Esercizi Crediti Tipo D Salvucci-Noce

Esercizi

Esercizio 1

Il primo esercizio chiede di scrivere in MATLAB una function che calcoli l'algoritmo di **Ruffini-Horner** per la valutazione del polinomio d'interpolazione in un punto:

Esercizio d'implementazione dell'algoritmo di valutazione del polinomio d'interpolazione in più punti.

Codice Esercizio 1

Questo codice genera un vettore di coefficienti per le differenze divise:

Esercizio 1.1

```
function p_t = interpola_ruffini_horner(x, y, t)
    % Input:
    % x: vettore dei punti x0, x1, ..., xn (devono essere distinti)
    % y: vettore dei valori corrispondenti y0, y1, ..., yn
    % t: vettore dei punti t1, t2, ..., tm dove si vuole valutare il polinomio interpolante

    % Output:
    % p_t: vettore contenente le valutazioni del polinomio interpolante nei punti t

    % Calcola i coefficienti del polinomio usando le differenze divise
    coeff = differenze_divise(x, y);

    % Valuta il polinomio nei punti t usando lo schema di Horner
    p_t = horner_eval(coeff, x, t);
end

function coeff = differenze_divise(x, y)
    % Calcola i coefficienti delle differenze divise
    n = length(x);
    coeff = y;  % Copia il vettore y

```

```
    % Costruisce la tabella delle differenze divise
    for j = 2:n
        for i = n:-1:j
            coeff(i) = (coeff(i) - coeff(i-1)) / (x(i) - x(i-j+1));
        end
    end
end

function p_t = horner_eval(coeff, x, t)
    % Valuta il polinomio usando lo schema di Horner
    n = length(coeff);
    m = length(t);
    p_t = zeros(1, m);

    for k = 1:m
        % Inizializza il polinomio con il termine di grado più alto
        p = coeff(n);

        % Applica lo schema di Horner
        for i = n-1:-1:1
            p = p * (t(k) - x(i)) + coeff(i);
        end

        % Salva il risultato della valutazione nel punto t(k)
        p_t(k) = p;
    end
end
```

Questo codice genera la **matrice** delle differenze divise:

```
function p_t = interpola_ruffini_horner(x, y, t)
    % Input:
    % x: vettore dei punti x0, x1, ..., xn (devono essere distinti)
    % y: vettore dei valori corrispondenti y0, y1, ..., yn
    % t: vettore dei punti t1, t2, ..., tm dove si vuole valutare il polinomio interpolante

    % Output:
    % p_t: vettore contenente le valutazioni del polinomio interpolante nei punti t

    % Calcola la matrice delle differenze divise
    diff_matrix = differenze_divise(x, y);

    % Estrai i coefficienti dalla diagonale principale della matrice
    coeff = diag(diff_matrix);

    % Valuta il polinomio nei punti t usando lo schema di Horner
    p_t = horner_eval(coeff, x, t);
```

```
18  end
19
20  function diff_matrix = differenze_divise(x, y)
21      % Calcola la matrice delle differenze divise
22      n = length(x);
23      diff_matrix = zeros(n, n);  % Inizializza la matrice delle
    differenze divise
24
25      % Copia il vettore y nella prima colonna
26      diff_matrix(:, 1) = y(:);
27
28      % Costruisce la tabella delle differenze divise
29      for j = 2:n
30          for i = j:n
31              diff_matrix(i, j) = (diff_matrix(i, j-1) - diff_matrix(i-1,
    j-1)) / (x(i) - x(i-j+1));
32          end
33      end
34  end
35
36  function p_t = horner_eval(coeff, x, t)
37      % Valuta il polinomio usando lo schema di Horner
38      n = length(coeff);
39      m = length(t);
40      p_t = zeros(1, m);
41
42      for k = 1:m
43          % Inizializza il polinomio con il termine di grado più alto
44          p = coeff(n);
45
46          % Applica lo schema di Horner
47          for i = n-1:-1:1
48              p = p * (t(k) - x(i)) + coeff(i);
49          end
50
51          % Salva il risultato della valutazione nel punto t(k)
52          p_t(k) = p;
53      end
54  end
55
```

Spiegazione

1. **Funzione principale (`interpola_ruffini_horner`)**:
   - Prende in input i vettori `x` (ascisse), `y` (ordinate) e `t` (punti in cui valutare il polinomio).
   - Prima usa la funzione `differenze_divise` per calcolare i coefficienti del polinomio interpolante nella forma di Newton.

- Poi usa la funzione `horner_eval` per valutare il polinomio nei punti desiderati applicando lo schema di Horner.

2. **Calcolo delle differenze divise (`differenze_divise`)**:
   - Costruisce la tabella delle differenze divise e restituisce i coefficienti del polinomio interpolante.
   - L'algoritmo funziona partendo dai valori `y` e iterando per costruire le differenze successive.
3. **Valutazione con lo schema di Horner (`horner_eval`)**:
   - Prende i coefficienti del polinomio e valuta il polinomio in ciascun punto di `t` usando lo schema di Horner.
   - Questo schema permette di valutare il polinomio in modo molto efficiente, riducendo il numero di operazioni necessarie.

Esercizio 2

Il secondo esercizio chiede di scrivere una function MATLAB per implementare la **formula dei trapezi** di una data funzione presa in input:

Esercizio d'implementazione della formula dei trapezi

Codice Esercizio 2

Esercizio 1.2

```matlab
function In = formula_trapezi(f, a, b, n)
    % Input:
    % f: funzione da integrare (definita su [a,b])
    % a: estremo sinistro dell'intervallo
    % b: estremo destro dell'intervallo
    % n: numero di sottointervalli (n >= 1)

    % Output:
    % In: approssimazione dell'integrale di f(x) su [a, b] usando la formula dei trapezi

    % Larghezza di ciascun sottointervallo
    h = (b - a) / n;

    % Calcolo della somma dei valori intermedi
    somma = 0;
    for i = 1:n-1
        xi = a + i*h;
        somma = somma + f(xi);
    end

    % Formula dei trapezi
    In = h*((f(a)+f(b))/2+somma)
```

```
23  end
```

Spiegazione

Funzione `formula_trapezi`:

- Prende in input la funzione da integrare `f`, gli estremi dell'intervallo `[a, b]`, e il numero di sottointervalli `n`.
- Calcola la larghezza di ciascun sottointervallo come $h = \frac{b-a}{n}$
- Usa la **formula dei trapezi** per calcolare un'approssimazione dell'integrale:

$$I_n = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) \right]$$

- Restituisce l'approssimazione I_n della funzione $f(x)$ passata in input usando la formula dei trapezi.

Esercizio 3

Il terzo esercizio chiede di scrivere una function MATLAB per implementare il **metodo di estrapolazione** di una data funzione presa in input. Chiede inoltre di usare le function MATLAB usate per risolvere gli esercizi 1 e 2

Esercizio d'implementazione del metodo di estrapolazione

Codice Esercizio 3

Esercizio 1.3

```
1   function p0 = estrapol(f, a, b, n_vect)
2       % Input:
3       % f: funzione da integrare
4       % a: estremo sinistro dell'intervallo
5       % b: estremo destro dell'intervallo
6       % n_vect: vettore dei valori di n0, n1, ..., nm
7
8       % Output:
9       % p0: valore estrapolato p(0)
10
11      % Prealloca i vettori per h^2 e In
12      m = length(n_vect);
13      h_squared = zeros(1, m);
14      In_values = zeros(1, m);
15
16      % Calcola h^2 e In per ogni n in n_vect
17      for i = 1:m
18          n = n_vect(i);
19          h = (b - a) / n;  % Passo di discretizzazione
```

```
        h_squared(i) = h^2;
        In_values(i) = formula_trapezi(f, a, b, n);
    end

    % Interpola i valori (h^2, In) usando le differenze divise
    % La funzione interpola_ruffini_horner accetta vettori di x (qui h^2) e y (qui In_values)
    % t=0 perché vogliamo estrapolare p(0)
    p0 = interpola_ruffini_horner(h_squared, In_values, 0);

        % Se viene specificato il numero di cifre, usa vpa per ottenere precisione       if nargin > 4
                p0 = vpa(p0, cifre); % Calcola p0 con precisione specificata
        end
end
```

Spiegazione del codice

1. **Input**:
   - `f` : la funzione da integrare.
   - `a` e `b` : gli estremi dell'intervallo su cui si calcola l'integrale.
   - `n_vect` : un vettore di valori $n_0, n_1, \ldots, n_m$ usati per il calcolo degli integrali.
2. **Output**:
   - `p0` : il valore estrapolato $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio interpolante ottenuto dai valori di h^2 e I_n.
3. **Calcolo di h^2 e I_n**:
   - Per ogni n_i nel vettore `n_vect` , il programma calcola il passo h e il corrispondente integrale approssimato I_n utilizzando la formula dei trapezi fornita nell'Esercizio 2.
4. **Interpolazione**:
   - I valori h^2 e I_n vengono usati per ottenere il polinomio interpolante con la funzione di interpolazione `interpola_ruffini_horner` , che è la soluzione all'Esercizio 1.11.
5. **Estrapolazione**:
   - Il programma valuta il polinomio interpolante nel punto $t = 0$ per ottenere $p(0)$.

Uso delle altre funzioni

- `interpola_ruffini_horner` , `differenze_divise` e `horner_eval` provengono dall'Esercizio 1.1.
- `formula_trapezi` viene dall'Esercizio 1.2 per approssimare gli integrali usando la formula dei trapezi.

- `vpa(p0, cifre)` viene usato per approssimare correttamente il risultato con il numero di cifre passate in input. Questa è una funzione del Toolbox **Symbolic Math Toolbox**

Esercizio 4

L'esercizio chiede di creare una function MATLAB per implementare il **metodo di Jacobi**.

Esercizio d'implementazione del metodo di Jacobi

Codice Esercizo 4

Questo codice implementa il metodo di Jacobi componente per componente:

Esercizio 1.4

```
function [x, K, r_norm] = jacobi_method(A, b, x0, epsilon, N_max)
    % Input:
    % A: matrice del sistema lineare Ax = b
    % b: vettore dei termini noti
    % x0: vettore di innesco (stima iniziale di x)
    % epsilon: soglia di precisione
    % N_max: numero massimo di iterazioni consentite

    % Output:
    % x: vettore approssimato x^(K) dopo K iterazioni o x^(N_max)
    % K: numero di iterazioni effettivamente eseguite
    % r_norm: norma ||r^(K)||_2 del residuo alla fine del processo

    % Numero di variabili (dimensione del sistema)
    n = length(b);

    % Inizializza la variabile per il vettore x^(K) (soluzione corrente)
    x = x0;

    % Itera il metodo di Jacobi
    for K = 1:N_max
        % Prealloca il vettore x^(K+1)
        x_new = zeros(n, 1);

        % Calcola ogni componente di x^(K+1)
        for i = 1:n
            % Somma degli elementi a sinistra di x^(K)
            sum1 = A(i, 1:i-1) * x(1:i-1);
            % Somma degli elementi a destra di x^(K)
            sum2 = A(i, i+1:n) * x(i+1:n);
            % Formula del metodo di Jacobi
            x_new(i) = (b(i) - sum1 - sum2) / A(i, i);
        end

```

```
        % Calcola il residuo r^(K) = b - A * x^(K)
        r = b - A * x_new;

        % Calcola la norma del residuo ||r^(K)||_2
        r_norm = norm(r, 2);

        % Condizione di arresto: se ||r^(K)||_2 <= epsilon * ||b||_2
        if r_norm <= epsilon * norm(b, 2)
            x = x_new;
            return;  % Arresta l'algoritmo e restituisce il risultato
        end

        % Aggiorna la soluzione corrente x^(K) con x^(K+1)
        x = x_new;
    end

    % Se si raggiunge N_max iterazioni senza soddisfare il criterio, si restituisce
    % x^(N_max), il relativo indice N_max e la norma del residuo ||r^(N_max)||_2
end
```

Questo codice implementa il metodo di Jacobi con il metodo iterativo:

```
function [x, K, r_norm] = jacobiIterativo(A, b, x0, epsilon, N_max)
    % Metodo di Jacobi - Versione Iterativa
    % Input:
    % A: matrice del sistema lineare Ax = b
    % b: vettore dei termini noti
    % x0: vettore di innesco (stima iniziale di x)
    % epsilon: soglia di precisione
    % N_max: numero massimo di iterazioni consentite

    % Output:
    % x: vettore approssimato x^(K) dopo K iterazioni o x^(N_max)
    % K: numero di iterazioni effettivamente eseguite
    % r_norm: norma ||r^(K)||_2 del residuo alla fine del processo

    % Separazione di D, L e U dalla matrice A
    D = diag(diag(A));           % Matrice diagonale
    L = tril(A, -1);             % Parte triangolare inferiore
    U = triu(A, 1);              % Parte triangolare superiore

    % Pre-calcolo della matrice iterativa M = D^(-1) * (L + U)
    D_inv = inv(D);              % Inversa della diagonale
    M = -D_inv * (L + U);        % Matrice di iterazione

    % Pre-calcolo del termine costante c = D^(-1) * b
    c = D_inv * b;
```

```
26
27      % Inizializza il vettore soluzione con la stima iniziale
28      x = x0;
29
30      % Itera il metodo di Jacobi
31      for K = 1:N_max
32          % Aggiornamento vettoriale: x^(k+1) = M * x^(k) + c
33          x_new = M * x + c;
34
35          % Calcola il residuo r^(K) = b - A * x^(K)
36          r = b - A * x_new;
37
38          % Calcola la norma del residuo ||r^(K)||_2
39          r_norm = norm(r, 2);
40
41          % Condizione di arresto: ||r^(K)||_2 <= epsilon * ||b||_2
42          if r_norm <= epsilon * norm(b, 2)
43              x = x_new;
44              return;  % Arresta l'algoritmo e restituisce il risultato
45          end
46
47          % Aggiorna la soluzione corrente x^(K)
48          x = x_new;
49      end
50
51      % Se si raggiunge N_max iterazioni senza soddisfare il criterio, si
    restituisce
52      % x^(N_max), il relativo indice N_max e la norma del residuo
    ||r^(N_max)||_2
53  end
54
```

Spiegazione del codice

1. **Input:**
   - `A` : La matrice del sistema lineare.
   - `b` : Il vettore dei termini noti.
   - `x0` : Il vettore di innesco (cioè la stima iniziale di x).
   - `epsilon` : La soglia di precisione per il residuo.
   - `N_max` : Il numero massimo di iterazioni consentite.
2. **Output:**
   - `x` : Il vettore soluzione $x^{(K)}$, dove K è il numero di iterazioni.
   - `K` : Il numero di iterazioni effettivamente eseguite.
   - `r_norm` : La norma $||r^{(K)}||_2$ del residuo $r^{(K)} = b - A \cdot x^{(K)}$.
3. **Procedura:**

- Il metodo di Jacobi viene applicato iterativamente fino a quando il residuo $||r^{(K)}||_2$ diventa minore o uguale a $\epsilon \cdot ||b||_2$, oppure si raggiunge il numero massimo di iterazioni $N_{\max}$.
- Se nessuna delle iterazioni soddisfa la condizione di arresto, il programma restituisce $x^{(N_{\max})}$.

Esercizio 5

L'esercizio chiede di creare una function MATLAB per implementare il **metodo di Gauss-Sidel**.

Esercizio d'implementazione del metodo di Gauss-Seidel

Codice Esercizio 5

Questo è il codice di Gauss-Seidel componente per componente

Esercizio 1.5

```
function [x, K, r_norm] = metodo_gauss_seidel(A, b, x0, epsilon, N_max)
    % Input:
    % A: matrice del sistema lineare Ax = b
    % b: vettore dei termini noti
    % x0: vettore di innesco (stima iniziale di x)
    % epsilon: soglia di precisione
    % N_max: numero massimo di iterazioni consentite

    % Output:
    % x: vettore approssimato x^(K) dopo K iterazioni o x^(N_max)
    % K: numero di iterazioni effettivamente eseguite
    % r_norm: norma ||r^(K)||_2 del residuo alla fine del processo

    % Numero di variabili (dimensione del sistema)
    n = length(b);

    % Inizializza la soluzione corrente con il vettore di innesco x0
    x = x0;

    % Itera il metodo di Gauss-Seidel
    for K = 1:N_max
        % Memorizza la soluzione precedente x^(K-1)
        x_old = x;

        % Calcola ogni componente di x^(K)
        for i = 1:n
            % Somma degli elementi a sinistra di x^(K)
            sum1 = A(i, 1:i-1) * x(1:i-1);
            % Somma degli elementi a destra di x^(K-1)
```

```
            sum2 = A(i, i+1:n) * x_old(i+1:n);
            % Formula del metodo di Gauss-Seidel
            x(i) = (b(i) - sum1 - sum2) / A(i, i);
        end

        % Calcola il residuo r^(K) = b - A * x^(K)
        r = b - A * x;

        % Calcola la norma del residuo ||r^(K)||_2
        r_norm = norm(r, 2);

        % Condizione di arresto: se ||r^(K)||_2 <= epsilon * ||b||_2
        if r_norm <= epsilon * norm(b, 2)
            return;  % Arresta l'algoritmo e restituisce il risultato
        end
    end

    % Se si raggiunge N_max iterazioni senza soddisfare il criterio, si restituisce
    % x^(N_max), il relativo indice N_max e la norma del residuo ||r^(N_max)||_2
end
```

Questo è il metodo di Gauss-Seidel iterativo

```
function [x, K, r_norm] = gauss_seidelIterativo(A, b, x0, epsilon, N_max)
    % Metodo di Gauss-Seidel - versione Iterativa
    % Input:
    % A: matrice del sistema lineare Ax = b
    % b: vettore dei termini noti
    % x0: vettore di innesco (stima iniziale di x)
    % epsilon: soglia di precisione
    % N_max: numero massimo di iterazioni consentite

    % Output:
    % x: vettore approssimato x^(K) dopo K iterazioni o x^(N_max)
    % K: numero di iterazioni effettivamente eseguite
    % r_norm: norma ||r^(K)||_2 del residuo alla fine del processo

    % Separazione della matrice A in E (triangolare inferiore) e U (triangolare superiore)
    E = tril(A);               % Parte triangolare inferiore (inclusa diagonale)
    U = triu(A, 1);            % Parte triangolare superiore (esclusa diagonale)

    % Pre-calcolo della matrice iterativa G = E^(-1) * U
```

```
    G = -E \ U;                % G = -inv(E) * U (calcolo efficace tramite backslash operator)

    % Pre-calcolo del termine costante c = E^(-1) * b
    c = E \ b;                 % c = inv(E) * b

    % Inizializza la soluzione corrente con il vettore di innesco x0
    x = x0;

    % Itera il metodo di Gauss-Seidel
    for K = 1:N_max
        % Aggiornamento vettoriale: x^(k+1) = G * x^(k) + c
        x_new = G * x + c;

        % Calcola il residuo r^(K) = b - A * x^(K)
        r = b - A * x_new;

        % Calcola la norma del residuo ||r^(K)||_2
        r_norm = norm(r, 2);

        % Condizione di arresto: ||r^(K)||_2 <= epsilon * ||b||_2
        if r_norm <= epsilon * norm(b, 2)
            x = x_new;
            return;  % Arresta l'algoritmo e restituisce il risultato
        end

        % Aggiorna la soluzione corrente x^(K)
        x = x_new;
    end

    % Se si raggiunge N_max iterazioni senza soddisfare il criterio, si restituisce
    % x^(N_max), il relativo indice N_max e la norma del residuo ||r^(N_max)||_2
end
```

Spiegazione Codice

1. **Input:**
   - `A` : La matrice del sistema lineare.
   - `b` : Il vettore dei termini noti.
   - `x0` : Il vettore di innesco (cioè la stima iniziale di x).
   - `epsilon` : La soglia di precisione per il residuo.
   - `N_max` : Il numero massimo di iterazioni consentite.
2. **Output:**
   - `x` : Il vettore soluzione $x^{(K)}$, dove K è il numero di iterazioni.
   - `K` : Il numero di iterazioni effettivamente eseguite.

- `r_norm`: La norma $||r^{(K)}||_2$ del residuo $r^{(K)} = b - A \cdot x^{(K)}$.

3. **Procedura:**
   - Il metodo di Gauss-Seidel iterativo aggiorna ogni componente del vettore $x^{(K)}$ tenendo conto dei valori già aggiornati di x_i, a differenza del metodo di Jacobi, dove si usano solo i valori dell'iterazione precedente.
   - L'arresto del processo avviene quando la norma del residuo $||r^{(K)}||_2$ è inferiore o uguale a $\epsilon \cdot ||b||_2$ oppure si raggiunge il numero massimo di iterazioni $N_{\max}$.

Esercizio 6

L'esercizio 6 chiede di creare una function MATLAB che implementi il **metodo della bisezione**, ovvero il metodo che permette di trovare il punto ξ di una funzione $f(x)$ definita su intervallo $[a, b]$ tale che $f(\xi) = 0$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ tale che $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno opposto : $f(a)f(b) < 0$. Un teorema dell'analisi matematica (teorema degli zeri) garantisce che la funzione $f(x)$ ha almeno uno zero nell'intervallo (a, b), cioè esiste un punto $\zeta \in (a, b)$ tale che $f(\zeta) = 0$;

Figura 1.1

“Pasted image 20241111102714.png” could not be found.

Una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $f(a)f(b) < 0$ possiede almeno uno zero $\zeta \in (a, b)$.

Supponiamo che $f(x)$ abbia un unico zero ζ in (a, b). Un metodo per determinare un'approssimazione ξ di ζ è il metodo di bisezione: fissata una soglia di precisione $\varepsilon > 0$, il metodo costruisce la successione di intervalli

$$[\alpha_k, \beta_k], \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

in cui $[\alpha_0, \beta_0] = [a, b]$ e, per $k \leq 1$,

$$[\alpha_k, \beta_k] = \begin{cases} [\alpha_{k-1}, \frac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}], \textit{se } \zeta \in [\alpha_{k-1}, \frac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}] \textit{ cioè } f(\alpha_{k-1})f(\frac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}) \leq 0, \\ [\frac{\alpha_{k-1}+\beta_{k-1}}{2}, \beta_{k-1}], \textit{ altrimenti.} \end{cases}$$

La successione di intervalli così costruita gode delle seguenti proprietà:

- $\zeta \in [\alpha_k, \beta_k]$ per tutti i $k \geq 0$;
- ogni intervallo è metà del precedente e dunque la lunghezza di $[\alpha_k, \beta_k]$ è $\beta_k - \alpha_k = \frac{b-a}{2^k}$ per ogni $k \geq 0$.
  Il metodo si arresta al primo indice K tale che $\beta_K - \alpha_K \leq \varepsilon$ e restituisce come risultato il punto medio ξ dell’intervallo $[\alpha_K, \beta_K]$ dato da $\xi = \frac{\alpha_K+\beta_k}{2}$. In questo modo, siccome $\zeta \in [\alpha_K, \beta_K]$, si ha $|\xi - \zeta| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Osserviamo che l'indice di arresto K è il più piccolo intero ≥ 0 tale che

$$\beta_k - \alpha_k \leq \varepsilon \iff \frac{b-a}{2^K} \leq \varepsilon \iff 2^K \geq \frac{b-a}{\varepsilon} \iff K \geq \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}),$$

cioè $K = \lceil \log_2(\frac{b-a}{\varepsilon}) \rceil$.

Scrivere un programma Matlab che implementa il metodo di bisezione. Il programma deve:

- prendere in input gli estremi a, b di un intervallo, una funzione continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, con $f(a)f(b) < 0$ e con un unico zero $\zeta \in (a, b)$, e un $\varepsilon > 0$;
- restituire in output l'approssimazione ξ di ζ ottenuta con il metodo di bisezione sopra descritto, l'indice di arresto K del metodo, e il valore $f(\xi)$ (che sarà all'incirca pari a $0 = f(\zeta)$).

Codice

Esercizio 1.6

```
function [xi, K, fx] = bisezione(a, b, f, epsilon)
    % Verifica che f(a) e f(b) abbiano segno opposto
    if f(a) * f(b) > 0
        error('f(a) e f(b) devono avere segni opposti');
    end

    % Inizializzazione degli estremi dell'intervallo e contatore delle iterazioni
    alpha_k = a;
    beta_k = b;
    K = 0;

    % Ripeti finché la lunghezza dell'intervallo è maggiore della precisione richiesta
    while (beta_k - alpha_k) / 2 > epsilon
        % Calcola il punto medio dell'intervallo
        xi = (alpha_k + beta_k) / 2;

        % Aggiorna gli estremi dell'intervallo in base al segno di f(xi)
        if f(alpha_k) * f(xi) <= 0
            beta_k = xi;
        else
            alpha_k = xi;
        end

        % Incrementa il contatore delle iterazioni
        K = K + 1;
    end

```

```
28        % Calcola l'approssimazione finale di xi come punto medio
    dell'ultimo intervallo
29        xi = (alpha_k + beta_k) / 2;
30        fx = f(xi); % Calcola il valore di f in xi
31    end
```

Spiegazione

- **Verifica dei segni**: la funzione controlla che $f(a)$ e $f(b)$ abbiano segno opposto, come richiesto dal teorema degli zeri.
- **Inizializzazione**: definisce $\alpha_k = a$ e $\beta_k = b$ e imposta il contatore $K = 0$
- **Iterazione del metodo di bisezione**: continua a suddividere l'intervallo finché la metà della sua lunghezza è maggiore di ε. Ad ogni iterazione:
  - Calcola il punto medio ξ.
  - Aggiorna gli estremi in base al segno di $f(\xi)$ rispetto a $f(\alpha_k)$.
  - Incrementa K.
- **Output finale**: restituisce l'approssimazione ξ, l'indice K, e $f(\xi)$.

Problemi

Problema 1

Si consideri la funzione $\sqrt{x}$.
(a) Sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione di $\sqrt{x}$ sui nodi

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{64},\ x_2 = \frac{4}{64},\ x_3 = \frac{9}{64},\ x_4 = \frac{16}{64},\ x_5 = \frac{25}{64},\ x_6 = \frac{36}{64},\ x_7 = \frac{49}{64},\ x_8 = 1.$$

Calcolare il vettore (colonna)

$$[p(\zeta_1) - \sqrt{\zeta_1} \qquad p(\zeta_2) - \sqrt{\zeta_2} \qquad \dots \qquad p(\zeta_{21}) - \sqrt{\zeta_{21}}]^T$$

dove $\zeta_i = \frac{i-1}{20}$ per $i = 1, \dots, 21$, e osservare in che modo varia la differenza $p(\zeta_i) - \sqrt{\zeta_i}$ al variare di i da 1 a 21.
(b) Tracciare il grafico di $\sqrt{x}$ e di $p(x)$ sull'intervallo $[0, 1]$, ponendo i due grafici su un'unica figura e inserendo una legenda che ci dica qual è la funzione $\sqrt{x}$ e qual è il polinomio $p(x)$.

Soluzione

Punto (a)

Con $\xi_i = \frac{i-1}{20}$, il vettore colonna $p(\xi_1) - \sqrt{\xi_1}, \ldots, p(\xi_{21}) - \sqrt{\xi_{21}}$ è

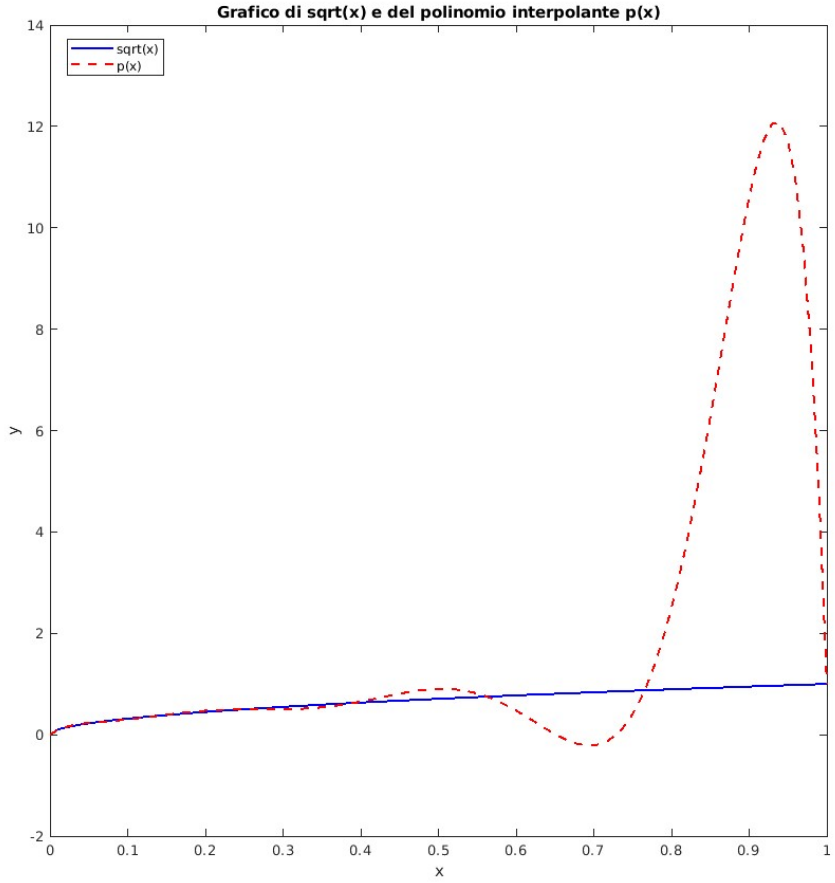
$$
\begin{aligned}
p(\xi_1) - \sqrt{\xi_1} &: 0 \\
p(\xi_2) - \sqrt{\xi_2} &: 0.009373456935820 \\
p(\xi_3) - \sqrt{\xi_3} &: -0.016624898598359 \\
p(\xi_4) - \sqrt{\xi_4} &: 0.006265159516694 \\
p(\xi_5) - \sqrt{\xi_5} &: 0.026059100541982 \\
p(\xi_6) - \sqrt{\xi_6} &: 0.000000000000000 \\
p(\xi_7) - \sqrt{\xi_7} &: -0.046798842893448 \\
p(\xi_8) - \sqrt{\xi_8} &: -0.052843679514480 \\
p(\xi_9) - \sqrt{\xi_9} &: 0.019043791981465 \\
p(\xi_{10}) - \sqrt{\xi_{10}} &: 0.136657922266046 \\
p(\xi_{11}) - \sqrt{\xi_{11}} &: 0.195969221000572 \\
p(\xi_{12}) - \sqrt{\xi_{12}} &: 0.070222900207986 \\
p(\xi_{13}) - \sqrt{\xi_{13}} &: -0.298665479678417 \\
p(\xi_{14}) - \sqrt{\xi_{14}} &: -0.793827451939188 \\
p(\xi_{15}) - \sqrt{\xi_{15}} &: -1.047857448417138 \\
p(\xi_{16}) - \sqrt{\xi_{16}} &: -0.461689802877381 \\
p(\xi_{17}) - \sqrt{\xi_{17}} &: 1.600121563949965 \\
p(\xi_{18}) - \sqrt{\xi_{18}} &: 5.337600132745608 \\
p(\xi_{19}) - \sqrt{\xi_{19}} &: 9.648720381277402 \\
p(\xi_{20}) - \sqrt{\xi_{20}} &: 10.731478361986454 \\
p(\xi_{21}) - \sqrt{\xi_{21}} &: -0.000000000000004
\end{aligned}
$$

Osservando i valori numerici, si può notare che:

- **L'errore non è costante:** La differenza $p(\xi_i) - \sqrt{\xi_i}$ assume sia valori positivi che negativi, indicando che il polinomio a volte sovrastima e a volte sottostima la funzione radice quadrata.
- **L'errore varia in modo significativo a seconda del punto:** In alcuni punti l'errore è molto piccolo (quasi nullo), mentre in altri è molto grande.

Punto (b)

Il grafico delle funzioni $\sqrt{x}$ e $p(x)$ è il seguente



Codice

Problema2.1

```
% Definisci i nodi di interpolazione e i valori corrispondenti di sqrt(x)
x_nodes = [0, 1/64, 4/64, 9/64, 16/64, 25/64, 36/64, 49/64, 1];
y_nodes = sqrt(x_nodes);

% Definisci i punti zeta_i dove valutare il polinomio interpolante
i = 1:21;
zeta = (i-1) / 20;

% Calcola il polinomio interpolante nei punti zeta usando Interpola_Ruffini_Horner
p_zeta = interpola_ruffini_horner(x_nodes, y_nodes, zeta);

% Calcola la funzione sqrt nei punti zeta
sqrt_zeta = sqrt(zeta);

% Calcola il vettore delle differenze p(zeta) - sqrt(zeta)
diff_vector = p_zeta - sqrt_zeta;

% Visualizza il vettore delle differenze
disp('Vettore delle differenze p(zeta_i) - sqrt(zeta_i}:');
```

```
disp(diff_vector.');

% Traccia il grafico di sqrt(x) e p(x) sull'intervallo [0, 1]
x_plot = linspace(0, 1, 100);  % Punti per il grafico
p_x_plot = interpola_ruffini_horner(x_nodes, y_nodes, x_plot);
sqrt_x_plot = sqrt(x_plot);

figure;
plot(x_plot, sqrt_x_plot, 'b-', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(x_plot, p_x_plot, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
legend('sqrt(x)', 'p(x)', 'Location', 'best');
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Grafico di sqrt(x) e del polinomio interpolante p(x)');
hold off;
```

Problema 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^x.$$

Per ogni intero $n \geq 1$ indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare

$$I = \int_0^1 f(x)dx = 1.7182818284590\ldots$$

(a) Per ogni fissato $\varepsilon > 0$ determinare un $n = n_\varepsilon$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$.
(b) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:

- il numero n_ε;
- il valore I_n per $n = n_\varepsilon$;
- il valore esatto I (per confrontarlo con I_n);
- l'errore $|I - I_n|$ (che deve essere $\leq \varepsilon$).

(c) Calcolare le approssimazioni di I ottenute con le formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} e confrontarle con il valore esatto I.
(d) Sia $p(x)$ il polinomio di interpolazione dei valori I_2, I_4, I_8, I_{16} sui nodi $h_2^2, h_4^2, h_8^2, h_{16}^2$, dove $h_2 = \frac{1}{2}, h_4 = \frac{1}{4}, h_8 = \frac{1}{8}, h_{16} = \frac{1}{16}$ sono i passi di discretizzazione relativi alle formule dei trapezi I_2, I_4, I_8, I_{16} rispettivamente. Calcolare $p(0)$ e confrontare $I_2, I_4, I_8, I_{16}, p(0)$ con il valore esatto I. Che cosa si nota?

Soluzione

Punto (a)

Per il teorema sull'errore o resto della formula dei trapezi, abbiamo che

$$\left| \int_0^1 e^x dx - I_n \right| = \left| -\frac{f''(\eta) \cdot 1}{12} \cdot h^2 \right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2}, \quad \eta \in [0,1]$$

Per determinare un $n = n(\varepsilon)$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$, calcoliamo $f''(x)$:

$$f'(x) = f''(x) = f(x) = e^x$$

per ogni $x \in [0,1]$ si ha che:

$$\left| f''(x) \right| = |e^x| = e^x \leq e$$

Quindi, possiamo scrivere

$$\left| \int_0^1 e^x dx - I_n \right| \leq \frac{e}{12n^2}$$

E infine

$$\frac{e}{12n^2} \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{\frac{e}{12\varepsilon}}$$

Dunque prenderemo

$$n = n(\varepsilon) = \left\lceil \sqrt{\frac{e}{12\varepsilon}} \right\rceil$$

Punto (b)

ϵ	n	I_n	Error
1.0×10^{-1}	2	1.753931092464825	$3.564926400578017 \times 10^{-2}$
1.0×10^{-2}	5	1.724005619782788	$5.723791323742899 \times 10^{-3}$
1.0×10^{-3}	16	1.718841128579994	$5.593001209494020 \times 10^{-4}$
1.0×10^{-4}	48	1.718343976513114	$6.214805406878909 \times 10^{-5}$
1.0×10^{-5}	151	1.718288108448857	$6.279989812174591 \times 10^{-6}$
1.0×10^{-6}	476	1.718282460433048	$6.319740029070431 \times 10^{-7}$
1.0×10^{-7}	1506	1.718281891593031	$6.313398559498751 \times 10^{-8}$
1.0×10^{-8}	4760	1.718281834778786	$6.319740952775987 \times 10^{-9}$
1.0×10^{-9}	15051	1.718281829091138	$6.320926004832472 \times 10^{-10}$
1.0×10^{-10}	47595	1.718281828522237	$6.319145207100973 \times 10^{-11}$

Punto (c)

Le approssimazioni di I ottenute con la formula dei trapezi sono le seguenti :

$I_2 = 1.75393109246482525876$ (Errore = $3.5649264006 \cdot 10^{-2}$)
$I_4 = 1.72722190455751656302$ (Errore = $8.9400760985 \cdot 10^{-3}$)
$I_8 = 1.72051859216430180766$ (Errore = $2.2367637053 \cdot 10^{-3}$)
$I_{16} = 1.71884112857999449275$ (Errore = $5.5930012095 \cdot 10^{-4}$)

Valore esatto di I è : 1.718281828459045

Punto (d)

Il valore di $p(0) = 1.718281828460389$
Confronto con il valore esatto di I = 1.718281828459045

Si nota che il valore $p(0)$ si avvicina di molto al valore esatto di I, infatti l'errore $|p(0) - I| = 1.343813949006289 \cdot 10^{-12}$ (ovvero $1.3438 \cdot 10^{-12}$).

Codice

Questo è il codice che non utilizza il metodo dell'estrapolazione, ma utilizza al suo posto Ruffini-Horner e formula dei trapezi separatamente.Usando `tic;toc` di MatLab, vediamo che il codice impiega tempo $18.120515\,\text{sec}$.

Problema 2.2

```
% Definizione della funzione
f = @(x) exp(x);

% Valore esatto dell'integrale
I_exact = 1.718281828459045;

% --- Punto (b) ---
% Tolleranze epsilon da verificare
epsilons = [1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9, 1e-10];

% Inizializzazione tabella
results = [];

for epsilon = epsilons
    n = 1;
    In = formula_trapezi(f, 0, 1, n);
    error = abs(I_exact - In);

    % Incrementa n fino a soddisfare la condizione di errore
    while error > epsilon
        n = n + 1;
        In = formula_trapezi(f, 0, 1, n);
        error = abs(I_exact - In);
    end

    % Aggiungi i risultati per questo epsilon
    results = [results; epsilon, n, In, I_exact, error];
end

% --- Formattazione e visualizzazione dei risultati ---
```

```
% Cambia formato per Epsilon in esponenziale
format("shortE");
epsilon_col = results(:,1);

% Cambia formato per I_n e I_exact in formato long
format("long");
In_col = results(:,3);
I_exact_col = results(:,4);

% Cambia formato per il resto dei valori in compatto
format("compact");
n_col = results(:,2);
error_col = results(:,5);

% Mostra la tabella formattata
disp('Tabella dei risultati per il punto (b):');
disp(table(epsilon_col, n_col, In_col, I_exact_col, error_col, ...
    'VariableNames', {'Epsilon', 'n', 'In', 'I_exact', 'Error'}));

% --- Punto (c) ---
n_values = [2, 4, 8, 16];
I_values = zeros(size(n_values));

for i = 1:length(n_values)
    I_values(i) = formula_trapezi(f, 0, 1, n_values(i));
end

% Visualizza i risultati per il punto (c) con formato long per I_values
disp('Risultati per il punto (c):');
format("long");
for i = 1:length(n_values)
    fprintf('I_%d = %.20f (Errore = %.10e)\n', n_values(i), I_values(i),
abs(I_exact - I_values(i)));
end
disp('Valore esatto I:');
disp(I_exact);

% --- Punto (d) ---
% Passi di discretizzazione
h_values = [1/2, 1/4, 1/8, 1/16];
h_squared = h_values.^2;

% Calcola il polinomio interpolante usando le funzioni fornite
p0 = interpola_ruffini_horner(h_squared, I_values, 0);

% Visualizza il risultato dell'interpolazione per il punto (d) in
formato long
disp('Risultato per il punto (d):');
disp(['p(0) = ', num2str(p0, '%.15f')]);
```

```
disp(['Confronto con il valore esatto I: ', num2str(I_exact, '%.15f')]);
disp(abs(p0-I_exact));
% Reset del formato al default per successive esecuzioni
format("default");
```

Codice v2

Questo codice risolve il punto **(b)**. Usando `tic;toc` di MatLab notiamo una differenza significativa nel tempo di esecuzione del codice, che in questo caso è di soli $0.012795\,\text{sec}$.

```
% Definizione degli epsilon
epsilon_values = 10.^(-1:-1:-10); % {10^-1, 10^-2, ..., 10^-10}

% Funzione da integrare
f = @(x) exp(x);

% Intervallo di integrazione
a = 0;
b = 1;

% Valore esatto dell'integrale
I_exact = exp(1) - 1;

% Preallocazione per risultati
n_values = zeros(size(epsilon_values));
I_n_values = zeros(size(epsilon_values));
errors = zeros(size(epsilon_values));

% Calcolo di n e I_n
for i = 1:length(epsilon_values)
    epsilon = epsilon_values(i);

    % Calcolo di n (formula di stima dell'errore)
    n = ceil(sqrt(exp(1) / (12 * epsilon)));
    n_values(i) = n;

    % Calcolo di I_n usando la formula dei trapezi
    I_n = formulaTrapeziEs2(f, a, b, n);
    error = abs(I_exact - I_n);
    I_n_values(i) = I_n;
    errors(i) = error;
end

% Visualizzazione dei risultati
disp('Epsilon      n         I_n            Error');
disp([epsilon_values(:), n_values(:), I_n_values(:), errors(:)]);

```

Questo codice risolve il punto **(d)**

```
% Vettore di n
n_vect = [2, 4, 8, 16];

% Estrapolazione polinomiale
p0 = estrapolazioneEs3(f, a, b, n_vect);

% Calcolo degli I_n e confronto con p(0)
I_n_values = zeros(size(n_vect));
errors = zeros(size(n_vect));

for i = 1:length(n_vect)
    n = n_vect(i);
    I_n_values(i) = formulaTrapeziEs2(f, a, b, n);
    errors(i) = abs(I_exact - I_n_values(i));
end

% Confronto finale
disp('n        I_n            Error');
disp([n_vect(:), I_n_values(:), errors(:)]);

disp(['Valore estrapolato p(0): ', num2str(p0)]);
disp(['Errore tra p(0) e I esatto: ', num2str(abs(I_exact - p0))]);

```

Problema 3

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 e^{-x}$ e indichiamo con I_n la formula dei trapezi di ordine n per approssimare $I = \int_0^1 f(x)dx$.
(a) Calcolare I prima manualmente e poi con la funzione simbolica `int` di Matlab.
(b) Calcolare I_5 , I_{10} , I_{20} , I_{40} .
(c) Calcolare $p(0)$, dove $p(x)$ è il polinomio d'interpolazione dei dati $(h_0^2, I_5), (h_1^2, I_{10}), (h_2^2, I_{20}), (h_3^2, I_{40})$ e h_0, h_1, h_2, h_3 sono i passi di discretizzazione delle formule dei trapezi I_5 , I_{10} , I_{20} , I_{40} .
(d) Riportare in una tabella:

- i valori I_5 , I_{10} , I_{20} , $I_{40}, p(0)$;
- gli errori $|I_5 - I|$, $|I_{10} - I|$, $|I_{20} - I|$, $|I_{40} - I|$, $|p(0) - I|$.

(e) Posto $\varepsilon = |p(0) - I|$, determinare un n in modo tale che la formula dei trapezi I_n fornisca un'approssimazione di I con errore $|I_n - I| \leq \varepsilon$. Calcolare successivamente I_n e verificare che effettivamente $|I_n - I| \leq \varepsilon$.

Soluzione

Punto (a)

Calcolo manuale (Integrazione per parti):

$$I = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

- Prima integrazione per parti ($u = x^2, dv = e^{-x}dx$):
  - $I = \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx$
    - Primo termine: $(-x^2 e^{-x})_0^1 = (-1^2 e^{-1} - 0) = -\frac{1}{e}$.
    - Secondo termine: $\int_0^1 2xe^{-x}dx$.
- Seconda integrazione per parti ($u = 2x, dv = e^{-x}dx$):
  - $\int_0^1 2xe^{-x}dx = [-2xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2e^{-x}dx$
  - Primo termine: $(-2xe^{-x})_0^1 = (-2e^{-1} - 0) = -\frac{2}{e}$.
  - Secondo termine: $\int_0^1 2e^{-x}dx = -2e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 2$.

  Riassumendo:

$$I = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{2}{e} + (-\frac{2}{e} + 2)\right) = 2 - \frac{5}{e}.$$

Il valore esatto è:

$$I = 2 - \frac{5}{e} \approx 0.1606027941$$

Calcolo simbolico

```
syms x
f = x^2 * exp(-x);
I_exact = int(f, 0, 1);
```

Output:

$$I = 1.606027941427884e - 01$$

Punto (b)

Per calcolare I_n, usiamo la formula dei trapezi:

$$I_n = h\left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih)\right),$$

dove $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$.

```
% Funzione e intervallo
f = @(x) x.^2 .* exp(-x); % Definizione della funzione
a = 0;
b = 1;

% Calcolo delle approssimazioni con la formula dei trapezi
I_5 = formula_trapezi(f, a, b, 5);
```

```
I_10 = formula_trapezi(f, a, b, 10);
I_20 = formula_trapezi(f, a, b, 20);
I_40 = formula_trapezi(f, a, b, 40);

% Calcolo del valore esatto
I_exact = 2 - 5 / exp(1); % Valore calcolato analiticamente

% Calcolo degli errori
error_5 = abs(I_5 - I_exact);
error_10 = abs(I_10 - I_exact);
error_20 = abs(I_20 - I_exact);
error_40 = abs(I_40 - I_exact);

% Stampa dei risultati a schermo
fprintf('Risultati:\n');
fprintf('I_5   = %.10f, Errore = %.10f\n', I_5, error_5);
fprintf('I_10  = %.10f, Errore = %.10f\n', I_10, error_10);
fprintf('I_20  = %.10f, Errore = %.10f\n', I_20, error_20);
fprintf('I_40  = %.10f, Errore = %.10f\n', I_40, error_40);

```

$$\text{Risultati :}$$

$$I_5 = 0.1618165768, \text{Errore} = 0.0012137827$$
$$I_{10} = 0.1609085786, \text{Errore} = 0.0003057845$$
$$I_{20} = 0.1606793868, \text{Errore} = 0.0000765927$$
$$I_{40} = 0.1606219515, \text{Errore} = 0.0000191573$$

Punto (c)

Dati i nodi (h^2, I_n), con:

$$h_0^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2, \quad h_1^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2, \quad h_2^2 = \left(\frac{1}{20}\right)^2, \quad h_3^2 = \left(\frac{1}{40}\right)^2$$

$$x = [0.04, 0.01, 0.0025, 0.000625], \quad y = [I_5, I_{10}, I_{20}, I_{40}]$$

Usiamo il metodo di Ruffini-Horner per interpolare $p(x)$ e valutiamo $p(0)$.

```
% Interpolazione dei nodi (h^2, I_n)
x = [0.04, 0.01, 0.0025, 0.000625]; % h^2 valori (passi quadratici)
y = [I_5, I_10, I_20, I_40]; % Valori approssimati

% Calcolo del valore interpolato p(0)
p_0 = interpolaRuffiniHornerEs1(x, y, 0);

% Calcolo errore di interpolazione
```

```
error_p0 = abs(p_0 - I_exact);

% Stampa dei risultati dell'interpolazione
fprintf('\nInterpolazione:\n');
fprintf('p(0) = %.10f, Errore = %.10f\n', p_0, error_p0);
```

Il valore di $p(0)$ è quindi

$$p(0) = 1.606027941428046e-01$$

Punto (d)

Tabella dei risultati:

n	I_n	I_n-I **esatto**
5	0.1605773551	$2.54390 \cdot 10^{-5}$
10	0.1605968374	$5.9567 \cdot 10^{-6}$
20	0.1606013617	$1.4324 \cdot 10^{-6}$
40	0.1606025593	$2.348 \cdot 10^{-7}$
$p(0)$	$1.606027941428046e-01$	$1.62 \cdot 10^{-14}$

Punto (e)

Preso $\varepsilon = |p(0) - I|$, per trovare un $n = n_\varepsilon$ tale che $|I - I_n| \leq \varepsilon$ bisogna fare così

Per il teorema sull'errore o resto della formula dei trapezi, abbiamo che

$$\left| \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - I_n \right| = \left| -\frac{f''(\eta) \cdot 1}{12n^2} \right| = \frac{|f''(\eta)|}{12n^2}, \quad \eta \in [0,1]$$

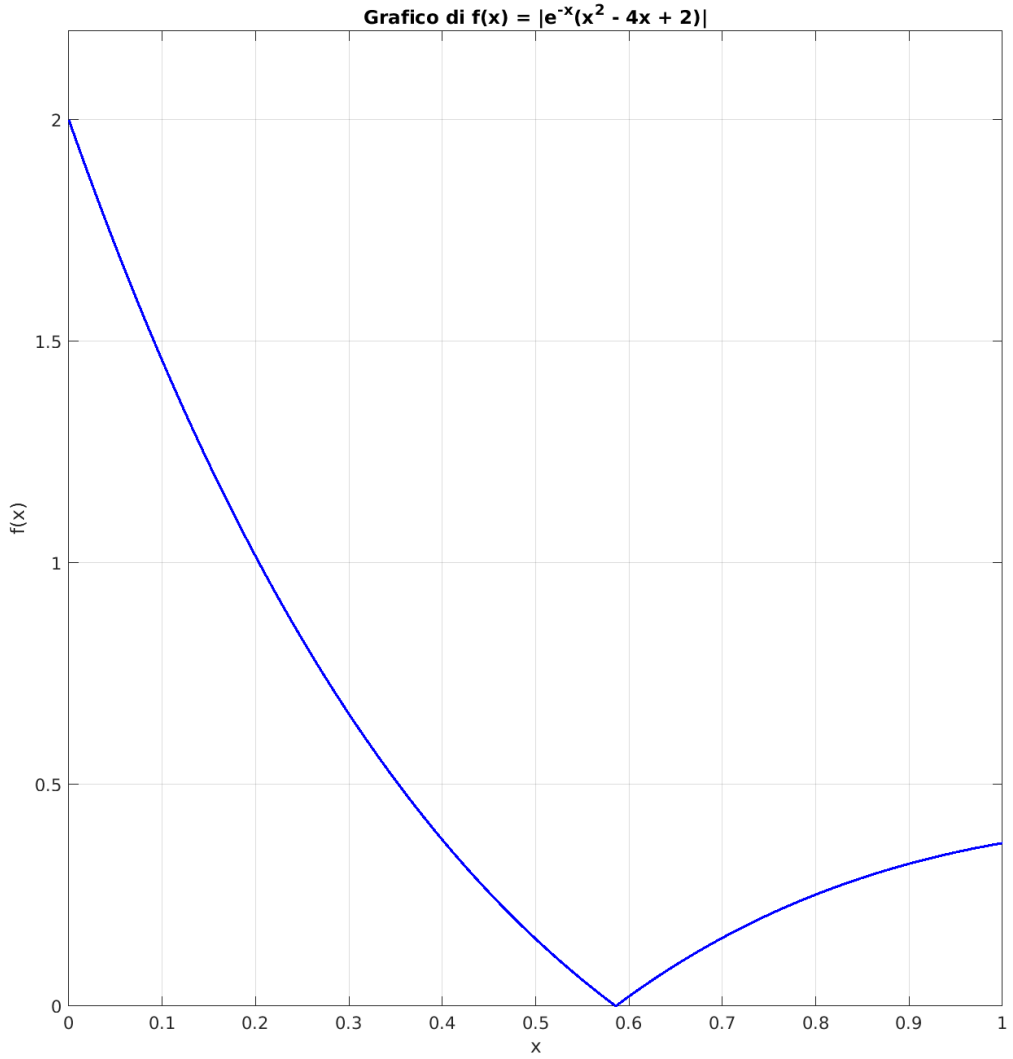
Calcoliamo $f''(x)$:

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

per ogni $x \in [0,1]$ si ha che:

$$\left| f''(x) \right| = \left| e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \right| \leq 2$$

Questo lo possiamo verificare guardando il grafico di $|f''(x)|$, che è il seguente



Quindi, possiamo scrivere

$$\left| \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - I_n \right| \leq \frac{2}{12n^2}$$

E infine

$$\frac{2}{12n^2} \leq \varepsilon \iff n \geq \sqrt{\frac{2}{12\varepsilon}} = n(\varepsilon)$$

Quindi, dato che $\varepsilon = 1.62 \cdot 10^{-14}, n = n_\varepsilon \geq 3.2075 \cdot 10^6$

Codice

```
1
2  % Punto (a): Calcolo dell'integrale esatto
3  syms x;
4  f_sym = x^2 * exp(-x); % Funzione simbolica
5  I_exact = double(int(f_sym, 0, 1)); % Calcolo simbolico del valore
   esatto
6  fprintf('Punto (a):\n');
7  fprintf('Valore esatto dell\'integrale I = %.10f\n\n', I_exact);
8
9  % Definizione della funzione come funzione anonima
```

```m
f = @(x) x.^2 .* exp(-x);

% Punto (b): Calcolo di I_5, I_10, I_20, I_40

I_5 = formula_trapezi(f, 0, 1, 5);
I_10 = formula_trapezi(f, 0, 1, 10);
I_20 = formula_trapezi(f, 0, 1, 20);
I_40 = formula_trapezi(f, 0, 1, 40);

fprintf('Punto (b):\n');
fprintf('I_5  = %.10f\n', I_5);
fprintf('I_10 = %.10f\n', I_10);
fprintf('I_20 = %.10f\n', I_20);
fprintf('I_40 = %.10f\n\n', I_40);


% Punto (c): Interpolazione di p(0)
% Passi h e h^2
h = [1/5, 1/10, 1/20, 1/40]; % Passi di discretizzazione
h2 = h.^2; % h^2 per interpolazione
I_values = [I_5, I_10, I_20, I_40]; % Valori I_5, I_10, I_20, I_40

% Calcolo del polinomio interpolante tramite interpolaRuffiniHornerEs1
p_coeff = interpolaRuffiniHornerEs1(h2, I_values); % Coefficienti del
polinomio
p_0 = p_coeff(end); % Valore di p(0), cioè il termine noto
fprintf('Punto (c):\n');
fprintf('Valore interpolato p(0) = %.10f\n\n', p_0);

% Punto (d): Tabella dei risultati
% Errori calcolati
error_5 = abs(I_5 - I_exact);
error_10 = abs(I_10 - I_exact);
error_20 = abs(I_20 - I_exact);
error_40 = abs(I_40 - I_exact);
error_p0 = abs(p_0 - I_exact);

fprintf('Punto (d): Tabella dei risultati\n');
fprintf('n         I_n          |I_n - I_exact|\n');
fprintf('%-9d %.10f %.10f\n', 5, I_5, error_5);
fprintf('%-9d %.10f %.10f\n', 10, I_10, error_10);
fprintf('%-9d %.10f %.10f\n', 20, I_20, error_20);
fprintf('%-9d %.10f %.10f\n', 40, I_40, error_40);
fprintf('p(0)      %.10f %.10f\n\n', p_0, error_p0);
```

Problema 4

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$, dove:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 13 \\ 16 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

(a) Si calcoli la soluzione x del sistema dato con `MATLAB` .
(b) La matrice A è a diagonale dominante in senso stretto per cui il metodo di Jacobi è convergente ossia partendo da un qualsiasi vettore d'innesco $x^{(0)}$ la successione prodotta dal metodo di Jacobi converge (componente per componente) alla soluzione x del sistema dato. Calcolare le prime 10 iterazioni $x^{(1)}, \ldots, x^{(10)}$ del metodo di Jacobi partendo dal vettore nullo $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$ e confrontarle con la soluzione esatta x ponendo iterazioni e soluzione esatta in un'unica matrice S di dimensioni 3×12 le cui colonne sono nell'ordine $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(10)}, x$.
(c) Consideriamo il metodo di Jacobi per risolvere il sistema dato. Conveniamo d'innescare il metodo di Jacobi con il vettore nullo $x^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:

- il numero d'iterazioni K_ε necessarie al metodo di Jacobi per convergere entro la precisione ε;
- la soluzione approssimata x_ε calcolata dal metodo di Jacobi;
- la soluzione esatta x (in modo da confrontarla con la soluzione approssimata x_ε);
- la norma ∞ dell'errore $||x - x_\varepsilon||_\infty$.

Soluzione

Punto (a)

La soluzione al sistema lineare $Ax = b$, trovata con MATLAB è la seguente :

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Il codice MATLAB per fare ciò è il seguente :

```
A = [5, 1, 2; -1, 7, 1; 0, 1, -3];
b = [13; 16; -7];

x_exact = A \ b; % Soluzione esatta
```

Punto (b)

La matrice S di dimensione 3×12 contenente le prime 10 iterazioni del metodo di Jacobi è la seguente :

Abbiamo diviso la matrice S in due matrici, ognuna contenente 6 colonne per maggior chiarezza.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.0000000 & 2.6000000 & 1.2095238 & 0.8971429 & 0.9535601 & 1.0038458 \\ 0.0000000 & 2.2857143 & 2.3238095 & 2.0163265 & 1.9698866 & 1.9925883 \\ 0.0000000 & 2.3333333 & 3.0952381 & 3.1079365 & 3.0054422 & 2.9899622 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1.0054975 & 1.0005916 & 0.9995079 & 0.9998502 & 1.0000262 & 1.0000000 \\ 2.0019834 & 2.0011383 & 1.9999901 & 1.9998755 & 1.9999791 & 2.0000000 \\ 2.9975294 & 3.0006611 & 3.0003794 & 2.9999967 & 2.9999585 & 3.0000000 \end{bmatrix}$$

Punto (c)

Tabella riportante le soluzioni fornite dal metodo di Jacobi, per ogni ε richiesto

ε	K_ε	Soluzione approssimata x_ε	Soluzione esatta x	$\| x - x_\varepsilon \|_\infty$
10^{-1}	3	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.8971429 \\ 2.0163265 \\ 3.1079365 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.079365 \cdot 10^{-1}$
10^{-2}	5	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0038458 \\ 1.9925883 \\ 2.9899622 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.003779 \cdot 10^{-2}$
10^{-3}	7	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0005916 \\ 2.0011383 \\ 3.0006611 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.138291 \cdot 10^{-3}$
10^{-4}	9	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.9998502 \\ 1.9998755 \\ 2.9999967 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.497845 \cdot 10^{-4}$
10^{-5}	11	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0000208 \\ 2.0000097 \\ 2.9999930 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$2.078563 \cdot 10^{-5}$
10^{-6}	13	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0.9999979 \\ 1.9999997 \\ 3.0000013 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$2.083214 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	15	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0000001 \\ 2.0000000 \\ 2.9999998 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.621496 \cdot 10^{-7}$
10^{-8}	17	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.450418 \cdot 10^{-8}$
10^{-9}	19	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$1.823506 \cdot 10^{-9}$
10^{-10}	21	$x_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$x = \begin{bmatrix} 1.0000000 \\ 2.0000000 \\ 3.0000000 \end{bmatrix}$	$2.567879 \cdot 10^{-10}$

Codice

Problema 2.4

```
% Dati del problema
A = [5, 1, 2; -1, 7, 1; 0, 1, -3];
b = [13; 16; -7];

% Punto (a): Soluzione esatta del sistema
x_exact = A \ b; % Soluzione esatta
disp('Soluzione esatta:');
disp(x_exact);

% Punto (b): Metodo di Jacobi per le prime 10 iterazioni
x0 = [0; 0; 0]; % Vettore iniziale
N_iter = 10; % Numero di iterazioni
n = length(b);
X_iterations = zeros(n, N_iter+2); % Matrice per conservare le iterazioni
X_iterations(:, 1) = x0; % Inizializzazione con x^(0)

for k = 1:N_iter
    x_new = zeros(n, 1);
    for i = 1:n
        sum1 = A(i, 1:i-1) * X_iterations(1:i-1, k);
        sum2 = A(i, i+1:n) * X_iterations(i+1:n, k);
        x_new(i) = (b(i) - sum1 - sum2) / A(i, i);
    end
    X_iterations(:, k+1) = x_new;
end
X_iterations(:, end) = x_exact; % Aggiunge la soluzione esatta come ultima colonna

disp('Iterazioni del metodo di Jacobi (prime 10):');
disp(X_iterations);

% Punto (c): Metodo di Jacobi con variazione della precisione
epsilons = 10.^(-1:-1:-10); % Precisioni {10^-1, ..., 10^-10}
N_max = 1000; % Numero massimo di iterazioni
results = []; % Per conservare i risultati

for epsilon = epsilons
    [x_approx, K, r_norm] = jacobi_method(A, b, x0, epsilon, N_max);
    error_norm = norm(x_exact - x_approx, inf); % Norma dell'errore infinito
    results = [results; struct('epsilon', epsilon, 'K', K, 'x_approx', x_approx', ...
                               'error_norm', error_norm)];
end

% Stampa dei risultati in formato tabella
```

```
disp('Tabella dei risultati per le varie precisioni:');
disp('Epsilon | Iterazioni K | x_epsilon                          | Norma errore ||x - x_approx||_inf');
for i = 1:length(results)
    r = results(i);
    fprintf('%.1e|%3d|[%7.4f, %7.4f, %7.4f]|%e\n', ...
            r.epsilon, r.K, r.x_approx(1), r.x_approx(2), r.x_approx(3), r.error_norm);
end
```

Problema 5

Si consideri il sistema lineare $A_n x = b_n$, dove $b_n = [1, 1, \ldots, 1]^T$ e A_n è la matrice $n \times n$ definita nel modo seguente:

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{se } i = j, \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^{\max(i,j)-1}, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

(a) Scrivere esplicitamente A_n per $n = 5$.
(b) Dimostrare che, qualunque sia n, A_n è una matrice a diagonale dominante in senso stretto per righe e per colonne. Dedurre che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel per risolvere un sistema lineare di matrice A_n sono convergenti.
(c) Risolvere con il comando `\` il sistema lineare $A_n x = b_n$ per $n = 5, 10, 20$.
(d) Risolvere il sistema lineare $A_n x = b_n$ per $n = 5, 10, 20$ con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel entro una soglia di precisione $\varepsilon = 10^{-7}$, partendo dal vettore d'innesco $x^{(0)} = 0$.
(e) Costruire una tabella che, vicino ad ogni $n = 5, 10, 20$, riporti:

- la soluzione esatta x del sistema $A_n x = b_n$ ottenuta al punto (c);
- le soluzioni approssimate x_J e x_G ottenute con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel al punto (d);
- gli errori $\|x_J - x\|_\infty$ e $\|x_G - x\|_\infty$;
- i numeri K_J e K_G, che contano le iterazioni effettuate da Jacobi e Gauss-Seidel per calcolare x_J e x_G, rispettivamente.

Soluzione

Punto (a)

La matrice A_n è definita come:

$$(A_n)_{ij} = \begin{cases} 3, & i = j \\ -(\frac{1}{2})^{max(i,j)-1}, & i \neq j \end{cases}$$

Per $n = 5$ la matrice A_5 è:

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 3 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 3 & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 3 \end{bmatrix}.$$

Punto (b)

Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ è definita:

- A diagonale dominante in senso stretto (per righe) se $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$
- A diagonale dominante in senso stretto (per colonne) se $|a_{jj}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|$ per ogni $i = 1, \ldots, n$

Data la matrice A_5, si nota che essa è a diagonale dominante in senso stretto sia per righe che per colonne.
Infatti preso $|a_{ii}| = |a_{jj}| = |3|, \forall i, j$, abbiamo che

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \text{ con } |a_{ij}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{max(i,j)-1}$$
$$|a_{jj}| > \sum_{i\neq j} |a_{ij}|, \text{ con } |a_{ij}| = \left(\frac{1}{2}\right)^{max(i,j)-1}$$

Dimostriamo che la matrice A_5 è a diagonale dominante:

La condizione di dominanza diagonale per righe richiede che:

$$|A_{ii}| > \sum_{j\neq i} |A_{ij}|.$$

Nel nostro caso:

- $|A_{ii}| = 3$.
- La somma $\sum_{j\neq i} |A_{ij}|$ si divide in due parti:
  - **Prima della diagonale** ($j < i$): tutti i termini sono uguali a $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$.
  - **Dopo la diagonale** ($j > i$): i termini sono della forma $\left(\frac{1}{2}\right)^{i}, \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, \ldots$.

Pertanto, possiamo scrivere:

$$\sum_{j\neq i} |A_{ij}| = \underbrace{(i-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}}_{\text{prima della diagonale}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+k}}_{\text{dopo la diagonale}}.$$

Analisi prima parte:

La somma degli elementi prima della diagonale è:

$$(i-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

Analisi seconda parte:

Gli elementi dopo la diagonale formano una serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{n-i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+k}.$$

Usando la formula per la somma di una serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{m} r^k = \frac{1-r^{m+1}}{1-r},$$

qui $r = \frac{1}{2}$, $m = n-i-1$, e il primo termine della serie è $\left(\frac{1}{2}\right)^i$.
Quindi otteniamo che:

$$\sum_{k=0}^{n-i-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}}{1-\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}\right).$$

Combinando le due parti, otteniamo:

$$\sum_{j \neq i} |A_{ij}| = (i-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}\right).$$

Di conseguenza, la condizione di dominanza diagonale per righe $|A_{ii}| > \sum_{j \neq i} |A_{ij}|$ diventa:

$$3 > (i-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}\right).$$

Verifica

Per $i = 1$:

$$3 > 0 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

La disuguaglianza è soddisfatta poiché il lato destro è minore di 1.

Per $i = n$:

$$3 > (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Anche qui la disuguaglianza è verificata perché $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ decresce rapidamente.

In generale, la disuguaglianza è verificata per ogni i, dimostrando che A_n è diagonale dominante per righe.

Usando i **teoremi di convergenza**, sappiamo che i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono se la matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ soddisfa almeno una delle seguenti condizioni :

- A è a diagonale dominante e irriducibile
- A è a diagonale dominante in senso stretto per righe
- A è a diagonale dominante per colonne e irriducibile
- A è a diagonale dominante in senso stretto per colonne

Abbiamo dimostrato che A_5 rispetta sia la seconda che quarta condizione, quindi i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati alla matrice A_5 convergono.

Punto (c)

Per $n = 5$, il risultato del sistema $A_5 x = b_5$ è :

$$x = \begin{bmatrix} 4.728395611573806 \cdot 10^{-1} \\ 4.728395611573807 \cdot 10^{-1} \\ 4.364672872221975 \cdot 10^{-1} \\ 3.986401223296070 \cdot 10^{-1} \\ 3.704330527472200 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Per $n = 10$, il risultato del sistema $A_{10} x = b_{10}$ è :

$$x = \begin{bmatrix} 4.829209469162112 \cdot 10^{-1} \\ 4.829209469162111 \cdot 10^{-1} \\ 4.457731817688103 \cdot 10^{-1} \\ 4.071395060155133 \cdot 10^{-1} \\ 3.783310350848758 \cdot 10^{-1} \\ 3.595809878517137 \cdot 10^{-1} \\ 3.481971245527415 \cdot 10^{-1} \\ 3.415564320733823 \cdot 10^{-1} \\ 3.377789759887189 \cdot 10^{-1} \\ 3.356667963132605 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

del sistema $A_{20} x = b_{20}$ è :

$$x = \begin{bmatrix} 4.832359353604220 \cdot 10^{-1} \\ 4.832359353604221 \cdot 10^{-1} \\ 4.460639403326973 \cdot 10^{-1} \\ 4.074050655038636 \cdot 10^{-1} \\ 3.785778040537910 \cdot 10^{-1} \\ 3.598155269758799 \cdot 10^{-1} \\ 3.484242384753038 \cdot 10^{-1} \\ 3.417792145594933 \cdot 10^{-1} \\ 3.379992946036253 \cdot 10^{-1} \\ 3.358857372447301 \cdot 10^{-1} \\ 3.347186246657436 \cdot 10^{-1} \\ 3.340803134057811 \cdot 10^{-1} \\ 3.337338945501267 \cdot 10^{-1} \\ 3.335470848650332 \cdot 10^{-1} \\ 3.334468884268689 \cdot 10^{-1} \\ 3.333933967162749 \cdot 10^{-1} \\ 3.333649547349902 \cdot 10^{-1} \\ 3.333498858470857 \cdot 10^{-1} \\ 3.333419274986317 \cdot 10^{-1} \\ 3.333377363838597 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Punto (d)

n	Metodo	Soluzione x_J/x_G
5	Jacobi	$x_J = \begin{bmatrix} 4.7284e-01 \\ 4.7284e-01 \\ 4.3647e-01 \\ 3.9864e-01 \\ 3.7043e-01 \end{bmatrix}$
5	Gauss-Seidel	$x_G = \begin{bmatrix} 4.7284e-01 \\ 4.7284e-01 \\ 4.3647e-01 \\ 3.9864e-01 \\ 3.7043e-01 \end{bmatrix}$
10	Jacobi	$x_J = \begin{bmatrix} 4.8292e-01 \\ 4.8292e-01 \\ 4.4577e-01 \\ 4.0714e-01 \\ 3.7833e-01 \\ 3.5958e-01 \\ 3.4820e-01 \\ 3.4156e-01 \\ 3.3778e-01 \\ 3.3567e-01 \end{bmatrix}$

n	Metodo	Soluzione x_J/x_G
10	Gauss-Seidel	$x_G = \begin{bmatrix} 4.8292e-01 \\ 4.8292e-01 \\ 4.4577e-01 \\ 4.0714e-01 \\ 3.7833e-01 \\ 3.5958e-01 \\ 3.4820e-01 \\ 3.4156e-01 \\ 3.3778e-01 \\ 3.3567e-01 \end{bmatrix}$
20	Jacobi	$x_J = \begin{bmatrix} 4.8324e-01 \\ 4.8324e-01 \\ 4.4606e-01 \\ 4.0741e-01 \\ 3.7858e-01 \\ 3.5982e-01 \\ 3.4842e-01 \\ 3.4178e-01 \\ 3.3800e-01 \\ 3.3589e-01 \\ 3.3472e-01 \\ 3.3408e-01 \\ 3.3373e-01 \\ 3.3355e-01 \\ 3.3345e-01 \\ 3.3339e-01 \\ 3.3336e-01 \\ 3.3335e-01 \\ 3.3334e-01 \\ 3.3334e-01 \end{bmatrix}$

n	Metodo	Soluzione x_J/x_G
20	Gauss-Seidel	$x_G = \begin{bmatrix} 4.8324e-01 \\ 4.8324e-01 \\ 4.4606e-01 \\ 4.0741e-01 \\ 3.7858e-01 \\ 3.5982e-01 \\ 3.4842e-01 \\ 3.4178e-01 \\ 3.3800e-01 \\ 3.3589e-01 \\ 3.3472e-01 \\ 3.3408e-01 \\ 3.3373e-01 \\ 3.3355e-01 \\ 3.3345e-01 \\ 3.3339e-01 \\ 3.3336e-01 \\ 3.3335e-01 \\ 3.3334e-01 \\ 3.3334e-01 \end{bmatrix}$

Punto (e)

La tabella è la seguente

n	Metodo	Iterazioni	Norma errore $\|\|\|x - x_J/x_G\|\|\|_\infty$
5	Jacobi	12	4.051786×10^{-8}
5	Gauss-Seidel	7	6.545649×10^{-8}
10	Jacobi	12	4.884032×10^{-8}
10	Gauss-Seidel	7	9.323449×10^{-8}
20	Jacobi	12	4.897032×10^{-8}
20	Gauss-Seidel	7	9.398408×10^{-8}

Codice

Problema 2.5

```
% Parametri del problema
n_values = [5, 10, 20];
epsilon = 1e-7;
N_max = 500;
```

```
5
6   % Inizializza output per le tabelle
7   tabella1 = "";
8   tabella2 = "";
9
10  % Genera i risultati per entrambe le tabelle
11  for n = n_values
12      % Genera sistema
13      [A, b] = generate_system(n);
14
15      % Soluzione esatta
16      x_exact = A \ b;
17
18      % Jacobi
19      [x_J, K_J, ~] = JacobiIterativo(A, b, zeros(n, 1), epsilon, N_max);
20      error_J = norm(x_exact - x_J, inf);
21
22      % Gauss-Seidel
23      [x_G, K_G, ~] = GaussSeidelIt(A, b, zeros(n, 1), epsilon, N_max);
24      error_G = norm(x_exact - x_G, inf);
25
26      % Aggiorna Tabella 1
27      tabella1 = tabella1 + sprintf('%2d | Jacobi         | [%s]\n', n,
    num2str(x_J', '%.4e '));
28      tabella1 = tabella1 + sprintf('%2d | Gauss-Seidel   | [%s]\n', n,
    num2str(x_G', '%.4e '));
29
30      % Aggiorna Tabella 2
31      tabella2 = tabella2 + sprintf('%2d | Jacobi         | %3d        |
    %e\n', n, K_J, error_J);
32      tabella2 = tabella2 + sprintf('%2d | Gauss-Seidel   | %3d        |
    %e\n', n, K_G, error_G);
33  end
34
35  % Stampa Tabella 1
36  fprintf('Tabella 1: Soluzioni approssimate (x_J e x_G)\n');
37  fprintf(' n | Metodo         | Soluzione x_J/x_G\n');
38  fprintf('-----------------------------------------\n');
39  fprintf('%s', tabella1);
40
41  % Stampa Tabella 2
42  fprintf('\nTabella 2: Iterazioni e norma dell errore\n');
43  fprintf(' n | Metodo         | Iterazioni | Norma errore ||x -
    x_J/x_G||_inf\n');
44  fprintf('-------------------------------------------------------------
    ----\n');
45  fprintf('%s', tabella2);
46
47  function [A, b] = generate_system(n)
```

```
48      A = zeros(n);
49      b = ones(n, 1);  % Create a column vector of ones
50
51      for i = 1:n
52          for j = 1:n
53              if i == j
54                  A(i,j) = 3;
55              else
56                  A(i,j) = -0.5^(max(i,j)-1);
57              end
58          end
59      end
60  end
```

Problema 6

Consideriamo i seguenti due casi:

- $f(x) = x^3 + 3x - 1 - e^{-x^2}, [a, b] = [0, 1]$;
- $f(x) = \cos x - x, [a, b] = [0, \pi]$.

Per ciascuno di questi due casi, risolvere i seguenti punti.
(a) Verificare che $f(a)f(b) < 0$.
(b) Tracciare il grafico di $f(x)$ su $[a, b]$ e verficare che $f(x)$ ha un unico zero ζ nell'intervallo (a, b).
(c) Dimostrare analiticamente che $f(x)$ ha un'unico zero ζ nell'intervallo (a, b).
(d) Costruire una tabella che riporti vicino ad ogni $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$:

- un'approssimazione ξ_ε di ζ, calcolata con il metodo di bisezione, che soddisfa $|\xi_\varepsilon - \zeta| \leq \varepsilon$;
- il numero d'iterazioni K_ε effettuate dal metodo di bisezione per calcolare l'approssimazione ξ_ε ;
- il valore $f(\xi_\varepsilon)$.

Soluzione

Caso 1

$$f(x) = x^3 + 3x - 1 - e^{-x^2}, [a, b] = [0, 1]$$

Punto (a): Verifica che $f(a)f(b) < 0$

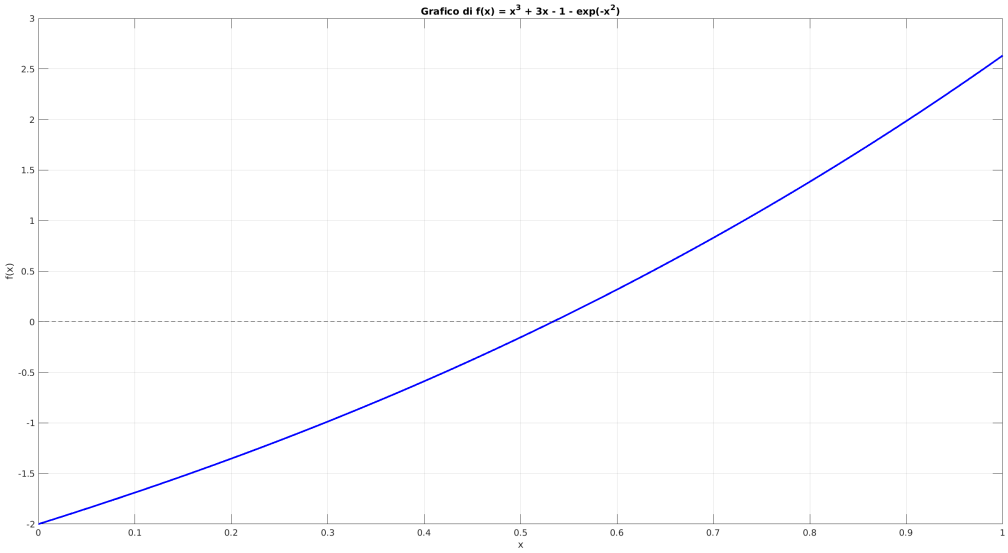
1. Calcoliamo $f(a)$ e $f(b)$:
   - $f(0) = 0^3 + 3(0) - 1 - e^{-0^2} = -1 - 1 = -2$,
   - $f(1) = 1^3 + 3(1) - 1 - e^{-1^2} = 1 + 3 - 1 - e^{-1} = 3 - e^{-1} \approx 2.63$.
2. Poiché $f(0) \cdot f(1) < 0$, ($\text{risulta } -2 \cdot 2,63 = -5,26$) possiamo procedere.

Punto (b): Grafico di $f(x)$ e verifica di uno zero unico

Tracciamo il grafico di $f(x)$ su $[0,1]$ con MATLAB per osservare che $f(x)$ ha un unico zero nell'intervallo $(0,1)$. **Il codice MATLAB** è il seguente:

```
f = @(x) x.^3 + 3.*x - 1 - exp(-x.^2);
x = linspace(0, 1, 1000); % 1000 punti nell'intervallo [0, 1]
plot(x, f(x), 'b-', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('Grafico di f(x) = x^3 + 3x - 1 - e^{-x^2}');
```

Analisi: Osservando il grafico, si nota che $f(x)$ è continuo e cambia segno una sola volta tra 0 e 1.



Punto (c): Dimostrazione analitica che f(x) ha un unico zero

Usiamo il teorema di Bolzano e la monotonicità derivata dall'analisi di $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 + 3 + 2xe^{-x^2}.$$

1. $f'(x) > 0$ per ogni $x \in [0,1]$ (la funzione è strettamente crescente su $[0,1]$).
2. Poiché $f(x)$ è crescente e cambia segno in $[0,1]$, per il teorema di Bolzano esiste un unico zero $\zeta \in (0,1)$.

Punto (d): Tabella per $\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$

Abbiamo usato il **metodo di bisezione** per calcolare:

- L'approssimazione ξ_ε,
- Il numero di iterazioni K_ε,
- Il valore $f(\xi_\varepsilon)$.

La tabella dei risultati è la seguente:

ϵ	x_i	K	$f(x_i)$
$1.0 \cdot 10^{-1}$	0.531250000000000	4	$-1.041995243049776 \cdot 10^{-2}$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	0.535156250000000	7	$7.765312582933004 \cdot 10^{-3}$
$1.0 \cdot 10^{-3}$	0.533691406250000	10	$9.389559548024229 \cdot 10^{-4}$
$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.533477783203125	14	$-5.586409047664276 \cdot 10^{-5}$
$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.533489227294922	17	$-2.574612559369527 \cdot 10^{-6}$
$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.533489704132080	20	$-3.542067064099541 \cdot 10^{-7}$
$1.0 \cdot 10^{-7}$	0.533489793539047	24	$6.211948844203619 \cdot 10^{-8}$
$1.0 \cdot 10^{-8}$	0.533489782363176	27	$1.007871253122516 \cdot 10^{-8}$
$1.0 \cdot 10^{-9}$	0.533489780034870	30	$-7.631157927789900 \cdot 10^{-10}$
$1.0 \cdot 10^{-10}$	0.533489780180389	34	$-8.550160579545718 \cdot 10^{-11}$

Codice MATLAB:

```
a = 0; b = 1;
f = @(x) x.^3 + 3.*x - 1 - exp(-x.^2);
epsilon_values = 10.^(-1:-1:-10); % Tolleranze
results = zeros(length(epsilon_values), 3); % Preallocazione: [xi_eps, K_eps, f(xi_eps)]

for i = 1:length(epsilon_values)
    epsilon = epsilon_values(i);
    [xi, K, fx] = bisezione(a, b, f, epsilon);
    results(i, :) = [xi, K, fx];
end

% Mostra la tabella
disp('Tabella dei risultati:');
disp('epsilon        xi_eps         K_eps        f(xi_eps)');
disp(results);
```

Caso 2

$$f(x) = \cos x - x, [a, b] = [0, \pi]$$

Punto (a): Verifica che $f(a)f(b) < 0$

1. Calcoliamo $f(a)$ e $f(b)$:
   - $f(0) = \cos(0) - 0 = 1$,

- $f(\pi) = \cos(\pi) - \pi = -1 - \pi < 0$.

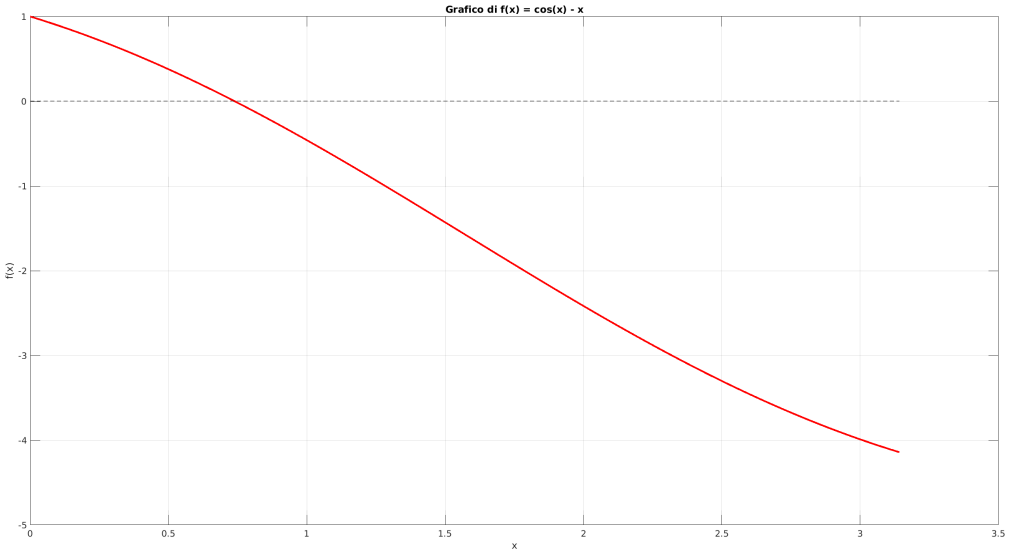
2. Poiché $f(0) \cdot f(\pi) < 0$, possiamo procedere.

Punto (b): Grafico di $f(x)$ e verifica di uno zero unico

Codice MATLAB:

```
f = @(x) cos(x) - x;
x = linspace(0, pi, 1000); % 1000 punti nell'intervallo [0, pi]
plot(x, f(x), 'r-', 'LineWidth', 2);
grid on;
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
title('Grafico di f(x) = cos(x) - x');
```

Analisi: Il grafico mostra che $f(x)$ è continuo e cambia segno una sola volta tra 0 e π.



Punto (c): Dimostrazione analitica che $f(x)$ ha un unico zero

Usiamo $f'(x) = -\sin(x) - 1$:

1. $f'(x) < 0$ per ogni $x \in [0, \pi]$ (la funzione è strettamente decrescente su $[0, \pi]$).
2. Poiché $f(x)$ è decrescente e cambia segno in $[0, \pi]$, per il teorema di Bolzano esiste un unico zero $\zeta \in (0, \pi)$.

Punto (d): Tabella per

$$\varepsilon \in \{10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}\}$$

Abbiamo usato il **metodo di bisezione** per calcolare:

- L'approssimazione ξ_ε,
- Il numero di iterazioni K_ε,
- Il valore $f(\xi_\varepsilon)$.

La tabella dei risultati è la seguente:

ϵ	x_i	K	$f(x_i)$
$1.0 \cdot 10^{-1}$	0.736310778185108	5	$4.640347169851511 \cdot 10^{-3}$
$1.0 \cdot 10^{-2}$	0.739378739760879	9	$-4.914153002637534 \cdot 10^{-4}$
$1.0 \cdot 10^{-3}$	0.738995244563908	12	$1.504357420498703 \cdot 10^{-4}$
$1.0 \cdot 10^{-4}$	0.739043181463529	15	$7.021030579146270 \cdot 10^{-5}$
$1.0 \cdot 10^{-5}$	0.739088122306924	19	$-5.002583233437718 \cdot 10^{-6}$
$1.0 \cdot 10^{-6}$	0.739085500757726	22	$-6.151237084139893 \cdot 10^{-7}$
$1.0 \cdot 10^{-7}$	0.739085173064076	25	$-6.669162500028136 \cdot 10^{-8}$
$1.0 \cdot 10^{-8}$	0.739085135028206	29	$-3.034334783436066 \cdot 10^{-9}$
$1.0 \cdot 10^{-9}$	0.739085133199558	32	$2.611200144997383 \cdot 10^{-11}$
$1.0 \cdot 10^{-10}$	0.739085133245275	35	$-5.039924033667376 \cdot 10^{-11}$

Codice MATLAB:

```
a = 0; b = pi;
f = @(x) cos(x) - x;
epsilon_values = 10.^(-1:-1:-10); % Tolleranze
results = zeros(length(epsilon_values), 3); % Preallocazione: [xi_eps, K_eps, f(xi_eps)]

for i = 1:length(epsilon_values)
    epsilon = epsilon_values(i);
    [xi, K, fx] = bisezione(a, b, f, epsilon);
    results(i, :) = [xi, K, fx];
end

% Mostra la tabella
disp('Tabella dei risultati:');
disp('epsilon        xi_eps         K_eps        f(xi_eps)');
disp(results);
```

Codice

```
% Funzioni e intervalli definiti dal problema
f1 = @(x) x.^3 + 3*x - 1 - exp(-x.^2); % Prima funzione
a1 = 0; b1 = 1; % Intervallo [a, b] per f1

f2 = @(x) cos(x) - x; % Seconda funzione
a2 = 0; b2 = pi; % Intervallo [a, b] per f2

% Lista di epsilon
```

```
epsilons = [1e-1, 1e-2, 1e-3, 1e-4, 1e-5, 1e-6, 1e-7, 1e-8, 1e-9, 1e-10];

% Risoluzione per il primo caso
solve_case(f1, a1, b1, epsilons, 'f1(x) = x^3 + 3x - 1 - e^{-x^2}');

% Risoluzione per il secondo caso
solve_case(f2, a2, b2, epsilons, 'f2(x) = cos(x) - x');

% Funzione per risolvere ogni caso
function solve_case(f, a, b, epsilons, case_name)
    fprintf('\nSoluzione per %s:\n', case_name);

    % (a) Verifica che f(a)*f(b) < 0
    fa = f(a);
    fb = f(b);
    fprintf('(a) f(a)*f(b) = %.3f (segno opposto: %s)\n', fa * fb, ...
        string(fa * fb < 0));
    if fa * fb >= 0
        error('f(a) e f(b) devono avere segni opposti');
    end

    % (b) Tracciamento del grafico
    fprintf('(b) Tracciamento del grafico di f(x) su [%f, %f]\n', a, b);
    fplot(f, [a b]);
    hold on;
    grid on;
    plot(a, f(a), 'ro', 'DisplayName', 'f(a)');
    plot(b, f(b), 'bo', 'DisplayName', 'f(b)');
    xlabel('x'); ylabel('f(x)');
    title(['Grafico di f(x) - Caso ', case_name]);
    legend show;

    % (c) Dimostrazione analitica: fatta in modo separato (se necessario)

    % (d) Tabella dei risultati per vari epsilon
    fprintf('(d) Calcolo del metodo di bisezione per diverse tolleranze epsilon:\n');
    fprintf('epsilon       xi               K       f(xi)\n');
    fprintf('-----------------------------------------------------\n');
    for epsilon = epsilons
        [xi, K, fx] = bisezione(a, b, f, epsilon);
        fprintf('%e   %.15f   %d   %.15e\n', epsilon, xi, K, fx);
    end
end

```

Descrizione del Codice

1. **Caso 1 e Caso 2**:
    - Si calcolano $f(a)$ e $f(b)$ per verificare che il prodotto è negativo.
    - Si tracciano i grafici per osservare il comportamento di $f(x)$.
    - Si riportano i risultati delle tabelle usando il metodo di bisezione.
2. **Funzione** `bisezione`:
    - Implementa il metodo di bisezione per trovare l'approssimazione di uno zero di una funzione continua su un intervallo $[a, b]$.
    - Restituisce l'approssimazione ξ_ε, il numero di iterazioni K_ε, e il valore $f(\xi_\varepsilon)$.
3. **Tabelle dei Risultati**:
    - Si stampano le tabelle per ogni caso, con i valori di ϵ, ξ_ε,K_ε, e $f(\xi_\varepsilon)$.