Metodos econometricos y de IO aplicada

Profesora: Florencia Gabrielli

Trabajo Práctico N^{o}1

Franco Riottini
(En colaboración con)
Lucas Castellini

September 26, 2022

Métodos Econométricos y de Organización industrial aplicada

Franco Riottini

Septiembre 2022

El trabajo fue realizado en colaboración con Lucas Castellini, por ende las estimaciones serán muy similares. Eso no evita que, dado el carácter individual del examen, difiramos en algunas, sino en todas, de las interpretaciones brindadas aquí.

1 GMM

Para el siguiente proceso generador de datos (DGP):

$$y = \beta x^2 + u$$

$$x = \pi z + v;$$

con $\beta = 1$, $\pi = 1$, y $z = 1$, donde $(u; v)$ se distribuyen conjuntamente normal con medias 0 y varianzas 1 y correlación 0.8, generamos una muestra de tamaño 1000, con las siguientes caracterísiticas:

Table 1: Descriptive statistics of the generated variables

Statistic	N	Mean	St. Dev.	Min	Max
u	1,000	−0.030	0.979	−3.493	3.153
v	1,000	−0.021	1.012	−3.564	3.239
x	1,000	0.979	1.012	−2.564	4.239
y	1,000	1.953	3.254	−3.087	19.201

Luego, realizamos estimaciones de β utilizando 3 métodos: OLS, NL2SLS, Two-Stage. Como se puede ver, los 3 métodos presentan resultados significativos a los niveles de significancia habituales. Sin embargo, para el método de Minimos Cuadrados Ordinarios, los resultados están sesgados y son inconsistentes. Esto, porque la variable dependiente (x) tiene un error (v) en su DGP que se encuentra altamente correlacionado con el error no observable (u).

Para corregir esta inconsistencia, utilizamos el método "Non-Linear 2 Stage Least Squares ($NL2SLS$)". Lo primero que hacemos es generar la variable $z = 1$ con el mismo número de observaciones que las mencionadas anteriormente. En una primera etapa, realizamos la regresión de la variable x^2 contra nuestro instrumento z y obtenemos los valores ajustados, como muestra el siguiente código de R:

```
#--------Primera etapa de NL2SLS------------
FirstStage <- lm(xsq ~ z -1, data = data)
data$x2hat <- FirstStage$fitted.values
#------------------------------------------
```

Luego, correremos la regresión de estos valores ajustados contra la variable dependiente, y, obteniendo así los $\hat{\beta}$ que buscamos:

```
#-----------Segunda etapa de NL2SLS---------
nl2sls <- lm(y ~ x2hat -1, data = data)
#------------------------------------------
```

Los resultados se muestran en la tabla 2, en la segunda columna. Los resultados de este método son consistentes en muestras grandes (Amemiya, 1974; Cameron & Trivedi, 2005).

El método de dos etapas (Two Stages) usa una regresión OLS de x sobre z para formar $\hat{x}$ y luego realiza una regresión OLS de y sobre $(\hat{x})^2$. Este método produce una estimación significativamente lejos del valor verdadero de $\beta = 1$. Esta estimación se realizó con el siguiente código:

```
#-----------------Two Stage (IV)-------------

# Primera etapa de 2S
IVFirstStage <- lm(x ~ z -1, data = data)
summary(IVFirstStage)
data$ivx <- IVFirstStage$fitted.values
# Generamos el instrumento ivx2
data <- data %>% mutate(ivx2 = ivx**2)
# Segunda etapa de 2S
IVSecondStage <- lm(y ~ ivx2 -1, data = data)
#------------------------------------------
```

Siguiendo a Cameron and Trivedi (2005), el método es inconsistente.

Table 2: OLS, NL2SLS & Two-Stage regressions

	Dependent variable:		
	y		
	MCO	NL2SLS	Two-Stage
x^2	1.146***		
	(0.008)		
$\hat{x}^2$		0.985***	
		(0.052)	
$\hat{x}^2$			2.036***
			(0.107)
Observations	1,000	1,000	1,000
R^2	0.949	0.265	0.265
Adjusted R^2	0.949	0.264	0.264
Residual Std. Error (df = 999)	0.858	3.254	3.254
F Statistic (df = 1; 999)	18,559.650***	360.129***	360.129***
Note:			*p<0.1; **p<0.05; ***p<0.01

2 Introducción a Logit

Tenemos preferencias a la Goorman que permiten agregar consumidores individuales y poder estimar demandas con datos agregados. Además, tenemos una utilidad aleatoria desde el punto de vista del econometrista (no del consumidor).

En el mercado hay 11 alternativas, y el consumidor divide su ingreso entre 1 de esas alternativas o un bien externo (que simplemente es no comprar ninguna de las alternativas).

El modelo logit anidado (*nested logit*) de S. T. Berry (1994) intenta lidiar con el problema de la independencia de alternativas irrelevantes (que implica patrones de sustitución muy restrictivos, en especial con la introducción de nuevos productos). Da una solución estadística, atacando la distribución, utilizada en la literatura previa, de los ϵ_{ij}. Esta distribución condiciona directamente la solución del problema de maximización de los consumidores, en donde nos encontramos que la probabilidad de que un consumidor i compre la marca j es

$$D_{ij} = Prob(\epsilon_{0j}, \ldots, \epsilon_{iN} : U^*_{ij} > U^*_{ij'} \ para \ j \neq j')$$

Entonces, S. T. Berry (1994) asume una estructura particular de correlación entre $(\epsilon_{0j}, \ldots, \epsilon_{iN})$. Los ϵ_{ij} se distribuyen *iid* con una distribución extrema generalizada (*Extreme Type I*), de tal forma que los patrones de sustitución son distintos entre marcas que son similares ($\epsilon_{ijt} \sim iid\, TIEV$ entre consumidores i y marcas j y semana t).

3 Logit Estimation

Suponemos que los consumidores eligen entre productos $j \in J$ tal que maximizan el modelo de utilidad

$$u_{ijt} = X_{jt}\beta + \alpha p_{jt} + \xi_{jt} + \epsilon_{ijt}$$

donde

$$\delta_{jt} = X_{jt}\beta + \alpha p_{jt} + \xi_{jt} \tag{1}$$

representa la utilidad media del producto j en la semana t. Es decir, es la parte de la utilidad que es común entre consumidores, derivada del consumo de la marca j. Dado que como econometristas no observamos ni el ξ_{jt} ni el ϵ_{ij} (pero los consumidores si lo hacen), interpretamos a ξ_{jt} como la "calidad no observada" y esta misma está, por lo general, correlacionada con p_j, lo que será fuente de endogeneidades que trataremos de resolver de diferentes formas a lo largo del ejercicio. Esto también muestra explícitamente la endogeneidad de los precios, porque es probable que dependan de ξ_j y es por eso que necesitamos instrumentarlos. Los instrumentos suelen basarse en el supuesto de independencia media, es decir, $E(\xi_j|X) = 0$.

S. T. Berry (1994) muestra como analizar este modelo cuando los ϵ_{ij} provienen de una distribución logística, resolviendo la utilidad media como una función de las participaciones de mercado observadas (s_{jt}), obteniendo:

$$\delta_{jt} = ln(s_{jt}) - ln(s_0)$$

donde s_0 es la participación de mercado del *outside good*. De esta forma, podemos obtener la regresión lineal del modelo de la ecuación (1). Para nuestro ejercicio, entendemos, a partir del Cuadro 1 de estadísticas descriptivas, que el *share* del *outside good* fue en el año del 38% y lo suponemos constante para el análisis subsiguiente.

3.1 MCO

La regresión por MCO con $x_1 = precio$ y $x_2 = descuento$ proporciona estimaciones consistentes para los parámetros de interés, siempre y cuando el supuesto de que $E(\xi_j|X) = 0$ se mantenga. De cumplirse este supuesto, bastaría para tener una estimación consistente, dado que tenemos una muestra lo suficientemente grande como para que la probabilidad límite de los estimadores converja a sus verdaderos valores poblacionales.

Las estimaciones se muestran en la primera columna de la siguiente tabla, donde vemos que tanto el coeficiente de precio como el de descuento son estadísticamente significativos.

Resultados de la regresión Logit vía MCO

	MCO	MCO con FE por marca-tienda	MCO con FE por marca-tienda
	delta	delta	delta
precio	-0.0487***	-0.308***	-0.344***
	(-26.35)	(-58.85)	(-61.84)
descuento	0.0894***	0.209***	0.197***
	(7.18)	(31.16)	(29.07)
Observations	38544	38544	38544

t statistics in parentheses
* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

3.2 MCO con FE por marca

En este caso, los efectos fijos específicos del producto absorben cualquier parte de los ξ_{jt} que sean específicos de la marca. Esto podría hacer que la condición $E(\xi|X) = 0$ sea más plausible, debido a que se estaría eliminando la variación endógena por marca. En este caso, los resultados se muestran en la columna 2 de la tabla mencionada anteriormente, donde ahora los coeficientes, a pesar de seguir siendo significativos, son más prominentes.

3.3 MCO con FE por marca-tienda

Este tercer caso se ubica en la tercera columna de la tabla. Aquí los efectos fijos por marca y tienda están controlando por toda aquella variabilidad específica tanto de la marca como de cada tienda. Así, podemos pensar que la condición de que $E(\xi|X) = 0$ se vuelve más realista debido a que estamos *purgando* al término de error de toda esta variabilidad específica. En este caso, las estimaciones son muy similares a la estimación previa.

3.4 IV usando el costo como instrumento

En este conjunto de datos tenemos una proxy de los precios mayoristas, que son los costos de los minoristas, pero que, si suponemos que existe un mark - up nulo por parte de los fabricantes, serían costos marginales de estos. De esta forma, la variable se convierte en un instrumento potencialmente exógeno para lidiar con la endogeneidad de los precios con $\xi_j t$. Un supuesto similar es hecho en S. T. Berry (1994, p. 255).

Resultados de la regresión Logit via IV (Costo)

	IV (Costo)	IV con FE por marca	IV con FE por marca-tienda
	δ	δ	δ
precio	-0.0158***	-0.0765***	-0.0797***
	(-7.97)	(-7.08)	(-7.16)
descuento	0.110***	0.289***	0.289***
	(8.82)	(38.04)	(37.73)
Observations	38544	38544	38544

t statistics in parentheses
* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

Ahora los resultados vuelven a tener los signos esperados, pero de menor envergadura debido a que los efectos sobre la utilidad media de los consumidores son menores a las especificaciones anteriores.

3.5 IV utilizando el instrumento de Hausman

Por lógica similar a la esbozada en la introducción del apartado anterior, podríamos utilizar los instrumentos "Hausman" de precio medio en otros mercados. Sin embargo, como en este caso tenemos menos supuestos acerca del comportamiento de las firmas fabricantes, esperaríamos que este instrumento este estimando con un mayor grado de consistencia.

Resultados de la regresión Logit via IV (Hausman)

	IV (Hausman)	IV con FE por marca	IV con FE por marca-tienda
	δ	δ	δ
precio	-0.0443***	-0.527***	-0.541***
	(-23.17)	(-35.19)	(-41.29)
descuento	0.0922***	0.133***	0.129***
	(7.40)	(15.89)	(16.13)
Observations	38544	38544	38544

t statistics in parentheses

* $p < 0.05$, ** $p < 0.01$, *** $p < 0.001$

Como vemos en esta última tabla, los resultados también siguen la lógica inferida. Ahora los efectos sobre la utilidad media son considerables si se observan las especificaciones con efectos fijos. Como mencionamos anteriormente, estas estimaciones son las que mejor deberían estar explicando los hechos, debido a que esperamos un mayor grado de realismo en el supuesto de que $E(\xi|X) = 0$.

3.6 Elasticidades en Logit

Siguiendo a Nevo (2000b), la elasticidad precio (propias) de los market share es definida como:

$$\eta_{jt} = \frac{\partial s_{jt} p_{jt}}{\partial p_{jt} s_{jt}} = -\alpha p_{jt}(1 - s_{jt})$$

donde el cálculo se realiza utilizando los coeficientes de precios de la primera estimación por MCO.

Table 6: Elasticidades medias propias

Marca (producto)	$\mid \alpha$ de MCO $\mid$	$\mid \alpha$ de MCO FE marca $\mid$	$\mid \alpha$ de MCO FE marca-tienda $\mid$
Marca 1 (25)	-0.1515	-0.9594	-1.0715
Marca 1 (50)	-0.2137	-1.3538	-1.5119
Marca 1 (100)	-0.3167	-2.0062	-2.2406
Marca 2 (25)	-0.1337	-0.8470	-0.9460
Marca 2 (50)	-0.2387	-1.5118	-1.6884
Marca 2 (100)	-0.3885	-2.4611	-2.7486
Marca 3 (25)	-0.1268	-0.8034	-0.8972
Marca 3 (50)	-0.1718	-1.0881	-1.2152
Marca 3 (100)	-0.1835	-1.1625	-1.2984
Marca 4 (50)	-0.0885	-0.5604	-0.6259
Marca 4 (100)	-0.2070	-1.3110	-1.4642

Nevo (2000b) menciona que existen 2 problemas con estas elasticidades. El primero tiene que ver con que, dado que en la mayoría de los casos los *market shares* son pequeños, el factor $\alpha(1 - s_{jt})$ se mantiene casi constante. Como puede verificarse en nuestras estimaciones de, esta predicción parece verificarse, si miramos las elasticidades para cada tipo de paquete. De esta forma, si tomamos la primera columna, las estimaciones para las marcas que venden paquetes de 25 tabletas rondan los

0.13 en valor absoluto y para las que venden 50 y 100 paquetes promedian los 0.20 y $0,30$, respectivamente . De esta forma, existe cierta proporcionalidad entre el precio propio y la elasticidad propia y, por ende, menor es el precio, menor será la elasticidad (en valor absoluto).

En este sentido, Nevo (2000b) refiere que esta característica del modelo lleva a predecir un mayor *mark-up* para marcas con menor precio e indica que "This is possible only if the marginal cost of a cheaper brand is lower than that of a more expensive product" (Nevo, 2000b). Esto, no necesariamente se cumple.

Por este motivo, en la Tabla 7 se presentan las relaciones costo-precio promedio anual para cada marca. Si tomamos el costo promedio anual como costo marginal, la condición luce factible.

Table 7: Mark-up promedio anual

Marca (producto)	Mark-up
Marca 1 (25)	0.64 %
Marca 1 (50)	0.74 %
Marca 1 (100)	0.82 %
Marca 2 (25)	0.68 %
Marca 2 (50)	0.7 %
Marca 2 (100)	0.75 %
Marca 3 (25)	0.69 %
Marca 3 (50)	0.67 %
Marca 3 (100)	0.94 %
Marca 4 (50)	0.47 %
Marca 4 (100)	0.43 %

Por otro lado, si analizamos cada columna de las estimaciones de la Tabla 6, podemos ver que, para el primer modelo (MCO sin efectos fijos), las marcas enfrentan una elasticidad precio menor a 1. Esto no debería ser un resultado de eficiencia, ya que estaría sugiriendo que aumentar los precios aumentaría los beneficios de estas firmas, debido a que se encuentran en la parte inelástica de su demanda. En las columnas de las estimaciones con efectos fijos esto parece corregirse, aunque existen ciertos comportamientos anómalos debido a que hay empresas que disminuyendo su precio podrían aumentar más que proporcionalmente sus ventas, al presentar una elasticidad bastante superior a la unidad.

4 Logit con coeficientes aleatorios (BLP)

En esta sección comentaremos como prosigue el cálculo por coeficientes aleatorios. Todos los avances pueden verse en el archivo "BLP.R", donde, lamentablemente, no se ha podido llegar a resultados significativos.

4.1 Introducción

El modelo logit de coeficientes aleatorios de tipo BLP permite patrones de sustitución más realistas entre productos en comparación con el logit anidado. La heterogeneidad del consumidor existe no solo a través de un término logit de media cero, sino también a través de la variación en la disposición a pagar por atributos particulares de los productos bajo consideración. Ante un cambio de precio en su bien preferido, es más probable que los consumidores cambien a los que tienen atributos similares (Knittel & Metaxoglou, 2008).

El punto de partida del modelo de demanda tipo BLP es una función de utilidad indirecta. Un consumidor i obtiene utilidad de un producto j en el mercado t:

$$u_{ijt} = x_{jt}\beta_i - \alpha_i p_{jt} + \xi_{jt} + \epsilon_{ijt}$$

donde x_{jt} es un vector de las características de los productos, diferentes del precio (p_{jt}) y ξ_{jt} son las características inobservables (para el econometrista) de cada producto j. El término ϵ_{ijt} captura la heterogeneidad no observada en los gustos del consumidor. Pero la heterogeneidad del consumidor es también capturada por los coeficientes específicos de cada individuo asociados con el precio y otras características observables, que pueden escribirse como:

$$\begin{bmatrix}\alpha_i \\ \beta_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_i \\ \beta_i\end{bmatrix} + \Pi D_i + \Sigma v_i, \ con \ D_i \sim P_D^*(D) \ y \ v_i \sim P_v^*(v)$$

donde D_i es un vector de variables demográficas, v_i es una variable aleatoria que captura otras características no observables del consumidor y Π y Σ son matrices de parámetros. Esta determinación general es importante en nuestro ejercicio, ya que sabemos como se distribuyen ambos coeficientes aleatorios y tenemos variables demográficas que permiten el cálculo.

4.2 Nuestro ejercicio

En el enunciado nos fue brindado el siguiente modelo de demanda con heterogeneidad individual en los coeficientes:

$$u_{ijt} = X_{jt}\beta + \beta_{ib}B_{jt} + \alpha_i p_{jt} + \xi_{jt} + \epsilon_{ijt}$$

y además, que $\beta_{ib} = \sigma_B v_i$ con $v_i \sim N(0,1)$ y $\alpha_i = \alpha + \sigma_I I_i$, donde I_i es la variable ingreso brindada. Sustituyendo estas dos ecuaciones en el resultado, obtenemos el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}
u_{ijt} &= X_{jt}\beta + \sigma_B v_i B_{jt} + (\alpha + \sigma_I I_i)p_{jt} + \xi_{jt} + \epsilon_{ijt} \\
u_{ijt} &= X_{jt}\beta + \sigma_B v_i B_{jt} + \alpha p_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt} + \xi_{jt} + \epsilon_{ijt} \\
u_{ijt} &= X_{jt}\beta + \alpha p_{jt} + \xi_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt} + \epsilon_{ijt} \\
u_{ijt} &= \delta_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt} + \epsilon_{ijt}
\end{aligned}$$

Siguiendo las instrucciones del ejercicio, lo que realizamos fue generar 30 instrumentos para el precio promedio en otras tiendas de manera aleatoria. Además, armamos variables categóricas para cada uno de los productos de las marcas.

Con esto, acomodamos los datos siguiendo las especificaciones del comando "BLPEstimatoR[1]" en R. De esta forma, las variables se agrupan en cuatro categorías:

- Variables lineales: Precio, descuento y dummy por producto de marca.
- Variables exógenas: Descuento y dummy por producto.
- Coeficientes aleatorios: Precio, descuento y una constante.
- Instrumentos: Costos y precios del mismo producto en la misma semana en otras tiendas (instrumentos generados).

Además, generamos una "demographicData" utilizando los datos de "ingreso", "ingresosq" (cuadrado del ingreso), cantidad de mujeres y educación, siguiendo una lógica similar a la de Nevo (2000b).

[1] https://cran.r-project.org/web/packages/BLPestimatoR/vignettes/blp_intro.html

4.2.1 Integración

Recordando que la participación de mercado en el modelo es la proporción de consumidores que eligen el bien j en el momento t (donde asumimos que ellos maximizan la utilidad), esta sigue la misma forma logit que antes, solo que ahora debemos integrar sobre individuos heterogéneos para obtener la participación de mercado agregada:

$$\tilde{s}\left(\delta_{jt}, \theta_2\right) = \int\int \frac{\exp\left(\delta_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt}\right)}{1 + \sum_j \exp\left(\delta_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt}\right)} dF^v(v) dF^I(I)$$

Siguiendo a S. Berry, Levinsohn, and Pakes (1995), esta integral se vuelve difícil de calcular cuando la cantidad de características de los consumidores es mayor a 2 o 3. Por ello, estos autores proponen un algoritmo de estimación. Esto es, debemos simular ns "individuos" (para cada mercado t), cada uno caracterizado por el par (v_i, I_i) que se obtiene de las distribuciones apropiadas. Para esto, usamos el simulador:

$$\hat{\tilde{s}}_s\left(\delta_{jt}\right) = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} \frac{\exp\left(\delta_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt}\right)}{1 + \sum_j \exp\left(\delta_{jt} + \sigma_B v_i B_{jt} + \sigma_I I_i p_{jt}\right)}$$

donde los ns elementos de la suma son las probabilidades de que el individuo i elija el producto j en el mercado t. Luego, definimos una configuración de **Integración** para resolver la integral de cuota de mercado a partir de varias opciones disponibles:

- Integración de Monte Carlo (sorteos pseudoaleatorios).
- Cuadratura de la regla del producto.
- Cuadrícula de rejilla dispersa (Paquete SparseGrid en R).

Siguiendo a Knittel and Metaxoglou (2014), y dados los supuestos de distribución para v e I, la integral asociada con las cuotas de mercado se evalúa comúnmente utilizando la integración de Monte Carlo, con ns individuos. En este sentido, las "draws" de F^v y F^I se realizan una vez y se mantienen constantes durante el ejercicio de estimación.

Ahora que tenemos los $\hat{\tilde{s}}_s\left(\delta_{jt}\right)$, el siguiente paso sería obtener δ_{jt} utilizando la fórmula (contraction mapping),

$$\delta_{jt}^{(m+1)} = \delta_{jt}^{(m)} + \log\left(s_{ij}\right) - \log\left(\tilde{s}\left(\delta_{jt}^{(m)}, \theta_2\right)\right)$$

Simplificada en

$$\delta' = \delta + ln(S) - ln(S_0)$$

y utilizando como guess inicial simplemente $ln(S) - ln(S_0)$. En R, esto lo haríamos utilizando los paquetes "FixedPoint" o "SQUAREM". En el siguiente paso, resolvemos para

$$(\alpha, \beta) = (X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'\delta$$

Por último, tenemos que $\xi_{jt} = \delta_{jt} - (-\alpha p_{ijt} + x_{jt}\beta)$.

4.2.2 Resolvemos el problema de minimización

Lo haríamos con el paquete NLopt[2] de R. La minimización en este caso es un proceso iterativo, donde, la literatura, anuncia que los métodos basados en gradientes generalmente convergen más

[2] https://nlopt.readthedocs.io/en/latest/

rápido y son más precisos. Siguiendo a Dubé, Fox, and Su (2012), usaríamos el teorema de la función implícita para obtener el gradiente de la función objetivo:

$$\triangledown Q = \frac{d\xi'}{d\theta_1}\frac{dQ}{d\xi} = -2\frac{\partial s}{\partial \theta_1}\left(\frac{\partial s}{\partial \xi}\right)^{-1} Z(Z'Z)^{-1}Z'\xi$$

con $\theta_1 = (\alpha, \beta)$. Por último, estimamos $\theta = (\alpha, \sigma_B, \beta, \sigma_I)$.

5 Análisis de fusión (Bonus)

Siguiendo a Knittel and Metaxoglou (2014), las estimaciones de demanda sirven como un insumo inmediato para estudiar los efectos de cambios en la estructura de una industria, tal como incrementos en los precios debido a una fusión. Medidas de cambios en el bienestar implicados por una nueva estructura de mercado, tal como la variación compensativa, también pueden calcularse con estas estimaciones. Tal como en Nevo (2000a), asumiremos la siguiente función de beneficios, siendo J el total de marcas de las F firmas:

$$\Pi_f = \sum_{j=1}^{J_f}(p_j - CM_j)Ms_j(p) - C_f \tag{2}$$

De donde podemos derivar la condición de primer orden:

$$0 = s_j(p) + \sum_{j=1}^{J}(p_j - CM_j)\frac{\partial s_j(p)}{\partial p_j} \tag{3}$$

Siguiendo a Knittel and Metaxoglou (2014), de esta forma es posible inferir los costos marginales, mediante la siguiente condición de primer orden asociada al problema de maximización de ganancias de las empresas:

$$p - mc = \Omega(p)^1 s(p) \tag{4}$$

donde p es el vector de precios, $s(\cdot)$ es el vector de *market shares* y mc son los costos marginales correspondientes. La dimensión de estos vectores es igual al número de productos disponibles en el mercado, en nuestro caso, 11. La matriz de estructura de propiedad es de dimensión 11×11 con su elemento (i, j) igual a $-\frac{\partial s_i(p)}{\partial p_j}$ si los productos i y j son producidos por la misma empresa y 0 en caso contrario. Debido a que los precios se observan y, además, podemos estimar Ω a través de las elasticidades, las estimaciones de los costos marginales, mc, se obtienen directamente mediante la ecuación (4). En este sentido, utilizamos la siguiente fórmula[3]:

$$p^{pre} - \hat{mc} = \hat{\Omega}^{pre}(p^{pre})^{-1}\hat{s}(p^*) \tag{5}$$

donde $\hat{\Omega}^{pre}(p^*)^{-1}$ es la inversa de

$$\hat{\Omega}^{pre}(p^{pre}) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s_1}{\partial p_1}(p^{pre})\cdot D_{1,1} & -\frac{\partial s_2}{\partial p_1}(p^{pre})\cdot D_{1,2} & \cdots & -\frac{\partial s_{11}}{\partial p_1}(p^{pre})\cdot D_{1,11} \\ -\frac{\partial s_1}{\partial p_2}(p^{pre})\cdot D_{2,1} & -\frac{\partial s_2}{\partial p_2}(p^{pre})\cdot D_{2,2} & \cdots & -\frac{\partial s_{11}}{\partial p_2}(p^{pre})\cdot D_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial s_1}{\partial p_{11}}(p^{pre})\cdot D_{11,1} & -\frac{\partial s_2}{\partial p_{11}}(p^{pre})\cdot D_{11,2} & \cdots & -\frac{\partial s_{11}}{\partial p_{11}}(p^{pre})\cdot D_{11,11} \end{pmatrix} \tag{6}$$

con:

$$D_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si los productos i y j son producidos por la misma firma} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

[3] https://cran.r-project.org/web/packages/BLPestimatoR/vignettes/blp_intro.html

y donde las derivadas parciales son calculadas con las elasticidades (iguales a las que calculamos en el punto 1.6):

$$\frac{\partial s_i}{\partial p_j} = \eta_{ij} \cdot \frac{s_i}{p_j}$$

Para hacer lugar al cambio en la estructura de la industria, como el que implica la fusión entre competidores, lo que realizamos es un intercambio de 0's y 1's en la matriz de estructura de propiedad. Luego, siguiendo a Knittel and Metaxoglou (2014), el vector de precios posteriores a la fusión, p^*, es la solución del siguiente sistema de ecuaciones no lineales[4]:

$$p^* - \hat{mc} = \hat{\Omega}^{post}(p^*)^{-1}\hat{s}(p^*) \tag{7}$$

donde los elemento de $\hat{\Omega}^{post}$ reflejan los cambios en la estructura de mercado y donde $\hat{s}(p^*)$ es el vector de cuotas de mercado antes de la fusión. Ahora bien, una aproximación a esta solución es discutida en Knittel and Metaxoglou (2014), permitiendo obtener una solución que evita resolver para el sistema de ecuaciones no lineales. Esta misma está dada por:

$$p^{approx} = \hat{mc} + \hat{\Omega}^{post}(p^{pre})^{-1}\hat{s}(p^*) \tag{8}$$

Ahora bien, dado que en nuestro ejercicio el requerimiento era el precio post-fusión de la tienda 9 en la semana 10, los precios utilizados son una matriz de dimensión 11×1, que se utilizan para estimar luego los precios post-fusión de esa misma tienda y semana. También fue realizado el ejercicio con los precios promedio totales.

En la siguiente tabla presentamos las estimaciones de la matriz $\hat{\Omega}^{pre}(p^{pre})$ en la tienda 9 en la semana 10[5], tanto para el caso previo a la fusión de las empresas como al caso posterior. Como puede verse, la matriz respeta la configuración del mercado, arrojando valores en las celdas correspondientes a la misma. Por supuesto, esto es lo correcto y se visualiza así los resultados de $-\frac{\partial s_j}{\partial p_k}$ para todos los pares (i, j). Vale recalcar que estos resultados se obtuvieron con las estimaciones $\hat{\alpha}$ del modelo de MCO con FE por marca (vea la subsección 3.2).

Table 8: Matriz $\hat{\Omega}^{pre}(p^{pre})$ previa a la fusión (tienda 9, semana 10)

Marca 1 (25)	Marca 1 (50)	Marca 1 (100)	Marca 2 (25)	Marca 2 (50)	Marca 2 (100)	Marca 3 (25)	Marca 3 (50)	Marca 3 (100)	Marca 4 (50)	Marca 4 (100)
0.021437	-0.001743	-0.001743	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.002278	0.024226	-0.002278	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.004400	-0.004400	0.032433	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.019170	-0.001368	-0.001368	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000478	0.011666	-0.000478	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	-0.000064	-0.000064	0.004392	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.007047	-0.000169	-0.000169	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000172	0.007114	-0.000172	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000471	-0.000471	0.011579	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.022096	-0.001862
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000937	0.016064

[4] La solución de este conjunto de ecuaciones no lineales también puede ser obtenida mediante la función "foc_bertrand_mkt" y el paquete "nleqslv" de R.

[5] Si bien no presentamos las estimaciones de esta misma matriz para el caso general, esto puede ser calculado y exportado en formato LaTeXcon el código de Python adjuntado a este trabajo.

Table 9: Matriz $\hat{\Omega}^{pre}(p^{pre})$ posterior a la fusión (tienda 9, semana 10)

Marca 1 (25)	Marca 1 (50)	Marca 1 (100)	Marca 2 (25)	Marca 2 (50)	Marca 2 (100)	Marca 3 (25)	Marca 3 (50)	Marca 3 (100)	Marca 4 (50)	Marca 4 (100)
0.021437	-0.001743	-0.001743	-0.001743	-0.001743	-0.001743	-0.001743	-0.001743	-0.001743	0.000000	0.000000
-0.002278	0.024226	-0.002278	-0.002278	-0.002278	-0.002278	-0.002278	-0.002278	-0.002278	0.000000	0.000000
-0.004400	-0.004400	0.032433	-0.004400	-0.004400	-0.004400	-0.004400	-0.004400	-0.004400	0.000000	0.000000
-0.001368	-0.001368	-0.001368	0.019170	-0.001368	-0.001368	-0.001368	-0.001368	-0.001368	0.000000	0.000000
-0.000478	-0.000478	-0.000478	-0.000478	0.011666	-0.000478	-0.000478	-0.000478	-0.000478	0.000000	0.000000
-0.000064	-0.000064	-0.000064	-0.000064	-0.000064	0.004392	-0.000064	-0.000064	-0.000064	0.000000	0.000000
-0.000169	-0.000169	-0.000169	-0.000169	-0.000169	-0.000169	0.007047	-0.000169	-0.000169	0.000000	0.000000
-0.000172	-0.000172	-0.000172	-0.000172	-0.000172	-0.000172	-0.000172	0.007114	-0.000172	0.000000	0.000000
-0.000471	-0.000471	-0.000471	-0.000471	-0.000471	-0.000471	-0.000471	-0.000471	0.011579	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.022096	-0.001862
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000937	0.016064

Ahora bien, con estos resultados como input, procedimos a la estimación de costos marginales y precios post-fusión, que se presentan en las tablas 10 y 11.

Table 10: Estimaciones utilizando valores anuales promedio

Marca	Precios pre-fusión	Logit predict	Costo marginal
Marca 1 (25)	3.420465	7.650857	-1.037815
Marca 1 (50)	4.942023	10.176803	0.195270
Marca 1 (100)	7.016067	10.429974	2.792294
Marca 2 (25)	2.963647	6.544168	-1.112323
Marca 2 (50)	5.145023	7.482574	1.358128
Marca 2 (100)	8.159743	9.233939	4.666666
Marca 3 (25)	2.673054	3.922324	-0.842393
Marca 3 (50)	3.607203	4.664182	0.133653
Marca 3 (100)	3.966644	6.421448	0.188533
Marca 4 (50)	1.928476	1.928476	-1.746242
Marca 4 (100)	4.447172	4.447172	0.874409

Table 11: Estimaciones para la tienda 9 en la semana 10

Marca	Precios pre-fusión	Logit predict	Costo marginal
Marca 1 (25)	3.29	6.552090	-0.970001
Marca 1 (50)	4.87	8.599999	0.464158
Marca 1 (100)	6.38	11.563504	1.521121
Marca 2 (25)	2.83	5.884449	-1.150125
Marca 2 (50)	5.29	7.096017	1.611053
Marca 2 (100)	8.39	9.052791	4.986852
Marca 3 (25)	2.71	3.792817	-0.782404
Marca 3 (50)	3.34	4.433433	-0.154847
Marca 3 (100)	3.97	5.778233	0.310681
Marca 4 (50)	1.69	1.690000	-2.134469
Marca 4 (100)	4.49	4.490000	0.834290

Son varias las conclusiones que pueden sacarse de estas estimaciones. En primer lugar, como el enunciado requería, los precios de las estimaciones para las últimas dos marcas (las marcas genéricas) no cambian! Este es un resultado muy alentador para nuestras estimaciones porque advierte que el procedimiento ha sido realizado correctamente. En segundo lugar, tanto las estimaciones para la tienda 9 en la semana 10 (tabla 11) como para el caso general (tabla 10) dan como resultado unos precios mayores post-fusión. Esto implica que aprovechando el nuevo poder de mercado que le concede la fusión, la empresa absorbe mayor cantidad del excedente del consumidor, aumentando sus precios. En tercer lugar, podemos ver que las estimaciones de los costos marginales son negativas. Esto es un resultado que disminuye la potencia de nuestras estimaciones, pero creemos no las anula, al respetar, por lo menos, que todas las estimaciones arrojan resultados menores a los precios pre-fusión.

El resultado estimado de estos precios con los coeficientes aleatorios de BLP queda remanente, debido a que las estimaciones no han podido realizarse correctamente.

References

Amemiya, T. (1974). The nonlinear two-stage least-squares estimator. *Journal of econometrics*, *2*(2), 105–110.

Berry, S., Levinsohn, J., & Pakes, A. (1995). Automobile prices in market equilibrium. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 841–890.

Berry, S. T. (1994). Estimating discrete-choice models of product differentiation. *The RAND Journal of Economics*, 242–262.

Cameron, A. C., & Trivedi, P. K. (2005). *Microeconometrics: methods and applications*. Cambridge university press.

Dubé, J.-P., Fox, J. T., & Su, C.-L. (2012). Improving the numerical performance of static and dynamic aggregate discrete choice random coefficients demand estimation. *Econometrica*, *80*(5), 2231–2267.

Knittel, C. R., & Metaxoglou, K. (2008). *Estimation of random coefficient demand models: Challenges, difficulties and warnings* (Tech. Rep.). National Bureau of Economic Research.

Knittel, C. R., & Metaxoglou, K. (2014). Estimation of random-coefficient demand models: two empiricists' perspective. *Review of Economics and Statistics*, *96*(1), 34–59.

Nevo, A. (2000a). Mergers with differentiated products: The case of the ready-to-eat cereal industry. *The RAND Journal of Economics*, 395–421.

Nevo, A. (2000b). A practitioner's guide to estimation of random-coefficients logit models of demand. *Journal of economics & management strategy*, *9*(4), 513–548.

Nevo, A. (2001). Measuring market power in the ready-to-eat cereal industry. *Econometrica*, *69*(2), 307–342.