2. ANÁLISIS COMBINATORIO

Lo que buscamos en este capítulo es construir el sentido de uno de los elementos básicos de las probabilidades: poder *contar casos* de distintas situaciones que pueden definirse correctamente. Por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire y escogemos cara (o cruz según deseen), suponiendo que las condiciones al tirar la moneda son totalmente aleatorias, no es extraño suponer que tenemos el 50 % de posibilidades de acertar.

¿Cómo? Pues sí, en ese ejercicio lúdico tenemos el 50 % a nuestro favor, y podemos dar una razón a esa afirmación. Por un lado, sabemos que al tirar la moneda hay dos posibilidades: que salga cara o que salga cruz (son los *casos totales* del fenómeno que queremos estudiar). Además, al elegir una de las opciones podemos decir que el hecho de que salga la que elegimos es un *caso favorable* (bueno, favorable para quienes elegimos cara, será desfavorable para quien apueste en contrario, pero que ellos hagan sus propias cuentas). Así, la chance que tenemos de acertar se puede medir de algún modo a través del cociente entre los *casos favorables* y los *casos totales* del fenómeno estudiado. Es decir, en la situación de la moneda al aire:

$$\frac{casos\ favorables}{casos\ totales} = \frac{1}{2}$$

De donde podrán acordar que ese número está asociado al 50 % enunciado antes. Es por eso que se vuelve importante saber contar esos casos.

Puede intentar pensar qué probabilidad hay de que salga determinado número cuando arroja un dado, o la suma de los números que salen al arrojar dos dados (o tres dados, o cuantos quieran). O cualquier otra situación que pueda definirse con claridad. Alcanza con contar el número de casos favorable y los casos totales.

Es ese el objetivo de este apartado: **desarrollar una herramienta para poder contar casos, eventos o sucesos que pudieran acontecer en diferentes situaciones**.

Claro, no siempre será tan claro como en la situación de la moneda al aire, o cuando tiramos uno o varios dados. Entonces, deberemos ir construyendo estrategias a medida que transitemos los ejemplos.

2.1. Principios Fundamentales

2.1.1. Principio fundamental de la multiplicación

Ejemplo 2.1 ¿Cuántos números de 2 cifras distintas se pueden formar con los dígitos $1,2,3$?

Observemos que de lo que se trata es construir números de dos cifras escogiendo entre los tres disponibles. Podríamos pensar, entonces, que al seleccionar un número para colocar en la decena, no lo podremos colocar en la unidad (pues de lo contrario no sería distintas las cifras).

Por ejemplo, si colocamos el 1 en la centena, tendremos 2 opciones para completar la unidad (el número 2 o el 3).

$$\text{Centena} = 1 \begin{cases} \text{Unidad} = 2 \\ \text{Unidad} = 3 \end{cases}$$

Con lo cual podemos concluir que con los dígitos disponibles es posible escribir dos números distintos que comiencen con 1.

Razonando del mismo modo, podemos deducir que tendremos dos números distintos que comiencen con 2 y la misma cantidad que comiencen con 3. Es decir que, en total, habrá 6 números diferentes de dos cifras distintas que pueden formarse con estos tres dígitos.

Este razonamiento podría sistematizarse si consideramos las decenas y las unidades como lugares a ser "rellenados" y tenemos en cuenta las posibilidades de las que disponemos para llevar a cabo esa tarea.

Es decir que tendremos 3 posibilidades para la primer posición y 2 posibilidades para la segunda posición. Dado que tendremos 2 posibilidades para escoger unidades por cada una de las elecciones que hagamos sobre la decena, interpretamos que la cantidad total de casos puede calcularse a través del producto.

$$\begin{array}{c}\text{Por cada Decena}\\ \text{Dos Unidades posibles}\end{array} \begin{cases} 1 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \\ 2 \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases} \\ 3 \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \end{cases}$$

Así, tendremos la posibilidad de construir $3 \cdot 2 = 6$ números distintos en las condiciones planteadas.

Ejemplo 2.2 Un alumno debe elegir 2 materias : 1 anual entre 3 posibles y 1 cuatrimestral entre 6 posibles ¿De cuántas maneras puede hacer su elección ?

Este problema es similar al anterior en tanto al elegir **una** opción de la materia anual (entre 3 posibles) se podrá combinar esa elección con 6 cuatrimestrales, lo que da un total de 6 pares de materias distintas que involucran a la materia anual seleccionada. Como hay 3 materias anuales disponibles, los pares de materias que pueden conformarse en total serán $3 \cdot 6 = 18$.

Definición 2.1 Un procedimiento designado como 1 puede hacerse de n_1 maneras, mientras que otro procedimiento designado como 2 puede hacerse de n_2 maneras. Entonces el procedimiento compuesto que consta del procedimiento 1 seguido del 2 se puede hacer de $n_1 \cdot n_2$ maneras.

A este razonamiento se lo conoce como *Principio Fundamental de la Multiplicación*.

Observación: Si este procedimiento compuesto se extiende a un número k de procedimientos, en los que el procedimiento 1 se puede hacer de n_1 maneras, el procedimiento 2 de n_2 maneras, y así hasta el procedimiento k que puede hacerse de n_k maneras; la cantidad total de maneras que puede hacerse el procedimiento 1, seguido del 2, luego el 3 y así hasta el procedimiento k, sería $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$.

2.1.2. Principio fundamental de la suma

Ejemplo 2.3 Un viaje se puede hacer en ómnibus o en tren . Hay 5 rutas para el ómnibus y 2 para el tren ¿ De cuántas maneras se puede hacer el viaje ?

En esta situación la particularidad es que la elección de una de las formas de viajar invalida cualquier otra de las maneras de realizar el viaje. Es decir que si escogemos una de las rutas de colectivo, ya no podremos elegir ninguna de las otras opciones. Vale decir que son situaciones que no pueden darse simultáneamente o una a continuación de la otra.

Piense usted mismo cuántas maneras distintas hay de completar el viaje. ¿Ya lo hizo?

Pues bien, lo central en el razonamiento es que se debe escoger una de las rutas en colectivo entre 5 posibles **o** uno de los 2 recorridos disponibles en tren. Eso nos indica que las opciones disponibles se suman, es decir que habrá $5 + 2 = 7$ maneras distintas de realizar el viaje.

Definición 2.2 Un procedimiento designado como 1 puede hacerse de n_1 maneras. Un procedimiento designado como 2 puede hacerse de n_2 maneras. Además no es posible que ambos se hagan juntos entonces el número de maneras de hacer el procedimiento 1 **o** el 2 es $n_1 + n_2$.

A este razonamiento lo conocemos como *Principio Fundamental de la Suma.*

En muchas ocasiones podremos pensar la cantidad de eventos posibles que nos propone un enunciado haciendo uso de estos dos Principios Fundamentales. Incluso, nos será útil combinarlos para poder llegar a nuestra respuesta.

Ejemplo 2.4 Con los números 1, 2, 3, 4, 5

a) ¿cuántos números de 3 cifras distintas pueden formarse?
Podemos pensar una respuesta a esta pregunta razonando a partir del Principio de la Multiplicación. Observemos que lo que se pide consiste en completar con números la posición de cada una de las cifras.
Si comenzamos por la centena, tenemos 5 posibilidades de elección (pues contamos con 5 números disponibles). Una vez seleccionado un número para la centena, tendremos 4 opciones disponibles para la decena (pues ya usamos un número en la centena y no se pueden repetir dado que se pide que sean “cifras distintas”). Así, para la unidad nos quedarán 3 números para optar.
Pensando en que completar las cifras son procedimientos que se hacen uno a continuación del otro, podemos completar nuestro razonamiento a través del Principio Fundamental de la Multiplicación y responder que se podrán formar $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ números de tres cifras distintas con los dígitos disponibles.

b) ¿cuántos de ellos son mayores de 400?
En este caso, podemos razonar similarmente, pero debemos discriminar de algún modo el hecho de que sólo nos interesa contar aquellos números que son mayores

que 400.
Podemos, entonces, separar nuestro razonamiento en dos casos:

I. Los números con un 4 en la centena.
II. Los números con un 5 en la centena.

Antes de seguir al párrafo siguiente, piense usted mismo cómo calcular cada uno de los casos.
Si ya lo pensó, acordemos en que para el primer caso tendremos $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ números posibles. Mientras que en el caso de números que comienzan con 5 habrá $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$ posibles.
Ahora bien, notemos que los casos I y II no pueden darse de manera simultánea. Es decir que los números que construimos empiezan con 4 o con 5 sin la posibilidad de que estas dos opciones se den a la vez. Entonces, estamos en el escenario que nos permite usar el Principio de la Suma. Así, la cantidad total de números de tres cifras distintas que pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5$ y que sean mayores que 400 será: $12 + 12 = 24$.

c) ¿cuántos de los números calculados en a) son impares ?
Le dejamos este razonamiento al lector.

2.2. Estrategias de Conteo

Razonando a partir del Principio Fundamental de la Multiplicación podemos tipificar algunas estrategias que nos permiten pensar de manera más sistemática a la hora de buscar el modo de contar eventos determinados. Estos escenarios específicos están caracterizados por determinadas condiciones en las que se enmarcan. Será importante que reconozcamos estas particularidades para poder estar seguros que podemos aplicar las fórmulas que se deducen a continuación.

2.2.1. Permutación Simple

Ejemplo 2.5 Supongamos que queremos ordenar parte de nuestra biblioteca, la cual dispone de 5 libros. ¿Cuántos ordenamientos diferentes podríamos tener?

Si nombramos con letras (de la A a la E) a los libros, podemos contar la cantidad de órdenes posibles que comienzan con el Libro A a partir del siguiente esquema:

$$
\text{Libro A}\begin{cases}
\text{Libro B}\begin{cases}
\text{Libro C}\begin{cases}\text{Libro D —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro D}\end{cases}\\
\text{Libro D}\begin{cases}\text{Libro C —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro C}\end{cases}\\
\text{Libro E}\begin{cases}\text{Libro C —>Libro D}\\ \text{Libro D —>Libro C}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{Libro C}\begin{cases}
\text{Libro B}\begin{cases}\text{Libro D —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro D}\end{cases}\\
\text{Libro D}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro B}\end{cases}\\
\text{Libro E}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro D}\\ \text{Libro D —>Libro B}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{Libro D}\begin{cases}
\text{Libro B}\begin{cases}\text{Libro C —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro C}\end{cases}\\
\text{Libro C}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro B}\end{cases}\\
\text{Libro E}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro C}\\ \text{Libro C —>Libro B}\end{cases}
\end{cases}\\
\text{Libro E}\begin{cases}
\text{Libro B}\begin{cases}\text{Libro C —>Libro D}\\ \text{Libro D —>Libro C}\end{cases}\\
\text{Libro C}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro E}\\ \text{Libro E —>Libro B}\end{cases}\\
\text{Libro D}\begin{cases}\text{Libro B —>Libro C}\\ \text{Libro C —>Libro B}\end{cases}
\end{cases}
\end{cases}
$$

Es decir que tenemos 24 maneras distintas de ordenar los libros si ponemos delante el Libro A. Podríamos hacer esquemas similares para contar la cantidad de órdenes que se obtienen comenzando con el Libro B o con el Libro C o con el el Libro D y sumar todas esas cantidades, con lo cual estaríamos usando el Principio de la Suma.

Sin embargo, puede resultar más cómodo hacer uso del Principio de la Multiplicación, razonar como en los ejemplos anteriores y pensar que hay 5 lugares para ser completados

$$\underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}\ \ \underline{\quad}$$

para los cuales tenemos 5 posibilidades para la primer posición, 4 para la segunda, 3 para la tercera, 2 para la cuarta y 1 para la última. Así que la cantidad de órdenes distintos será:

$$\underline{5}\cdot\underline{4}\cdot\underline{3}\cdot\underline{2}\cdot\underline{1}=120$$

Definición 2.3 Una *permutación simple* es una manera de contar la cantidad de ordenamientos distintos que pueden realizarse con n objetos diferentes.

Se simboliza con P_n y se calcula mediante $P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$

Para poder representar con mayor comodidad este cálculo (y otros que desarrollaremos más adelante) nos será útil introducir la idea de *factorial de un número natural.*

Definición 2.4 Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos el *factorial de n* como la función que se anota $n!$ y se determina a través de lo siguiente:

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Observaciones:

1. Por la definición se tiene que $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$
2. Por la obervación anterior podemos concluir que $P_n = n!$

Ejemplo 2.6 ¿Cuántos números de 4 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos $1, 2, 3$ y 4 ?

Como se trata de ordenar de manera consecutiva 4 objetos (en este caso números), podemos usar una permutación simple para dar respuesta a esta pregunta. Es decir que la cantidad de números sobre los que se pregunta será $P_4 = 4! = 24$

2.2.2. Variaciones simples

En el ejemplo 2.4, inciso a), calculamos la cantidad de números de tres cifras distintas que pueden formarse seleccionando entre cinco dígitos disponibles. En este escenario se puede reconocer que no se usan todos los dígitos disponibles y que dos números son distintos si tienen algún dígito distinto o bien si cambia el orden en que se encuentran. Este es un caso típico de *variación simple.*

Definición 2.5 Dados n objetos se llama *variaciones simples de n objetos tomados de a k* a los distintos conjuntos que se pueden formar con los mismos de modo tal que

a) En cada conjunto existan k elementos distintos.
b) Dos conjuntos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de los mismos.

Se simboliza a través de $V_{n,k}$ y se calcula como $V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$

Observaciones:

1. En el caso de las variaciones simples se tiene que $k < n$. Pues de n objetos disponibles para ordenar sólo se seleccionan k
2. Notar que $V_{n,k} \cdot (n-k)! = n!$. Pues si agregamos todos los factores involucrados en $(n-k)!$ habremos completado todos los factores necesarios para escribir el *factorial de n*.
   Así, depejando de la igualdad en esta observación, se tiene que: $V_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo 2.7 Calcular

a) $V_{7,3} = \dfrac{7!}{(7-3)!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
b) $V_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
c) $V_{5,2} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20$

Ejemplo 2.8 Podemos pensar el ejemplo 2.4 utilizando variaciones simples, así usando los números $1, 2, 3, 4$ y 5 se pueden construir $V_{5,3} = 60$ números de 3 cifras distintas. Además, de ellos, $2 \cdot V_{4,2} = 2 \cdot 12 = 24$ son mayores de 400. Mientras que $3 \cdot V_{4,2} = 3 \cdot 12 = 36$ son impares.

2.2.3. Permutaciones con elementos indistinguibles

Ejemplo 2.9 Pensemos en el caso en que hay que mezclar, ordenar, elementos que están repetidos o son indistinguibles. Por ejemplo ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los todos los dígitos del número 432252 ?

Observemos que hay elementos que son indistinguibles entre sí. Concretamente el número 2 se repite 3 veces. Si realizamos permutaciones entre ellos sin alterar los demás estaremos reordenando los elementos sin que sea notable la diferencia entre estos. Así, obtendremos números idénticos a pesar de que estemos cambiando el orden de los elementos que lo componen.

Para ilustrar lo que estamos afirmando, identifiquemos los número 2 con diferentes colores: 432252. Si cambiamos el orden que aparecen los números 2 no habrá modificación en el número que se conforma. Esto es, 432252, 432252, 432252, 432252, 432252 son todos el mismo número a pesar de que hemos cambiado de posición los 2. Notemos que la cantidad de veces que se repite el mismo número es exactamente la cantidad de permutaciones que se pueden hacer con los elementos indistinguibles. Ya sabemos que la cantidad de permutaciones de 3 elementos se puede calcular como $P_3 = 3! = 6$.

Razonando así, podemos deducir que si consideramos el problema como una permutación simple, estaremos contando casos repetidos. En efecto, contaremos 6 veces cada número distinto. Por ello, para “cancelar” lo que estaríamos contando de más podemos dividir por la cantidad de repeticiones de cada caso.

Entonces, en el ejemplo que nos ocupa ahora, podemos calcular la cantidad total de números distintos que pueden construirse como: $\dfrac{P_6}{P_3} = \dfrac{6!}{3!} = 120$.

Ejemplo 2.10 ¿Cuántos anagramas distintos pueden construirse con las letras de la palabra BANANAS?

Observemos que, en este caso, hay 7 elementos para permutar, dos de los cuales son indistinguibles (tenemos tres letras A y dos letras N). Es decir que la palabra BANANAS aparecerá $P_3 = 6$ veces por las permutaciones entre las letras A y $P_2 = 2$ veces por las permutaciones de la letra N, lo cual hace un total de $P_3 \cdot P_2 = 12$ veces que se repitirá la palabra BANANAS al permutar todas las letras si las consideráramos distintas. Y lo mismo ocurrirá con cada anagrama distinto que pueda conformarse.

Por tanto, para “cancelar” ese cálculo sobredimensionado, dividimos por la cantidad de repeticiones que se generan por causa de los elementos indistinguibles, con lo cual la cantidad de anagramas distintos será: $\dfrac{P_7}{P_3 \cdot P_2} = \dfrac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

Definición 2.6 Dados n elementos entre los que hay n_1 iguales entre sí , n_2 iguales entre sí y distintos de los anteriores , ... , n_k iguales entre sí y distintos de los anteriores , de modo que $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Se llama *permutación de estos n elementos* de clase n_1,n_2, $\cdots$,n$_k$ a cada una de las ordenaciones de dichos elementos.

Se simboliza $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ y se calcula del siguiente modo: $P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$

2.2.4. Variaciones con Repetición

Ejemplo 2.11 Consideremos el caso en que queremos formar una clave alfabética de 5 caracteres usando letras escogidas entre las de la palabra INDIRECTA.

Observemos que en esa palabra hay 8 letras distintas y supongamos que podemos repetir una letra cuantas veces querramos hacerlo. El problema se reduce a completar los 5 espacios vacíos utilizando sólo letras que sean parte de la palabra indicada, es decir que podemos pensar en términos del Principio de la Multiplicación considerando las opciones que hay para "rellenar" cada espacio.

¿Puede usted mismo pensar en el problema?

Definición 2.7 Dados n objetos se llaman *variaciones con repetición de esos n objetos tomados de a k* a los distintos conjuntos que se pueden formar con los mismos de modo tal que

a) En cada conjunto existan k elementos
b) Dos conjuntos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de los mismos

Lo simbolizamos con $V_{n,k}^*$ y su cálculo está dado por $V_{n,k}^* = n^k$

Observación: k puede ser mayor que n, dado que se puede repetir cada elemento disponible cuantas veces se requiera.

2.2.5. Combinaciones Simples

Hay situaciones en que una mezcla de los mismos elementos no arroja resultados distintos. Tal es el caso, entre otros, de los sorteos del Quini o el Bingo. En estos juegos quien apuesta cuenta con una cantidad de números con los que juega y no importa el orden en que van saliendo esos números, sino que el ganador es aquel que posea los que han sido sorteados independientemente de si aparecieron en el orden en que figuran en su boleta de apuesta. En estas situaciones debemos tener en cuenta esta particularidad.

Ejemplo 2.12 Un grupo de 20 personas desea organizar un evento y para tal fin se ha decidido conformar una comisión que consta de 3 integrantes. Se quiere conocer qué cantidad de comisiones distintas pueden conformarse.

Si consideramos el caso como una variación simple, estaremos contando varias veces el mismo grupo de personas. Pues en una variación simple, si cambia el orden de los elementos se considera un evento o suceso diferente. En el caso de la comisión es indistinto si elegimos primero a Mirta, luego a Carlos y por último a Ema que cualquier otro orden en que escojamos a los integrantes de la comisión. En definitiva la comisión estará integrada por las mismas tres personas (Mirta, Ema y Carlos).

Es decir que al contarlo como variación simple estaremos considerando muchos grupos de manera repetida. ¿Qué cantidad de agrupamientos se repite por cada terna de personas? Pues bien, según lo hemos discutido habrá P_3 maneras distintas de ordenar 3 elementos y por lo tanto cada terna de personas será contada $P_3 = 6$ veces al hacer el cálculo a través de una variación simple. Es decir que debemos "cancelar" de algún modo esta sobredimensión que hemos cometido.

Así, la cantidad de comisiones distintas será: $\dfrac{V_{20,3}}{P_3} = \dfrac{\frac{20!}{(20-3)!}}{3!} = 1140$

Definición 2.8 Dados n objetos se llaman *combinaciones simples*, de esos n objetos tomados de a k, a los distintos conjuntos que se pueden formar con los mismos de modo tal que

a) En cada conjunto existan k elementos distintos.
b) Dos conjuntos son distintos si difieren en alguno de los k elementos que lo forman (no importa el orden de los mismos)

Se simboliza con $C_{n,k}$ y se calcula así $C_{n,k} = \dfrac{V_{n,k}}{P_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Observación: $k < n$, pues entre los n objetos disponibles se escogen k.

Ejemplo 2.13 En un grupo de personas en el que hay 13 hombres y 10 mujeres ¿ Cuántos comités de 6 personas se pueden formar ?

a) Sin restricciones.
Se trata de elegir 6 personas entre 23 posibles.
Como lo hicimos antes, podemos calcular la cantidad de grupos posibles como $C_{23,6} = \dfrac{23!}{(23-6)!\cdot 6!} = \dfrac{23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 19\cdot 18}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 4389$
b) Con 3 hombres y 3 mujeres.
Debemos escoger 3 hombres entre 13 posibles ($C_{13,3}$) y 3 mujeres entre 10 ($C_{10,3}$). Luego, por cada elección de los representantes hombres tendremos la posibilidad de conformar $C_{10,3}$ comisiones distintas, pues esa es la cantidad de grupos de 3 mujeres que pueden seleccionarse entre 10 candidatas. Así, podemos usar el Principio de la Multiplicación y dar la respuesta a lo planteado. ¿Se anima a completar el cálculo?
c) A lo sumo 2 hombres.
Sugerimos dividir el ejercicio en tres casos (que no pueden darse simultáneamente). El caso en que haya 6 mujeres y ningún hombre, el caso de 5 mujeres y 1 hombre y el caso de 4 mujer y 2 hombres.
Por favor, complete el cálculo de cada caso y utilice el Principio de la Suma para dar la respuesta.

Número Combinatorio

Definición 2.9 Es usual llamar *número combinatorio* al número que se obtiene al calcular las combinaciones simples de n elementos tomados de a k.

La manera habitual de anotarlo es $\dbinom{n}{k}$.

Es decir que $\dbinom{n}{k} = C_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$

Propiedades:

Puede demostrarse (inténtelo el lector a partir de la definición) que el número combinatorio cumple las siguientes propiedades

1. $\dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$
2. $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$

3. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$