\delta)(x_n, l) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, l) + \delta(x_n, l) = 0,$$

si bien que $d(x_n, l) \to 0$ et $\delta(x_n, l) \to 0$. Donc (x_n) tend vers $l = x = y$ dans (E, d) et dans (E, δ). Donc d et δ sont p-e.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que d et δ sont p-e. Montrons que $(E, d+\delta)$ est complet. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ de Cauchy pour $(E, d+\delta)$, montrons qu'elle converge pour $d+\delta$. C'est-à-dire : posons $\epsilon > 0$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$:

$$d(x_p, x_q) + \delta(x_p, x_q) < \epsilon.$$

En particulier, pour tous $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$ et $\delta(x_p, x_q) < \epsilon$. Donc on a montré que (x_n) est de Cauchy dans (E, d) et aussi dans (E, δ). Ces espaces sont complets par hypothèse, donc (x_n) converge dans (E, d) et aussi dans (E, δ).

Comme d et δ sont p-e, on dispose de $l \in E$ tel que $d(x_n, l) \to 0$ et $\delta(x_n, l) \to 0$. Donc on déduit que

$$d(x_n, l) + \delta(x_n, l) \to 0$$

i.e. (x_n) converge vers l dans $(E, d+\delta)$. Donc $(E, d+\delta)$ est complet.

□

Question 2. On suppose dans la suite que d et δ sont p-e et on prend (x_n) qui converge vers $x \in E$ dans (E, d). Montrer que (x_n) ne peut avoir d'autres points d'accumulation que x dans (E, δ).

Démonstration. Soit $y \in E$ un point d'accumulation de (x_n) pour δ. Montrons que nécessairement, $y = x$.
Par définition, on dispose d'une extraction ϕ telle que $(x_{\phi(n)})$ converge vers y dans (E, δ).
Comme (x_n) converge vers x dans (E, d), $(x_{\phi(n)})$ converge vers x dans (E, d).
Comme d et δ sont p-e, forcément $y = x$. □

Question 3. En déduire que si (E, δ) est compact, alors (x_n) converge dans (E, δ).

Démonstration. Comme (E, δ) est compact, (x_n) possède une valeur d'adhérence dans (E, δ). D'après la question précédente, cette valeur d'adhérence est nécessairement égale à x. Donc (x_n) possède une unique valeur d'adhérence (qui est x) dans (E, δ).
Il reste à prouver que (x_n) converge (vers x) dans (E, δ). Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existerait un $\epsilon > 0$, tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on dispose d'un entier $\psi(N) \geq N$ tel que $\delta(x_{\psi(N)}, x) > \epsilon$. Comme (E, δ) est compact, la suite $(x_{\psi(N)})$ admet une valeur d'adhérence $y \in E$ dans (E, δ). Cette valeur d'adhérence est aussi une valeur d'adhérence de (x_n) dans (E, δ), donc d'après la remarque précédente $y = x$. Ceci est impossible puisque par construction de $(x_{\psi(N)})$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\delta(x_{\psi(N)}, x) > \epsilon$.
On en déduit donc que (x_n) converge vers x dans (E, δ). □

Question 4. Dans $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes, on définit pour $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\begin{aligned} N_\infty(P) &= \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| \\ N_a(P) &= N_\infty(P) + |P(a)| \end{aligned}$$

où $a > 1$. Pour $1 < a < b$, N_a et N_b sont p-e mais pas équivalentes.

Démonstration. $\boxed{\text{Presque équivalence}}$ Soit $(P_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ qui converge pour N_a vers $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour aussi pour N_b vers $Q \in \mathbb{R}[X]$. On veut montrer que $P = Q$. Donc $N_a(P_n - P) \to 0$, c'est-à-dire :

$$N_\infty(P_n - P) + |P_n(a) - P(a)| \to 0.$$

En particulier, $N_\infty(P_n - P) \to 0$, *i.e.* (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers P. Pour la même raison, (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers Q. Donc $P = Q$ sur $[0, 1]$. Donc $P = Q$.

$\boxed{\text{Pas d'équivalence}}$ On va montrer que (P_n) de l'énoncé converge vers 0 pour N_a mais que $N_b(P_n)$ est minoré par une constante c strictement positive. En particulier, on aura à partir d'un certain rang que

$$N_a(P_n) \ngeq C N_b(P_n)$$

Prouvons que $N_a(P_n) \to 0$. On peut prouver (par exemple en dérivant) que pour $Q_n(X) = X^n(1 - X)$, on a :

$$N_\infty(Q_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0$$

et donc (Q_n) converge uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ et donc sur $\mathbb{R}$. En particulier $Q_n(a) \to 0$ et donc $N_a(Q_n) \to 0$. Or pour $P_n(X) = Q_n(X)(X - a)$:

$$\begin{aligned} N_a(P_n) &= N_\infty(P_n) + |P_n(a)| \\ &= N_\infty(P_n) \\ &\leq a N_\infty(Q_n) \\ &\leq \frac{a}{n+1} \to 0 \end{aligned}$$

Donc on a bien prouvé que $N_a(P_n) \to 0$.

Montrons désormais que $N_b(P_n)$ est minoré par une constante strictement positive. Calculons :

$$N_b(P_n) = N_\infty(P_n) + |P_n(b)| \geq |P_n(b)| = |Q_n(b)(b - a)| = b^n(b - 1)(b - a) \geq b(b - 1)(b - a) > 0$$

car $b > a > 1$. Donc N_a et N_b ne peuvent pas être équivalentes. □

2.2 Rappel sur les applications linéaires continues

Soient $(E, ||\cdot||)$ et $(F, ||\cdot||)$ deux evn. Si $\phi : E \to F$ est une application linéaire, alors elle continue si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \|\phi(x)\| \leq C\|x\|.$$

En dimension finie, c'est toujours vrai.

Si ϕ est continue, on définit sa norme comme :

$$|||\phi||| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|\phi(x)\|}{\|x\|}.$$

2.3 Exercice III.3

$E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme suivante :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Question 1. Soit $\phi : E \to E$ définie par

$$\forall f \in E,\ \phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que ϕ est continue.

Démonstration. ϕ est linéaire. Soit $f \in E$. Majorons :

$$\begin{aligned}
\|\phi(f)\|_1 &= \int_0^1 |\phi(f)(t)|\, dt \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^t f(u)\, du \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \int_0^t |f(u)|\, du\, dt \\
&\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(u)|\, du\, dt \\
&\leq \left(\int_0^1 dt \right) \int_0^1 |f(u)|\, du \\
&= \int_0^1 |f(u)|\, du \\
&= \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout $f \in E$ donc ϕ est continue. □

Question 2. Soit $f_n(x) = ne^{-nx}$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.

Démonstration. On a :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_0^1 ne^{-nt} dt = \left[-e^{-nt}\right]_0^1 = 1 - e^{-n}.$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\|\phi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 |\phi(f_n)(t)|dt \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^t f_n(u)du \right| dt \\
&= \int_0^1 \left| 1 - e^{-nt} \right| dt \\
&= \int_0^1 1 - e^{-nt} dt \\
&= 1 - \int_0^1 e^{-nt} dt \\
&= 1 + \frac{1}{n} \left(e^{-n} - 1 \right).
\end{aligned}$$

□

Question 3. Calculer la norme de ϕ.

Démonstration. À la question 1, on a prouvé que pour tout $f \in E$, on a $\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1$. On en déduit que pour tout $f \in E$ non nul, on a

$$\frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$$

donc en passant au sup sur les $f \in E \setminus \{0\}$, on obtient

$$|||\phi||| = \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \leq 1.$$

Montrons que $|||\phi||| \geq 1$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|||\phi||| &= \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \\
&\geq \frac{\|\phi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{n}\left(e^{-n} - 1\right)}{1 - e^{-n}}
\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc en passant à la limite quand $n \to \infty$:

$$|||\phi||| \geq \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}\left(e^{-n} - 1\right)}{1 - e^{-n}} = 1.$$

Conclusion : $|||\phi||| = 1$. □

2.4 Exercice III.4

$E = \mathbb{R}[X]$, muni de sa norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

Question 1. On définit $\phi(P) = P(X+1)$. Est-ce continu ?

Démonstration. Posons $P_n(X) = X^n$. Alors $\|P_n\| = 1$. Calculons $\|\phi(P_n)\|$:

$$\begin{aligned}
\|\phi(P_n)\| &= \|(X+1)^n\| \\
&= \|\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} X^i\| \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

Si ϕ était continue, on disposerait d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in N$, $\|\phi(P_n)\| \leq C\|P_n\|$, c'est-à-dire $2^n \leq C$. Ceci est impossible donc ϕ n'est pas continue. $\square$

3 TD du jeudi 24 novembre

3.1 Rappel sur la convergence simple et uniforme des fonctions

— **Convergence uniforme :** c'est la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à-dire que une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f si $\sup_x |f_n(x) - f(x)| \to 0$. C'est une notion de convergence qui est très forte, mais cela permet d'obtenir de bonnes propriétés. Par exemple, si les f_n sont toutes continues et que (f_n) converge uniformément vers f, alors f est obligatoirement continue.

— **Convergence simple :** c'est la convergence point par point, c'est-à-dire que (f_n) converge simplement vers f si pour tout x, $f_n(x) \to f(x)$. C'est beaucoup plus faible : il existe de nombreuses suites de fonctions qui convergent simplement mais pas uniformément. Notamment, si une suite de fonctions continues (f_n) converge simplement vers f, alors f n'est pas forcément continue. Ce n'est **pas** une notion de convergence issue d'une norme.

Si (f_n) converge uniformément (vers f), alors (f_n) converge simplement vers f. En effet, par convergence uniforme, on a que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Soit x, on a que $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_y |f_n(y) - f(y)| = \|f_n - f\|_\infty \to 0$ donc $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ pour tout x, *i.e.* (f_n) converge simplement vers f.

Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers f. Si (f_n) converge uniformément (mais ce n'est toujours le cas), c'est forcément vers f. Si ce n'est pas le cas, que peut-il se passer pour que (f_n) ne converge pas uniformément ?

— **Bosse :** les fonctions f_n se “replient” sur elles-mêmes et créent ainsi une “bosse”.

— **Perte de masse à l'infini :** les fonctions f_n partent à l'infini. Par exemple, on peut prendre $f_n(x) = 1$ si $x \geq n$ et 0 sinon. Ici, (f_n) converge simplement vers 0. Mais $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 1 \not\to 0$!

3.2 Exercice III.1

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on définit $f_n(x) = \frac{n}{1+n(1+x)}$.

Question 1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Démonstration. Soit $x \geq 0$. On a :

$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n(1 + x)} = \frac{1}{\frac{1}{n} + (1 + x)} \to \frac{1}{1 + x}.$$

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$. $\square$

Question 2. Montrer que (f_n) converge uniformément.

Démonstration. Si (f_n) converge uniformément, c'est forcément vers sa limite simple f. On regarde donc :

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_\infty &= \sup_{x\geq 0} |f_n(x) - f(x)| \\
&= \sup_{x\geq 0} \left| \frac{n}{1 + n(1 + x)} - \frac{1}{1 + x} \right| \\
&= \sup_{x\geq 0} \left| \frac{n(1 + x) - (1 + n(1 + x))}{(1 + n(1 + x))(1 + x)} \right| \\
&= \sup_{x\geq 0} \frac{1}{(1 + n(1 + x))(1 + x)} \\
&= \frac{1}{1 + n} \to 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto \frac{1}{(1+n(1+x))(1+x)}$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, *i.e.* (f_n) converge uniformément vers f. □

3.3 Exercice III.2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonction suivantes.

Question 1. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Démonstration. $\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_+}$ **Convergence simple.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx) \to 0$$

car pour $x > 0$, $e^{-nx} \to 0$ et $\sin(2nx)$ est borné, et pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$.

Convergence uniforme. On va prouver que (f_n) ne converge pas uniformément. Il suffit de prouver que (f_n) ne converge pas uniformément vers la limite simple qui est 0, *i.e.* que $\|f_n\|_\infty \not\to 0$. Deux méthodes possibles :

1. la méthode bourrine qui consiste à calculer explicitement $\|f_n\|_\infty$ et à montrer qu'elle ne tend pas vers 0.
2. la méthode intelligente qui consiste à remarquer que $\|f_n\|_\infty \geq |f_n(x_n)|$ où x_n est un point bien choisi tel que $|f_n(x_n)| \geq c > 0$ pour un certain $c > 0$. Dans ce cas, $\|f_n\|_\infty > c$ donc $\|f_n\|_\infty \not\to 0$.

On va choisir la méthode 2. On remarque que :

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(1/n)| = |e^{-1}\sin(2)| > 0$$

donc $\|f_n\|_\infty$ ne peut pas tendre vers 0.

$\boxed{\text{Sur } [a,+\infty[}$ **Convergence simple.** Comme $[a,+\infty[\subset \mathbb{R}_+$, (f_n) converge simplement vers 0 sur $[a,+\infty[$.

Convergence uniforme. Montrons que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq a}|f_n(x)| = \sup_{x\geq a}|e^{-nx}\sin(2nx)| \leq \sup_{x\geq a} e^{-nx} \leq e^{-na} \to 0$$

où on a utilisé que $|\sin(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^{-nx}$ est décroissante. Donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$. □

Question 2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $[a,+\infty[$ où $a > 0$.

Démonstration. $\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}}$ **Convergence simple.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Notons f la limite simple de (f_n), *i.e.* $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Convergence uniforme. Si (f_n) convergeait uniformément, ce serait vers la limite simple f. Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue. Comme f n'est pas continue, ce n'est pas possible (puisque la limite uniforme de fonctions continues est continue).

$\boxed{\text{Sur } [a,+\infty[}$ **Convergence simple.** D'après ce qu'on vient de faire, (f_n) converge simplement vers 0 sur $[a,+\infty[$.

Convergence uniforme. Si (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$, c'est nécessairement vers la limite simple qui est 0. On a :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\geq a}\left|\frac{1}{(1+x^2)^n}\right| = \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$$

où on a utilisé le fait que $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^n}$ est décroissante sur $[a,+\infty[$ et que $1 + a^2 > 1$ car $a > 0$. Donc (f_n) converge uniformément sur $[a,+\infty[$ vers 0. □

3.4 Rappel sur les espaces de Hilbert

L'intérêt des espaces de Hilbert est de disposer d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cela permet de définir une norme associée, dite norme Hilbertienne, définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

3.5 Exercice III.13

Dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des suites réelles de carré sommable), muni de son produit scalaire canonique : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$. On considère l'ensemble $C = \left\{ x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \, \forall k \in \mathbb{N}, x_k \geq 0 \right\}$.

Question 1. Montrer que C est convexe et fermé.

Démonstration. **Convexité.** Soient $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$. Montrons que $z = (1-t)x + ty \in C$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k = (1-t)x_k + ty_k \geq 0$ car $x_k \geq 0$ et $y_k \geq 0$ (puisque $x, y \in C$).

Fermeture. Il suffit de montrer que n'importe quelle suite $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ qui converge a sa limite dans C. Soit $(x_n) \in C^{\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrons que $x \in C$. Comme (x_n) converge vers x, $\|x_n - x\|_{\ell^2} \to 0$. C'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x_n^k - x_k)^2 \to 0$$

où x_n^k est le k-eme terme de la suite $x_n \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Soit $i \in \mathbb{N}$, montrons que $x_i \geq 0$. Comme $\sum_{k=0}^{\infty} (x_n^k - x_k)^2 \to 0$, chaque terme de la somme tend vers 0 et en particulier $x_n^i \to x_i$ quand $n \to +\infty$. Or comme $x_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^i \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc x_i est la limite d'une suite d'éléments positifs, donc il est positif. Ceci étant vrai quel que soit $i \in \mathbb{N}$, $x \in C$. Donc C est fermé. $\square$

Question 2. Déterminer la projection sur C.

Démonstration. Soit $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Comme C est convexe est fermé, on sait qu'il existe un unique point $p(x) \in C$ et qui minimise la distance à C, c'est-à-dire que $p(x)$ est l'unique minimiseur dans le problème

$$\min_{y \in C} \|x - y\|_{\ell^2}.$$

Soit $y \in C$. On a :

$$\|x - y\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - y_n)^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} (x_n - (x_n)_+)^2 = \|x - x^+\|_{\ell^2}^2$$

où $(t)_+ = \max(0, t)$ est la partie positive de $t \in \mathbb{R}$. En notant x^+ la suite définie par $x_n^+ = (x_n)_+$, alors $x^+ \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n^+)^2 \leq x_n^2$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n^+)^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ car $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Par construction, $x^+ \in C$. Donc x^+ est la projection de x sur C. $\square$

3.6 Exercice III.14

Calculer la projection sur la boule unité fermée dans un espace de Hilbert réel H.

Démonstration. Soit $x \in H$. Comme la boule unité fermée est convexe et fermée, il existe une unique projection de x sur cette boule. Définissons $p : H \to \bar{B}(0, 1)$ par :

$$p(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \frac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Si } \|x\| \leq 1}$ Dans ce cas, $p(x) = x \in \bar{B}(0, 1)$ et donc $p(x)$ est bien la projection de x sur la boule.

$\boxed{\text{Si } \|x\| > 1}$ $p(x) \in \bar{B}(0, 1)$ est la projection de x sur $\bar{B}(0, 1)$ si et seulement si :

$$\forall y \in \bar{B}(0, 1), \, \langle y - p(x), \, x - p(x) \rangle \leq 0.$$

Vérifions cela. Soit $y \in \bar{B}(0,1)$, on a :

$$\begin{aligned}
\langle y - p(x),\, x - p(x)\rangle &= \left\langle y - \frac{x}{\|x\|},\, x - \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\
&= \langle y, x\rangle - \left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - \left\langle x, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle + \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \\
&= \langle y, x\rangle - \frac{1}{\|x\|}\langle y, x\rangle - \frac{1}{\|x\|}\langle x, x\rangle + \frac{1}{\|x\|^2}\langle x, x\rangle \\
&= \langle y, x\rangle - \frac{1}{\|x\|}\langle y, x\rangle - \frac{1}{\|x\|}\|x\|^2 + \frac{1}{\|x\|^2}\|x\|^2 \\
&= \langle y, x\rangle \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right) - \|x\| + 1 \\
&= \langle y, x\rangle \frac{\|x\| - 1}{\|x\|} - (\|x\| - 1) \\
&= (\|x\| - 1)\left(\left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - 1\right).
\end{aligned}$$

Comme on est dans le cas $\|x\| > 1$, $\|x\| - 1 > 0$. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \leq \|y\| \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \|y\| \leq 1$$

car $y \in \bar{B}(0,1)$. Finalement, $\left(\left\langle y, \frac{x}{\|x\|} \right\rangle - 1\right) \leq 0$ et donc on obtient que

$$\langle y - p(x),\, x - p(x)\rangle \leq 0$$

et ce pour tout $y \in \bar{B}(0,1)$. Donc $p(x)$ est bien la projection de x sur la boule unité fermée de H. □

4 Séance du 1er décembre

4.1 Preuve de la propriété de projection sur un convexe fermé dans un Hilbert

4.2 Rappels supplémentaires sur les espaces de Hilbert

4.3 Exercice III.16

Dans $L^2([0,1])$, on considère l'opérateur T défini par :

$$\forall f \in L^2([0,1]),\ Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Question 1. Montrer que T est bien défini, linéaire et continu.

Question 2. Calculer l'adjoint T^* de T.

4.4 Exercice III.17

4.5 Rappels sur les séries de Fourier