3. Geometría

En este capítulo estudiaremos algunas de las principales ecuaciones de dos variables y sus modos de ser representadas en el plano cartesiano.

En general “casi cualquier” ecuación que vincule dos variables tiene una cantidad infinita de soluciones, es decir que hay infinitos puntos del plano cartesiano que verifican la ecuación. Si consideramos esos puntos a la vez, es habitual que podamos reconocer curvas en el plano cartesiano que se pueden relacionar con estas ecuaciones. Concretamente, una curva en el plano no es otra cosa que la representación gráfica de todos los puntos que verifican una ecuación dada.

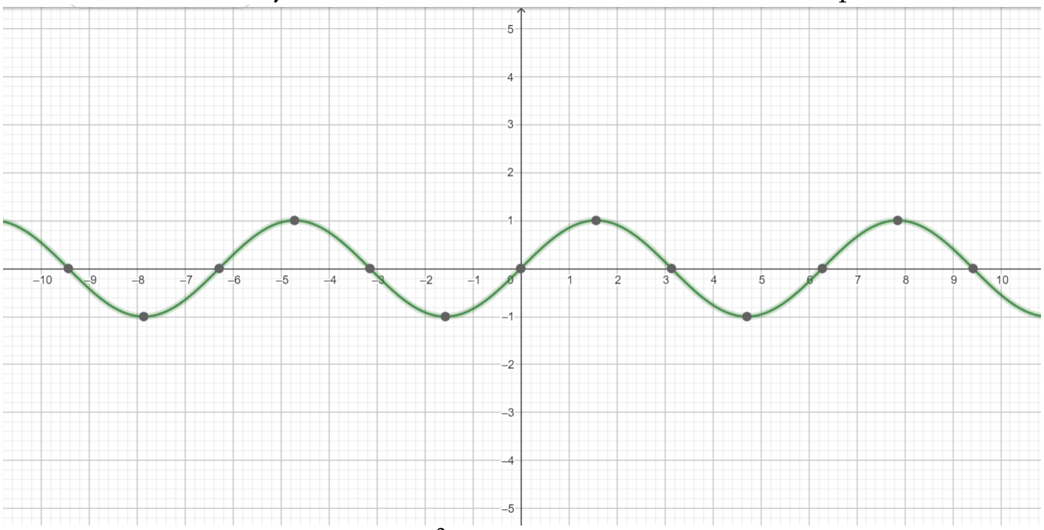
Si quisiéramos formalizar un poco lo dicho en el párrafo anterior, podemos decir que una ecuación de dos variables es cualquier expresión de la forma $F(x,y)=0$. Donde usamos $F(x,y)$ para indicar que se trata de una expresión algebraica que contiene variables x e y. Los puntos (x_0,y_0) que verifican la ecuación conforman, en el plano cartesiano, una curva que consideramos la representación gráfica de esa ecuación. Es decir que hay dos representaciones del mismo objeto matemático, por un lado la representación algebraica a través de la ecuación dada y por otro la representación gráfica constituida por el conjunto de puntos que verifican la ecuación.

Ya han realizado algo de esta categoría en materias anteriores. Sin ir más lejos en Matemática I han reconocido funciones y sus gráficas, pues cada función puede asociarse a una ecuación y a su respectiva representación gráfica. Sin embargo, no son las únicas ecuaciones posibles, ya que algunas ecuaciones no se corresponden con funciones.

Ejemplo 3.1 Si consideramos funciones ya conocidas, y recordando que una función relaciona una variable independiente con una variable dependiente, podemos explicitar la ecuación cartesiana que se vincula con esta función haciendo explícita la variable dependiente de la función.

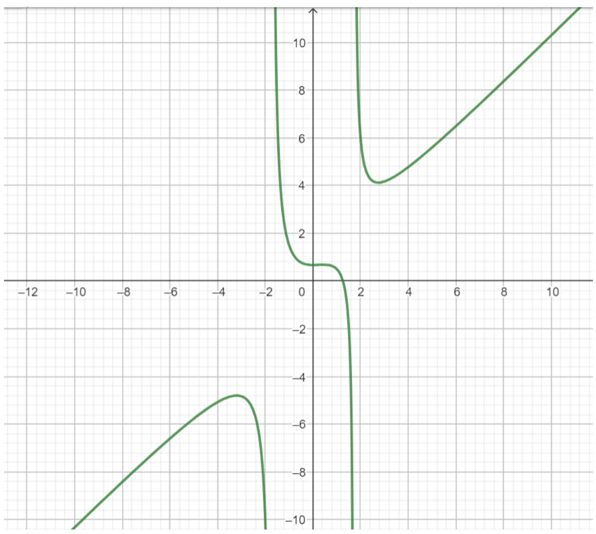
1. Consideremos la función $f(x)=sen(x)$.
   Si reemplazamos $f(x)$ por la variable dependiente y, podemos reescribir la función desde el punto de vista de una ecuación: $y=sen(x)$, o bien $y-sen(x)=0$. Su gráfica

nos resulta conocida y, efectivamente, se trata de una curva en el plano cartesiano.



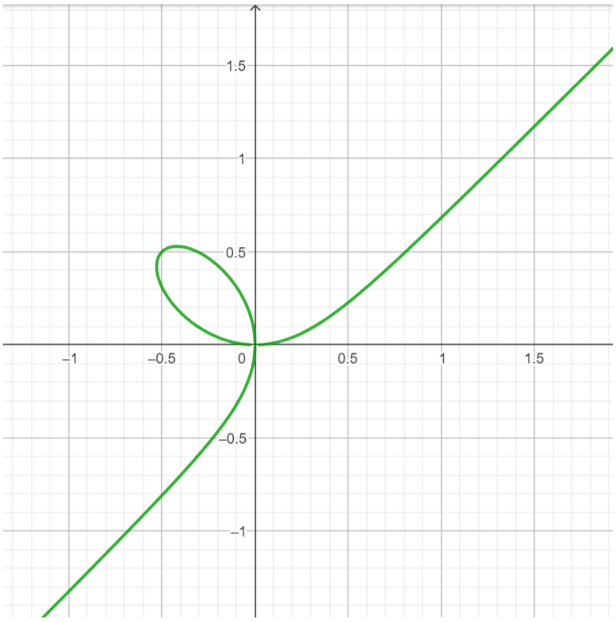
2. Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 3}$.

   Su ecuación cartesiana asociada será $y - \dfrac{x^3 - 2}{x^2 - 3} = 0$.
   Aunque no podamos reconocer su gráfica de manera inmediata, podemos realizar un estudio completo de la función para construirla o bien utilizar su ecuación asociada en GeoGebra y recuperar la representación gráfica:

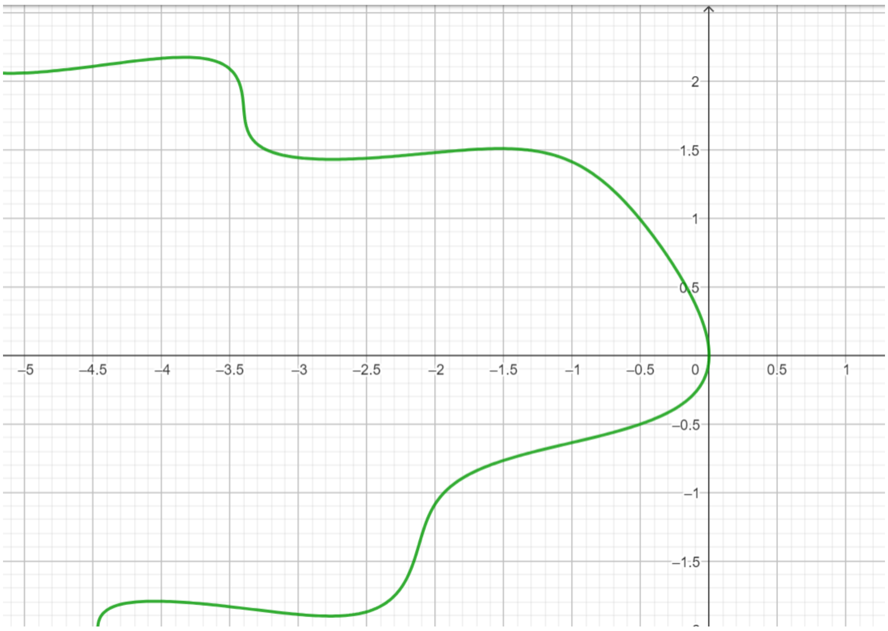


Ejemplo 3.2 No siempre las representaciones gráficas de ecuaciones se corresponden con gráficas de funciones. Para ilustrar esto podemos combinar variables x e y en una ecuación cualquiera y recuperar sus gráficas a través de programas que sirven para realizar gráficas. Hagamos algunos ejemplos usando GeoGebra

1. $y^3 - x^3 + x \cdot y = 0$ es una ecuación que relaciona dos variables. Su gráfica no nos resulta conocida pero usando GeoGebra podemos confirmar que hay una representación gráfica de la ecuación, que no es otra cosa que la representación, en el plano cartesiano, de todos los puntos que satisfacen la ecuación.



2. Consideremos la ecuación $y^2 + sen(x \cdot y) + x = 0$.
   Su gráfica, realizada con GeoGebra, es:



Como imaginará el lector, hay infinitas posibilidades de ecuaciones que pueden representarse gráficamente.

Es **objetivo** de este capítulo centrarnos sobre **algunas familias de estas ecuaciones**. Concretamente, estudiaremos la *ecuación lineal* (ambas variables aparecen elevadas a la potencia 1), cuya gráfica es una *recta* y un grupo determinado de las *ecuaciones cuadráticas* (una o ambas variables están elevadas al cuadrado en la expresión de la ecuación) llamadas *ecuaciones cónicas*, que involucra a la *circunferencia*, la *elipse*, la *parábola* y la *hipérbola*.

El objetivo principal es reconocer cada una de esas ecuaciones, poder manipular las expresiones para recuperar diferentes formas de presentarlas, conocer los distintos elementos o características de cada ecuación y recorrer los razonamientos que se involucran para lograr construir su representación gráfica.

3.1. Ecuación lineal y Recta

Ecuación Lineal y Recta son dos caras de la misma moneda. Esto es, como venimos insinuando, que tenemos por un lado la representación algebraica (la ecuación lineal) y por otro lado la representación gráfica (la recta).

Concretamente, una *ecuación lineal* es cualquier expresión de la forma $Ax + By + C = 0$[1], la representación gráfica de esa ecuación es una línea *recta* en el plano cartesiano.

Es nuestro objetivo trabajar con las diferentes maneras de presentar la ecuación lineal y profundizar en la formalización de la recta como concepto geométrico, lo cual comenzaremos definiendo de la siguiente manera:

Definición 3.1 Una *recta* es un conjunto de puntos del plano que se encuentran alineados.

Observación: El hecho de que los puntos de una recta se encuentran alineados se traduce en la propiedad que distingue a la recta de cualquier otro trazo en el plano cartesiano. Nos referimos a que la "inclinación" del segmento que une dos puntos cualesquiera de esa recta se mantiene inalterable. Nombraremos a esta cualidad como *pendiente de la recta* y nos permitirá deducir la ecuación que representa algebraicamente a la recta.

3.1.1. Pendiente de una recta

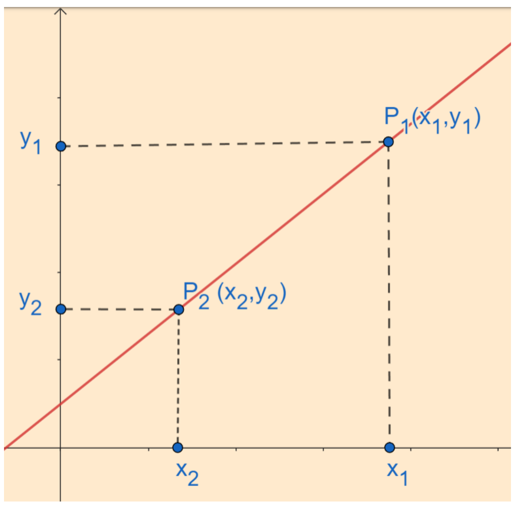
Definición 3.2 Consideremos una recta L que no sea vertical (es decir que no sea paralela al eje y).

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos distintos de la recta. Se define la *pendiente* m de dicha recta como el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de ambos puntos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Observaciones:

1. Si se eligen otros dos puntos cualesquiera sobre la recta, se puede demostrar mediante triángulos semejantes que el valor de la pendiente será el mismo. Es decir que la pendiente no depende del par de puntos que se elijan sobre la recta, ni del orden en que se tomen.
2. La pendiente de la recta es, precisamente, $m = tg(\alpha)$ (la tangente de α), siendo α el ángulo entre el semieje positivo de las x y la recta, medido en sentido contrario a las agujas del reloj.
3. Si la recta es vertical, no tiene pendiente y la estudiaremos oportunamente.



[1] Retomaremos esta ecuación cuando podamos compararla con otras formas de la ecuación lineal.

3.1.2. Euación de la recta Punto-Pendiente

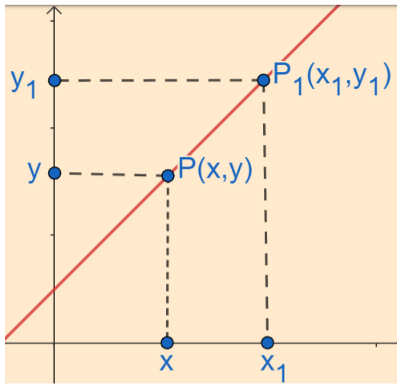
Consideremos una recta L que no sea vertical, de la cual conocemos:

- un punto sobre ella, $P_1(x_1, y_1)$
- su pendiente m

Cualquier otro punto $P(x, y)$ que esté sobre la recta, determinará con P_1 la misma pendiente m. En consecuencia, podemos escribir:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

($x \neq x_1$ por ser puntos distintos de una recta no vertical).



De donde obtenemos la *Ecuación Punto-Pendiente*:

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

Esta ecuación se verifica para cualquier punto de la recta L, incluido el punto P_1 dado.

Ejemplo 3.3 Encontrar la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que pasa por el punto $P_1(4, -2)$.

Usando la ecuación punto-pendiente, resulta:

$$y - (-2) = 3(x - 4)$$
$$y + 2 = 3x - 12$$
$$y = 3x - 12 - 2$$
$$y = 3x - 14$$

3.1.3. Ecuación de la Recta que pasa por Dos Puntos

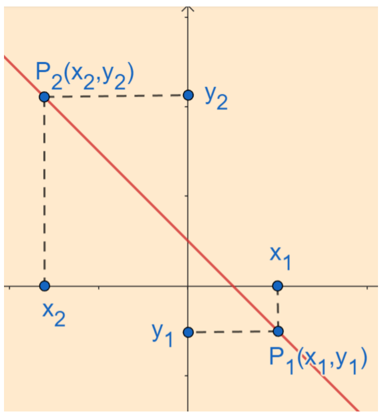
Consideremos una recta L, que no sea vertical, de la cual conocemos dos puntos distintos:

- $P_1(x_1, y_1)$
- $P_2(x_2, y_2)$

En primer lugar, podemos determinar la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

($x_2 \neq x_1$ por ser puntos distintos de una recta no vertical)



Luego, conocida la pendiente, y eligiendo el punto P_1 (por ejemplo, pero podría escogerse cualquier punto conocido sobre la recta) podemos aplicar la ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

De donde obtenemos la *Ecuación de la recta por dos puntos*:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Si $y_2 \neq y_1$ (recta no horizontal), la ecuación anterior también puede reescribirse del siguiente modo:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 3.4 Encontrar la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P_1(4,-2)$ y $P_2(-1,8)$.

Usando la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, resulta

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - (-2) = \frac{8 - (-2)}{-1 - 4}(x - 4)$$

$$y + 2 = -2(x - 4)$$

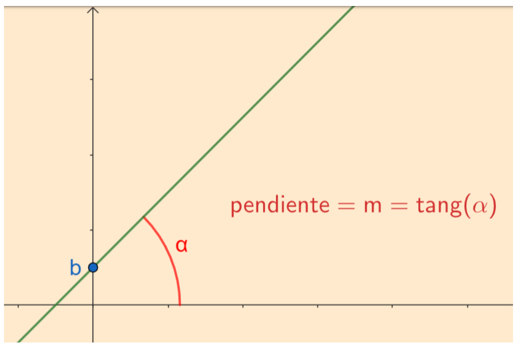
$$y + 2 = -2x + 8$$

$$y = -2x + 6$$

3.1.4. Euación Explícita de la Recta. (O EcuaciónPendiente-Ordenada al Origen)

Consideremos una recta L, que no sea vertical, de la cual conocemos:

- su pendiente m
- el valor b en que la recta L interseca al eje de ordenadas



El punto en que interseca al eje de ordenadas será $P_1(0,b)$ y aplicando la ecuación punto-pendiente resulta

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - b = m(x - 0)$

Obteniendo la *Ecuación pendiente-ordenada al origen*:

$$\boxed{y = mx + b}$$

Ejemplo 3.5 Encontrar la ecuación de la recta con pendiente $m = -3$ y cuya ordenada al origen es 5.

Usando la ecuación pendiente-ordenada al origen resulta:

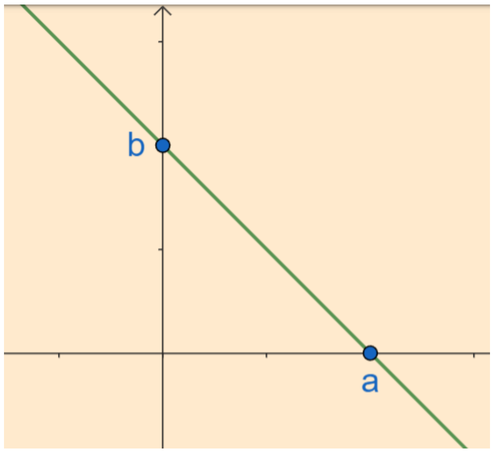
$y = mx + b$

$y = -3x + 5$

3.1.5. Ecuación Segmentaria de la Recta

Consideremos una recta L que no sea vertical ni horizontal de la cual conocemos sus intersecciones con los ejes coordenados:

- el valor b en que la recta L interseca al eje de ordenadas.
- el valor a en que la recta L interseca al eje de abscisas.



La recta L pasará por los puntos $P_1(a, 0)$ y $P_2(0, b)$ Aplicando la ecuación de la recta por dos puntos:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

Finalmente, si multiplicamos por $\frac{1}{b}$ obtenemos la *Ecuación Segmentaria de la Recta*:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Ejemplo 3.6 Encontrar la ecuación de la recta que interseca a los ejes de abscisas y de ordenadas en 3 y -2, respectivamente.

En este caso tenemos $a = 3$ y $b = -2$. Aplicando la ecuación segmentaria resulta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

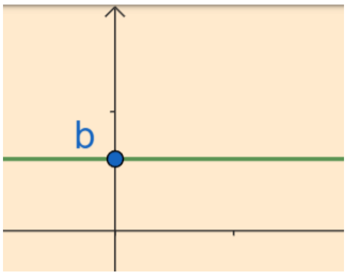
$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$$

3.1.6. Rectas Paralelas a los Ejes Coordenados

Sea L paralela al eje de abscisas (horizontal), que interseca al eje de ordenadas en b unidades.

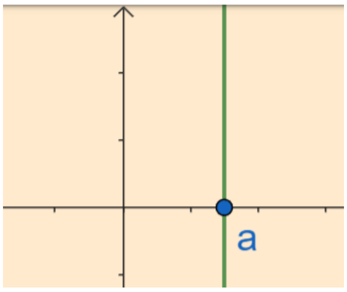
Todos los puntos de la recta L tendrán ordenada de valor b, para cualquier valor de x. Por lo tanto, su ecuación será:

$$\boxed{y = b}$$



Sea L paralela al eje de ordenadas (vertical), que interseca al eje de abscisas en a unidades. Todos los puntos de la recta L tendrán abscisa de valor a, para cualquier valor de y. Por lo tanto, su ecuación será:

$$\boxed{x = a}$$



Ejemplo 3.7 Encontrar las ecuaciones de las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto $P(3,-4)$

Recta Horizontal $y = -4$.

Recta Vertical $x = 3$.

3.1.7. Ecuación Normal o Estándar de la Recta (Ecuación Implícita)

Se llama así a toda ecuación de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

con A, B y C números reales, siendo A y B no simultáneamente nulos.

Como hemos dicho, esta ecuación representa una recta en el plano. De hecho, podemos “despejar” la ecuación teniendo en cuenta distintos casos:

- Si $B \neq 0$, podemos reescribir la ecuación en la forma: $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, que resulta ser la ecuación de una recta con pendiente $m = -\frac{A}{B}$ y ordenada al origen $b = -\frac{C}{B}$.
  Este caso incluye todas las rectas no verticales, y como casos particulares las rectas horizontales (cuando $A = 0$) y las rectas que pasan por el origen de coordenadas (en el caso en que $C = 0$).
- Si en cambio $B = 0$, resultará $Ax + C = 0$, con $A \neq 0$. Entonces podemos reescribir la ecuación como:
  $$x = -\frac{C}{A}$$
  Que es la ecuación de una recta vertical con abscisa al origen $a = -\frac{C}{A}$.
  Como caso particular, cuando $C = 0$ la recta coincidirá con el eje de ordenadas.

Ejemplo 3.8 Encontrar la pendiente y la ordenada al origen de la recta L dada por $3x + 5y - 10 = 0$

A partir de la forma estándar o implícita, obtenemos la forma explícita:

$$5y = -3x + 10$$
$$y = \frac{1}{5}(-3x + 10)$$
$$y = -\frac{3}{5}x + 2$$

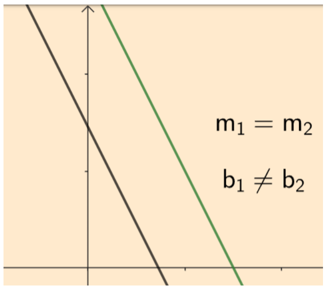
En consecuencia, la recta L tiene una pendiente $m = -\frac{3}{5}$ y una ordenada al origen $b = 2$.

3.1.8. Posiciones relativas entre Rectas

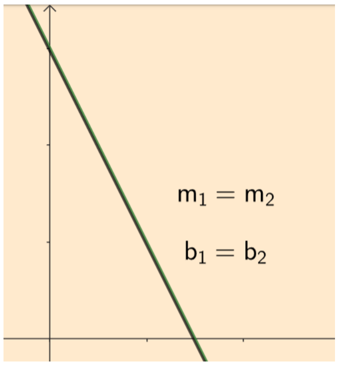
Estudiaremos las condiciones que deben cumplirse para que dos rectas sean *paralelas* (en particular *coincidentes*) u *oblicuas* (y el caso particular de *perpendiculares*).

Dadas dos rectas no verticales, $L_1 : y = m_1x + b_1$ y $L_2 : y = m_2x + b_2$, diremos que son:

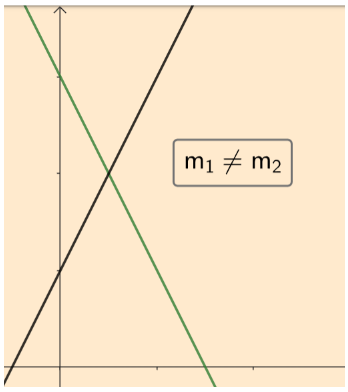
- **Paralelas:** cuando las pendientes de ambas rectas son iguales.
  Es decir,
  $$L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2$$



  En particular, si además de las pendientes también son iguales las ordenadas al origen diremos que las rectas son *coincidentes*.
  Esto es,
  $$L_1 = L_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2 \wedge b_1 = b_2$$

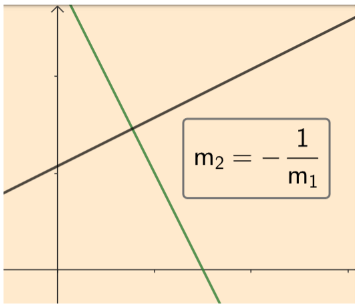


- **Oblicuas:** cuando las pendientes de ambas rectas son distintas.
  Es decir,
  $$L_1 \nparallel L_2 \Longleftrightarrow m_1 \neq m_2$$



En particular, dos rectas oblicuas (que no son verticales ni horizontales) se dicen *perpendiculares* cuando se cortan en un ángulo de 90°, en cuyo caso se cumple la siguiente relación:

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$$



Observación: las rectas verticales (no tienen pendiente) son paralelas entre sí y son perpendiculares a las rectas horizontales (cuya pendiente es 0)

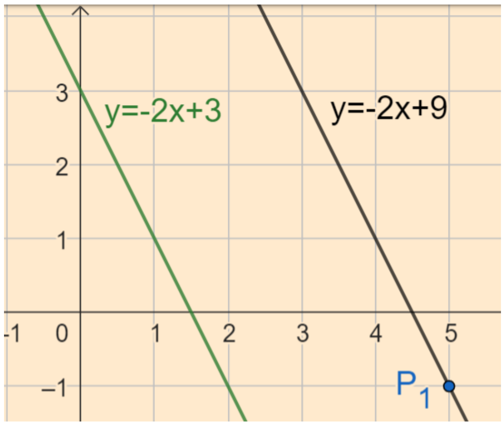
Ejemplo 3.9 Dada la recta L, cuya ecuación explícita es $y = -2x + 3$, encontrar las rectas paralela y perpendicular, respectivamente, que pasan por el punto $P_1(5,-1)$.

La pendiente de la recta L es $m = -2$. La recta paralela a L que pase por el punto $P_1(5,-1)$ deberá tener la misma pendiente. Utilizando la ecuación punto-pendiente tendremos:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -2(x - 5)$$

$$y = -2x + 9$$



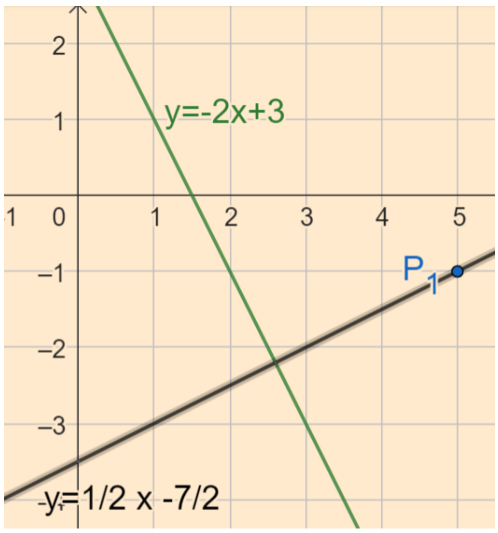
La pendiente de la recta perpendicular a L que pase por el punto $P(5,-1)$ será

$$m_2 = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Utilizando nuevamente la ecuación punto-pendiente tendremos:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 5)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

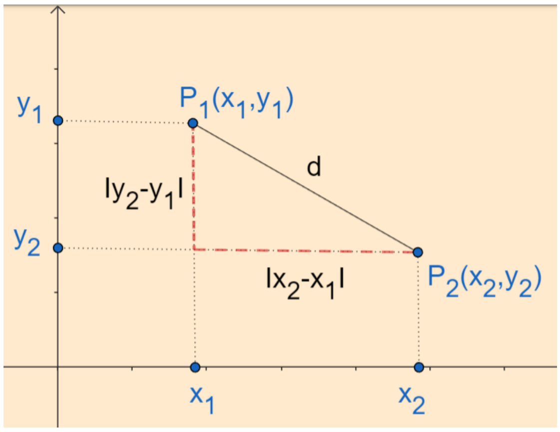


3.2. Distancias

3.2.1. Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos del plano $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, trazando sendas rectas vertical y horizontal que pasen por ellos queda determinado un triángulo rectángulo cuya hipotenusa será el segmento $\overline{P_1P_2}$ y cuya longitud será $d = d(P_1, P_2)$.

Los catetos del triángulo rectángulo miden respectivamente $|x_2 - x_1|$ y $|y_2 - y_1|$ (los valores absolutos garantizan la validez de la expresión para otras ubicaciones relativas de ambos puntos).



Si aplicamos el teorema de Pitágoras resulta: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ (aquí los valores absolutos ya no son necesarios por estar elevados al cuadrado).

Y en definitiva obtenemos la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano:

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo 3.10 Calcular la distancia entre los puntos $P_1(5, -1)$ y $P_2(-3, -4)$

Usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos que hemos introducido:
$d(P_1, P_2) = \sqrt{(-3-5)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-3)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$

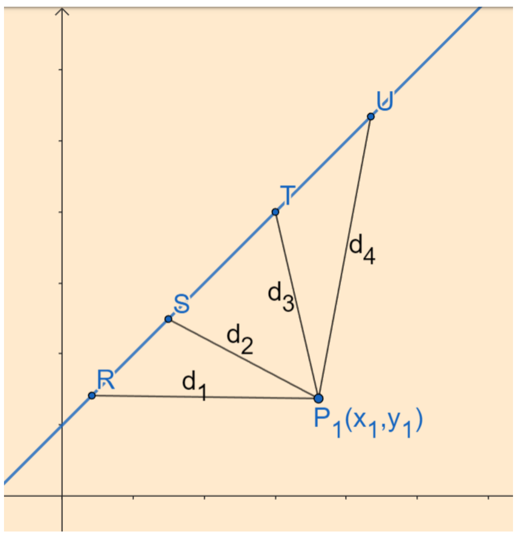
Es decir que la distancia entre los puntos P_1 y P_2 es: $d(P_1, P_2) = \sqrt{73}$

3.2.2. Distancia entre un punto y una recta

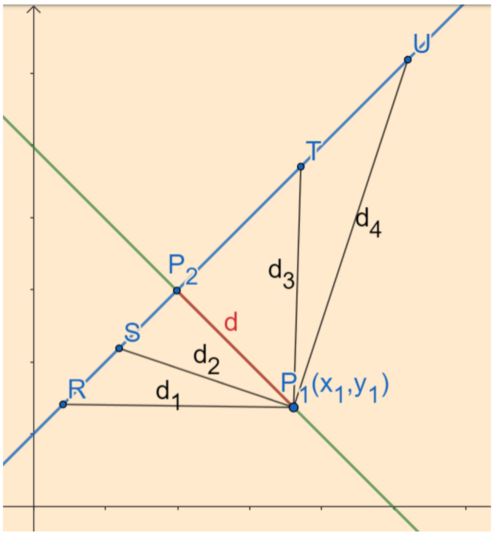
Como ya hemos dicho, para calcular una distancia debemos tener en cuenta dos puntos.

Así, para definir la distancia entre un punto $P_1(x_1, y_1)$ y una recta L es necesario escoger un punto determinado de la recta para realizar el cálculo de la distancia, pues coincidirá el lector que las posibilidades para calcular distancias entre puntos de la recta y P_1 son infinitas (ver gráfica).

Pues bien, *la distancia entre el punto $P_1(x_1, y_1)$ y la recta L* se define como la menor de las distancias que se puede obtener entre el punto P_1 y un punto de la recta L .



Esa cantidad se alcanza cuando consideramos el punto de la recta L que se obtiene como intersección de ésta y la recta perpendicular a L que pasa por P_1.



En consecuencia, dadas

- $L: \ y = m_1 x + b$ (una recta con $m \neq 0$)
- $P_1(x_1, y_1)$ (un punto)

para calcular la distancia entre P_1 y la recta, deberá encontrarse la ecuación de la recta perpendicular a L por $P_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1), \text{ donde } m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Y luego hallar el punto $P_2(x_2, y_2)$, intersección de ambas rectas, resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = m_1 x + b \\ y - y_1 = m_2(x - x_1) \end{cases}$$

Una vez obtenido $P_2(x_2, y_2)$, podremos calcular la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y L mediante

$$d(L, P_1) = d(P_1, P_2)$$

Se deja para el alumno analizar los casos en que la recta L sea horizontal ó vertical.

Ejemplo 3.11 Calcular la distancia entre la recta L, cuya ecuación explícita es $y = -2x + 3$ y el punto $P_1(5, -1)$.

La pendiente de L es $m = -2$. La recta perpendicular a L que pase por $P_1(5, -1)$ tendrá una pendiente $m_2 = \frac{1}{2}$ y su ecuación (que obtuvimos en un ejercicio anterior) será:

$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - 5)$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

Resolvemos ahora la intersección entre ambas rectas

$$\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \end{cases}$$

Igualando los segundos miembros de ambas expresiones:

$$-2x + 3 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$-2x - \frac{1}{2}x = -\frac{7}{2} - 3$$

$$-\frac{5}{2}x = -\frac{13}{2}$$

$$x = \frac{13}{5}$$

Luego, reemplazando en $y = -2x + 3$, obtenemos

$$y = -2 \cdot \frac{13}{5} + 3 = -\frac{11}{5}$$

Entonces ambas rectas se intersecan en el punto $P_2\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{5}\right)$.

De donde la distancia entre L y P_1 será:

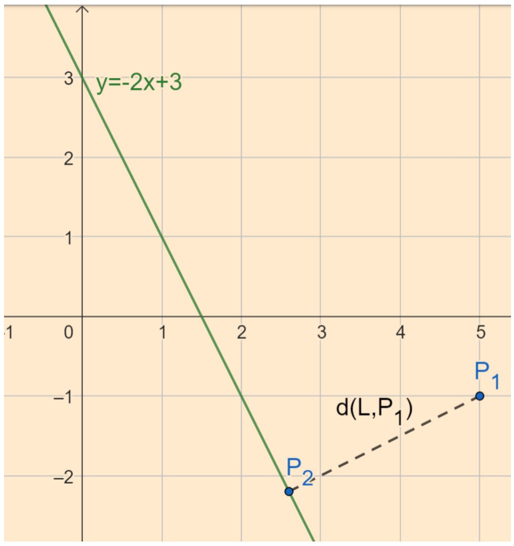
$$d(L,P_1) = d(P_1,P_2) =$$

$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} =$$

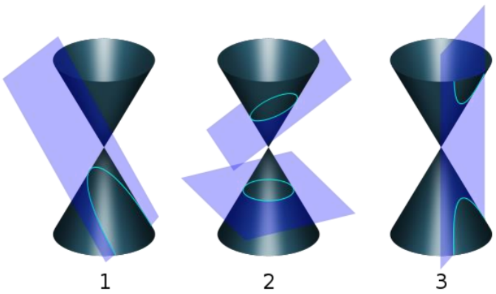
$$= \sqrt{\left(\frac{13}{5}-5\right)^2+\left(-\frac{11}{5}+1\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{12}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{180}{25}}$$

Es decir que $d(L,P_1) = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$



3.3. Secciones Cónicas



Se denomina sección cónica, o simplemente cónica, a cada una de las curvas planas resultantes de la intersección, en el espacio, entre un cono circular recto y un plano que no pasa por su vértice.

Según cuál sea la inclinación del plano respecto del eje del cono, se podrá obtener cada una de las diferentes cónicas.

1. Parábola 2. Elipse (arriba) y circunferencia (abajo) 3. Hipérbola

En general, la ecuación de una cónica es una ecuación cuadrática. Es decir, una expresión en la que las variables x y/o y aparecen con potencia 2. Entonces, la ecuación general de una cónica es de la forma:

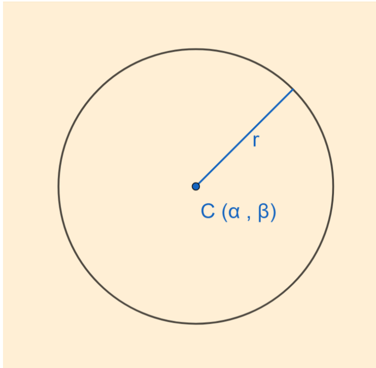
$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Analizaremos, para cada una de las ecuaciones cónicas, las particularidades de las constantes en esta *ecuación cuadrática general* de modo de tener alguna pista de cuál cónica podría tratarse y de ese manera tendremos algún indicio de qué dirección tomar para comprobar si es la ecuación de una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola.

3.3.1. Circunferencia

Definición 3.3 Dado un punto $C(\alpha,\beta)$ y un número real $r > 0$, se llama *circunferencia* al conjunto de puntos del plano que se encuentran a distancia r (denominada *radio*) del punto C (llamado *centro*).

En la gráfica puede verse, en color negro, una circunferencia que queda definida por su centro (C) y su radio (r), dibujado en color celeste.



Observar que todos los puntos de la circunferencia se encuentran a igual distancia (r) del centro (C).

Cuando nos referimos a los *elementos* de una circunferencia estamos hablando de:

- **Centro de la Circunferencia**, al que denotamos con la letra C.
- **Radio de la circunferencia:** que denotamos por r.

Ecuación Canónica de la Circunferencia.

Para deducir la ecuación de una circunferencia, debemos "traducir" la definición dada en alguna expresión algebraica. Notemos que la definición de la circunferencia remite al concepto de distancia, en tanto la circunferencia es el conjunto de puntos del plano cartesiano que se encuentran a la misma distancia (r=*radio*) del punto C (el *centro*) de coordenadas (α, β).

Escrito en lenguaje de conjuntos y recordando que la distancia entre los puntos C y P lo anotamos como $d(C,P)$, si llamamos $\mathcal{C}(C,r)$ al conjunto de puntos que define a una circunferencia de centro C y radio r sería:

$$\mathcal{C}(C,r) = \{P \in \mathbb{R}^2 \,/\, d(P,C) = r\}$$

Es decir que si un punto $P(x,y)$ pertenece a la circunferencia $\mathcal{C}$, debe cumplir:

$$d(C,P) = r$$

Con lo cual podemos aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos para expresar la relación: $r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$

Esta ecuación ya podría ser considerada para representar a una circunferencia, sin embargo lo habitual es presentarla a través de su *ecuación canónica*, la cual se obtiene luego de elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación:

$$\boxed{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2}$$

Ecuación Canónica de la circunferencia de centro $C(\alpha,\beta)$ y radio r

Ejemplo 3.12 Obtener la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,4)$ y radio $r = 2$.

En este caso $\alpha = -3$ y $\beta = 4$ con lo que la ecuación resulta:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 4$$

Ecuación Cuadrática de la Circunferencia

Si en la ecuación $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ desarrollamos los cuadrados de binomio obtendremos:

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$

que se puede llevar a la forma: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ para valores convenientes de A, B, C, D y E en $\mathbb{R}$. En el caso de la circunferencia resulta que $A = B$.

Ahora bien, no es cierto que cualquier ecuación cuadrática de la forma planteada represente una circunferencia. Es decir que podríamos encontrar una ecuación de la forma

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, incluso que cumpla $A = B$ y que no sea la ecuación de una circunferencia. Para confirmarlo (por sí o por no) se recurre al método de "completación de cuadrados" que es una herramienta de manipulación algebraica que nos permitirá (de ser posible) reescribir la ecuación cuadrática en la ecuación canónica. De esa manera no sólo confirmaremos si se trata de una circunferencia o no, sino que además podremos saber cuál es el centro y el radio de la misma.

Veamos, en el siguiente ejemplo, cómo se opera con el método de *"completación de cuadrados"*.

Ejemplo 3.13 Consideremos la ecuación cuadrática $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 12 = 0$.

El método de "completación de cuadrados" se basa en el hecho que el desarrollo del cuadrado de un binomio da por resultado un trinomio cuadrado perfecto. Y lo utilizaremos para llegar a la forma canónica, en la cual las variables x e y se encuentran "dentro" del cuadrado de un binomio.

En primer lugar, multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{3}$ para que el coeficiente de los términos cuadráticos sea la unidad

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Observar que esto es útil pues en el caso de $(x - \alpha)^2$ su desarrollo quedará:

$$(x - \alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$$

y el coeficiente que acompaña a x^2 es un 1 (lo mismo observaríamos si desarrolláramos $(y - \beta)^2$).

Así las cosas, la idea es tomar los términos cuadrático y lineal en la variable x (que son $x^2 + 2x$ en este caso), considerar que son los dos primeros términos del trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$ y determinar cuál debe ser el tercer término, para completarlo y reemplazarlo por el cuadrado del binomio correspondiente.

En este caso se trabaja sobre el término lineal. Deberá ser: $-2\alpha x = 2x$. Por lo cual $\alpha = -1$, y entonces el tercer término del trinomio cuadrado perfecto resulta ser $\alpha^2 = 1$.

Para poder formar el trinomio cuadrado perfecto, debemos sumar y restar dicho tercer término, resultando

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1$$

Razonamos del mismo modo para los términos cuadrático y lineal en la variable y , puesto que:

$$(y - \beta)^2 = y^2 - 2\beta y + \beta^2$$

Si tomamos $y^2 - 4y$ como los dos primeros términos del trinomio cuadrado perfecto, resultará que $-2\beta y = -4y \rightarrow \beta = 2$, de donde $\beta^2 = 4$.

Si sumamos y restamos 4 en la expresión con la que estamos trabajando resulta:

$$y^2 - 4y = y^2 - 4y + 4 - 4 = (y^2 - 4y + 4) - 4 = (y - 2)^2 - 4$$

Ahora, si llevamos estas igualdades a la ecuación original:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

$$(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) - 4 = 0$$

$$[(x + 1)^2 - 1] + [(y - 2)^2 - 4] - 4 = 0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2-1-4-4=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=9$$

Que es la ecuación canónica de una circunferencia de centro $C(-1,2)$ y radio $r=3$.

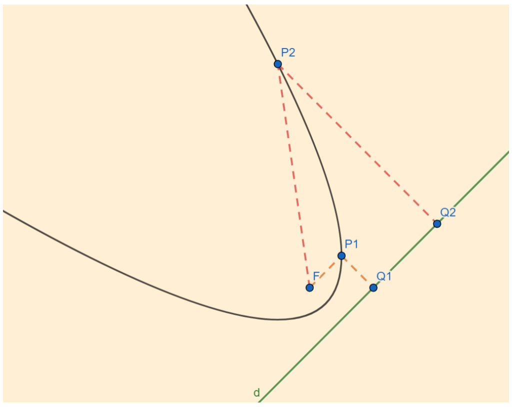
Observación: Si el miembro derecho de la igualdad (en este caso 9) hubiera sido negativo, entonces la ecuación cuadrática no hubiera representado una circunferencia pues r^2 no puede ser negativo.

3.3.2. Parábola

Definición 3.4 Dada una recta fija d (llamada directriz), y un punto fijo F (llamado foco) ($F \notin d$), se llama *parábola* al conjunto de puntos del plano que equidistan de la recta d y del foco F.

En la gráfica puede verse, en color negro, una parábola que queda determinada por su foco (F) y su recta directriz (d), de color verde.

Observar que la distancia $d(P_1,F)$ es igual que $d(P_1,Q_1)=d(P_1,d)$, lo cual confirma que el punto P_1 está sobre la parábola. De igual modo ocurre para cada punto que consideremos sobre la parábola. En el gráfico se puede ver esa misma referencia con el punto P_2.



Ecuación Canónica de la Parábola

Para deducir la ecuación de una parábola, podemos proceder de manera similar a lo que hicimos para la circunferencia. Es decir, caracterizar al conjunto de puntos del plano que se define a través de la parábola, identificar cuál es la ecuación que está involucrada en esa definición y luego trabajar algebraicamente sobre la expresión que queda determinada para llegar a una ecuación que identificamos como *ecuación canónica de la parábola*.

Observemos que para definir al conjunto que describe una parábola debemos contar con una recta dada d, la *directriz de la parábola*, y un punto fijo F exterior a esta recta, llamado *foco de la parábola*. Así, si llamamos $\mathcal{P}(d,F)$ al conjunto de puntos que determinan una parábola, éste queda definido como:

$\mathcal{P}(d,F)=\{P\in\mathbb{R}^2 \,/\, d(P,F)=d(P,d)\}$

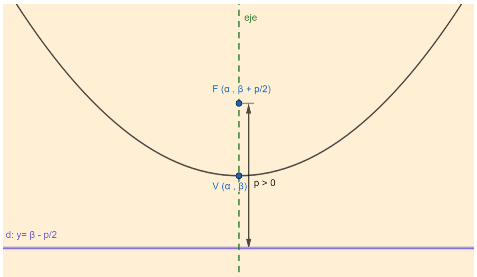
Es decir que si queremos recuperar una ecuación que represente a la parábola, debemos partir de la igualdad que define a los elementos del conjunto $\mathcal{P}(d,F)$ y realizar algunas manipulaciones algebraicas para llegar a una ecuación que acordemos como ecuación canónica de la parábola. En este curso no recorreremos el camino de deducción de esa ecuación, quien lo desee puede consultar el APENDICE en el cual se encuentran los desarrollos que llevan a la ecuación canónica de parábolas con directrices horizontales (paralelas al eje x) o verticales (paralelas al eje y), que son aquellas que estudiaremos en este curso.

Entonces, debemos tener presente que podremos encontrar dos tipos de parábolas:

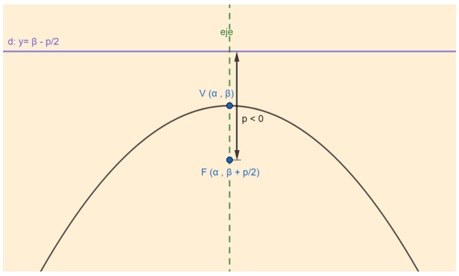
- **Parábolas con directiz horizontal.**

$$\boxed{(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)}$$

Ecuación Canónica de la parábola de vértice $V(\alpha,\beta)$ y directriz horizontal.



Cuando $p > 0$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

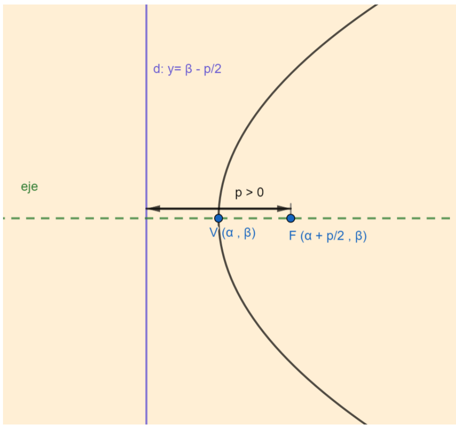


Cuando $p < 0$ las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

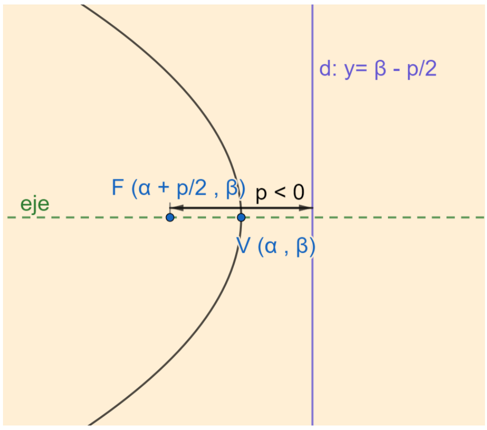
- **Parábolas con directriz vertical.**

$$\boxed{(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)}$$

Ecuación Canónica de la parábola de vértice $V(\alpha,\beta)$ y directriz vertical.



Cuando $p > 0$ las ramas de la parábola se abren hacia la derecha.



Cuando $p < 0$ las ramas de la parábola se abren hacia la izquierda.

Además, la parábola cuenta con otros *elementos* importantes que serán de nuestro interés y que resultará necesario conocer, nos referimos al eje de simetría, la distancia focal y el vértice de la parábola.

Así, los *elementos de una parábola* que tendremos en cuenta serán:

- **Foco de la parábola:** al que, como hemos dicho, anotamos como F. Las ramas de la parábola siempre se abren en dirección al foco.
- **Directriz de la parábola:** recta que denotamos como d.

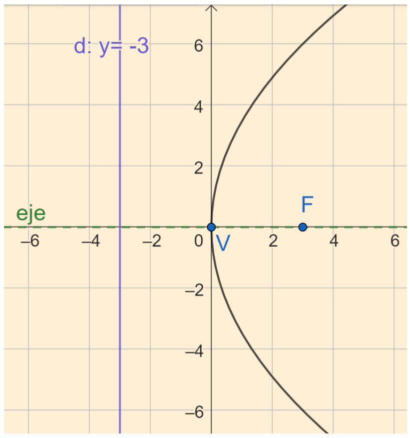
- **Eje de simetría:** es una recta que divide a la parábola en dos partes iguales, es perpendicular a la directriz (d) y pasa por el foco (F).
- **Vértice de la parábola:** es el punto intersección entre el eje de simetría y la parábola. Resulta ser el punto medio del segmento que une F con la directriz. Lo denotamos con la letra V.
- **Distancia focal:** es la distancia entre el foco (F) y la recta directriz (d). Esa distancia está dada por $|p|$.

Ejemplo 3.14 Identificar los elementos de la parábola $y^2 = 12x$ y graficarla.

Por la forma que tiene la ecuación (la variable al cuadrado es y) se trata de una parábola con vértice $V(0,0)$ y eje de simetría horizontal $y = 0$.

Como $2p = 12$ resulta que la longitud focal es $p = 6$.

Luego, su directriz será $d : x = -3$, el foco $F = (0,3)$ y en consecuencia la apertura de las ramas de la parábola es hacia la derecha.



Ecuación Cuadrática de la Parábola

Si desarrollamos los términos de la ecuación canónica de la parábola con eje paralelo al eje x en cualquiera de sus dos formas:

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$$

Obtendremos una ecuación cuadrática de la forma

$$By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

que es la ecuación cuadrática de la parábola, con B **y** C **no nulos**.

Si, en cambio, desarrollamos la ecuación canónica de la parábola con eje paralelo al eje y en cualquiera de sus dos formas:

$$(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$$

Obtendremos una ecuación cuadrática de la forma

$$Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$$

que es la ecuación cuadrática de la parábola, con A **y** D **no nulos**.

Observar que, en cualquiera de los dos casos, lo que distingue a la ecuación cuadrática de la parábola es que una de las variables se encuentra elevada al cuadrado mientras que la otra sólo aparece de manera lineal en la ecuación.

Para llevar cualquiera de las dos ecuaciones cuadráticas a la forma canónica, se recurre al método de completación de cuadrados.

Ejemplo 3.15 Dada la ecuación cuadrática $2x^2 - 12x - 16y + 98 = 0$, encontrar su forma canónica e identificar los elementos de la parábola correspondiente.

En primer lugar multiplicamos por $\frac{1}{2}$, el inverso del coeficiente del término cuadrático, así logramos que el término que contiene a x^2 tenga coeficiente 1:

$x^2 - 6x - 8y + 49 = 0$

Luego completamos el trinomio cuadrado perfecto en la variable x sumando y restando convenientemente 9 (piense por qué se utiliza este número para completar cuadrados)

$(x^2 - 6x + 9) - 9 - 8y + 49 = 0$

$(x - 3)^2 - 8y + 40 = 0$

$(x - 3)^2 = 8y - 40$

$(x - 3)^2 = 8(y - 5)$

Que es la ecuación canónica de una parábola cuyos elementos son:
Vértice: $V(3,5)$
Distancia focal: $p = 4$
Foco: $F(3,7)$, por lo que las ramas se abren hacia arriba
Directriz: $y = 3$
Eje de simetría paralelo al eje $y : x = 3$

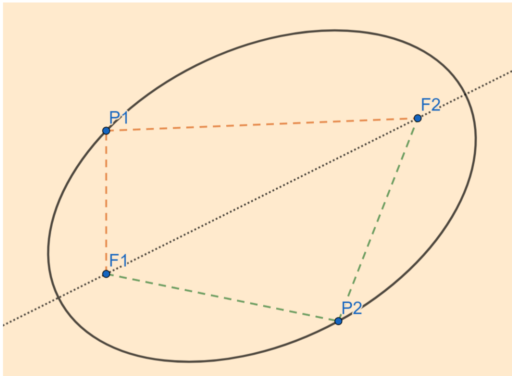
3.3.3. Elipse

Definición 3.5 Dados dos puntos fijos del plano F_1 y F_2, se llama *elipse* al conjunto de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a F_1 y F_2 es constante.
A los puntos F_1 y F_2 se los conoce con el nombre de *focos de la elipse*.

Dados dos puntos F_1 y F_2, la elipse consta de puntos tales que al sumar sus distancias a F_1 y F_2 es siempre la misma.

En la gráfica se indican como ejemplos dos puntos (P_1 y P_2) y sus respectivas distancias a los focos. La suma de las distancias en verde será igual a la suma de las distancias en naranja.

La recta (en línea de puntos) que pasa por los focos se conoce como *eje focal*.



Ecuación Canónica de la Elipse

Para obtener la ecuación canónica de la elipse debemos partir, como es habitual, de la definición del conjunto que queda determinado. Si llamamos $\mathcal{E}$ a la elipse en cuestión, podemos escribir el conjunto de la siguiente forma:

$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 \,/\, |d(P,F_1) + d(P,F_2)| = 2a\}$

donde a representa una constante que va a tener un rol preponderante en la construcción de la gráfica de la elipse.

Luego de algunas manipulaciones algebraicas (puede ver el APENDICE quien tenga curiosidad) se llega a la forma canónica de la ecuación de la elipse. En este curso sólo estudiaremos elipses con eje focal horizontal o vertical.

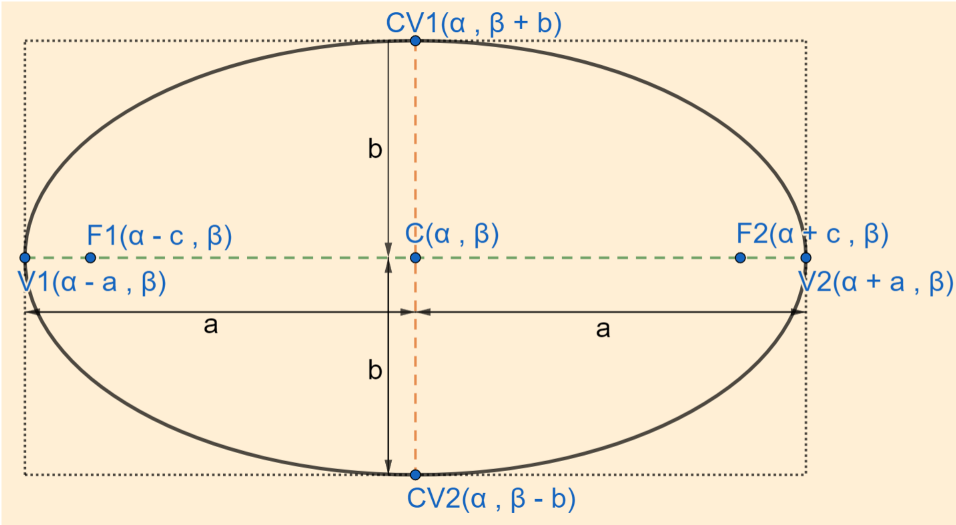
- **Elipse con eje mayor horizontal.**

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$$

con $a^2 > b^2$

Ecuación Canónica de la elipse de centro $C(\alpha,\beta)$ y eje mayor horizontal.

El factor c (relativo a la distancia focal) se obtiene con la relación $c^2 = a^2 - b^2$.



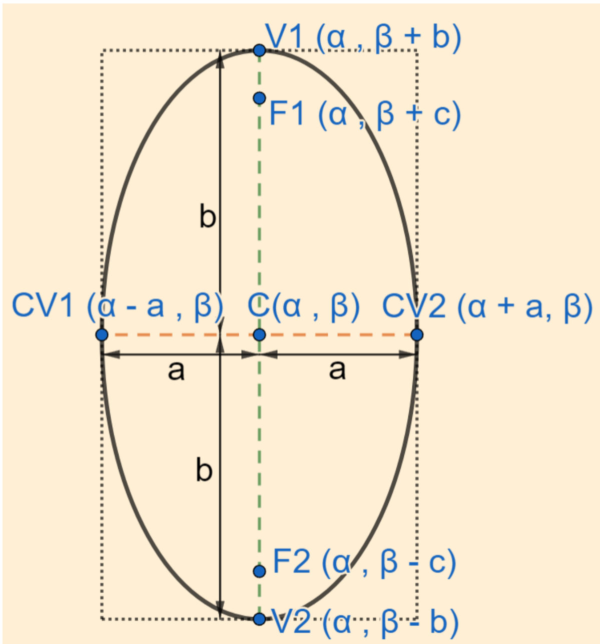
- **Elipse con eje mayor vertical.**

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1}$$

con $b^2 > a^2$

Ecuación Canónica de la elipse de centro $C(\alpha, \beta)$ y eje mayor vertical.

El factor c (relativo a la distancia focal) se obtiene mediante la relación $c^2 = b^2 - a^2$



Además de los focos y el eje focal, la elipse tienen otros *elementos* a los que les prestaremos atención. Concretamente, el eje mayor y el eje menor, dos vértices, dos covértices y la distancia focal de la elipse.

Así, los *elementos de una elipse* que analizaremos habitualmente son:

- **Focos**
- **Eje focal:** Recta que pasa por ambos focos.
- **Vértices de la elipse:** son aquellos dos puntos de la elipse que son intersecados por el eje focal . Se ubican, desde el centro de la elipse, a unidades en la dirección del eje focal, en caso de que este sea horizontal; o b unidades cuando el eje focal es vertical.

- **Eje mayor de la elipse:** se trata del segmento de recta que une los vértices de la elipse. Puede ser horizontal, si $a^2 > b^2$; o vertical, si $b^2 > a^2$
- **Eje menor de la elipse:** es un segmento de recta perpendicular al eje mayor. Puede ser vertical, si $a^2 > b^2$; u horizontal, en caso de que $b^2 > a^2$.
- **Covértices de la elipse:** se trata de dos puntos de la elipse que son intersecados por el eje menor. Se ubican, desde el centro de la elipse, b unidades en la dirección del eje menor, si éste es vertical; o a unidades cuando el eje menor es horizontal.
- **Distancia focal:** es la distancia entre los focos (F_1 y F_2), se mide como $2c$ y se calcula en relación a las constantes a y b según sea la elipse de eje mayor horizontal o vertical.

Ejemplo 3.16 Dada la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, identificar todos sus elementos y graficar.

Observar que la ecuación está en su forma canónica, con $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, luego su centro será $C(0,0)$. Como $a^2 = 25 > 16 = b^2$, se trata de una elipse con eje mayor horizontal, luego el eje focal será $y = 0$.

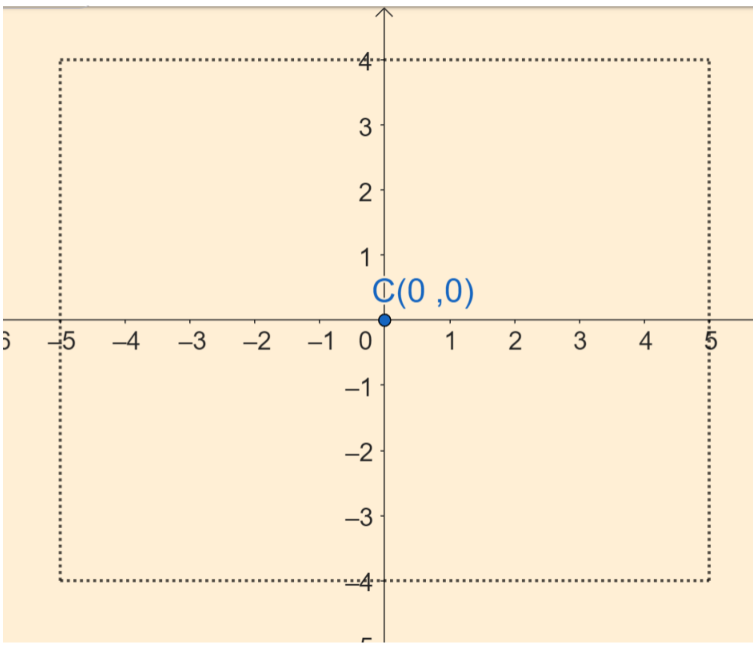
Conocidos los valores de a y b podemos hallar las coordenadas de los vértices y los covértices:

$$V_1 = (\alpha - a, \beta) = (-5, 0) \qquad V_2 = (\alpha + a, \beta) = (5, 0)$$
$$CV_1 = (\alpha, \beta + b) = (0, 4) \qquad CV_2 = (\alpha, \beta - b) = (0, -4)$$

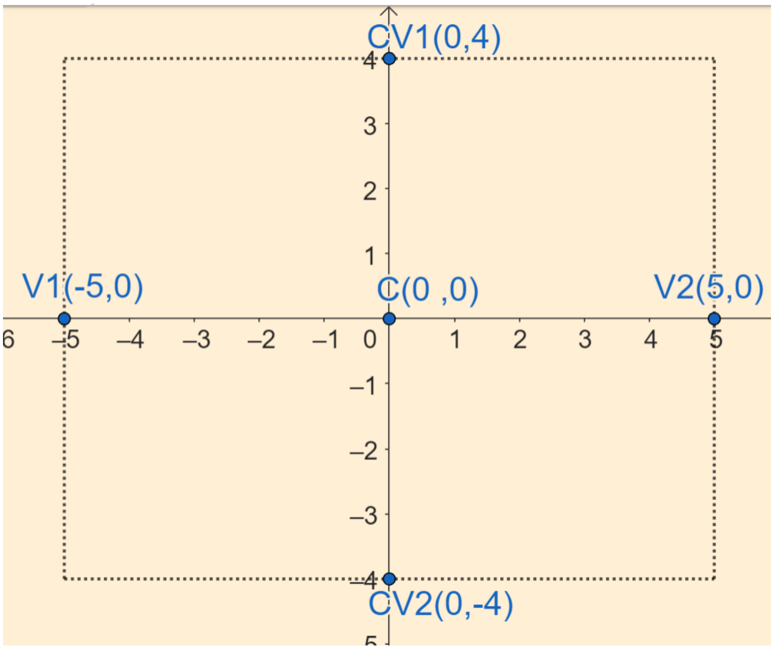
Usando la relación $c^2 = a^2 - b^2$, obtenemos que $c = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$. De donde podemos deducir que su distancia focal será $2c = 6$ y en consecuencia los focos se ubican en:

$$F_1 = (\alpha - c, \beta) = (-3, 0) \qquad F_2 = (\alpha + c, \beta) = (3, 0).$$

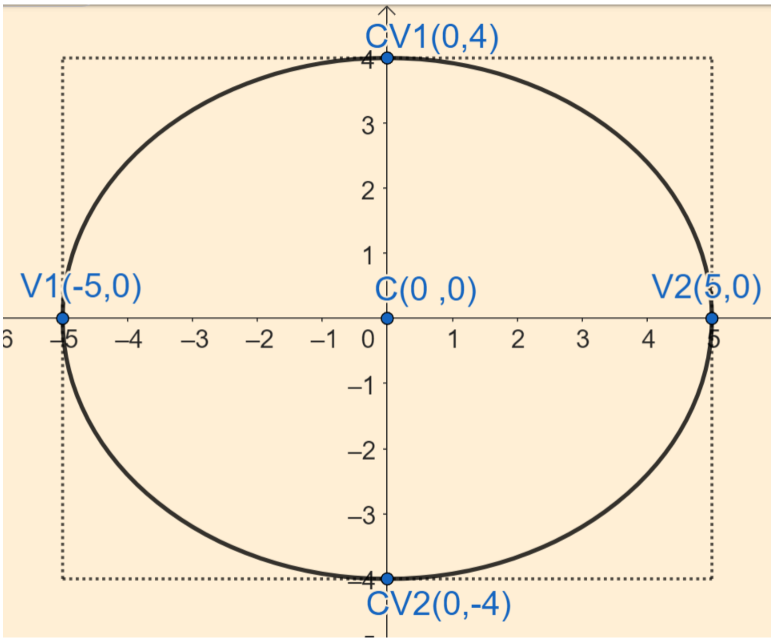
Para graficar, podemos proceder de distintas maneras. Una posibilidad es reconocer cuál es el centro ($C(0,0)$ en este caso) y luego recuperar los valores de a y b (siempre trabajando con cantidades positivas con estos parámetros). A partir de estos datos podemos trazar nuestra primeras líneas auxiliares que nos ayudarán a realizar un dibujo con cierta precisión:



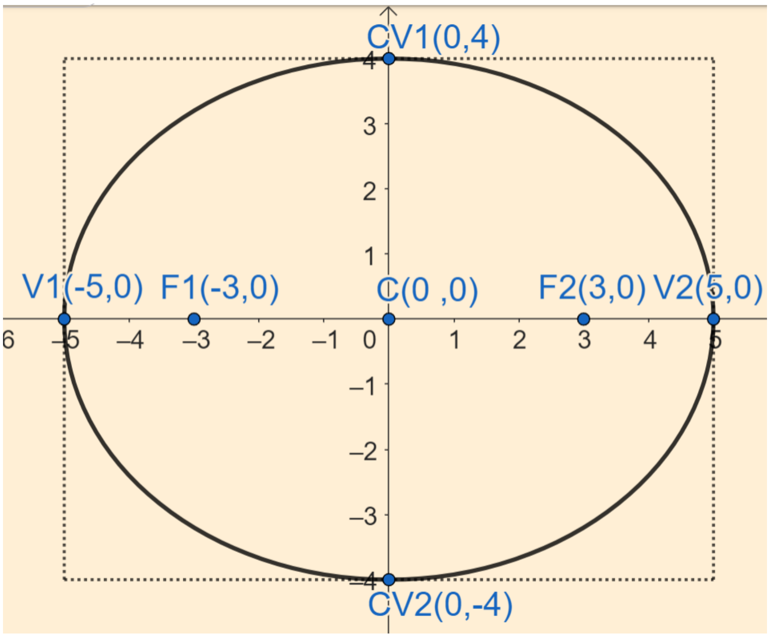
Observar que al dibujar este rectángulo no sólo hemos trazado líneas auxiliares que nos ayudarán con la gráfica de la elipse, sino que además podemos identificar sobre él a los vértices y covértices:



A continuación, podemos trazar la elipse usando como referencia las líneas punteadas del rectángulo auxiliar:



Y para finalizar, no olvidemos de representar los focos en nuestra gráfica:



Ejemplo 3.17 Determinar si la ecuación $36x^2 - 288x + 25y^2 + 50y = 299$ es la ecuación de una elipse. En tal caso, hallar sus elementos y representar graficamente.

Para confirmar si se trata de una elipse debemos trabajar algebraicamente sobre la ecuación dada con el objetivo de llevarla a su forma canónica. Si logramos reescribirla como ecuación canónica de la elipse, pues entonces será precisamente una elipse y podremos recuperar los elementos que nos permitirá construir su gráfica en el plano cartesiano.

Completemos cuadrados sobre ambas variables, x e y, en la ecuación

$$36x^2 - 288x + 25y^2 + 50y = 299$$

para determinar si es posible escribir los términos $36x^2 - 288x$ en la forma $(x-\alpha)^2$ y los términos $25y^2 + 50y$ como $(y-\beta)^2$.

Comparemos, entonces $36x^2 - 288x$ con $(x-\alpha)^2 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$; es decir que debemos dividir por 36 nuestra expresión:

$$36x^2 - 288x = 36(x^2 - 8x)$$

Así, el valor de α se desprende de comparar los términos lineales de ambas expresiones. Es decir, $-2\alpha = -8 \longrightarrow \alpha = 4$; con lo cual, $\alpha^2 = 16$.

Luego, completaremos el trinomio cuadrado perfecto sumando y restando $\alpha^2 = 16$:

$$36(x^2 - 8x) = 36(x^2 - 8x + 16 - 16) = 36[(x-4)^2 - 16] \qquad [I]$$

Si hacemos un razonamiento similar sobre la variable y, obtendremos que $\beta = -1$ y así $\beta^2 = 1$. En consecuencia:

$$25y^2 + 50y = 25(y^2 + 2y) = 25(y^2 + 2y + 1 - 1) = 25[(y+1)^2 - 1] \qquad [II]$$

Ahora sí, podemos reemplazar $[I]$ y $[II]$ en la ecuación original:

$$36x^2 - 288x + 25y^2 + 50y = 299$$

$$36(x^2 - 8x) + 25(y^2 + 25y) = 299$$

$$36[(x-4)^2 - 16] + 25[(y+1)^2 - 1] = 299$$

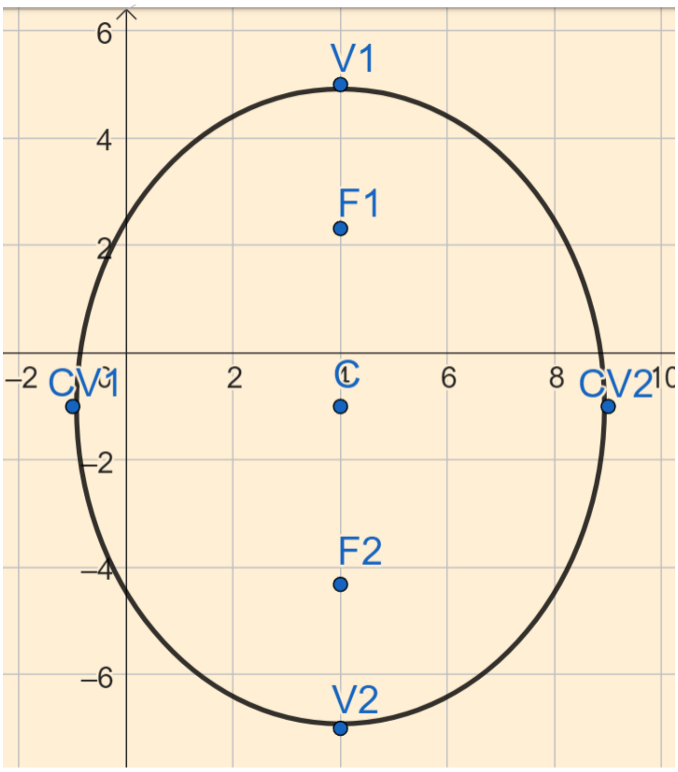
$$36(x-4)^2 - 576 + 25(y+1)^2 - 25 = 299$$
$$36(x-4)^2 + 25(y+1)^2 = 299 + 576 + 25$$
$$36(x-4)^2 + 25(y+1)^2 = 299 + 288 + 25$$
$$36(x-4)^2 + 25(y+1)^2 = 900$$

Ahora, como la ecuación canónica de la elipse se escribe igualada a 1, dividimos ambos miembros de la igualdad por 900.

$$\frac{36(x-4)^2}{900} + \frac{25(y+1)^2}{900} = \frac{900}{900}$$
$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

Así que, efectivamente se trata de la ecuación de una elipse. Con la ventaja que ahora podemos recuperar más información sobre ella:

- Su sentro está en $C(4,-1)$.
- Se trata de una elipse con eje mayor vertical, pues $a^2 = 25 < 36 = b^2$. Es decir que sus focos y vértices los encontraremos moviéndonos desde el centro de manera vertical, mientras que los covértices los encontraremos horizontalmente.
- El valor c, que nos permite calcular la distancia focal, será: $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{36-25} = \sqrt{11} \simeq 3{,}32$. Así, la distancia focal será $2c = 2\sqrt{11}$.
- Sus vértices estarán ubicados en:
  $V_1(\alpha, \beta + b) = (4, -1+6) = (4,5) \qquad V_2(\alpha, \beta - b) = (4, -1-6) = (4,-7)$
- Sus focos son:
  $F_1(\alpha, \beta + c) = (4, -1 + \sqrt{11}) \qquad F_2(\alpha, \beta - c) = (4, -1 - \sqrt{11})$
- Sus covértices:
  $CV_1(\alpha - a, \beta) = (4-5, -1) = (-1,-1) \qquad CV_2(\alpha + a, \beta) = (4+5, -1) = (9,-1)$



Ecuación Cuadrática de la Elipse

Las formas vistas de la ecuación de la elipse se denominan canónicas y tienen la ventaja de que exponen los elementos que definen a la elipse: coordenadas del centro, semiejes mayor y menor. Si en cualquiera de esas expresiones desarrollamos los cuadrados de binomio y reagrupamos términos semejantes, obtendremos una expresión cuadrática como la siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Con A, B, C, D y E en $\mathbb{R}$, donde A **y** B **son no nulos, distintos y de igual signo**.

Estas condiciones son necesarias, pero no suficientes para que se trate de una elipse. Es decir que pueden cumplirse las condiciones pero aún así que no se trate de la ecuación de una elipse. Por el contrario, si no cumple las condiciones podemos afirmar que no es la ecuación de una elipse.

Esto último indica que dependerá del signo del término independiente resultante luego de completar cuadrados en la ecuación dada. Veamos esto en un ejemplo.

Ejemplo 3.18 Dada la ecuación cuadrática $9x^2 + 4y^2 + 36x - 32y + 110 = 0$, determinar si se trata de una elipse.

En principio, $A = 9$ y $B = 4$ son no nulos, distintos y de igual signo. Puede tratarse de una elipse. Para confirmar si lo es o no, debemos encontrar la forma canónica, y para ello procederemos a completar cuadrados, tanto para x como para y.

Reordenamos términos, sacamos factor común para los términos en x e y, de modo que las potencias cuadradas queden con coeficientes unitarios:

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 8y) + 110 = 0$$

Luego completamos los trinomios cuadrados perfectos, dentro de los paréntesis, sumando y restando las cantidades adecuadas:

$$9(x^2 + 4x + 4 - 4) + 4(y^2 - 8y + 16 - 16) + 110 = 0$$

Asociamos los trinomios cuadrados perfectos:

$$9[(x^2 + 4x + 4) - 4] + 4[(y^2 - 8y + 16) - 16] + 110 = 0$$

Reemplazamos por los cuadrados de binomio

$$9[(x+2)^2 - 4] + 4[(y-4)^2 - 16] + 110 = 0$$

Aplicamos propiedad distributiva

$$9(x+2)^2 - 36 + 4(y-4)^2 - 64 + 110 = 0$$

Reagrupamos términos y pasamos el término independiente al otro miembro de la igualdad.

$$9(x+2)^2 + 4(y-4)^2 = -10$$

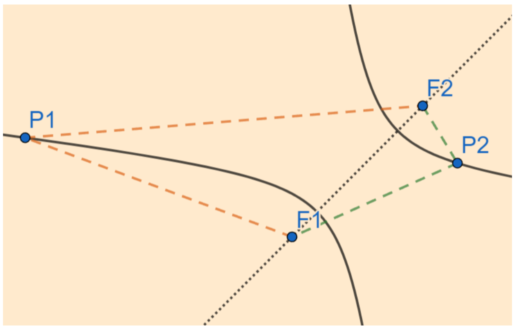
Observemos que del lado izquierdo de la igualdad hay dos términos positivos, pues en ambos casos son factores positivos multiplicando una expresión elevada al cuadrado. Entonces el lado izquierdo representa una cantidad positiva, mientras que el lado derecho es negativo. Así, no es posibile que la igualdad se satisfaga, con lo cual la ecuación dada no es la de una elipse.

3.3.4. Hipérbola

Definición 3.6 Dados dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2, llamamos *hipérbola* al conjunto de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias F_1 y F_2 es constante.

A los puntos F_1 y F_2 se los conoce como *focos de la hipérbola*.

En la gráfica puede verse, en negro, una hipérbola en la que se han marcado dos puntos (P_1 y P_2) para ilustrar las distancias de cada uno de ellos a los focos, cuya diferencia es constante para cualquier punto que se tome sobre la hipérbola.



La recta que une los focos F_1 y F_2 se conoce como *eje focal* de la hipérbola.

Euación Canónica de la Hipérbola

Para construir una ecuación que represente a la hipérbola, debemos partir del conjunto que se determina a través de su definición. Si llamamos $\mathcal{H}$ al conjunto de puntos de la hipérbola, podemos definir el conjunto del siguiente modo:

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 \ / \ |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}$$

donde a es un valor muy significativo en la construcción de la curva y pronto veremos cuán útil nos resultará.

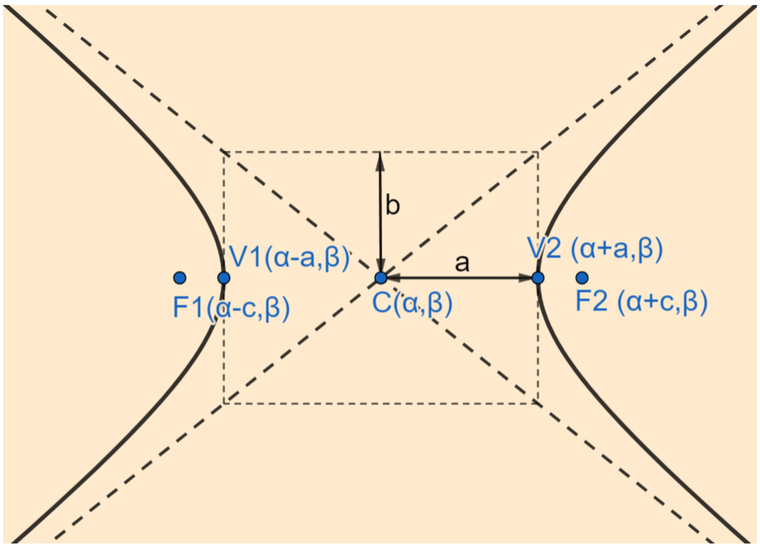
Luego de algunas manipulaciones algebraicas (puede remitirse al APÉNDICE para conocer la deducción), llegaremos a la *ecuación canónica de la hipérbola*. En este curso sólo estudiaremos hipérbolas con eje focal horizontal o vertical.

- **Hipérbola con eje focal horizontal.**

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$$

Ecuación Canónica de la hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ *y eje focal horizontal.*

El factor c (relativo a la distancia focal) se obtiene con la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

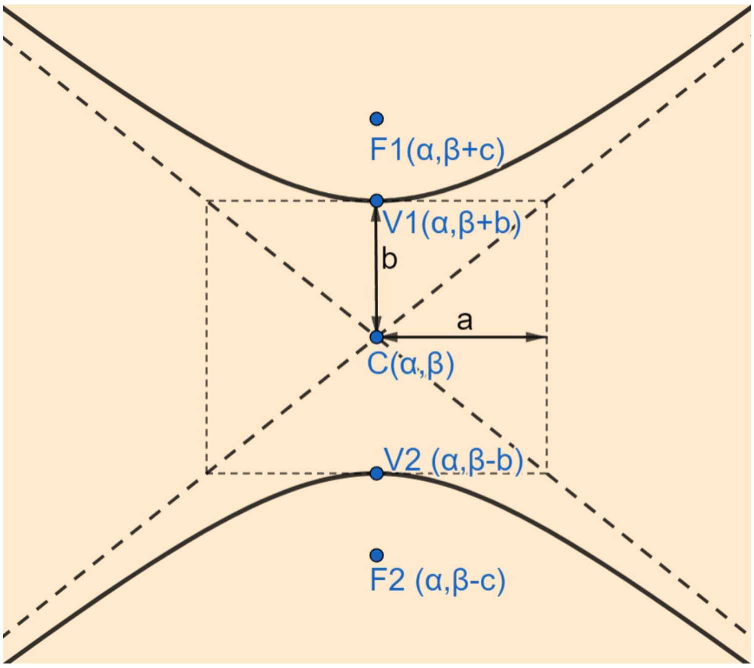


- **Hipérbola con eje focal vertical.**

$$\boxed{\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1}$$

Ecuación Canónica de la hipérbola de centro $C(\alpha,\beta)$ *y eje focal vertical.*

El factor c (relativo a la distancia focal) se obtiene mediante la relación $c^2 = b^2 + a^2$



Habrá observado el lector que en las gráficas anteriores aparecen, en líneas de puntos, un par de rectas que "acompañan" los trazos de las hipérbolas. Se trata de las *asíntotas de las hipérbolas* y son uno de los elementos que tendremos en cuenta. Entonces, además de los focos y las asíntotas, los *elementos de la hipérbola* que estudiaremos serán:

- **Centro de la hipérbola:** Sus coordenadas figuran explícitamente en la ecuación canónica, ellas son $C(\alpha, \beta)$.
- **Asíntotas de la hipérbola:** se trata de dos rectas, que no forman parte de la hipérbola, y que son referencia imprescindible para graficar la curva, dado que la gráfica de una hipérbola se aproxima a ellas cada vez más sin tocarla, de allí su nombre.

  Sus ecuaciones están dadas por: $y - \beta = \pm\frac{b}{a}(x - \alpha)$.

  Las asíntotas se intersecan en el centro de la hipérbola.
- **Focos:** Son dos puntos que se ubican, en relación al centro, c unidades a izquierda y a derecha cuando la hipérbola tiene eje focal horizontal y por tanto sus coordenadas son $F_1(\alpha - c, \beta)$ y $F_2(\alpha - c, \beta)$; o bien c unidades por encima y por debajo del centro cuando el eje focal de la hipérbola es vertical, es decir que sus coordenadas resultan ser $F_1(\alpha, \beta + c)$ y $F_2(\alpha, \beta - c)$.
- **Eje focal:** Es una recta que pasa por ambos focos. En el caso de una hipérbola con eje focal horizontal tiene ecuación $y = \beta$, mientras que en caso de que la hipérbola tenga eje focal vertical su ecuación es $x = \alpha$.
- **Vértices de la hipérbola:** son aquellos dos puntos sobre la hipérbola que son intersecados por el eje focal . Se ubican, desde el centro de la elipse, a unidades en la dirección del eje focal, en caso de que este sea horizontal; o b unidades cuando el eje focal es vertical.
- **Distancia focal:** es la distancia entre los focos (F_1 y F_2), se mide como $2c$ y se calcula en relación a las constantes a y b.

Ejemplo 3.19 Dada la hipérbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, identificar todos sus elementos y graficar.

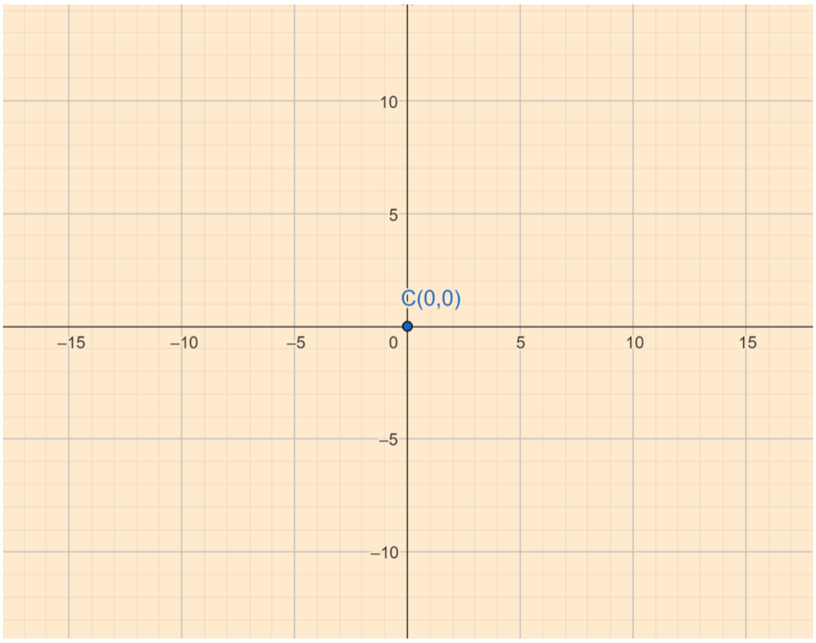
Observar que la ecuación dada corresponde a una hipérbola con eje focal horizontal. Como $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, el *centro* resulta ser $C(0,0)$; su *eje focal* tiene ecuación $y = 0$.

De la ecuación dada podemos deducir que $a = 5$ y $b = 4$, con lo cual los *vértices* son $V_1(-5,0)$, $V_2(5,0)$. Además, con esas constantes podemos obtener $c = \sqrt{a^2+b^2}$, que en este caso resulta $c = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$ y por tanto su *distancia focal* es $2\sqrt{41}$. De allí (el valor de c) podemos deducir las coordenadas de sus *focos*: $F_1(-\sqrt{41},0)$, $F_2(\sqrt{41},0)$.

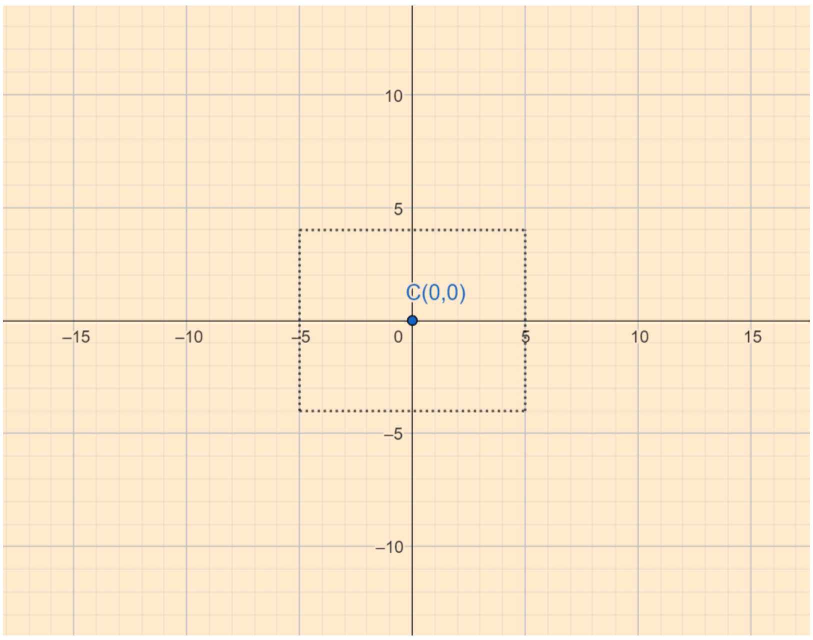
Las *rectas asíntotas* resultan ser $y-\beta = \pm\frac{b}{a}(x-\alpha)$. Es decir, las rectas $y = \frac{4}{5}x$ y $y = -\frac{4}{5}x$.

Para dibujar la curva en cuestión podemos trabajar del siguiente modo:

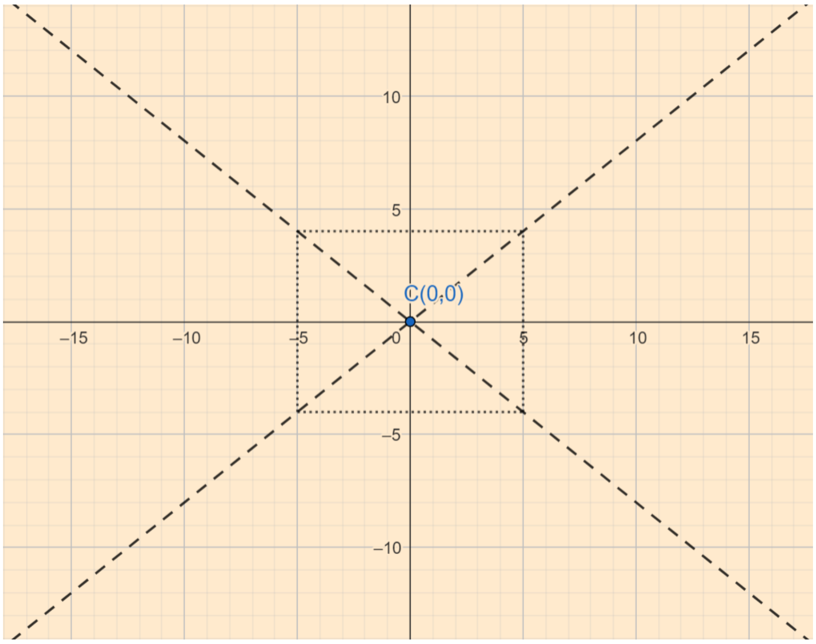
- En primera instancia representamos el centro de la hipérbola:



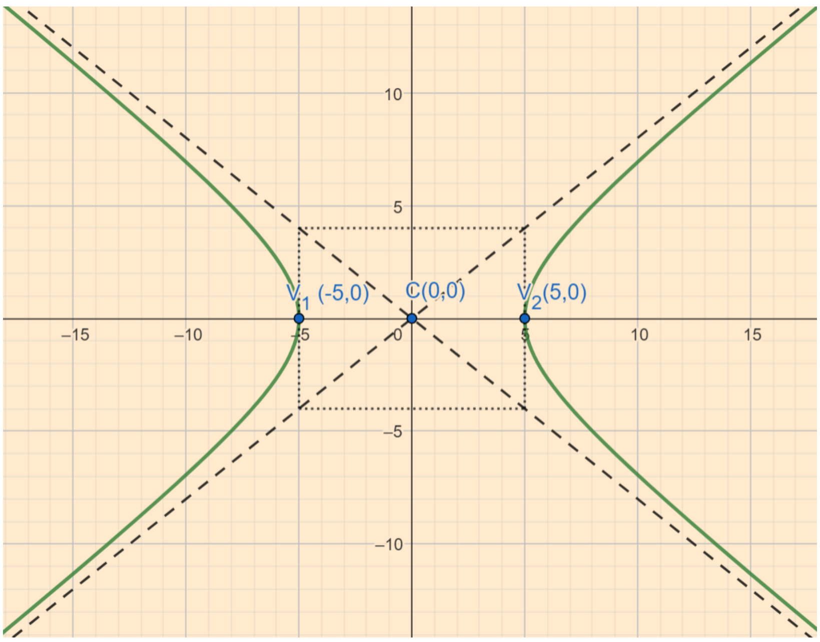
- A continuación, usando las constantes $a = 5$ y $b = 4$ graficamos un rectángulo que será auxiliar para nuestra gráfica:



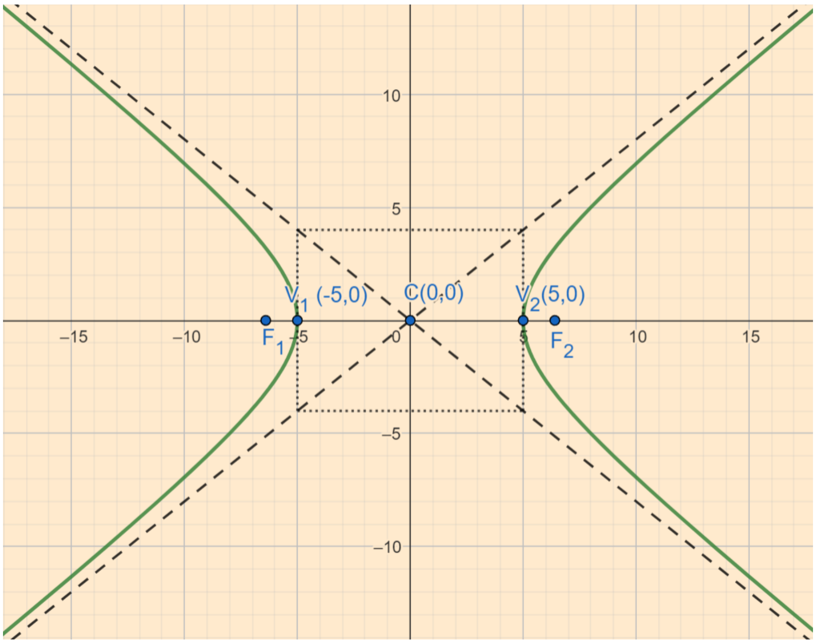
- Ahora podemos trazar las rectas asíntotas, que no son otra cosa que las rectas que se obtienen a partir de las diagonales de el rectángulo auxiliar que hemos construido:



- Entonces sí, ubicamos los vértices y trazamos ambas ramas de la hipérbola cuidando que pasen por los vértices y que se curven de tal manera que se aproximen cada vez más a las rectas asíntotas:



- Por último, completamos los datos del resto de los elementos en la gráfica obtenida:



Ecuación Cuadrática de la Hipérbola

Si en cualquiera de las formas canónicas de la hipérbola desarrollamos los cuadrados de binomio y reagrupamos términos semejantes, obtendremos una expresión cuadrática como la siguiente:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

con A, B, C, D y E en $\mathbb{R}$, donde A **y** B **son no nulos y de signo opuesto**.

Estas condiciones son necesarias, pero no suficientes, para que se trate de una hipérbola. Es decir que una ecuación podría cumplir con las condiciones enunciadas, pero aún así no tratarse de la ecuación de una hipérbola. Dependerá de que el término independiente resultante, luego de completar cuadrados, sea no nulo.

Ejemplo 3.20 Dada la ecuación cuadrática $9x^2 - 4y^2 + 36x + 32y + 8 = 0$, determinar si se trata de una hipérbola, encontrar su forma canónica, identificar sus elementos y graficar.

En principio, A y B son no nulos y de signo opuesto, es decir que podría tratarse de una hipérbola. Para confirmarlo o desmentirlo debemos trabajar sobre la ecuación dada con el objetivo de llevarla a la forma canónica.

Procederemos a completar cuadrados, tanto en la variable x como en la variable y.

$$9(x^2 + 4x) - 4(y^2 - 8y) + 8 = 0$$

$$9(x^2 + 4x + 4 - 4) - 4(y^2 - 8y + 16 - 16) + 8 = 0$$

$$9[(x^2 + 4x + 4) - 4] - 4[(y^2 - 8y + 16) - 16] + 8 = 0$$

$$9[(x + 2)^2 - 4] - 4[(y - 4)^2 - 16] + 8 = 0$$

$$9(x + 2)^2 - 36 - 4(y - 4)^2 + 64 + 8 = 0$$

$$9(x + 2)^2 - 4(y - 4)^2 = -36$$

Si el término independiente hubiera resultado nulo, no se hubiera tratado de una hipérbola.

En nuestro ejemplo, podemos multiplicar por $-\frac{1}{36}$ de ambos lados de la igualdad para que la expresión quede igualada a 1

$$-\frac{9(x+2)^2}{36}+\frac{4(y-4)^2}{36}=1$$

$$\frac{(y-4)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{4}=1$$

Que resulta ser la ecuación canónica de una hipérbola con centro $C(-2,4)$, con eje focal paralelo al eje y (pues en la ecuación canónica el término en y^2 es el positivo), con $a=2$ y $b=3$.

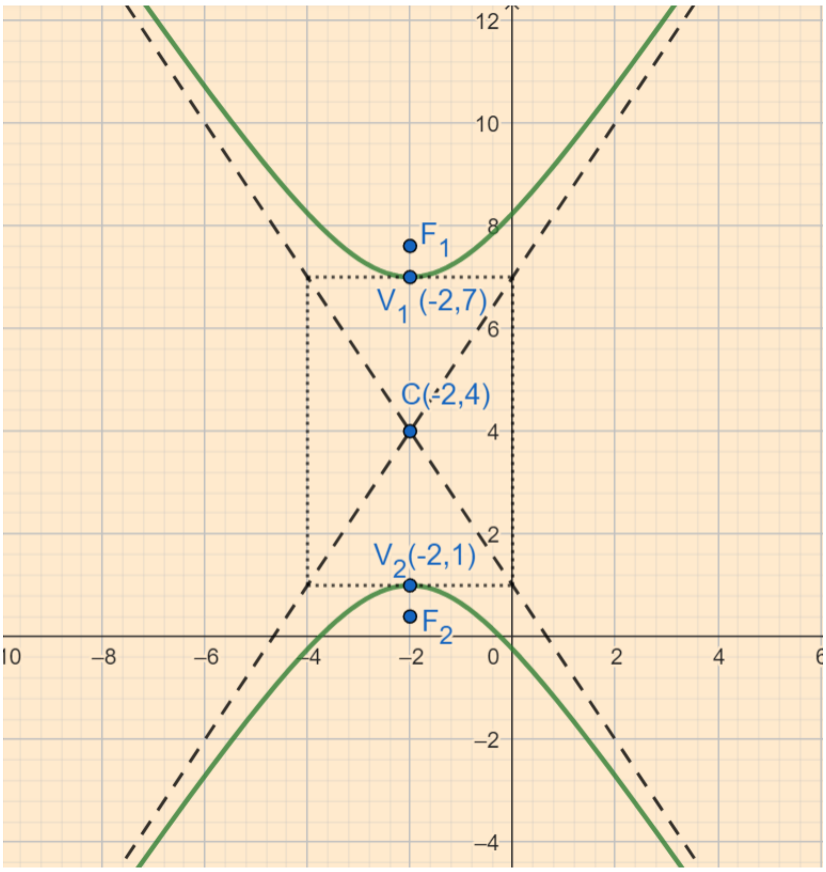
Eje focal: $x=-2$

La distancia focal será: $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{9+4}=2\sqrt{13}$.

Focos: Como el eje focal es vertical los focos son de la forma $F_1(\alpha,\beta+c)$ y $F_2(\alpha,\beta-c)$; en nuestro ejemplo $F_1(-2,4+\sqrt{13})$; $F_2(-2,4-\sqrt{13})$

Vértices: También se ubican verticalmente desde el centro como $V_1(\alpha,\beta+b)$ y $V_2(\alpha,\beta-b)$; para el ejemplo resultan $V_1(-2,7)$; $V_2(-2,1)$.

Asíntotas $\left(y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha)\right)$: $y-4=\frac{3}{2}(x+2)$; $y-4=-\frac{3}{2}(x+2)$



3.4. Aplicaciones a la economía

El trabajo que hemos realizado en las secciones anteriores nos permitirá tener la destreza de interpretar gráficamente problemas que se describen en términos de ecuaciones lineales o de ecuaciones cuadráticas.

Como hay muchos problemas del área económica que se modelan a través de este tipo de ecuaciones, lo que hemos estudiado nos resultará útil para poder razonar en torno a estos problemas. De esa manera, podremos interpretar geométricamente las resoluciones que haremos a través de cálculos matemáticos, conformando ésto una herramienta muy importante para tener un marco de respaldo que nos permita interpretar si estamos procediendo bien o si debemos reformular nuestras ideas en la resolución planteada.

Nos proponemos, en esta sección, aportar algunas miradas que podrían ayudarnos a comprender cuál es la utilidad a la que hacemos referencia.

3.4.1. Demanda

Cuando se estudia la variación de la demanda sobre cierto producto del mercado frente a un cambio en el precio de ese producto, se recopilan datos con la intención de construir un modelo que pueda describir esta relación.

Si consideramos que el modelo es lineal, alcanza con que conozcamos dos datos sobre esta relación para establecer la ecuación lineal que describa el comportamiento de la demanda frente a la variación del precio del producto.

Podemos ilustrar lo dicho en el párrafo anterior a través de algunos ejemplos:

Ejemplo 3.21 Para cierto producto que se vende \$2000 se han registrado 40 millones de unidades vendidas y se estima que si el producto se vendiera a \$1500 se llegaría a vender 55 millones de unidades.

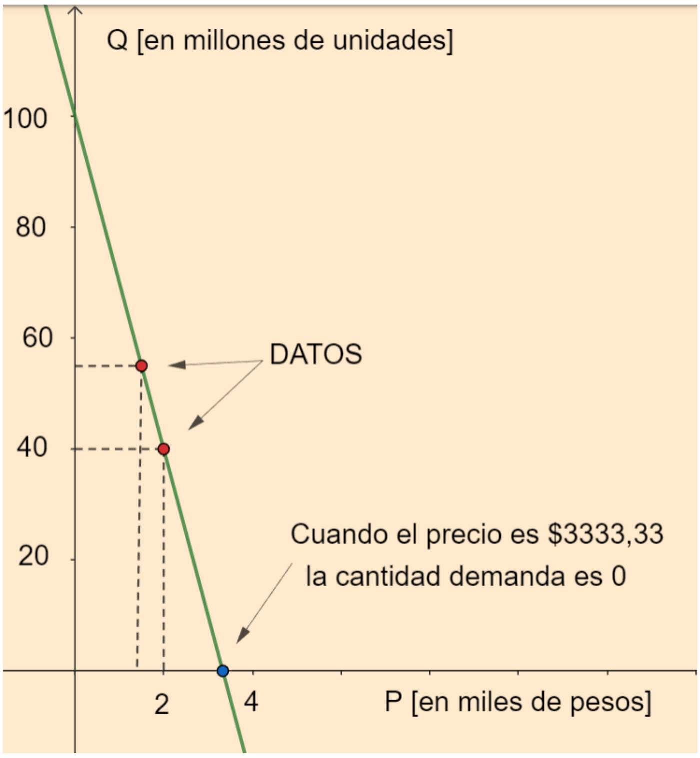
Si consideramos las variables Q de cantidades demandadas (en millones de unidades) y P representando al precio del producto (en miles de pesos), podríamos interpretar lo anterior como que los puntos $(2,40)$ y $(1{,}5,55)$ están relacionados. Si consideramos un modelo lineal podemos usar la *ecuación punto-punto* para calcular la ecuación lineal correspondiente.

$$
\begin{aligned}
&Q - Q_0 = \frac{Q_1 - Q_0}{P_1 - P_0}(P - P_0) \\
&Q - 40 = \frac{55 - 40}{1{,}5 - 2}(P - 2) \\
&Q = -30(P - 2) + 40 \\
&Q = -30P + 60 + 40 \\
&Q = -30P + 100
\end{aligned}
$$

Si observamos la pendiente de esta ecuación, vemos que es negativa. Esto puede ser interpretado como que al aumentar el precio del producto se espera que en el mercado va a disminuir la demanda, lo cual podría tener sentido.

Además, de esta ecuación podemos sacar otras conclusiones. Por ejemplo, que si el producto alcanzara un precio aproximado de \$3333, 33 la demanda caería absolutamente y no se vendería ninguna unidad del producto.

Podemos interpretar gráficamente la ecuación y reconocer en esa gráfica las observaciones que hemos hecho:



Ejemplo 3.22 Mediante un estudio de mercado para un producto que se desea lanzar a la venta, se establece que el mercado demandará 300000 de unidades si se vende a \$7500, pero si el precio aumenta en \$1800 la demanda será de 120000 unidades.

Si la demanda se supone lineal y se quiere establecer la ecuación que la modela. Podemos usar la *ecuación punto-pendiente* para hallar la ecuación lineal correspondiente[2].

Para ello, podemos considerar que Q es la cantidad demandada (expresada en miles de unidades) y llamando P al precio del producto (en pesos), nos es posible calcular la pendiente de la ecuación como:

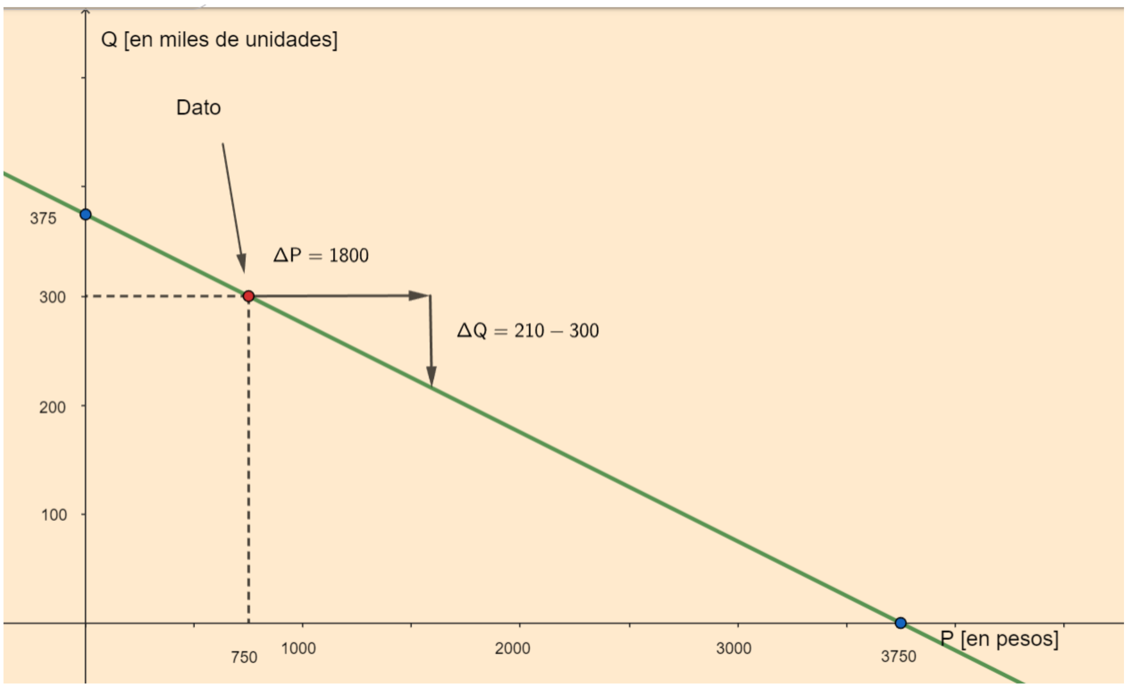
$$m = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$
$$m = \frac{120 - 300}{1800} = \frac{-180}{1800} = -\frac{1}{10}$$

Con esto, y conociendo uno de los datos que se han estimado en el estudio de mercado, podemos usar la *ecuación punto-pendiente*:

$$Q - Q_0 = m(P - P_0)$$
$$Q - 300 = -\frac{1}{10}(P - 750)$$
$$Q = -\frac{1}{10}P + 75 + 300$$
$$Q = -\frac{1}{10}P + 375$$

Gráficamente, podemos representar a la demanda de la siguiente manera:

[2] Observe que la que está en este apunte no es la única manera de hallar la ecuación de la recta. Piense usted mismo en otra posibilidad.



Observar que la recta corta al eje horizontal en $P = 3750$. Eso podría interpretarse diciendo que si el producto se ofreciera a \$3750 no se vendería ninguna unidad (pues el punto intersección se corresponde con $Q = 0$).

3.4.2. Curvas de transformación

Algunas industrias que fabrican más de un artículo, ven modificada la capacidad de producir uno de esos artículos cuando crece la producción del otro. Es decir que deben tener en cuenta esa relación para decidir qué niveles de producción mantiene en cada uno de sus artículos.

Si consideráramos el caso de una industria que produce dos artículos podemos pensar en modelar una ecuación que establezca una relación entre las cantidades producidas de cada uno de estos artículos.

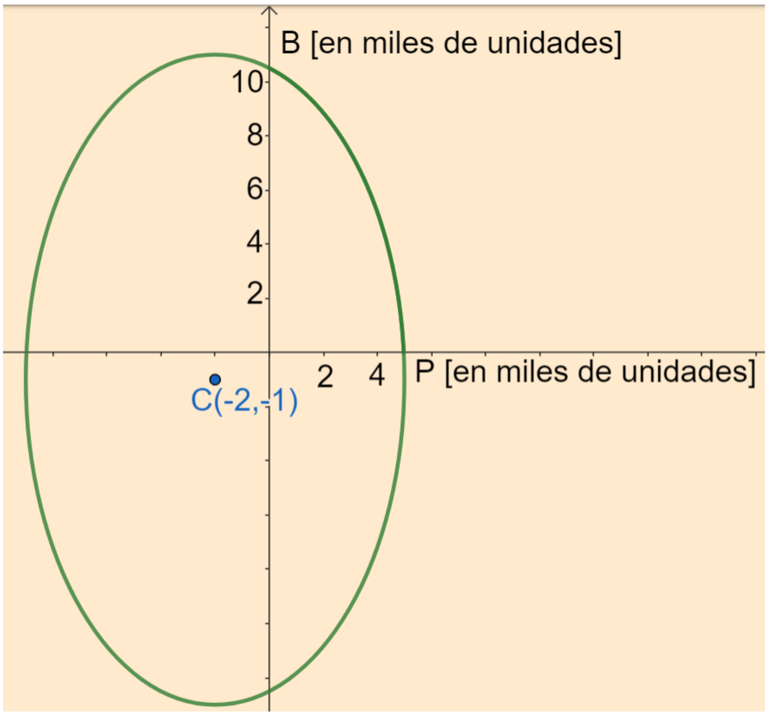
Ejemplo 3.23 Una fábrica de plásticos construye baldes (B) y palas de basura (P). Las producciones semanales de cada una de estos artículos (considerados en miles de unidades) están relacionados por la siguiente ecuación:

$$144P^2 + 576P + 49B^2 + 98B = 6431$$

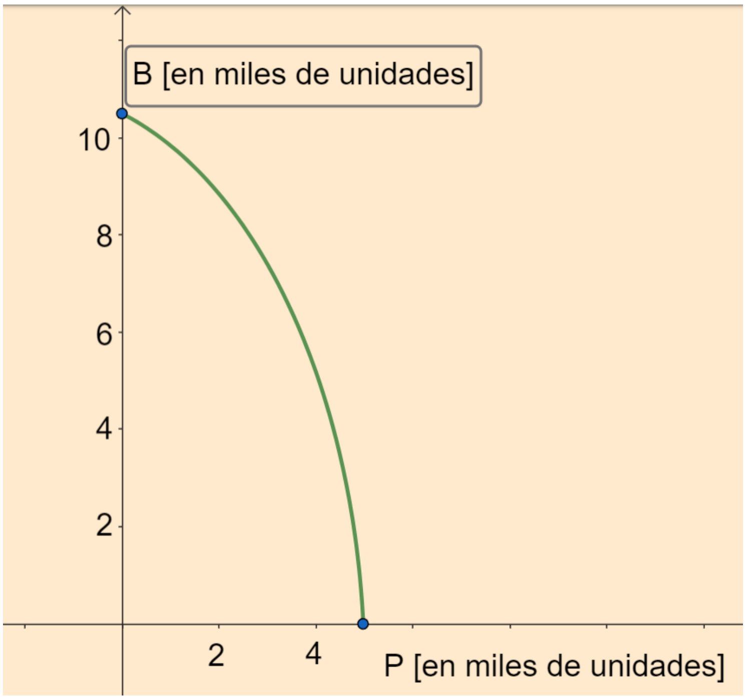
Que, al completar cuadrados (no deje el lector de comprobarlo), queda:

$$\frac{(P+2)^2}{49} + \frac{(B+1)^2}{144} = 1$$

Cuya gráfica es:



Observar que no tiene sentido económico considerar la gráfica de la elipse completa, pues las cantidades que se pueden producir sólo serán positivas. Por lo tanto lo único que nos interesa de esta gráfica es lo que está en el primer cuadrante. Con lo cual la curva de transformación de las producciones de esta fábrica será:



A partir de esto podemos sacar muchas conclusiones.

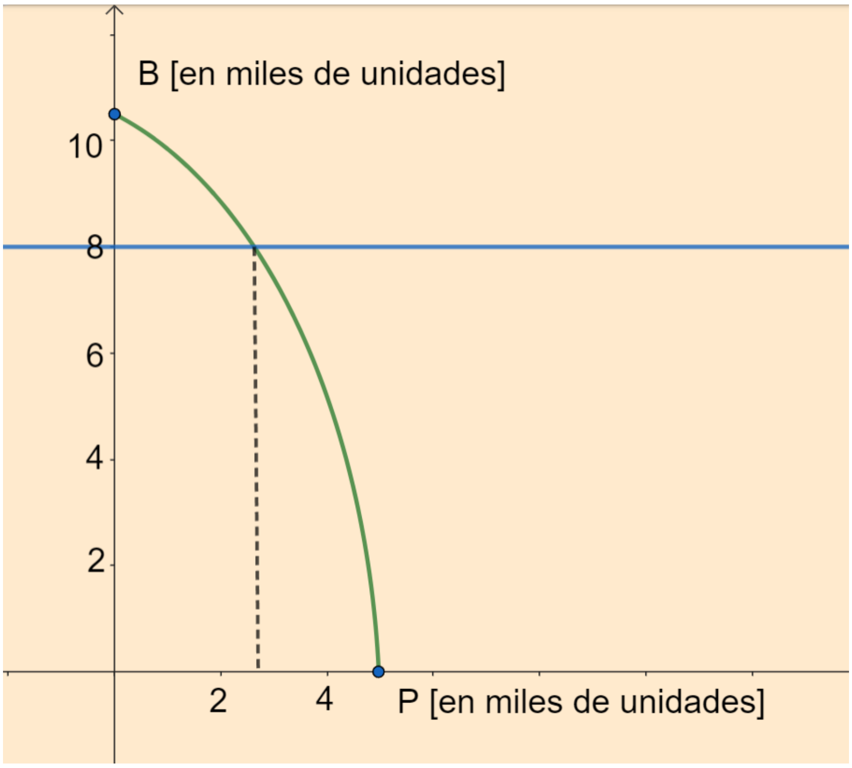
Por ejemplo, la producción máxima de baldes se da cuando no se fabrica ninguna pala de basura ($P = 0$) y la producción máxima de palas se da cuando $B = 0$.

Además, si en una semana determinada se necesita fabricar 8000 baldes porque hay un pedido que se debe cumplir ¿Cuántas palas podrías fabricarse esa semana? Observar que responder esta pregunta requiere resolver la ecuación con el valor de $B = 8$. Es decir, resolver la ecuación:

$$\frac{(P-2)^2}{49} + \frac{(8+1)^2}{144} = 1$$

en la que se requiere despejar P.

Haga el cálculo el lector, pero debería comprobarse que la cantidad de palas que se pueden fabricar en la semana que se necesita fabricar 8000 baldes es $P \approx 6,63$; esto es, aproximadamente 6630 unidades de palas de basura. Esto que afirmamos puede ser ilustrado en la siguiente gráfica



donde puede verse una representación geométrica de lo que se ha trabajado de manera algebraica en los cálculos que realizamos. La solución hallada se corresponde con el punto que resulta de intersección de la curva de transformación de la producción con la recta $B = 8$.

Hay muchas otras interpretaciones que pueden lograrse a través de razonar con esta ecuación. Por ejemplo, piense cómo responder qué cantidades de cada artículo deben fabricarse para que se produzca la misma cantidad de palas y baldes. ¿Y si quisiéramos fabricar el doble de palas que de baldes?

3.4.3. Equilibrios

Un problema muy usual en la economía es el de *Equilibrio*. En éste lo que se busca es hallar la solución que iguale dos ecuaciones[3].

Tal es el caso de los problemas de *Equilibrio de Mercado* y *Equilibrio de Renta Nacional*.

En el primero, lo que se plantea es:

[3]Ya hemos trabajado con algunos problemas que planteaban la necesidad de igualar ecuaciones para poder resolver lo que se buscaba. Lo hicimos, por ejemplo, cuando necesitábamos calcular la distancia entre un punto y una recta, entre otros

$$Q_d = Q_s \quad \rightarrow \quad \text{Cantidad Demandada} = \text{Cantidad Ofrecida}$$

es decir que lo que se pretende es conocer las condiciones del mercado para que no haya excedentes ni faltantes de productos que se estudian a través de un modelo propuesto.

En el otro problema típico, el de *Equilibrio de Renta Nacional*, lo que se busca es conocer en qué condiciones el ahorro y la inversión previstas están equilibrados, estos es

$$S = I \quad \rightarrow \quad \text{Ahorro Previsto} = \text{Inversión Prevista}$$

Concretamente, en este capítulo indagaremos un poco acerca de los modos en que lo que hemos estudiado desde el Álgebra y la Geometría nos puede ser de utilidad en el problema de *Equilibrio de Mercado*[4].

Equilibrio Parcial de Mercado

En un modelo de equilibrio parcial de mercado se considera la situación (simplificada) en la que la demanda (Q_d) y la oferta (Q_s) de un producto depende únicamente de su precio (P). En este caso suele decirse que se estudia un *mercado aislado*.

De este modo, cuando aumenta el precio la cantidad demandada disminuye y la cantidad ofrecida aumenta. Buscar un equilibrio entre estas relaciones supone hallar el precio al cual la demanda y la oferta se igualan, de modo que no haya excedentes ni faltantes del producto en el mercado.

Equilibrio Parcial de Mercado: Modelo Lineal

Es habitual que las ecuaciones que modelan la demanda (Q_d) y la oferta (Q_s) de un producto estén dadas por ecuaciones lineales. Con lo cual, buscar la cantidad y precio de equilibrio supone resolver un sistema de dos ecuaciones lineales. El modo en que resolvemos ese sistema es, en principio, intuitivo y tiene su motivación en el objetivo planteado: que las cantidades Q_s y Q_d se igualen.

Ejemplo 3.24 Un producto que se vende en el mercado responde a las siguientes ecuaciones de oferta y demanda $\begin{cases} Q_d = 12 - 2P \\ Q_s = -8 + 2P \end{cases}$, donde el precio ($P$) está dado en *miles de* \$ y la cantidad (Q) en *millones de unidades*.

Hallar el precio (P^*) y la cantidad (Q^*) que establece el equilibrio de mercado, supone resolver el sistema de ecuaciones dado.

En nuestro caso, podemos igualar las ecuaciones (dado que buscamos que $Q_d = Q_s$) y resolver la ecuación de variable P que queda planteada.

Hagámoslo:

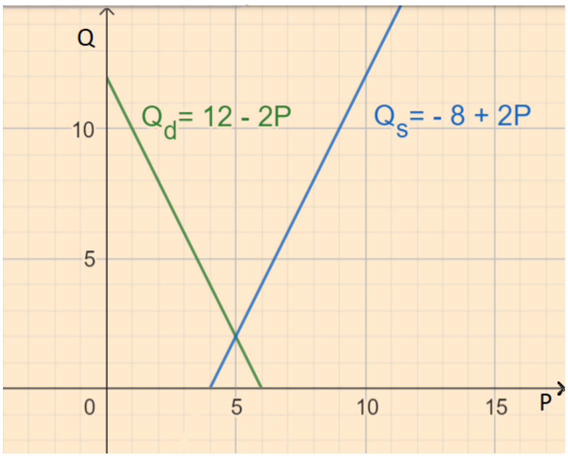
$$Q_d = Q_s$$
$$12 - 2P = -8 + 2P$$
$$12 + 8 = 2P + 2P$$
$$20 = 4P$$

[4]Para conocer cómo puede ser útil la matemática que hemos visto en el *Equilibrio de Renta Nacional*, sugerimos leer la páginas 46 y 47 del libro *"Métodos Fundamentales de economía matemática"*, de Alpha C. Chiang y Kevin Wainwright

$$\frac{20}{4} = P$$
$$5 = P$$

Con lo cual, para que se produzca el equilibrio de mercado, el producto debe venderse a $5000 y la cantidad que debe ser ofrecida por el fabricante es de $Q_s = -8 + 2 \cdot 5 = 2$, esto es 2 millones de unidades del producto.

Observemos gráficamente lo que hemos hallado de manera analítica:



Equilibrio Parcial de Mercado: Modelo no Lineal

En ocasiones, los modelos que se construyen no responden a una ecuación lineal, sino que se logran modelos que representen la demanda o la oferta (o ambas) a través de ecuaciones no lineales.

La idea de equilibrio es la misma que planteamos antes, sólo que debemos resolver un sistema de ecuaciones mixto (no todas las ecuaciones serán lineales).

Ejemplo 3.25 Considere las siguientes ecuaciones de oferta y demanda en una economía aislada:

$$\begin{cases} Q_d = 2 - \frac{1}{4}P^2 \\ Q_s = 2P - 3 \end{cases}$$

Otra vez, P se mide en *miles de pesos* mientras que Q en *millones de unidades*.

Halle el precio y la cantidad que generan que no haya excedentes ni faltantes del producto en el mercado.

Procederemos como en el ejemplo anterior, es decir, igualando las cantidades demandadas y ofrecidas:

$$Q_d = Q_s$$
$$2 - \frac{1}{4}P^2 = 2P - 3$$
$$2 - \frac{1}{4}P^2 - 2P + 3 = 0$$
$$-\frac{1}{4}P^2 - 2P + 5 = 0$$
$$P^2 + 8P - 20 = 0 \qquad \text{[si multiplicamos por } -4 \text{ a la ecuación]}$$
$$P^2 + 8P + 16 - 16 - 20 = 0 \qquad \text{[si completamos cuadrados]}$$

$$(P+4)^2 - 36 = 0$$
$$(P+4)^2 = 36$$
$$(P+4) = \pm\sqrt{36}$$
$$P = \pm 6 - 4$$

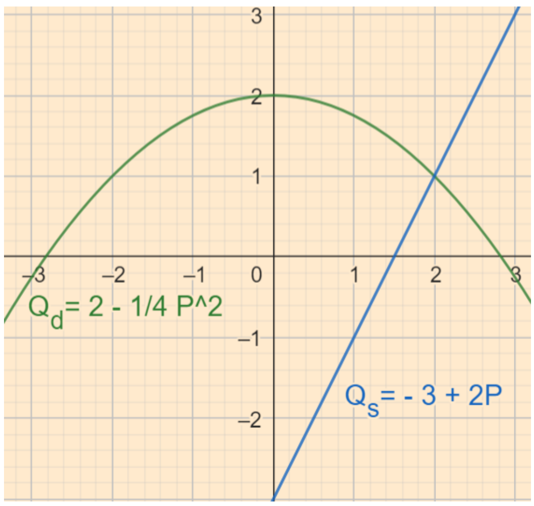
de donde las soluciones de la ecuación serían $P = 2$ ó bien $P = -10$.

Observemos que la resolución matemática arroja dos valores posibles para P. Sin embargo, una de las soluciones no tiene sentido desde el punto de vista económico. ¿Identifica a qué nos referimos?

Pues bien, el precio de un producto no puede tener un valor negativo. Entonces, el único valor que debemos considerar es $P = 2$. Es decir que el producto deberá venderse a \$2000 para que se produzca el equilibrio de mercado.

Entonces, la cantidad que debe producirse será: $Q_s = 2 \cdot 2 - 3 = 1$. Esto es, deben fabricarse 1 millón de unidades del producto para satisfacer la demanda y generar equilibrio en el mercado.

Podemos corroborar nuestra respuesta a través de la siguiente representación gráfica:



Equilibrio General de Mercado

En la realidad no suele haber productos para los que la oferta y la demanda dependan únicamente del precio de ese mismo producto, sino que suelen depender de otras variables, entre las que podemos mencionar los precios de otros productos sustitutos o bienes complementarios.

Así, es usual que cuando se busca el equilibrio general de un mercado se debe tener en cuenta que no haya excedentes (ni de oferta ni de demanda) en cada uno de los artículos que conforman ese mercado.

Modelo de mercado de 2 artículos

Se conocen las ecuaciones de un modelo para un mercado de 2 artículos. Las demandas y ofertas de cada artículo se han descripto del siguiente modo:

$$\begin{cases} Q_{d1} = 10 - 2P_1 + P_2 \\ Q_{s1} = -2 + 3P_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_{d2} = 15 + P_1 - P_2 \\ Q_{s2} = -1 + 2P_2 \end{cases}$$

Donde Q_{d1} es la demanda del producto 1, mientras que Q_{s1} es la oferta del artículo 1 y P_1 es el precio de ese mismo artículo (Análogamente para las variables Q_{d2}, Q_{s2} y P_2 en relación al artículo 2). En este caso, las cantidades están dadas en millones de unidades y los precios en miles de pesos.

Recordemos que el equilibrio se produce cuando en el mercado no hay excedentes ni faltantes de cada uno de los productos que se están considerando en el modelo planteado. Esto es; debemos hallar las cantidades tales que $Q_{d1} = Q_{s1}$ y $Q_{d2} = Q_{s2}$.

Es decir que para hallar los precios (P_1 y P_2) a los que deben venderse cada uno de los productos y las cantidades (Q_{s1} y Q_{s2}) que se deben fabricar de modo que la demanda se vea satisfecha y no haya productos sin venderse, podemos partir de las igualdades que generan el equilibrio:

$$\begin{array}{ll}
Q_{d1} = Q_{s1} & Q_{d2} = Q_{s2} \\
10 - 2P_1 + P_2 = -2 + 3P_1 & 15 + P_1 - P_2 = -1 + 2P_2 \\
P_2 = -2 - 10 + 3P_1 + 2P_1 & P_1 = -1 - 15 + 2P_2 + P_2 \\
P_2 = -12 + 5P_1 & P_1 = -16 + 3P_2
\end{array}$$

Ahora, si reemplazamos la expresión de P_2 de la ecuación de la izquierda en la ecuación de la derecha, obtenemos:

$$\begin{aligned}
&P_1 = -16 + 3(-12 + 5P_1) \\
&P_1 = -16 - 36 + 15P_1 \\
&P_1 - 15P_1 = -52 \\
&-14P_1 = -52 \\
&P_1 = \frac{-52}{-14} = \frac{26}{7} \approx 3,71
\end{aligned}$$

Con lo cual $P_2 = -12 + 5 \cdot \frac{26}{7} = \frac{46}{7} \approx 6,57$

De ese modo, conocemos los precios a los que se deben vender los productos para que el equilibrio de mercado se realice, y con estos valores podemos calcular las cantidades que deben producirse para tal fin:

$$Q_{s1} = -2 + 3 \cdot \frac{26}{7} = \frac{64}{7} \approx 9,14 \qquad Q_{s2} = -1 + 2 \cdot \frac{46}{7} = \frac{85}{7} \approx 12,14$$

Con lo que hemos calculado podemos concluir que, para que se produzca equilibrio en este mercado de dos artículos, del producto 1 deben producirse alrededor de 9 millones de unidades y venderse a \$3700 cada unidad aproximadamente, mientras que del producto 2 deben fabricarse cerca de 12 millones de unidades para ser vendidas a un valor aproximado de \$6500 cada uno.

<u>Modelo de mercado de *n* artículos</u>

En la mayoría de los casos que se estudian, suele haber más de dos artículos involucrados en los modelos que describen la oferta y la demanda de cierto producto. En esos modelos, el modo de resolución que lleva a conocer las cantidades y precios de equilibrio no son necesariamente sencillos.

Reflexionemos un poco sobre esto. Partamos pensando en cómo hemos resuelto el ejemplo anterior. En un mercado de dos artículos, se consideraron modelos que describan la oferta y la demanda de cada uno de ellos dando lugar a 4 ecuaciones que contienen 6 incógnitas. Al igualar las cantidades demandadas (Q_{di}) con las cantidades ofrecidas (Q_{si}) de cada uno de los artículos, pudimos reducir la cantidad de ecuaciones a sólo 2 ecuaciones con 2 incógnitas, lo cual nos permitió resolver el problema de equilibrio con métodos bastante sencillos (igualación y sustitución).

Pues bien, en el caso de modelos que contengan la información de oferta y demanda de una mayor cantidad de artículos (digamos n artículos), la cantidad de ecuaciones involucradas será sustancialmente mayor. Concretamente, si llamamos Q_{di} a cada una de las cantidades demandadas de los n artículos involucrados, Q_{si} a la cantidad de artículos ofrecidas por los fabricantes de cada producto y P_i a los precios a los que se ofrecen cada uno de los artículos, podemos entender que el modelo que describe la oferta y la demanda de un mercado de n artículos estará conformado por $2n$ ecuaciones (una ecuación por cada demanda y una ecuación por cada modelo de oferta) e involucrará a $3n$ incógnitas (las n demandas, las n ofertas y los n precios). Es decir que para cada producto i tendremos las siguientes ecuaciones.

$$\begin{cases} Q_{di} = c_i + a_1 \cdot P_1 + a_2 \cdot P_2 + \cdots + a_n \cdot P_n \\ Q_{si} = d_i + b_1 \cdot P_1 + \cdots + b_n \cdot P_n \end{cases}$$

donde $i = 1, \cdots, n$.

Si procedemos del mismo modo que como lo hicimos en el ejemplo anterior (esto es: igualando $Q_{di} = Q_{si}$ para construir las condiciones de equilibrio) podemos observar que quedarán n ecuaciones con n incógnitas (sólo quedarán P_i, con $i = 1, \cdots, n$, como incógnitas).

Pues bien, resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas no suele ser inmediato. Podemos proceder despejando una incógnita y reemplazándola en las demás ecuaciones para reducir en 1 la cantidad de ecuaciones e incógnitas y hacer este paso n veces hasta que sea posible calcular el valor de algunos de los precios. A continuación, deberíamos usar el valor hallado para calcular los demás precios (quizá lleve varios pasos) y finalmente calcular las cantidades de artículos que deben fabricarse para que el equilibrio de mercado sea posible.

Lo descripto en el párrafo anterior puede ser una manera de resolverlo, pero no podemos dejar de observar que se trata de un trabajo “artesanal” que podría demandar mucho tiempo. Sin embargo, hay un modo de atender este problema (el de resolver un sistema de muchas ecuaciones con muchas incógnitas) con herramientas de la matemática que resultan más convenientes.

Es así que nos será necesario trabajar con las conceptualizaciones en torno a la construcción de esas herramientas. Nos estamos refiriendo a las matrices y demás temas que están en el marco de lo que conocemos como *Álgebra de Matrices*. Precisamente éste es el camino que transitaremos en las próximas unidades, a fin de conocer cómo la matemática propone un método para resolver sistemas de n ecuaciones que posean m incógnitas.