PRÁCTICA I: Conjuntos y Relaciones

Antes de iniciar la resolución de esta (y cada) práctica, asegurate de tener presente los conceptos con los que se deberá trabajar en ella.

Introduciremos algunas preguntas previas a cada ejercicio para que puedas reconocer si recordás esos conceptos.

Algunos ejercicios serán para resolver durante la clase práctica, otros para que tengas material para trabajar en casa, o con compañeros, por fuera de la clase.

Con esta práctica se espera que puedas comenzar a reconocer los modos en que la matemática describe ideas que pueden ser presentadas a través de conjuntos. Asimismo, podrás combinar esas definiciones en operaciones que dan lugar a nuevos conceptos. En todos los temas que siguen, las formas de describir conjuntos seguirán estando presentes y esas notaciones nos serán útiles para presentar soluciones de muchos de los problemas que estudiaremos.

CONJUNTOS

- ¿Recordás qué significa que un conjunto está definido por extensión?
  (Pág. 6 del apunte de Conjuntos)
- ¿Cuándo un conjunto está definido por comprensión?
  (Pág. 6 del apunte de Conjuntos)

1. *a*) Define los siguientes conjuntos por extensión:
    1) $\{x : x \text{ es un mes de 30 días}\}$
    2) $\{k : k \in \mathbb{Z} \wedge k \geq -10\}$

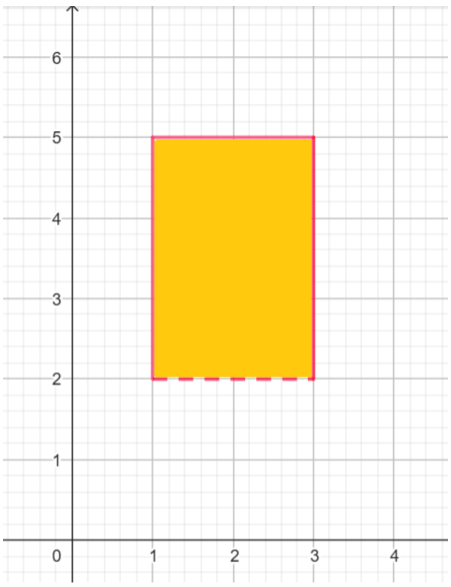
   b) Define los siguientes conjuntos por comprensión:
    1) El conjunto de los naturales pares.
    2) El conjunto que tiene como elementos las siguientes letras: u, i, o, e, a.

   Para trabajar en casa
   [I] Describe un conjunto , por comprensión y por extensión, con todos los números enteros de un dígito que son pares y múltiplos de 3.

[II] Describe por comprensión el siguiente conjunto: $\{1,3,5,7,9,11,13\}$
[III] Considerando al conjunto $A = \{x : x$ es un color en la bandera argentina$\}$, descríbelo por extensión.

- En el siguiente ejercicio deberás usar los conceptos de inclusión e igualdad entre conjuntos. (Pág. 8 del apunte de Conjuntos)

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales? ¿Cuál está contenido en otro conjunto de la lista? Justificar.
   a) $A = \{x : x$ es un dígito del número $243243\}$
   b) $B = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 1 < x < 3\}$
   c) $C = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 1 < x \leq 4\}$
   d) $D = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge 1 < x < 3\}$
   e) $E = \{x : x - 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
3. Represente los siguientes conjuntos en un gráfico adecuado:
   a) $L = \{x \in \mathbb{R} : x - 3 < 0 \wedge x + 1 \geq 2\}$
   b) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < 0 \wedge -2 \leq y \leq 1 - x\}$
4. Describa por comprensión al conjunto cuya representación gráfica es la siguiente:



Para trabajar en casa
[IV] Determina cuál de las siguientes condiciones son verdaderas y cuáles falsas:
a) $A \subset B$
b) $B \subset C$
c) $A = C$
d) $A \supset C$
e) $B \subset A$
f) $A \subset C$
g) $A \supset B$
Siendo A, B y C los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - x = 0 \vee x < -1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 4\}$$

[V] Represente gráficamente los siguientes conjuntos:

a) $D = \{x \in \mathbb{Z} \ : \ x - 3 < 0 \ \wedge \ x + 1 \geq 2\}$

b) $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 < x \leq 5 \ \wedge \ -3 \leq y < 1\}$

- ¿Tenés presente las operaciones intersección y unión entre conjuntos?
  (Pág. 9 del apunte de Conjuntos)

5. Sean: $A = \{1, 3, \sqrt{5}\}$; $B = \{1, 3, 4, b\}$; $C = \{0, b, 2, 3\}$.
   Halla $A \cup B$; $A \cap C$; $(A \cup B) \cap C$; $B \cap C$; $(A \cup B) \cup C$; $A \cap B$; $(A \cap B) \cup C$

Para trabajar en casa

[VI] Considera los conjuntos dados en el ejercicio 3 trabajado en clases.

a) Halla $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Compáralo con $(A \cup B) \cap C$.

b) Halla $(A \cup C) \cap (B \cup C)$.
Compáralo con $(A \cap B) \cup C$

<u>RELACIONES</u>

- Deberás usar la operación producto cartesiano entre dos conjuntos.
  (Págs. 9, 10 y 11 del apunte de Conjuntos)
- ¿Recordás cómo se define una relación entre dos conjuntos?
  (Págs. 11, 12 y 13 del apunte de Conjuntos)

6. Considera los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \ : \ 1 \leq x \leq 4\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$.

   a) Escribe 5 pares pertenecientes a $A \times B$.

   b) Escribe por extensión la relación $R \subset A \times B$ definida por:
   $x R y$ si y sólo si $x + y \leq 7$. Determina sus dominio e imagen.

   c) Representa R en un diagrama de ejes cartesianos ortogonales.

7. Considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 1\}$.

   a) Dibújalo en el plano.

   b) ¿Es el conjunto de puntos graficado una relación en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? ¿Por qué?

Para trabajar en casa

[VII] Considera los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{L, M, N, O\}$.

a) Escribe por extensión el conjunto $A \times B$.

b) Escoge un subconjunto de $A \times B$ para determinar una relación de A en B.

c) Para la relación que se determinó en el item anterior, describe su dominio y su imagen.

d) Representa la relación en un diagrama de Venn.

- Si no lo tenés presente, recuperá el concepto de relación en <u>un</u> conjunto.
  (Págs. 13 y 14 del apunte de Conjuntos)
- También será necesario que recuerdes la definiciones de Relación Reflexiva, Relación Simétrica, Relación Antisimétrica y Relación Transitiva.
  (Págs. 14 y 15 del apunte de Conjuntos)

8. *a*) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Considera las siguientes relaciones definidas sobre A:

$R_1 = \{(1,1);(1,2);(2,1);(4,1);(4,4)\}$
$R_2 = \{(1,2);(1,3);(2,1)\}$
$R_3 = \{(1,1);(1,2);(1,4);(2,1);(2,2);(3,3);(4,1);(4,4)\}$
Analiza en cada caso si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

b) Considera las siguientes relaciones definidas sobre $\mathbb{Z}$:
$R_1 = \{(a,b) : a < b\}$
$R_2 = \{(a,b) : a = b \vee a = -b\}$
Analiza en cada caso si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Para trabajar en casa
[VIII] Considera las siguientes relaciones definidas sobre $\mathbb{Z}$ y analiza qué propiedades tienen:
a) $R = \{(a,b) : a \geq b\}$
b) $S = \{(a,b) : a + b \leq 4\}$

- ¿Recordás cuándo una Relación es de equivalencia?
(Págs. 15, 16 y 17 del apunte de Conjuntos)
- Dada una relación de equivalencia en A ¿Qué es la clase de un elemento de A? ¿Y el conjunto cociente?
(Págs. 15, 16 y 17 del apunte de Conjuntos)

9. Sea $A = \{1,2,3,4\}$. Considera la relación R definida sobre A :

$$aRb \text{ si y sólo si } a = b \text{ ó } a + b = 3.$$

a) Escribe R por extensión.
b) Prueba que R es una relación de equivalencia sobre A.
c) Halla la clase de cada uno de los elementos de A.

Para trabajar en casa
[IX] Sea $A = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x < 8\}$, demuestra que la relación definida sobre A como:

$$xRy \text{ si y sólo si } x = y \;\wedge\; x + y < 6,$$

es una relación de equivalencia.
Halla la clase de de los siguientes elementos: 2 y 5.

- ¿Cuándo una relación en A se dice de orden?
(Págs. 17, 18 y 19 del apunte de Conjuntos)
- ¿Qué se entiende por una relación de orden total?¿Y de orden parcial?
(Págs. 17, 18 y 19 del apunte de Conjuntos)

10. Considera el conjunto $L = \{1,2,3,4\}$.
Sea S la relación en L definida por $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
Determina si se trata de una relación de orden.

11. Considera, en el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la relación R definida por:

$$(n,m)R(s,t) \text{ si y sólo si } n \leq s.$$

a) Analiza las propiedades de esta relación.
b) ¿Es una relación de orden? Justifica.

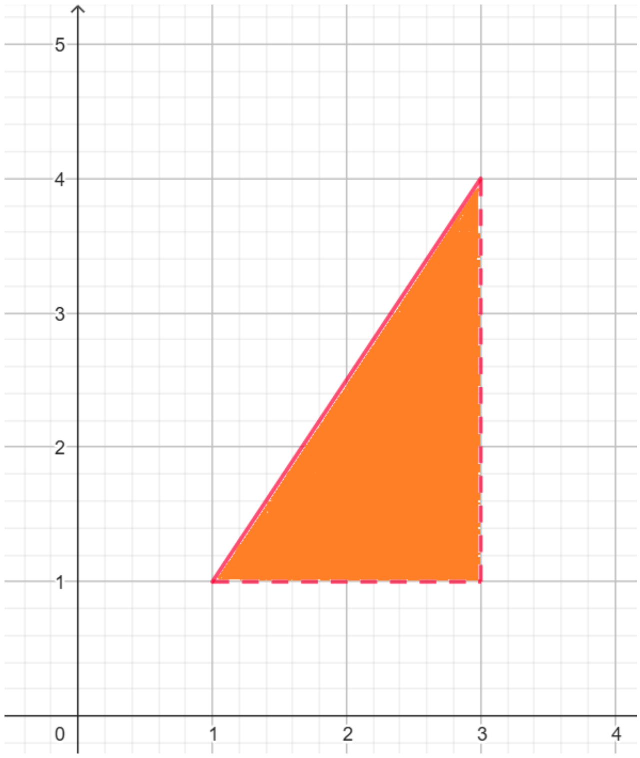
Para trabajar en casa
[X] Prueba que la relación "divide a" definida sobre $\mathbb{N}$ es una relación de orden. ¿Es de orden parcial o total?
¿Qué ocurre si la misma relación se considera definida sobre $\mathbb{Z}$, sigue siendo una relación de orden? Justifica.

---

12. Considere $M = \{a, b, c, d\}$.
Sea R la relación en M definida por $R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(c,c),(c,a),(c,d)\}$.
   a) Determine si R es de orden en M. Caso contrario, agregue y/o quite de R los pares que considere necesario para que sea de orden pero no de equivalencia. La relación de orden que resulta ¿Es de orden total o parcial?
   b) Determine si R es de equivalencia en M. Caso contrario, agregue y/o quite de R los pares que considere necesario para que sea de equivalencia pero no de orden. De la relación de equivalencia resultante, determine la clase de equivalencia de b.

EJERCICIOS ADICIONALES:

1. Describe el conjunto cuya representación gráfica es la siguiente:



2. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
   Define por extensión, justificando en cada caso, una relación R en A que sea:
   a) De orden, pero no de equivalencia.
   ¿Es de orden total o parcial?
   b) De equivalencia, pero no de orden.
   Halla la clase del elemento 1 en la relación que definió.
   c) De orden y de equivalencia.
3. Dado el conjunto $U = \{x : x \text{ es una persona}\}$ y las relaciones definidas sobre U :

$$R_1 = \{(a, b) : a \text{ cumple años el mismo día que } b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) : a \text{ es del mismo signo que b}\},$$

   decide, justificando en cada caso, si:
   a) R_1 y R_2 son iguales;
   b) $R_1 \subset R_2$;
   c) $R_2 \subset R_1$.
4. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$
   Considere la relación
   $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (4, 4)\}$.
   a) ¿Es R una relación de orden?
   b) ¿Es R una relación de equivalencia?
   c) Si R no es de equivalencia, agregue y/o quite la menor cantidad de pares a la relación R de modo que resulte de equivalencia.
   d) Halle la clase de equivalencia del 2.

5. Demuestra que, dado $k \in \mathbb{Z}$ la relación definida sobre $\mathbb{Z}$:

$$x R y \text{ si y sólo si } x - y \text{ es múltiplo de } k,$$

es una relación de equivalencia.