Autómatas

- Vimos lenguajes y sus tipos según la jerarquía de Chomsky
- Las gramáticas GENERAN lenguajes formales
- Los autómatas son mecanismos abstractos que permiten RECONOCER lenguajes formales
- Por reconocer entendemos que acepta o **reconoce** todas las cadenas del lenguaje y **rechaza** toda cadena que no pertenezca al lenguaje

Clasificación

Jerarquía de Chomsky	Tipo de lenguaje formal	Gramática que lo genera	Autómata mínimo que lo reconoce
Tipo 0	**LIR** (Lenguaje IRrestricto) [**1**]	**GIR** (Gramática IRrestricta)	Máquina de Turing
Tipo 1	**LSC** (Lenguaje Sensible al Contexto)	**GSC** (Gramática Sensible al Contexto)	Autómata Linealmente Acotado [**2**]
Tipo 2	**LIC** (Lenguaje Independiente del Contexto)	**GIC** (Gramática Independiente del Contexto)	Autómata Finito con Pila **NO** Determinístico [**3**][**4**]
Tipo 3	**LR** (Lenguaje Regular)	**GR** (Gramática Regular)	Autómata Finito

[**1**] Más conocidos como **LRE**: Lenguajes Recursivamente Enumerables
[**2**] Son un caso particular de la Máquina de Turing (La cinta no es infinita)
[**3**] La mayoría de los LIC y en particular los que son de interés en lenguajes de programación se pueden reconocer con un Autómata Finito con Pila **Determinístico**
[**4**] Los autómatas finitos con pila se conocen en inglés como **PushDown** Automata

Autómata Finito

- Un autómata finito es una máquina abstracta que toma como entrada una cadena y la acepta o la rechaza.
- Está formado por
  - Un conjunto de estados
  - Un estado inicial, que es único. Ese es el estado con el que comienza al analizar una cadena.
  - Un alfabeto sobre el cuál se escribe el lenguaje que reconoce el autómata
  - Un conjunto de estados finales. Si al finalizar el análisis de la cadena queda en alguno de esos estados la cadena es aceptada, sino es rechazada
  - Una función de transición que toma como entradas el estado en que se encuentra el autómata y el próximo carácter de la cadena a analizar. Y como salida pasa ("transiciona") a un estado (eventualmente el mismo)
- El término **Finito** se refiere a la cantidad de estados

Definición de Autómata Finito Determinístico (AFD)

- Un autómata es una 5-upla
  $M = (Q, \Sigma, T, q_0, F)$
  Donde
  - Q es el conjunto de estados
  - Σ es el alfabeto del lenguaje a reconocer
    - Corresponde a alfabeto terminal de una gramática
  - $T: Q x\Sigma \rightarrow Q$, es la función de transición
  - $q_0 \in Q$, es el estado inicial
  - $F \subseteq Q$, es el conjunto de estados finales (o aceptores)

AFD

- La propiedad de ser determinístico está dada por la función de transición, que dado un estado y carácter determina unívocamente el nuevo estado al que pasa el autómata
- La función de transición no tiene porque estar definida para todo par de QxΣ
- Si en medio del análisis de una cadena, el par QxΣ a aplicar resulta no estar definido, entonces se detiene el análisis y la cadena es rechazada
- Los estados suelen identificarse con números o letras
- T(2,c) = 4 significa que si el autómata está en el estado 2 y el próximo carácter de la cadena a analizar es c entonces el autómata pasará al estado 4

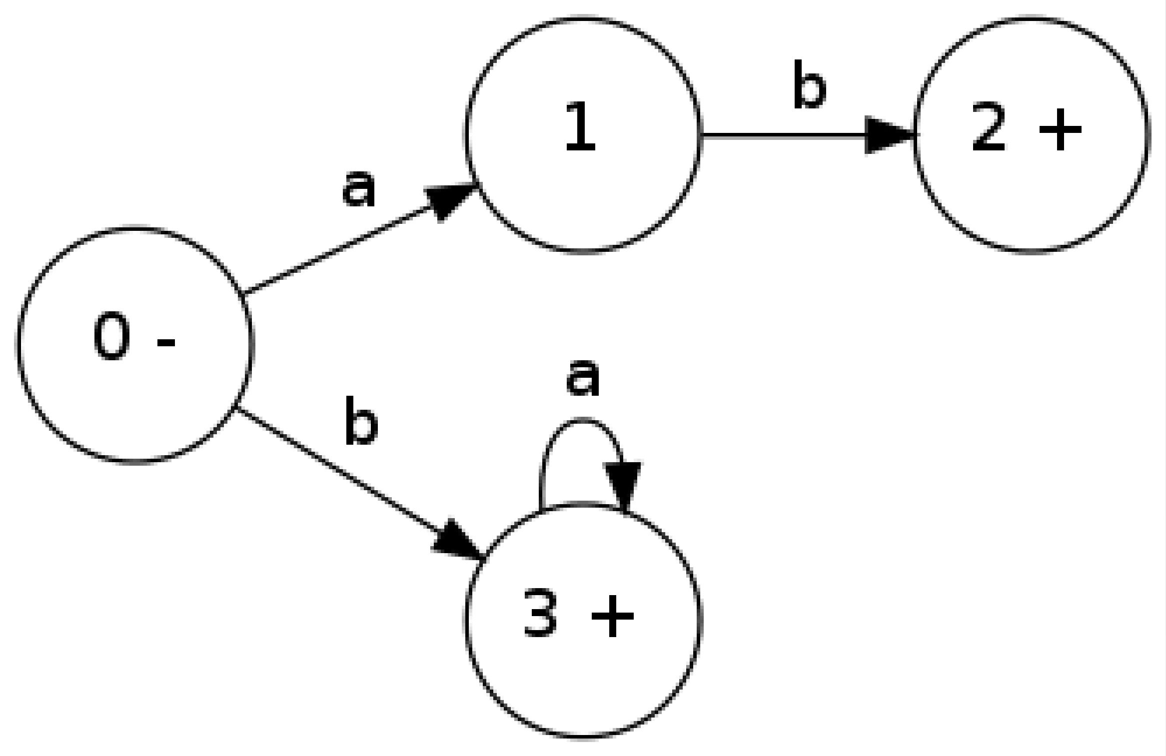
Diagrama de transición

- La función de transición también se puede representar mediante el diagrama de transición que es un grafo dirigido donde
  - Los nodos del grafo representan los estados del autómata
  - Los arcos se etiquetan con las letras del alfabeto
  - Si hay un arco etiquetado como a que sale del nodo 2 y llega al nodo 5 significa que T(2,a) = 5
- El estado inicial se indica agregando el signo “-” al número o letra que lo identifica
  - En los diagramas también se lo suele identificar con una flecha que apunta al nodo inicial
- Los estados finales se los indica con un signo “+”
  - En los diagramas también se los suele identificar usando doble línea al dibujar el círculo del nodo

Tabla de transición y actividad

- La tabla de transición es otro modo de mostrar la función de transición. Básicamente es la matriz de incidencia del grafo correspondiente al diagrama de transición
- En las filas colocamos los estados y en las columnas lo caracteres de Σ. En cada celda va el nuevo estado al que el autómata pasa si estando en el estado correspondiente a la fila se lee el carácter correspondiente a la columna
- Actividad es indicar un recorrido en el autómata indicando estado => carácter => estado

Ejemplo



TT	a	b
0-	1	3
1	-	2
2+	-	-
3+	3	-

Actividad para la cadena “ba”
0 => b => 3 => a => 3 RECONOCE

Tabla de transición completa

- Se trata de completar la función de transición para que esté definida para todo QxΣ.
- Para ello se agrega un nuevo estado, que llamaremos estado de error, y completaremos la función con ese nuevo estado, el cual vuelve a si mismo con cualquier carácter de Σ

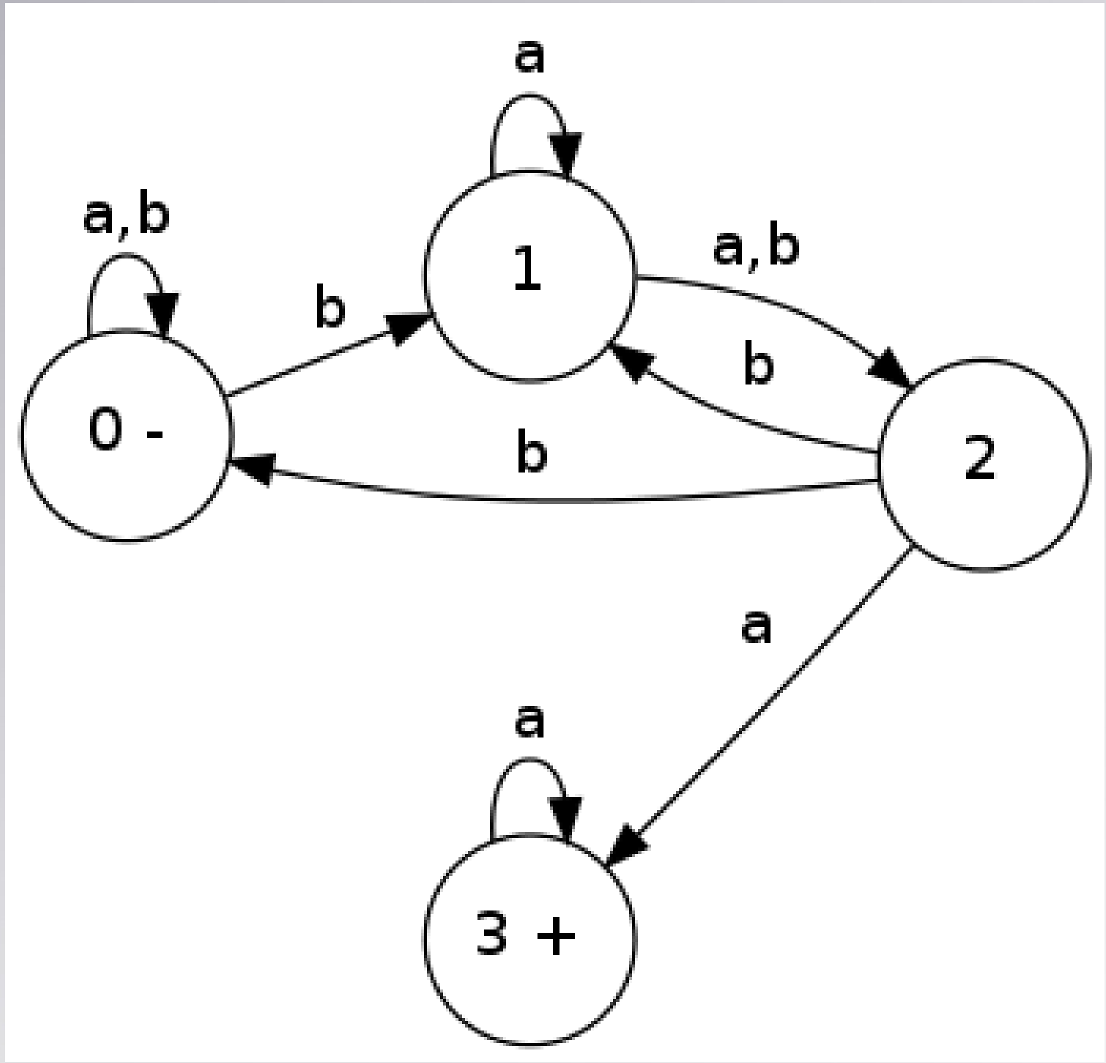
TT	a	b
0-	1	3
1	-	2
2+	-	-
3+	3	-

TT	a	b
0-	1	3
1	4	2
2+	4	4
3+	3	4
4	4	4

Autómata Finito No Determinístico (AFN)

- La condición de no determinístico está dada porque ante un par $Q x \Sigma$ en la entrada para el cuál la función esté definida, la salida puede ser más de una estado, es decir, es un conjunto de estados
- Matemáticamente es una 5-upla
  $M = (Q, \Sigma, T, q_0, F)$
  Donde
  - $T: Q x \Sigma \rightarrow P(Q)$, la función de transición cambia su imagen al conjunto de partes de Q, o sea el conjunto de todos los posibles subconjuntos de Q
    - También conocido como Conjunto Potencia y notado como 2^Q
  - El resto queda igual que en AFD

Ejemplo



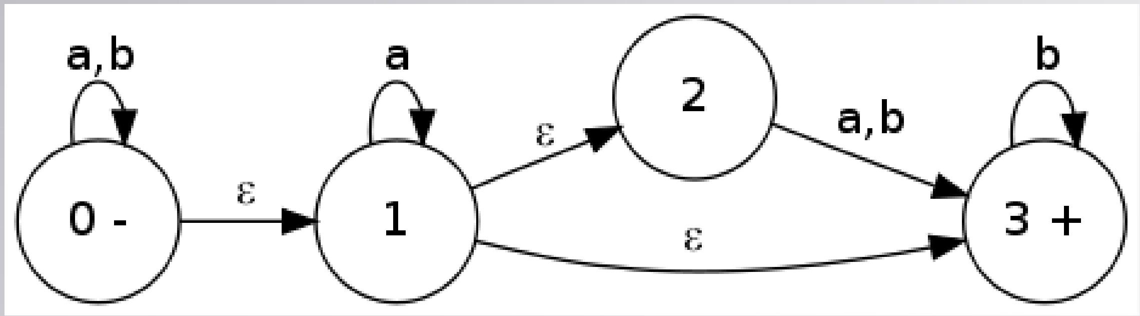
TT	a	b
0-	{0}	{0,1}
1	{1,2}	{2}
2	{3}	{0,1}
3+	{3}	-

AFN-ε

- Permite cambiar de estado sin consumir ningún carácter de la cadena que se analiza
- Estos cambios se etiquetan con ε
- A la tabla de transición se le agrega una columna más etiquetada con ε dado que formalmente la función de transición pasa a ser:

  $T: Qx(\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow P(Q)$

Ejemplo



TT	a	b	ε
0-	{0}	{0}	{1}
1	{1}	-	{2,3}
2	{3}	{3}	-
3+	-	{3}	-

Autómata Finito con Pila

- Obviamente la diferencia fundamental con un AF es justamente la Pila, que es una pila abstracta de capacidad infinita.
- En la Pila se almacenan caracteres de un alfabeto distinto al del lenguaje que reconoce el autómata
- Por convención al escribir la secuencia de caracteres almacenados en la pila, lo hago comenzando por el tope de la misma. Así, si digo que en la pila tengo ABC significa que A está al tope y C en el fondo de la misma
- Las transiciones tienen en cuenta el estado del autómata, el carácter siguiente de la cadena a reconocer y el carácter en el tope de la pila

Definición Formal

Un AFP es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, T, e_0, p_0, F)$

Donde:

Q es el conjunto de estados

Σ es el alfabeto de entrada

Γ es el alfabeto de Pila (Algunos enfatizan: $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$)

$e_0 \in Q$, estado inicial

$p_0 \in \Gamma$,Símbolo inicial en pila que indica pila vacía

F conjunto de estados finales

T función: $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

- Nota, el libro de la cátedra usa como notación

$M = (E, A, A', T, e_0, p_0, F)$

Función de transición

- Notar que la función de transición toma como entrada una terna dada por:
  - El estado en que se encuentra el autómata
  - Un carácter de Σ o ε
    - Esto significa que puede haber un cambio de estado sin necesidad de consumir un carácter de la cadena analizada
  - Un carácter de Γ
- Y como salida
  - Un nuevo estado del autómata
  - Un cadena sobre el alfabeto Γ (eventualmente vacía)
    - Se considera que en cada transición se elimina el carácter que estaba al tope de pila, por tanto, si quiero conservarlo debo volver a introducirlo

Función de transición

- Un modo de explicar cada transición es pensarla a cada una con los siguientes pasos

1. **Pop**: se saca (**siempre**) del tope de pila el elemento que allí se encuentre
2. **Push**: se insertan en la pila los elementos que indique la transición
3. Cambio al estado que indique la transición
4. Si el carácter que indica la transición no es ε, entonces avanzar al próximo en la cadena que está siendo analizada

Función de transición y determinismo

- Para que un AFP sea determinístico (AFPD) es necesario que se cumplan 2 condiciones
  - Para cualquier terna de entrada el conjunto de salida de tiene a lo sumo un elemento
    $\forall\ e \in Q,\ a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}),\ x \in \Gamma\text{: } |T(e,a,x)| \leq 1$
  - Si está definida la función para ε entonces no debe estar definida para ningún elemento de Σ y viceversa
    $\forall\ e \in Q,\ x \in \Gamma\text{:}$
    $T(e,\varepsilon,x) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad T(e,a,x) = \emptyset\ (\forall\ a \in \Sigma)$

    $\forall\ e \in Q,\ x \in \Gamma\text{:}$
    Si $\exists\ a \in \Sigma$ tq: $T(e,a,x) \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad T(e,\varepsilon,x) = \emptyset$

Función de transición, ejemplos

- $T(4,a,Z) = \{(4,RPZ)\ ,\ (5,\varepsilon)\}$
  - Cuando el autómata está en el estado 4, lee el carácter a de la cadena a analizar y hay una Z al tope de la pila
    - Queda en estado 4, Saca Z del tope de la pila y coloca en ella sucesivamente Z, P y R. Por tanto R queda en el tope de la pila, más abajo P y luego Z.
    - O bien pasa a estado 5 y no agrega nada a la pila, lo que indico con ε.
      Ojo: En este caso no agrego nada pero SI saco el tope de pila, Z en este ejemplo.
  - Como el conjunto de salida tiene cardinalidad 2, El autómata correspondiente NO es determinístico

Función de transición, ejemplos

- $T(7,b,R) = \{(3,TU)\}$
  - Cuando el autómata está en el estado 7, lee el carácter b de la cadena a analizar y hay una R al tope de la pila
    - Pasa a estado 3, Saca R del tope de la pila y coloca en ella sucesivamente U y T. Por tanto T queda en el tope de la pila y más abajo U.
    - Como el conjunto tiene cardinalidad 1, esta producción puede se parte de AFPD
- $T(8,\varepsilon,Y) = \{(3,Y)\}$
  - Cuando el autómata está en el estado 8 y si hay una Y en el tope de la pila
    - Pasa a estado 3 sin necesidad de consumir ningún carácter de la cadena que está siendo analizada. La Y se saca del tope de pila pero es repuesta, por tanto la pila queda inalterada.
    - Si no está definida $T(8,a,Y)$ para ningún $a \in \Sigma$, entonces esta producción puede ser parte de un AFPD

Modos de Aceptación

- Aceptación por Estado final
  - Es el modo “equivalente” a los AFD, es decir, se consume la cadena a reconocer (salvo estado sin definir, que daría rechazo) y si al final está en un estado aceptor se reconoce la cadena. Para este modo el estado final de la pila es irrelevante
- Aceptación por pila vacía
  - En este modo se consume la cadena a reconocer (salvo estado sin definir) y si al final la pila está vacía se acepta la cadena, caso contrario se rechaza. Para este modo es irrelevante el conjunto de estados aceptores y en general es vacío.
- Fin de cadena
  - La mayoría de los textos lo indican con ε, sin embargo el libro de la cátedra lo simboliza con fdc (fin de cadena) lo que es muy razonable dado que muchas veces ese fin está marcado por un carácter centinela (o sea uno que, al no poder formar parte de la cadena que estamos reconociendo, indica el fin de la misma).

Ejemplo

- Sea $L_1 = \{\omega c \omega^R \,/\, \omega \in \{a,b\}^*\}$
- La idea es tener dos estados
  - Estado de leer y “marcar” en la pila la cadena ω (marco con una X las a y con Y las b)
  - Estado de confirmar que la cadena después de la c sea ω^R por coincidencia con lo guardado en la pila (que iremos vaciando)
  - El carácter c nos sirve para hacer el cambio de estado. No altera la pila.

Tabla de Movimientos

- APD = ($\{e_0,e_1,e_2\}$, {a,b,c}, {\$,X,Y}, TM, e_0, \$, $\{e_2\}$)

TM	**a**	**b**	**c**	**fdc**
e_0,\$	e_0,X\$	e_0,Y\$	e_1,\$	-
e_0,X	e_0,XX	e_0,YX	e_1,X	-
e_0,Y	e_0,XY	e_0,YY	e_1,Y	-
e_1,X	e_1,ε	-	-	-
e_1,Y	-	e_1,ε	-	-
e_1,\$	-	-	-	e_2,\$

Por Pila Vacía

TM	a	b	c	fdc
e_0,$	e_0,X$	e_0,Y$	e_1,$	-
e_0,X	e_0,XX	e_0,YX	e_1,X	-
e_0,Y	e_0,XY	e_0,YY	e_1,Y	-
e_1,X	e_1,ε	-	-	-
e_1,Y	-	e_1,ε	-	-
e_1,$	-	-	-	e_1,ε

Caso abbcbba

Cadena	Pila	Estado
abbcbba	$	0
bbcbba	X $	0
bcbba	Y X $	0
cbba	Y Y X $	0

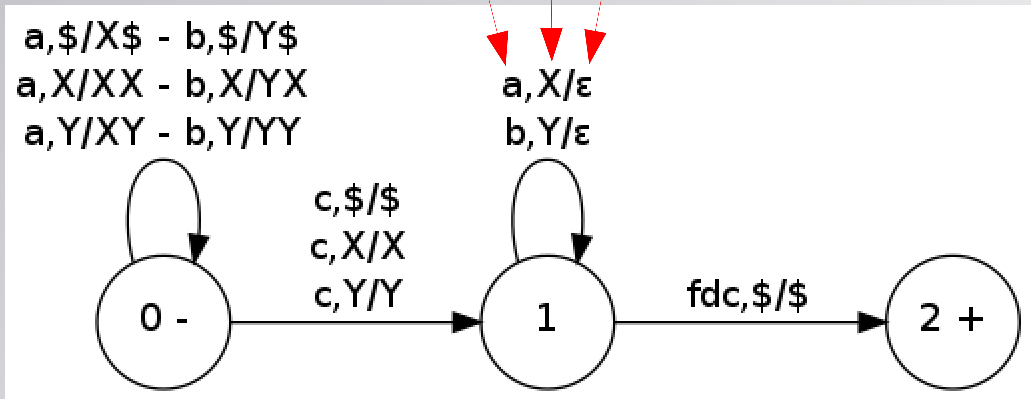
Cadena	Pila	Estado
bba	Y Y X $	1
ba	Y X $	1
a	X $	1
Est. Final	$	2
Pila Vacía	ε	1

Diagramas de Transición
Notación Habitual

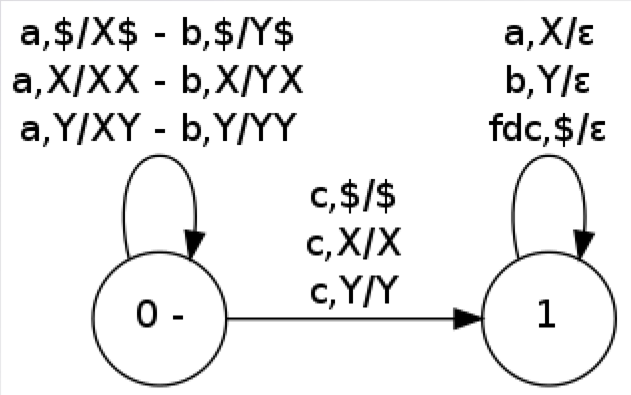
Notación: Entrada / Salida

Σ , Γ / Γ*

Por Estado Aceptor



Por Pila Vacía

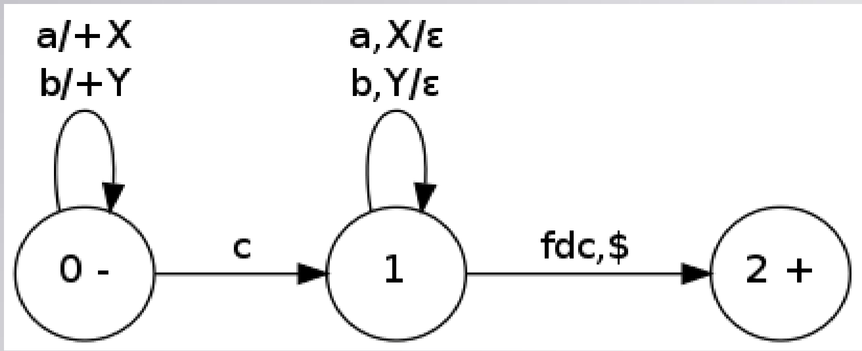


Notación Alternativa

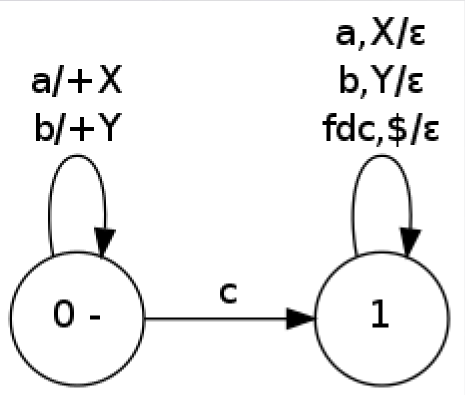
- Notación General: Σ , Γ / Γ^* Ejemplo: a,Y / XY
- Push: Repongo el elemento al tope pila, lo indico con un + delante de Γ^*
  - Σ , Γ / +Γ^* Ejemplo: a,Y / +X
- Si en la entrada solo indico Σ implica para todo elemento de Γ
  - Σ / Γ^* Ejemplo: a / +X
- Si solo escribo la entrada implica que la pila queda inalterada
  - Σ , Γ Ejemplo: a,Y
  - Σ Ejemplo: a

Diagramas de Transición Notación Alternativa

Por Estado Aceptor



Por Pila Vacía



Licencia