1. CONJUNTOS y RELACIONES

En este capítulo introduciremos las ideas básicas de *conjuntos*. Nos será útil para trabajar más adelante con el concepto de *relaciones*, pero sobretodo será importante que pongamos el foco en la escritura formal que utiliza la matemática para indicar de manera sintética los objetos que están involucrados en los siguientes capítulos.

1.1. Conjuntos

Introduciremos una definición del concepto de conjuntos que bien podría ser construida de manera intuitiva. Es decir que nos referiremos a los conjuntos de manera amplia. Sin embargo, lo que nos interesará es utilizar esta idea en el contexto de la matemática. Así que, de a poco, iremos virando nuestra mirada a la disciplina que nos interesa.

Definición 1.1 Se llama *conjunto* a toda agrupación, colección o reunión de individuos (cosas, animales, personas o números) bien definidos que cumplen una propiedad determinada.

A los objetos del conjunto se los denomina *elementos*.

Ejemplo 1.1 Los siguientes son algunos ejemplos de conjunto:

- La colección de letras de la palabra "murciélago".
- El conjunto formado por los dígitos del número 345923238.
- La agrupación de números naturales menores que 10
- La agrupación de números primos entre 0 y 20.

Es usual en Matemática usar una simbología específica para acordar el modo en que simbolizamos, denotamos, los objetos matemáticos a los que nos referimos a través de las definiciones.

En el caso de los conjuntos, se *denotan* con letras mayúsculas (A, B, C, $\ldots$) y sus elementos con letras minúsculas (a, b, x, y, $\ldots$).

Para **describir un conjunto** debemos escribirlo entre llaves, nombrando a sus elementos dentro separándolos por comas o dando las indicaciones que caracterizan a los elementos del conjunto.

Estudiaremos a continuación dos maneras posibles para determinar o describir un conjunto, es decir dar las pistas o datos necesarios para que el conjunto pueda reconocerse con claridad.

1.1.1. Determinación de conjuntos por extensión

Definición 1.2 Un conjunto se determina *por extensión* cuando se enumeran o se nombran cada uno de sus elementos.

Cuando el conjunto es finito sus elementos se escriben separados por comas.

Cuando el conjunto es infinito se escriben algunos elementos y se ponen puntos suspensivos.

Ejemplo 1.2 Volvamos a referirnos a los conjuntos del ejemplo 1.1, en este caso en lugar de describir el conjunto con palabras lo haremos por extensión, haciendo uso de la simbología usual en matemática:

- $B = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$
- $C = \{3, 4, 5, 9, 2, 8\}$. Observar que no es necesario repetir elementos.
- $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $E = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

1.1.2. Determinación de conjuntos por comprensión

Definición 1.3 Un conjunto se determina *por comprensión* enunciando la propiedad o cualidad que distingue a los elementos que lo componen.

Es habitual usar letras minúsculas para nombrar o denotar a los elementos de un conjunto. Así, podemos describir a un conjunto de la siguiente manera:

$$\{x/x \text{ cumple tal propiedad}\}$$

que se lee: el conjunto de las x tal que x cumple tal propiedad.

Ejemplo 1.3 Otar vez nos referiremos al ejercicio 1.1. Esta vez describiremos por comprensión cada conjunto.

- $B = \{x\,/\,x$ es una letra de la palabra “murciélago”$\}$
- $C = \{x\,/\,x$ es un dígito del número 345923238$\}$
- $D = \{x\,/\,x$ es un número natural menor que 10$\}$
- $E = \{x\,/\,x$ es número primo entre 0 y 20$\}$

1.2. Conjuntos y elementos. (¿Estar incluido o pertenecer?)

Nos ocuparemos, en este apartado, de tres conceptos principales en lo que refiere al lenguaje de conjuntos, su modo de anotar algunas ideas con simbología matemática y que, en definitiva, encierran gran parte de la lógica que se despliega en las maneras usuales del pensamiento matemático.

Nos referimos a las maneras que tenemos para indicar que cierto objeto (en esta asignatura nos centraremos en objetos matemáticos) es elemento de un conjunto, las conceptualizaciones para decidir si un conjunto está incluido (o no) en otro y, consecuentemente, la idea que nos permitirá indicar si dos conjuntos son iguales.

1.2.1. Relación de pertenencia

Definición 1.4 Sea A un conjunto cualquiera. Un individuo de ese conjunto es un *elemento de* A y en ese caso diremos que *pertenece a* A.

Si representamos con x al elemento de A, para indicar que pertenece al conjunto A lo simbolizamos con $x \in A$.

Cuando $x \in A$ es habitual decir que x *está en* A. En cambio, si un objeto c *no está en el conjunto* A, anotamos $c \notin A$.

Ejemplo 1.4 Si pensamos en el conjunto $B = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$, podemos observar que $m \in B$ y $b \notin B$, por nombrar algunos ejemplos.

En ocasiones es importante tener en cuenta el *Universo* en el cual está definido el conjunto, de modo tal que no sea necesario aclarar a qué categoría de elementos nos estamos refiriendo cuando definimos la propiedad que describe a los elementos del conjunto.

Ejemplo 1.5 En un ejemplo anterior definimos un conjunto D de la siguiente manera:

$$D = \{x \,/\, x \text{ es un número natural menor que } 10\}$$

Podríamos aclarar que el universo sobre el que nos interesa referirnos es el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y no será necesario indicarlo dentro de la propiedad que define a los elementos. Así, podríamos escribir al conjunto anterior como:

$$D = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 10\}$$

Observar, por un lado, que esta escritura nos permite usar notaciones matemáticas para describir la propiedad que define a los elementos del conjunto, de esa manera logramos ser más sintéticos.

Por otra parte, notar la importancia del *Universo* definido, pues si cambiamos de universo estaremos habilitando que haya otros elementos en el conjunto, y por tanto estaremos definiendo un conjunto diferente.

Para ilustrar lo que afirmamos en el párrafo anterior, considerar el conjunto

$$H = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 10\}$$

La condición que define a los elementos de H se escribe de manera idéntica que en el conjunto D, sin embargo como el universo es $\mathbb{R}$ hay muchos más elementos que los 9 números que están en D. De hecho hay infinitos elementos en H.

Ya conocen un modo de expresar este conjunto a través de la *notación de intervalos*. Es decir que $H = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < 10\} = (-\infty, 10)$

1.2.2. Relación de Inclusión de conjuntos

Definición 1.5 Dados dos conjuntos que llamaremos A y B, diremos que A *está incluido en* B si cada elemento de A es también elemento de B.

Lo anotamos $A \subset B$.

Simbólicamente:

$$A \subset B \longleftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B$$

que se lee: "A está contenido en B cuando para cada x en A, se cumple que x está en B."

Observaciones:

- La relación de inclusión indica que el conjunto A *es subconjunto del conjunto* B.
- Cuando escribimos $A \subset B$ puede leerse: A es subconjunto de B, o A está incluido en B, o A está contenido en B, o B incluye a A, pues cada una de estas formas de nombrarlas son similares a sinónimos.
- Si al menos un elemento del conjunto A no es elemento del conjunto B, decimos que A no está incluído en B y anotamos $A \not\subset B$.

Ejemplo 1.6 Consideremos los conjuntos

$A = \{x \,/\, x$ es una letra de la palabra murciélago$\} = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$

$B = \{x \,/\, x$ es una letra de la palabra mula$\} = \{m, u, l, a\}$

Observemos que $B \subset A$, pues cada letra de la palabra *mula* es también una letra de la palabra *murciélago*. Sin embargo $A \not\subset B$ pues hay al menos una letra en la palabra *murciélago* que no figura en la palabra *mula*.

1.2.3. Relación de igualdad de conjuntos

Definición 1.6 Dados dos conjuntos A y B, decimos que son iguales si se cumple que cada uno de los elementos de A es también elemento de B y viceversa, cada elemento de B es también elemento de A.

Es denotada como $A = B$.

Simbólicamente decimos:

$$A = B \longleftrightarrow (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \Longrightarrow x \in A)$$

que se lee "$A = B$ cuando todo elemento de A es elemento de B y también cada elemento de B está en A".

Observación:

Notar que la definición de igualdad entre conjuntos involucra la definición de inclusión. En efecto, el hecho de que todo elemento de A sea elemento de B significa que $A \subset B$ y como, a su vez, todo elemento de B es elemento de A se tiene que $B \subset A$. Esto es, afirmar que $A = B$ es equivalente a decir que se cumple la *doble inclusión* entre A y B.

Simbólicamente:

$$A = B \longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

1.3. Operaciones entre conjuntos

Es usual, en matemática, que cada vez que se define un objeto matemático se busque la posibilidad de construir operaciones entre estos objetos. El caso de los conjuntos no es la excepción y definiremos a continuación tres operaciones entre conjuntos que nos interesan transitar, se trata de la *intersección*, *unión* y *producto cartesiano* entre conjuntos.

La intención es contar con herramientas de escritura matemática para representar, enunciar o describir conjuntos que se obtienen al resolver problemas tanto como construir un andamiaje formal sobre el cual definir nuevos conceptos.

1.3.1. Intersección de conjuntos

Definición 1.7 Dados dos conjuntos A y B, definimos la *intersección* entre A y B como el conjunto formado por todos los elementos comunes de ambos conjuntos (sin repetir elementos), y se denota $A \cap B$, es decir:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

Ejemplo 1.7 Siendo : $D = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ y $E = \{1,2,3,5,7,11,13,17,19\}$.
Su intersección resulta: $D \cap E = \{1,2,3,5,7\}$

1.3.2. Unión de conjuntos

Definición 1.8 Dados A y B dos conjuntos cualesquiera, se define la *unión entre* A y B como el conjunto formado por los elementos que están en A o en B (donde se está considerando un "o" inclusivo, es decir, los elementos comunes de ambos conjuntos están también en la unión). Se denota $A \cup B$, es decir:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 1.8 Siendo : $A = \{3,4,5,9,2,8,0\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,9\}$.
La unión resulta:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,9,8,0\}$$

1.3.3. Producto cartesiano entre conjuntos

Definición 1.9 Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, a partir de ellos formamos un nuevo conjunto que llamamos *producto cartesiano* de A y B (en ese orden), lo indicamos $A \times B$, y sus elementos son todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y su segunda componente es un elemento de B.
Simbólicamente:

$$A \times B = \{(x,y) \,/\, x \in A \wedge y \in B\}$$

Consecuencias:

$$(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$$

$$(x,y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$$

Ejemplo 1.9 Dados $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{1,2\}$, el producto cartesiano $A \times B$ resulta:

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

Note que A tiene 3 elementos, B tiene 2 elementos y $A \times B$ tiene $3 \cdot 2 = 6$ elementos.

Observación:
El producto cartesiano no es, en general, conmutativo:

- Si $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ y $A \neq B$, entonces $A \times B \neq B \times A$.
  Para convenserse de esta afirmación, observar que si x es distinto de y, entonces:
  $$(x,y) \neq (y,x)$$
- En cambio:
  $$A \times B = B \times A \Longleftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

Ejemplo 1.10 Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x < 4\}$ y $B = \{2,3\}$; determinar $A \times B$ y $B \times A$.
Por un lado:
$$A \times B = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$
Mientras que por otra parte:
$$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

Ejemplo 1.11 Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R}/2 \leq x \leq 4\}$; determinar $A \times B$ y $B \times A$.
Solución:
$$A \times B = \{(x,y) \,/\, -1 \leq x \leq 2 \wedge 2 \leq y \leq 4\}$$
$$B \times A = \{(x,y) \,/\, 2 \leq x \leq 4 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$$

Observación:
Dado un conjunto A se suele designar con el símbolo A^2 al producto cartesiano $A \times A$.

Ejemplo 1.12 Si consideramos $A = \{a,b,c\}$
$$A^2 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\}$$

1.3.4. Representación gráfica de un producto cartesiano

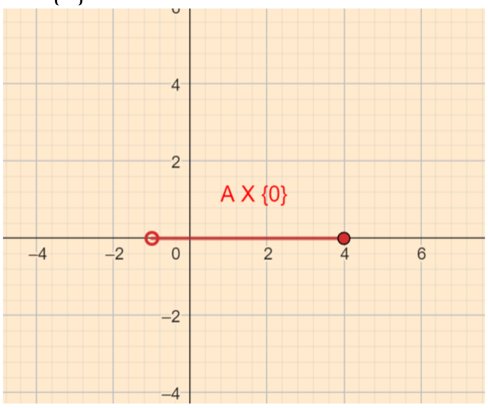
La representación gráfica del producto cartesiano puede darse a través de la representación del diagrama sagital (diagrama de flechas), mediante tabla, o como puntos del plano mediante un gráfico cartesiano.

Ejemplo 1.13 Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 < x \leq 4\}$ y $B = [2,4]$.
Represente en el plano cartesiano los siguientes productos cartesianos:

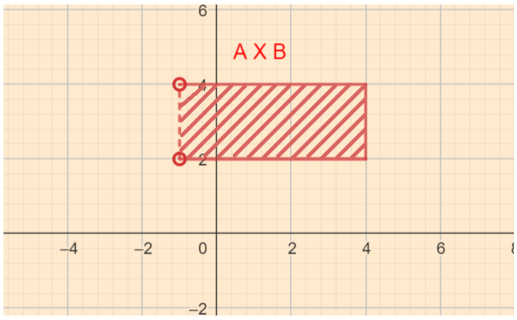
i) $A \times \{0\}$
ii) $A \times B$
iii) $\{1\} \times B$
iv) $B \times A$

Para representar gráficamente en el plano cartesiano, utilizamos el eje horizontal para representar al primer conjunto en el producto cartesiano, mientras que el segundo conjunto lo representamos en el eje vertical. De ese modo, queda determinada una región del plano que contiene a los pares ordenados que se pueden construir con primera coordenada en el primer conjunto y segunda coordenada perteneciente al segundo conjunto que involucra al producto cartesiano.

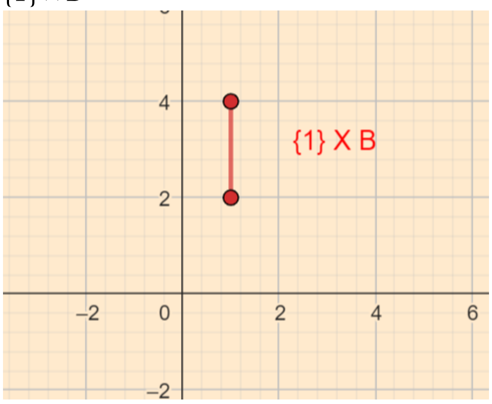
i) $A \times \{0\}$



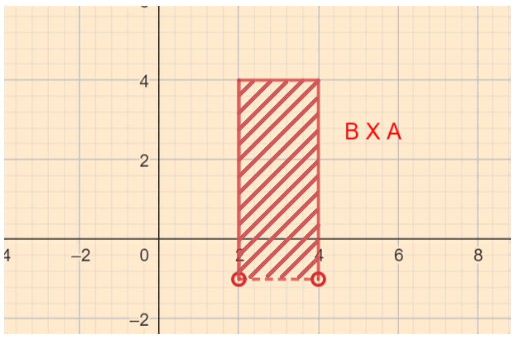
ii) $A \times B$



iii) $\{1\} \times B$



iv) $B \times A$



Observar, de la respresentaciones gráficas que hemos realizado, que se vuelve evidente que el producto cartesiano no es conmutativo. Es decir que, en general[1], $A \times B \neq B \times A$.

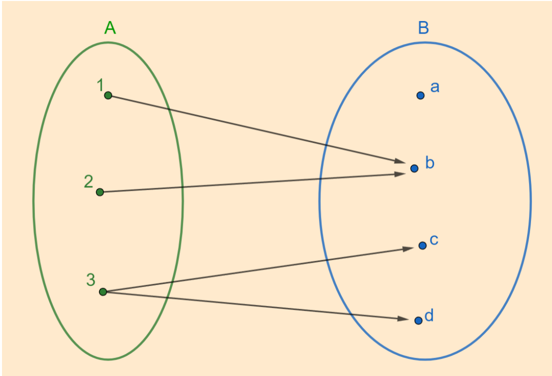
1.4. Relaciones

Una *relación* matemática es un vínculo o una correspondencia que existe entre dos conjuntos (a cada elemento del primer conjunto le puede corresponder al menos un elemento del segundo conjunto). Las aplicaciones de las relaciones matemáticas trascienden los límites de la ciencia, ya que en nuestra vida cotidiana solemos hacer uso de sus principios, estableciendo relaciones entre diferentes conjuntos para organizarnos y desarrollar distintas actividades (cada artículo que adquirimos está relacionado con su precio, a cada ser humano le corresponde un número de documento, cada vivienda está vinculada a una numeración, etc.).

[1] Hemos observado previamente que $A \times B = B \times A$ sólo en los casos que alguno de los conjuntos sea vacío o bien cuando ambos conjuntos son iguales.

Ejemplo 1.14 Consideremos los conjuntos $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$

El siguiente diagrama nos sugiere la idea de que a algunos elementos de A se les ha asignado elementos de B, estableciéndose una relación que vincula elementos de A con elementos de B.



Las flechas van de A a B (hay un conjunto de partida de la relación y un conjunto de llegada).

Como hay una flecha de 1 a b, entendemos que b es *el correspondiente* de 1, o sea que, 1 *está relacionado* con b.

El elemento 3 está relacionado con dos elementos del conjunto B (c y d), el elemento a del conjunto B no es correspondiente de ninguno de los elementos de A.

Para enunciar una relación basta especificar los pares ordenados que pertenecen a la misma. De esta manera, la misma relación entre A y B establecida a través del diagrama, puede expresarse por medio de un conjunto de pares ordenados : $\{(1,b),(2,b),(3,c),(3,d)\}$

Definición 1.10 Una *relación* $\mathcal{R}$ entre un conjunto A y un conjunto B es un conjunto de pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y su segunda componente es un elemento de B.

Observaciones:

- Una relación de A en B es entonces cualquier subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
- Si $\mathcal{R}$ es una relación entre A y B, la expresión $x\mathcal{R}y$ significa que $(x,y) \in \mathcal{R}$, o sea, que x está relacionado con y por la relación $\mathcal{R}$.
- Si llamamos $\mathcal{R}$ a la relación, simbólicamente escribimos la definición del siguiente modo:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in A \times B \,/\, x\mathcal{R}y\} \subset A \times B$$

Definición 1.11 Dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B, al conjunto A se lo llama *conjunto de partida* de la relación, y al conjunto B, *conjunto de llegada*.

Se llama *dominio de* $\mathcal{R}$ o *conjunto de definición de* $\mathcal{R}$, al conjunto de los elementos de A que son primera componente de algún par ordenado de $\mathcal{R}$

Se llama *imagen de* $\mathcal{R}$, o *conjunto de valores de* $\mathcal{R}$, al conjunto de elementos de B que son segunda componente de algún par ordenado de $\mathcal{R}$.

Es decir, simbólicamente podemos expresar:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{x \in A \,/\, (x,y) \in \mathcal{R}, \text{ para algún } y \in B\}$$

$$Im(\mathcal{R}) = \{y \in B \,/\, (x,y) \in \mathcal{R}, \text{ para algún } x \in A\}$$

Ejemplo 1.15 Si $A = \{2,3\}$ y $B = \{1,4,5\}$, encontrar tres relaciones definidas de A en B y darlas por extensión.

El producto cartesiano de $A \times B$ está conformado por las siguientes parejas o pares ordenados: $A \times B = \{(2,1),(2,4),(2,5),(3,1),(3,4),(3,5)\}$

Para definir una relación de A en B alcanza con seleccionar cualquier subconjunto de $A \times B$, con lo cual cada uno de los siguientes conjuntos corresponde a relaciones definidas de A en B:

$\mathcal{R}_1 = \{(2,1),(2,4)\}$. En este caso, $Dom(\mathcal{R}_1) = \{2\}$ y $Im(\mathcal{R}_1) = \{1,4\}$.

$\mathcal{R}_2 = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$. Con lo que $Dom(\mathcal{R}_2) = \{2,3\}$ y $Im(\mathcal{R}_2) = \{4,5\}$.

$\mathcal{R}_3 = \{(2,4),(3,5)\}$. Así, $Dom(\mathcal{R}_3) = \{2,3\}$ y $Im(\mathcal{R}_3) = \{4,5\}$.

Invitamos al lector a definir otras relaciones posibles entre A y B.

Ejemplo 1.16 Dados los conjuntos $C = \{1,-3\}$ y $D = \{2,3,6\}$, encontrar todos los pares ordenados (x,y) que satisfagan la relación: $\mathcal{R} = \{(x,y)/x+y=3\}$

Observemos que el producto cartesiano $C \times D = \{(1,2),(1,3),(1,6),(-3,2),(-3,3),(-3,6)\}$.

De este conjunto debemos seleccionar sólo aquellos pares ordenados que suman 3. Es decir que los pares ordenados que satisfacen la definición de la relación son:

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(-3,6)\}$$

Ejemplo 1.17 Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{4,5,6,7,8\}$ y $\mathcal{R}$ la relación definida de A en B determinada por la regla "*y es el doble de x*" o "*$y = 2x$*", encontrar dominio e imagen de la relación.

$A \times B$ tiene en total 20 pares ordenados, pero aquellos que satisfacen la definición de la relación $\mathcal{R}$ son sólo 3.

Concretamente: $\mathcal{R} = \{(2,4),(3,6),(4,8)\}$

Así, el dominio y la imagen de la relación son: $Dom(\mathcal{R}) = \{2,3,4\}$; $Im(\mathcal{R}) = \{4,6,8\}$

Ejemplo 1.18 Sean $A = \{2,3,4\}$ y $B = \{3,4,5,6,7\}$

Consideremos $\mathcal{R}$ la relación definida de A en B por:

$$(x,y) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow x \text{ divide a } y \text{ (es decir que } y \text{ es múltiplo de } x).$$

Definir $\mathcal{R}$ por extensión y encontrar dominio e imagen de la relación.

Una posibilidad para responder la consigna es pensar en cada elemento de A y observar si hay múltiplios de él en el conjunto B. Por ejemplo, si tomamos el elemento $2 \in A$, observamos que de los elementos de B sus múltiplos son 4 y 6 (pues $4 = 2 \cdot 2$ y $6 = 2 \cdot 3$). Así, los pares $(2,4)$ y $(2,6)$ estarán en $\mathcal{R}$. Pensando similarmente con los demás elementos de A llegamos a que:

$$\mathcal{R} = \{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\}$$

Y en ese caso:

$$Dom(\mathcal{R}) = \{2,3,4\}$$
$$Im(\mathcal{R}) = \{3,4,6\}$$

1.4.1. Relaciones definidas en un conjunto

Definición 1.12 Cuando los conjuntos de partida y de llegada de una relación $\mathcal{R}$ son el mismo conjunto A, decimos que $\mathcal{R}$ es una *relación definida en A*, o, simplemente, *una relación en A*.

Una relación $\mathcal{R}$ en A es entonces un subconjunto de $A^2 = AxA$.

Ejemplo 1.19 Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación definida en A por: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x < y$
Definir $\mathcal{R}$ por extensión y encontrar dominio e imagen de la relación.

$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$
$Dom(\mathcal{R}) = \{1,2,3,4\}$, $Im(\mathcal{R}) = \{2,3,4,5\}$.

Propiedades de las Relaciones definidas en un conjunto
Sea A un conjunto y $\mathcal{R}$ una relación definida en A. Decimos que $\mathcal{R}$ es:

- ***Reflexiva*** si para todo $x \in A$, el par $(x,x) \in \mathcal{R}$.
  Simbólicamente podemos escribir:

$$\forall x, [x \in A \Rightarrow (x,x) \in \mathcal{R}]$$

  y lo leemos, *para todo x, si es elemento de A, entonces $x\mathcal{R}x$*
- ***Simétrica*** si siempre que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$, el par (y,x) también pertenece a $\mathcal{R}$.
  Simbólicamente:

$$\forall x, \forall y, [(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}]$$

- ***Antisimétrica*** si no existen elementos diferentes x e y en A tales que $(x,y) \in \mathcal{R}$ y también $(y,x) \in \mathcal{R}$.
  Simbólicamente:

$$\forall x, \forall y, x \neq y[(x,y) \notin \mathcal{R} \vee (y,x) \notin \mathcal{R}]$$

- ***Transitiva*** si siempre que un par $(x,y) \in \mathcal{R}$ y un par $(y,z) \in \mathcal{R}$ entonces también el par $(x,z) \in \mathcal{R}$.
  Simbólicamente:

$$\forall x, \forall y, \forall z, [(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}]$$

Ejemplo 1.20 Sea $A = \{1,2,3\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A, dada por:
$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$.
Analizar qué propiedades cumple la relación dada.

- Reflexiva: $\forall x, x \in A \Rightarrow (x,x) \in \mathcal{R}$
  $1 \in A$ y $(1,1) \in \mathcal{R}$ (cumple)
  $2 \in A$ y $(2,2) \in \mathcal{R}$ (cumple)
  $3 \in A$ y $(3,3) \in \mathcal{R}$ (cumple)
  Por lo tanto $\mathcal{R}$ es reflexiva, dado que todo elemento de A está relacionado con sí mismo.
- Simétrica: $\forall x, \forall y, [(x,y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathcal{R}]$
  Como sólo se relacionan elementos iguales, es inmediato que si intercambiamos el orden de los elementos relacionados de cualquier par ordenado en la relación, obtenemos un par ordenado que también está en la relación.
  Por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica.
- Antisimétrica: $\forall x, \forall y, x \neq y[(x,y) \notin \mathcal{R} \vee (y,x) \notin \mathcal{R}]$
  Notar que no hay elementos distintos que estén mutuamente relacionados. Por tanto la relación es antisimétrica.

- Transitiva: $\forall x, \forall y, \forall z, [(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x,z) \in \mathcal{R}]$
  $\mathcal{R}$ es transitiva, dado que como sólo se relacionan entre sí elementos iguales la manera de "encadenar" la transitividad es obvia pues sólo podríamos repetir el par ordenado.

Ejemplo 1.21 Sea $A = \{1,2,3\}$ y sea $\mathcal{R}$ una relación definida en A, dada por:
$\mathcal{R} = \{(1,1),(3,3),(1,2),(3,1),(1,3)\}$

Analizar si la relación dada cumple con las propiedades reflexiva, simétrica, antisimétrica y transitiva.

Solución:

- Reflexiva:
  $2 \in A \wedge (2,2) \notin \mathcal{R}$ por lo tanto $\mathcal{R}$ no es reflexiva, ya que hay (al menos) un elemento de A que no se relaciona consigo mismo.
- Simétrica: $(1,2) \in \mathcal{R}$ pero $(2,1) \notin \mathcal{R}$, por lo tanto $\mathcal{R}$ no es simétrica.
- Antisimétrica: $(1,3) \in \mathcal{R} \wedge (3,1) \in \mathcal{R}$ pero $1 \neq 3$ por lo tanto $\mathcal{R}$ no es antisimétrica, pues hay un par de elementos de A que son distintos y se relacionan mutuamente.
- Transitiva: $(3,1) \in \mathcal{R} \wedge (1,2) \in \mathcal{R}$ pero $(3,2) \notin \mathcal{R}$ por lo tanto $\mathcal{R}$ no es transitiva.

1.4.2. Relación de Equivalencia

Definición 1.13 Dada una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A se dice que es una *Relación de equivalencia* si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Toda relación de equivalencia definida en un conjunto A divide al conjunto en subconjuntos disjuntos dos a dos, llamados clases de equivalencia. Dado un elemento $a \in A$, se define la *clase de equivalencia de a* como el subconjunto de A formado por aquellos elementos que están relacionados con a. Anotamos este conjunto como $\mathcal{C}_a$. Así, podemos definir la clase de equivalencia de la siguiente manera:

$$\forall a \in A, \ \mathcal{C}_a = \{x \in A \,/\, xRa\}$$

Observaciones:

1. Cada clase de equivalencia tiene al menos un elemento (a pertenece a la clase de a por ser $\mathcal{R}$ reflexiva).
2. Si x e y no están relacionados por $\mathcal{R}$, sus clases de equivalencia son disjuntas (no tienen elementos en común).
3. A es igual a la unión de todas las clases de equivalencia de elementos de A.
4. La relación del ejemplo 1.20 es una relación de equivalencia por cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Sus clases de equivalencia son conjuntos con un único elemento, dado que cada elemento del conjunto A se relaciona únicamente con sí mismo.

Dada una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A, al conjunto de todas las clases de equivalencia se lo llama *conjunto cociente de A por $\mathcal{R}$*, y se escribe así:

$$A/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}_a \,/\, a \in A\}$$

Por cumplirse 1, 2 y 3, de las observaciones anteriores, decimos que $A/\mathcal{R}$ es una partición del conjunto A.

Ejemplo 1.22 Probar si la siguiente relación es de equivalencia en $\mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros), y en caso afirmativo hallar el conjunto cociente.

$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y$ es múltiplo de 4

Esta relación se llama " *relación de congruencia módulo* 4 "

Decir que $x-y$ es múltiplo de 4 es equivalente a decir que $\exists k \in \mathbb{Z}/x-y=4k$.

- Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}x$ se cumple, pues $x-x=0=4.k$, pues existe $k=0\in\mathbb{Z}$ que hace válida la igualdad para todo $x\in\mathbb{Z}$.
- Simétrica: $\forall x,y \in \mathbb{Z},(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$. Es decir que para cualquier par $x,y\in\mathbb{Z}$, si $x-y=4.k$ con $k\in\mathbb{Z}$, debo probar $y-x=4.s$ para algún $s\in\mathbb{Z}$. Como $x-y=4\cdot k$, multiplico ambos miembros por -1 y resulta $y-x=-(4\cdot k)=4(-k)$, llamo $-k=s$ y entonces se verifica que $y-x=4.s$, con $s\in\mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathcal{R}$ es simétrica.
- Transitiva: $\forall x,y,z\in\mathbb{Z},[(x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}z)\Rightarrow x\mathcal{R}z]$ Parto de la verdad del antecedente para llegar a demostrar la verdad del consecuente:

$$\forall x,y\in\mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y=4.k,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}$$

$$\forall y,z\in\mathbb{Z}, y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y-z=4.s \text{ con } s\in\mathbb{Z}$$

Sumo miembro a miembro y obtengo

$$x-z=4(k+s)=4m \text{ donde } m \text{ es el entero } k+s$$

luego $\mathcal{R}$ es transitiva.

Como la relación cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, concluimos que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

Ahora, calculemos las clases de equivalencia:

$$\mathcal{C}_a=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,x\mathcal{R}a\}=\{x\in\mathbb{Z}\,/\,x-a=4k,\text{para algún} k\in\mathbb{Z}\} \quad (*)$$

donde $a\in\mathbb{Z}$ y lo llamamos representante de la clase.

Por el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$ se tienen las siguientes expresiones:

$$x=c_1{,}4+r_1 \text{ con } 0\le r_1<4,\ r_1\in\mathbb{N},\ c_1\in\mathbb{Z}$$

$$a=c_2{,}4+r_2 \text{ con } 0\le r_2<4,\ r_2\in\mathbb{N},\ c_2\in\mathbb{Z}$$

Restando miembro a miembro obtenemos:

$$x-a=4(c_1-c_2)+(r_1-r_2)$$

, por $(*)$, deducimos que $r_1-r_2=0$ (es decir que $x-a=4k$, con $k\in\mathbb{Z}$), entonces $r_1=r_2$ (igual resto). Es interesante observar que, dado un número entero (cualquiera), si interesara detectar a qué clase pertenece, es suficiente con dividir dicho número por 4 (división entera) y notar que el resto de dicha división indicará la clase a la cual pertenece el número considerado.

$$x\mathcal{R}a\Leftrightarrow x-a=4k,\ k\in Z\Leftrightarrow x=a+4k$$

Con lo cual tenemos que:

$$a=0 \qquad \mathcal{C}_0=\{\dots,-8,-4,0,4,8,12,\dots\}$$

$$a=1 \qquad \mathcal{C}_1=\{\dots,-7,-3,1,5,9,13,\dots\}$$

$$a=2 \qquad \mathcal{C}_2=\{\dots,-6,-2,2,6,10,14,\dots\}$$

$$a = 3 \qquad \mathcal{C}_3 = \{\ldots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}$$

Esta relación tiene 4 clases: $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ cada una de ellas tiene infinitos elementos. No es posible obtener otras clases distintas de estas, ya que son los posibles restos de la división de un entero por 4 , es decir : 0, 1 , 2 , 3.

Encontrar la clase de los elementos: 5, -17, 11 y -10.
$5 \in \mathcal{C}_1$, pues $5 = 4{,}1 + 1$ (al dividir 5 por 4 da un resto igual a 1)
$11 \in \mathcal{C}_3$ pues $11 = 4{,}2 + 3$
$-17 \in \mathcal{C}_3$ dado que $-17 = 4.(-5) + 3$
$-10 \in \mathcal{C}_2$ ya que $-10 = 4.(-3) + 2$

1.4.3. Relación de Orden

Definición 1.14 Una relación $\mathcal{R}$ definida en un conjunto A se dice que es una *relación de orden* si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Una relación de orden en A se llama de *orden total* si:
$\forall x, y \in A$ se verifica que $x\mathcal{R}y$ o bien $y\mathcal{R}x$
Cuando el orden es total, el conjunto A se dice *totalmente ordenado*.
Si el orden no es total, se llama *orden parcial*. En ese caso:
$\exists x, y \in A$ tales que $(x, y) \notin \mathcal{R}$ y también $(y, x) \notin \mathcal{R}$.
<u>Observación:</u>
La relación definida en el ejemplo 1.20 es una relación de orden (además de ser de equivalencia), pues cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Notar que no es de orden total pues hay elementos que no se relacionan (por ejemplo $(1, 2) \notin \mathcal{R}$ y $(2, 1) \notin \mathcal{R}$). Con lo cual, es una relación de orden parcial.

Ejemplo 1.23 Probar que la siguiente relación es de orden en $\mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales)

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divide a } y$$

Decir que $x \mid y$ (x divide a y) es equivalente a decir que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y = k \cdot x$
Es decir que la definición de la relación se puede escribir de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = k \cdot x,\ k \in \mathbb{N}$$

- Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{N}, (x\mathcal{R}x)$
  Sea $x \in \mathbb{N}$. Observar que $x\mathcal{R}x$ pues $x = k \cdot x$, se cumple para $k = 1 \in \mathbb{N}$
- Antisimétrica: $\forall x, y \in \mathbb{N}, [(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y]$
  Sean $x, y \in \mathbb{N}$ tales que:
  $x\mathcal{R}y$, es decir que $y = k_1 \cdot x$, con$k_1 \in \mathbb{N}$ (1)
  $y\mathcal{R}x$, es decir que $x = k_2 \cdot y$, con $k_2 \in \mathbb{N}$ (2)
  Reemplazando (2) en (1) :
  $y = k_1 \cdot k_2 \cdot y \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = 1$
  por lo tanto $k_1 = k_2 = 1$ (pues $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$)
  Reemplazando k_2 en (2) se llega a $x = y$ (Pensar qué ocurre si trabajáramos en $\mathbb{Z}$)
- Transitiva : $\forall x, y, z \in \mathbb{N}, [(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z]$
  Sean $x, y, z \in \mathbb{N}$ tales que , $x\mathcal{R}y$ también $y\mathcal{R}z$
  Es decir que existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ tales que:
  $y = k_1 \cdot x$ (1)

$z = k_2 \cdot y \quad (2)$

Reemplazando (1) en (2):

$z = k_2 \cdot (k_1 \cdot x) = (k_2 \cdot k_1) \cdot x$, con $l = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N}$

Por lo tanto $z = l \cdot x$. Esto es $x\mathcal{R}z$

Es una relación de Orden Parcial ya que, por ejemplo, $(2,3) \notin \mathcal{R}$ y $(3,2) \notin \mathcal{R}$

Ejemplo 1.24 Considere el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$. Construir una relación que sea de equivalencia pero no de orden.

Para que el conjunto sea de equivalencia debe cumplir las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Para que resulte ***reflexiva***, todos los elementos de A debe estar relacionado con sí mismo. Por lo tanto los pares (a,a), (b,b), (c,c) y (d,d) deben formar parte de la relación.

Hasta el momento la relación sería $\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$. Definida así la relación es de equivalencia, según vimos en el ejemplo 1.20, pero también resulta una relación de orden. Luego debemos agregar otros pares a la relación para cumplir nuestro objetivo de que no sea de orden.

Entonces, para que la relación que definiremos sea ***simétrica*** pero no antisimétrica, debemos incluir pares ordenados que relacionen mutuamente elementos distintos. Podrían ser (a,b) y (b,a), pero también podríamos agregar otros, siempre teniendo en cuenta que deben aparecer los pares simétricos. Por ejemplo, podríamos agregar (c,b) y (b,c).

Hasta ahora, $\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b)\}$, es la relación que hemos construido.

Ahora, debemos garantizar que la relación sea *transitiva*. Para ello debemos analizar los pares que hemos propuesto para la relación. Tengamos en cuenta que para que resulte transitiva debemos considerar cada uno de los pares de la relación (alcanza con hacerlo con pares que no sean idénticos en ambas entradas[2]). Cada vez que elegimos un par cualquiera, debemos observar si hay algún par que tenga primer coordenada igual a la segunda coordenada del primer par considerado. Si encontramos un par así, debemos asegurarnos de agregar un tercer par que construimos con la primer coordenada del primer par y la segunda coordenada del segundo par.

Concretamente, consideremos el par (a,b) que hemos agregado a la relación. Observemos que hay un par de la relación que comienza con el elemento b, estamos pensando en el par (b,c). Para garantizar transitividad debería figurar en nuestra relación el par (a,c), entonces lo agregamos a nuestra relación (atención, como hemos necesitado agregar un nuevo elemento no debemos olvidar que el simétrico debe estar en la relación).

Entonces, hasta el momento hemos construido la siguiente relación:

$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$

Por último, analizamos la misma situación (la de transitividad) con los demás pares de la relación. Lo haremos de manera esquemática:

$(b,a) \in \mathcal{R} \wedge (a,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,c) \in \mathcal{R}$ (se cumple)

[2]Notar que no es necesario incluir en este análisis a los pares ordenadas con entradas iguales, pues estos pares "fijan" la transitividad en ese elemento y por tanto no se comportan como "elementos de transición" o, mejor dicho, generan una transición irrelevante. Ilustrémoslo con un ejemplo:

$(a,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}$ resulta ser verdadero, pero es también una redundancia pues comenzamos eligiendo el elemento $(a,b) \in \mathcal{R}$ y al usar un elemento de $\mathcal{R}$ que tiene a b en ambas entradas, el razonamiento de la transitividad volverá a vincularnos con el primer par escogido y resulta inmediato que se cumple la propiedad transitiva. Algo similar ocurre cuando elegimos como primer par ordenado cualquiera que tenga ambas entradas idénticas

$(b,c) \in \mathcal{R} \wedge (c,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$ (se cumple)

$(c,b) \in \mathcal{R} \wedge (b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow (c,a) \in \mathcal{R}$ (se cumple)

Ahora sí, como hemos comprobado que la relación

$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$

es reflexiva, simétrica y transitiva, pero no es antisimétrica. Por lo cual es una relación de equivalencia, pero no es de orden.

Para finalizar, observemos cómo son las clases de equivalencia, recordando su definición:

$\mathcal{C}_a = \{x \in A : x\mathcal{R}a\} = \{a,b,c\}$

Como b y c están en la clase de equivalencia de a, las clases de equivalencia de estos elementos coinciden con la de A. Esto es: $\mathcal{C}_a = \mathcal{C}_b = \mathcal{C}_c$

Por otro lado $\mathcal{C}_d = \{x \in A : x\mathcal{R}d\} = \mathcal{C}_d = \{d\}$