

Classificatori Lineari - Percettrone, Least Squares e Gaussian Discriminant Analysis

Laboratorio 5 – Classificatori Lineari: Percettrone, Least Squares e Gaussian Discriminant Analysis

Corso: Machine Learning – Laurea Magistrale in Informatica

Università: Roma “Tor Vergata”

Docenti: Danilo Croce, Giorgio Gambosi

Obiettivo del laboratorio

In questo laboratorio esploriamo **tre approcci fondamentali alla classificazione lineare**, ciascuno con una diversa prospettiva teorica e geometrica:

Modello	Tipo	Idea principale
Percettrone	<i>Discriminativo</i>	Trova un iperpiano che separa linearmente due classi aggiornando iterativamente i pesi.
Least Squares	<i>Discriminativo (analitico)</i>	Riutilizza la regressione lineare per la classificazione, minimizzando un errore ai minimi quadrati.
Gaussian Discriminant Analysis (GDA)	<i>Generativo (probabilistico)</i>	Assume che ogni classe provenga da una distribuzione gaussiana e usa il teorema di Bayes per classificare.

Panoramica concettuale

Tutti e tre i metodi cercano un **confine decisionale lineare**:

$$w^T x + w_0 = 0$$

ma differiscono nel **modo in cui determinano** i parametri w e w_0 :

- Il **Percettrone** corregge iterativamente gli errori di classificazione (approccio numerico).
 - Il **Least Squares** li calcola risolvendo un sistema lineare (approccio analitico).
 - La **GDA** li deduce stimando le distribuzioni di probabilità di ciascuna classe (approccio probabilistico).
-



Obiettivi pratici del laboratorio

1. Implementare e visualizzare il comportamento del **Percettrone**, inclusa la direzione del gradiente e la stabilità durante l'apprendimento.
 2. Derivare e applicare il metodo dei **Minimi Quadrati per la classificazione**, confrontandone la robustezza.
 3. Costruire un **modello probabilistico generativo (GDA)**, mostrando la relazione con il confine lineare e la distribuzione gaussiana sottostante.
 4. **Confrontare visivamente** i tre approcci e discutere differenze e interpretazioni geometriche.
-



Prerequisiti

Per affrontare il laboratorio sono richieste conoscenze di base su:

- Algebra lineare (prodotti scalari, matrici e autovalori)
 - Regressione lineare e pseudoinversa
 - Distribuzioni gaussiane multivariate
 - Regola di Bayes e concetto di probabilità condizionata
-



Struttura del notebook

1. **Percettrone**: classificatore lineare iterativo
 2. **Least Squares**: classificatore analitico basato su regressione
 3. **Gaussian Discriminant Analysis**: modello generativo probabilistico
 4. **Confronto finale e discussione**
-



Alla fine del laboratorio dovresti:

- Comprendere come modelli diversi portano allo **stesso tipo di confine lineare**, ma con **motivazioni teoriche differenti**;
- Saper implementare ciascun approccio in Python;
- Visualizzare e interpretare geometricamente i risultati.

Caricamento e visualizzazione del dataset

In questa sezione carichiamo un dataset di esempio per la **classificazione binaria**, disponibile online al link:

<https://tvm1.github.io/ml2425/dataset/ex2data1.txt>

Il dataset contiene tre colonne:

- x_1 , x_2 : le **feature** numeriche (due dimensioni per semplicità di visualizzazione);
- t : la **classe** di appartenenza (0 o 1).

Dopo il caricamento, i dati verranno rappresentati graficamente nel piano (x_1, x_2) per osservare la **separabilità lineare** delle due classi.

```
# =====
# 📁 Caricamento e ispezione del dataset
# =====

import pandas as pd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.colors as mcolors
from matplotlib import cm

# Scarica il dataset (se non già presente)
!wget -nc https://tvm1.github.io/ml2425/dataset/ex2data1.txt

# Legge il file CSV con pandas
data = pd.read_csv("ex2data1.txt", header=0, delimiter=',', names=
['x1', 'x2', 't'])

# Mostra le prime righe del dataset
print("📊 Prime osservazioni del dataset:")
display(data.head())
```

```

# Dimensione e statistiche di base
print(f"\nNumero di campioni: {len(data)}")
print(data.describe())

# Estrae feature e target
X = data['x1', 'x2']('x1',%20'x2').values
t = data['t'].values.reshape(-1, 1)

# Normalizza le feature (media 0, varianza 1)
X_mean = np.mean(X, axis=0)
X_std = np.std(X, axis=0, ddof=1)
X_norm = (X - X_mean) / X_std

# Aggiunge il bias (-1) come prima colonna
X_aug = np.column_stack((-np.ones(len(X_norm)), X_norm))

# =====
# 🎨 Visualizzazione delle due classi nel piano (x1, x2)
# =====

colors = ['xkcd:sea blue', 'xkcd:pale red']
c = [colors[i] for i in data['t']]

plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.scatter(data['x1'], data['x2'], c=c, edgecolor='k', alpha=0.8,
s=50)
plt.title("Distribuzione dei dati nel piano (x1, x2)", fontsize=14)
plt.xlabel("x1", fontsize=12)
plt.ylabel("x2", fontsize=12)
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

```

prima di iniziare... il diavolo è nei dettagli...



Normalizzazione dei dati

Prima di applicare qualsiasi metodo di classificazione (Least Squares, Perceptron, o GDA),
 è importante **normalizzare i dati di input**.

La normalizzazione (spesso chiamata *feature scaling*) consiste nel riportare tutte le variabili

sullo **stesso ordine di grandezza**, ad esempio con media 0 e varianza 1.

Perché è importante?

- Evita che una feature con valori grandi (es. “età in anni”) domini su un’altra con valori piccoli (es. “rapporto altezza/peso”).
- Rende la geometria del problema più “equilibrata”, in modo che il confine decisionale (come $w^\top x + b = 0$) **dipenda dal contenuto informativo** e non dalle scale numeriche.
- Facilita la convergenza di algoritmi iterativi (come il Percettrone o la Regressione Logistica).
- Nel caso del modello bayesiano o dei minimi quadrati, migliora la **stabilità numerica** dell’inversione di matrici (es. $(X^\top X)^{-1}$).

Nota pratica

Nel codice, la normalizzazione è già stata eseguita in precedenza e salvata in:

```
X_norm = (X - X.mean(axis=0)) / X.std(axis=0)
```

Tutti i modelli successivi — incluso il Least Squares per la classificazione — utilizzeranno queste feature normalizzate.

Classificazione tramite Minimi Quadrati (Least Squares)

In questa sezione esploriamo un approccio alternativo al Percettrone: la **classificazione con minimi quadrati**, o *Least Squares for Classification*.

L’idea nasce dal riutilizzare la formulazione della **regressione lineare**, minimizzando una funzione di errore ai minimi quadrati:

$$E_D(W) = \frac{1}{2} \text{Tr} [(XW - T)^T (XW - T)]$$

dove:

- X è la matrice dei dati di input (ogni riga è un campione, con un termine di bias incluso),

- \$ T \$ è la matrice dei **target**, rappresentati in codifica *1-of-K*,
 - \$ W \$ è la matrice dei **coefficienti** da stimare.
-

♦ Soluzione in forma chiusa

Come per la regressione lineare, possiamo derivare una **soluzione analitica** minimizzando l'errore rispetto a \$ W \$:

$$W = (X^T X)^{-1} X^T T = X^\dagger T$$

dove \$ X^\dagger \$ è la *pseudoinversa* di Moore-Penrose.

♦ Decisione di classe

Una volta stimato \$ W \$, la predizione per un nuovo punto \$ x \$ si ottiene come:

$$y(x) = W^T x$$

Il punto viene assegnato alla **classe** per cui l'output \$ y_k(x) \$ è massimo:

$$\hat{C}(x) = \arg \max_k y_k(x)$$

! Limiti del metodo

Questo approccio, pur avendo una **soluzione esatta e semplice**, soffre di alcune **limitazioni importanti**:

- i valori di \$ y(x) \$ non sono vincolati tra (0, 1), quindi **non possono essere interpretati come probabilità**;
 - è **molto sensibile agli outlier**, perché i punti lontani influenzano fortemente la stima dei pesi;
 - penalizza anche i punti “troppo corretti”, cioè quelli molto lontani dal confine decisionale.
-

Nel seguito, applichiamo questo metodo sullo **stesso dataset** del Percettrone per confrontarne i risultati 👉

```

# =====
# 📊 Classificazione lineare con Minimi Quadrati (Least Squares)
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# 1 Preparazione dei dati
# -----
X_ls = np.column_stack((np.ones(len(X_norm)), X_norm)) # aggiunge
bias = +1
y_ls = t.ravel() # vettore target (0 o 1)

# Mostra alcune righe della matrice di input
print("📊 Prime righe di X_ls (incluso il bias):")
print(pd.DataFrame(X_ls[:5], columns=["bias", "x1_norm",
"x2_norm"]).round(3))
print()

# Codifica "1-of-K" (qui solo due classi)
T = np.zeros((len(y_ls), 2))
for i in range(len(y_ls)):
    T[i, int(y_ls[i])] = 1

# Mostra alcune righe della matrice target
print("🎯 Prime righe della matrice T (target 1-of-K):")
print(pd.DataFrame(T[:5], columns=["Classe 0", "Classe
1"]).astype(int))
print()

# -----
# 2 Calcolo analitico dei pesi  $W = (X^T X)^{-1} X^T T$ 
# -----
W = np.linalg.inv(X_ls.T @ X_ls) @ X_ls.T @ T

# Predizione continua (non limitata in [0,1])
Y_pred = X_ls @ W
y_class = np.argmax(Y_pred, axis=1)

```

```

# Accuracy
acc_ls = np.mean(y_class == y_ls)
print(f"✅ Accuracy (Least Squares): {acc_ls:.3f}")
print("📊 Matrice dei pesi W:")
print(W)

# -----
# 3 Confine decisionale
# -----
# Una volta stimati i pesi W, possiamo ricavare la frontiera di
# decisione
# tra le due classi. Ogni colonna di W corrisponde a una classe:
#
#   W = [[w01, w02],      ← bias (termini costanti)
#         [w11, w12],      ← coefficienti per la feature x1
#         [w21, w22]]      ← coefficienti per la feature x2
#
# Ogni classe k ha quindi una funzione discriminante lineare:
#
#    $y_k(x) = w_{0k} + w_{1k} \cdot x_1 + w_{2k} \cdot x_2 = w_k^T \cdot x + w_{0k}$ 
#
# Il modello decide la classe con  $y_k(x)$  più alto:
#   Classe(x) = argmax_k [  $y_k(x)$  ]
#
# → Il confine decisionale è il luogo dei punti dove il modello
#   è "indeciso" tra le due classi, cioè dove  $y_1(x) = y_2(x)$ .
#
# Sostituendo le due funzioni:
#    $w_1^T \cdot x + w_{01} = w_2^T \cdot x + w_{02}$ 
#
# Portando tutto da una parte otteniamo:
#    $(w_1 - w_2)^T \cdot x + (w_{01} - w_{02}) = 0$ 
#
# Questa è l'equazione del confine lineare (retta o iperpiano)
# tra le due classi: i punti x che la soddisfano sono quelli
# in cui il modello è esattamente al 50%.

# -----
# Differenza tra i pesi e tra i bias
# -----
# Ogni colonna di W rappresenta i parametri di una classe.

```



```

# La prima riga (indice 0) contiene i bias  $w_{0k}$ ,
# mentre le righe successive contengono i coefficienti ( $w_{1k}$ ,  $w_{2k}$ ,
# ...).
#
# Calcoliamo quindi la differenza tra i parametri delle due classi:
# ( $w\_diff$ ) corrisponde a ( $w_1 - w_2$ )
# ( $b\_diff$ ) corrisponde a ( $w_{01} - w_{02}$ )
#
# Questi due valori definiscono la retta:
#  $w\_diff^T \cdot x + b\_diff = 0$ 

w_diff = W[1:, 1] - W[1:, 0] # differenza tra i coefficienti
                                (vettore ortogonale al confine)
b_diff = W[0, 1] - W[0, 0]    # differenza tra i bias (spostamento
                                del confine)

# -----
# Costruisce la retta di separazione nel piano ( $x_1$ ,  $x_2$ )
# -----
# Dalla formula:
#  $w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b = 0$ 
# possiamo ricavare  $x_2$  in funzione di  $x_1$ :
#
#  $x_2 = - (w_1 \cdot x_1 + b) / w_2$ 
#
# In questo modo possiamo tracciare la retta nel piano.

x_min, x_max = X_norm[:, 0].min() - 0.5, X_norm[:, 0].max() + 0.5
xx = np.linspace(x_min, x_max, 100)
yy = -(w_diff[0] * xx + b_diff) / w_diff[1]

# Ora (xx, yy) rappresenta la retta di separazione
# tra la Classe 0 e la Classe 1.

# -----
# 4 Visualizzazione dei risultati
# -----

plt.figure(figsize=(8, 8))

# Colori per classi
c = [colors[int(i)]] for i in y_ls]

```

```
plt.scatter(X_norm[:, 0], X_norm[:, 1], c=c, s=40, edgecolor='k',
            alpha=0.8)
plt.plot(xx, yy, color='xkcd:goldenrod', linewidth=2, label='Confine
Least Squares')

plt.xlabel("x1 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.ylabel("x2 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.title(f"📊 Least Squares – Confine decisionale | Accuracy =
{acc_ls:.3f}", fontsize=14)
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

💡 Interpretazione geometrica del gradiente e del confine lineare

Il confine decisionale del classificatore lineare (Percettrone, Least Squares o GDA) ha sempre la forma:

$$w^T x + w_0 = 0$$

In due dimensioni, con $x = [x_1, x_2]^T$, diventa:

$$w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_0 = 0.$$

Questa è l'equazione di una **retta**. Possiamo riscriverla nella forma familiare:

$$x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 - \frac{w_0}{w_2},$$

cioè nella forma **$y = m x + b$** , dove:

- la **pendenza** è $m = -\frac{w_1}{w_2}$;
- l'**intercetta** è $b = -\frac{w_0}{w_2}$.

🧭 Il ruolo del gradiente

Il vettore dei pesi $w = [w_1, w_2]^T$ è **perpendicolare** al confine decisionale.

Perché?

La retta (o il piano in generale) è definita dai punti x che soddisfano $w^T x + w_0 = 0$.

Il gradiente di questa funzione rispetto a x è proprio $\nabla_x (w^T x + w_0) = w$.

Essendo il gradiente **ortogonale alle linee di livello costante**, segue che w è perpendicolare alla retta decisionale.



Margine funzionale e margine geometrico

Per un punto x_i con etichetta $t_i \in \{-1, +1\}$:

- il **margine funzionale** è

$$\gamma_i = t_i(w^T x_i + w_0)$$

- il **margine geometrico** (cioè la distanza ortogonale dal piano) è

$$\hat{\gamma}_i = \frac{t_i(w^T x_i + w_0)}{\|w\|}$$



Quindi:

- il *segno* di γ_i dice se il punto è nel lato giusto;
- il *valore assoluto* di $\hat{\gamma}_i$ dice **quanto è lontano** dal confine.

Nel grafico seguente vediamo visivamente questi concetti.

```
# =====
# 🎯 Interpretazione geometrica del gradiente e della retta y = m x + b
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# 1 Recupero dei coefficienti dal modello Least Squares
# -----
# w_diff e b_diff sono già calcolati nel blocco precedente
w1, w2 = w_diff[0], w_diff[1]
w0 = b_diff

print("📌 EQUAZIONE DEL CONFINE DECISIONALE (forma implicita):")
print(f"    {w1:.3f} * x1 + {w2:.3f} * x2 + {w0:.3f} = 0")
print()
```

```

# -----
# 2 Trasformazione nella forma esplicita  $y = m x + b$ 
# -----
# Dalla formula:  $x_2 = - (w_1 / w_2) * x_1 - (w_0 / w_2)$ 
m = -w1 / w2
b = -w0 / w2

print("📐 FORMA ESPLICITA DELLA RETTA ( $y = m x + b$ ):")
print(f"     $x_2 = ({m:.3f}) * x_1 + ({b:.3f})$ ")
print()
print("👉 Pendenza (m):", round(m, 3))
print("👉 Intercetta (b):", round(b, 3))
print()

# -----
# 3 Significato geometrico del gradiente
# -----
print("🌀 INTERPRETAZIONE DEL GRADIENTE:")
print("    Il gradiente della funzione  $f(x_1, x_2) = w_1*x_1 + w_2*x_2 + w_0$  è:")
print(f"     $\nabla f = [w_1, w_2] = [{w_1:.3f}, {w_2:.3f}]$ ")
print("    Questo vettore è perpendicolare alla retta di decisione.")
print("    La sua direzione indica il lato in cui cresce  $f(x)$ , cioè dove il modello predice la Classe 1.")
print()

# -----
# 4 Costruzione della retta e della direzione del gradiente
# -----
xx = np.linspace(X_norm[:, 0].min() - 0.5, X_norm[:, 0].max() + 0.5, 100)
yy = m * xx + b

# Centro del piano (media dei punti)
x_center, y_center = np.mean(X_norm, axis=0)

# Direzione normalizzata del gradiente
grad = np.array([w1, w2])
grad_norm = grad / np.linalg.norm(grad)

```

```

# -----
# 5 Visualizzazione grafica
# -----

plt.figure(figsize=(8, 8))

# Punti colorati per le classi
for label, color in zip([0, 1], colors):
    plt.scatter(X_norm[y_ls == label, 0], X_norm[y_ls == label, 1],
                color=color, edgecolor='k', s=60, label=f"Classe
{label}")

# Regressione lineare (confine decisionale)
plt.plot(xx, yy, 'k-', linewidth=2, label='Confine decisionale (y = m
x + b)')

# Freccia del gradiente
plt.arrow(x_center, y_center,
          grad_norm[0]*1.5, grad_norm[1]*1.5,
          color='black', width=0.02, head_width=0.15,
          alpha=0.9, length_includes_head=True)
plt.text(x_center + grad_norm[0]*1.6,
         y_center + grad_norm[1]*1.6,
         r"$\mathbf{w}$", fontsize=14, fontweight='bold')

plt.title("🔍 Gradiente, pendenza e forma  $y = m x + b$ ", fontsize=14)
plt.xlabel("$x_1$ (normalizzato)")
plt.ylabel("$x_2$ (normalizzato)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

# -----
# 6 Sintesi finale
# -----

print("📊 RIEPILOGO:")
print(f"• Confine decisionale (implicit):  $\{w1:.3f\} \cdot x1 + \{w2:.3f\} \cdot x2$ 
+  $\{w0:.3f\} = 0$ ")
print(f"• Forma esplicita:  $x2 = \{m:.3f\} \cdot x1 + \{b:.3f\}$ ")
print(f"• Gradiente (direzione ortogonale):  $w = [\{w1:.3f\},$ 
 $\{w2:.3f\}]$ ")
print(f"• Direzione unitaria di  $w$ :  $\{grad\_norm.round(3)\}$ ")

```

```
print("• Il gradiente è perpendicolare al confine e punta verso il
lato predetto come Classe 1.")

print("\n📐 MARGINE FUNZIONALE E GEOMETRICO (esempio su un punto):")
x_sample = X_norm[0]
t_sample = 1 if y_ls[0] == 1 else -1
gamma_func = t_sample * (w1*x_sample[0] + w2*x_sample[1] + w0)
gamma_geom = gamma_func / np.linalg.norm([w1, w2])
print(f"Per il punto x = {x_sample.round(3)} (t = {t_sample}):")
print(f"• Margine funzionale γ = {gamma_func:.3f}")
print(f"• Margine geometrico γ̂ = {gamma_geom:.3f}")
```

∞ Infinità di gradienti equivalenti

Abbiamo visto che il confine decisionale di un classificatore lineare è definito da:

$$w_1x_1 + w_2x_2 + w_0 = 0$$

e che il **gradiente** rispetto a x è semplicemente:

$$\nabla f = [w_1, w_2].$$

Questo vettore è **ortogonale** al confine — cioè ne indica la direzione perpendicolare — ma **non è unico**: infatti, possiamo moltiplicare tutti i termini dell'equazione per una costante $c \neq 0$:

$$c(w_1x_1 + w_2x_2 + w_0) = 0.$$

La retta non cambia, ma il vettore w sì:

$$w' = c, w.$$



Conseguenza importante

👉 **Esistono infiniti gradienti** che definiscono la stessa retta decisionale.

Questi gradienti hanno:

- la **stessa direzione**, ma
- **lunghezze (norme) diverse**.



Relazione con il margine

Quando cambiamo la scala di w :

- il **marginale funzionale** $\gamma_i = t_i(w^T x_i + w_0)$ cambia (perché cresce con $\|w\|$);
- ma il **marginale geometrico**

$$\hat{\gamma}_i = \frac{t_i(w^T x_i + w_0)}{\|w\|}$$

resta **invariato** (perché divide per $\|w\|$).

Nella cella seguente vedremo **graficamente** questa proprietà:
tutti i vettori w paralleli (ma di lunghezze diverse) definiscono **la stessa retta decisionale**.

```
# =====
# ∞ Infinità di gradienti equivalenti (stessa direzione, diversa
scala)
# =====

print("\n=====")
print("∞ INFINITÀ DI GRADIENTI EQUIVALENTI")
print("=====\\n")

print("▣ Partiamo dal confine decisionale stimato con Least
Squares:")
print(f"    {w1:.3f} * x1 + {w2:.3f} * x2 + {w0:.3f} = 0")
print()

print("🌀 Il gradiente (normale al confine) è:")
print(f"    ∇f = [w1, w2] = [{w1:.3f}, {w2:.3f}]")
print(f"    Direzione unitaria (verso normalizzato):
{grad_norm.round(3)}")
print()

print("💡 Possiamo moltiplicare l'intera equazione per una costante c
≠ 0 senza cambiare la retta.")
print("    → Tutti i vettori w' = c*w hanno la stessa direzione
(stesso orientamento).")
print("    → Cambia solo la lunghezza (cioè la norma ||w'||).")
print()
```

```

# Definizione di tre scale diverse
scales = [0.5, 1.0, 2.0]
colors_grad = ['xkcd:gray', 'xkcd:black', 'xkcd:goldenrod']

print(" ♦ Generiamo tre versioni del gradiente:")
for c in scales:
    w_scaled = grad_norm * c
    print(f"    - scala c = {c:>3.1f} → w' = {np.round(w_scaled, 3)} | ||w'|| = {np.linalg.norm(w_scaled):.3f}")
print()

# -----
# Visualizzazione grafica
# -----

plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(xx, yy, 'k-', linewidth=2, label='Confine decisionale (y = m x + b)')

# Disegna i gradienti scalati
for scale, col in zip(scales, colors_grad):
    w_scaled = grad_norm * scale
    plt.arrow(x_center, y_center,
              w_scaled[0]*1.5, w_scaled[1]*1.5,
              color=col, width=0.02, head_width=0.15,
              alpha=0.85, length_includes_head=True,
              label=f"w x {scale}")

# Punti del dataset
plt.scatter(X_norm[:, 0], X_norm[:, 1],
            c=[colors[int(i)] for i in y_ls],
            s=50, edgecolor='k', alpha=0.8)

plt.title("∞ Infinità di gradienti collineari (stesso confine)",
          fontsize=14)
plt.xlabel("$x_1$ (normalizzato)")
plt.ylabel("$x_2$ (normalizzato)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

```



```
# -----
# Analisi numerica finale
# -----

print("📊 OSSERVAZIONE:")
print("• Tutti i vettori w disegnati sono paralleli (collineari).")
print("• Definiscono la stessa retta, perché  $f(x) = 0$  e  $c \cdot f(x) = 0$  hanno lo stesso insieme di soluzioni.")
print("• Cambiando la scala, si modifica solo la lunghezza del gradiente.")
print("• Di conseguenza:")
print("    - Il margine funzionale  $\gamma_i = t_i (w^T x_i + w_0)$  cambia.")
print("    - Il margine geometrico  $\hat{\gamma}_i = \gamma_i / ||w||$  resta invariato.\n")

# Esempio numerico su un punto
x_sample = X_norm[0]
t_sample = 1 if y_ls[0] == 1 else -1
gamma_func = t_sample * (w1*x_sample[0] + w2*x_sample[1] + w0)
gamma_geom = gamma_func / np.linalg.norm([w1, w2])
print(f"📐 ESEMPIO SUL PRIMO PUNTO:")
print(f"    x = {x_sample.round(3)},    t = {t_sample}")
print(f"    Margine funzionale  $\gamma = \{\text{gamma\_func:.3f}\}$ ")
print(f"    Margine geometrico  $\hat{\gamma} = \{\text{gamma\_geom:.3f}\}$ ")
print("    (Se riscalassimo w,  $\gamma$  cambierebbe ma  $\hat{\gamma}$  resterebbe uguale.)")
```

Estensione non lineare del modello: feature quadratiche

Finora abbiamo visto come il classificatore ai **Minimi Quadrati** trovi un *confine decisionale lineare*, descritto da un'equazione del tipo:

$$y_1(x) - y_2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad w_1^\top x + b_1 = w_2^\top x + b_2.$$

Tuttavia, molti problemi reali **non sono linearmente separabili** nello spazio originale delle feature.

Una strategia naturale consiste allora nel **trasformare lo spazio dei dati** applicando una *funzione di base* $\Phi(x)$, che genera **nuove feature non lineari** (ad esempio termini quadratici o misti):

$$\Phi(x) = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2].$$

In questo nuovo spazio, il modello rimane **lineare nei parametri** — cioè la soluzione analitica $W = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T T$ è ancora valida — ma il **confine decisionale proiettato nello spazio originale** diventa **non lineare** (una curva o superficie).

💡 In altre parole:

anche se il modello è *linear regression in $\Phi(x)$* ,
la decision boundary è *non lineare in x* .

Nel blocco seguente estenderemo il modello Least Squares a questa base quadratica e visualizzeremo il nuovo **confine decisionale** (dove $y_1(x) = y_2(x)$), che non sarà più una retta ma una curva che si adatta meglio ai dati.

```
# =====
# 🧩 Least Squares con Feature Quadratiche (base non lineare)
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# 1 Funzione di base  $\Phi(x)$ : aggiungiamo termini quadratici
# -----

def design_matrix_quadratic(X):
    """
    Genera una matrice  $\Phi(X)$  con:
    [1, x1, x2, x12, x22, x1*x2]
    """
    x1, x2 = X[:, 0], X[:, 1]
    Phi = np.column_stack([
        np.ones(len(X)),  # bias
        x1,
        x2,
        x1**2,
        x2**2,
        x1 * x2
    ])
    return Phi

# Matrice  $\Phi(X)$ 
Phi_ls = design_matrix_quadratic(X_norm)
```

```

# -----
# 2 Calcolo dei pesi (stesso schema dei minimi quadrati)
# -----
W_quad = np.linalg.inv(Phi_ls.T @ Phi_ls) @ Phi_ls.T @ T

# Predizione continua
Y_pred_quad = Phi_ls @ W_quad
y_class_quad = np.argmax(Y_pred_quad, axis=1)

# Accuracy
acc_quad = np.mean(y_class_quad == y_ls)
print(f"✅ Accuracy (Least Squares Quadratico): {acc_quad:.3f}")
print("📊 Matrice dei pesi W_quad:")
print(W_quad.round(3))

# -----
# 3 Griglia per visualizzare il confine decisionale
# -----
x1_range = np.linspace(X_norm[:, 0].min() - 0.5, X_norm[:, 0].max() + 0.5, 200)
x2_range = np.linspace(X_norm[:, 1].min() - 0.5, X_norm[:, 1].max() + 0.5, 200)
xx, yy = np.meshgrid(x1_range, x2_range)

# Flatten e costruisci Φ per la griglia
grid_points = np.column_stack([xx.ravel(), yy.ravel()])
Phi_grid = design_matrix_quadratic(grid_points)

# Predizione sul piano
Y_grid = Phi_grid @ W_quad
Z = (Y_grid[:, 1] - Y_grid[:, 0]).reshape(xx.shape) # differenza tra classi

# -----
# 4 Visualizzazione dei risultati
# -----
plt.figure(figsize=(9, 8))

# Scatter dei punti originali
for label, color in zip([0, 1], colors):
    plt.scatter(X_norm[y_ls == label, 0], X_norm[y_ls == label, 1],

```

```

        color=color, edgecolor='k', s=50, label=f"Classe
{label}")

# Contour del confine decisionale (dove  $y_1 = y_2 \rightarrow Z = 0$ )
contour = plt.contour(xx, yy, Z, levels=[0], colors=['gold'],
linewidths=2)
plt.clabel(contour, fmt='Confine decisionale', inline=True,
fontsize=10)

# Aggiunge anche isolinee per capire la forma
plt.contour(xx, yy, Z, levels=np.linspace(-1, 1, 11),
cmap='coolwarm', alpha=0.5)

plt.title(f"🧠 Least Squares con feature quadratiche | Accuracy =
{acc_quad:.3f}")
plt.xlabel("$x_1$ (normalizzato)")
plt.ylabel("$x_2$ (normalizzato)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

# -----
# 5 Analisi
# -----

print("\n🧠 Analisi:")
print("• Ora la base  $\Phi(x)$  include anche termini quadrati e misti
( $x_1^2$ ,  $x_2^2$ ,  $x_1x_2$ ).")
print("• Il confine decisionale  $Z=0$  non è più una retta, ma una curva
(in genere un'ellisse o iperbole).")
print("• Questo mostra come un modello lineare nei parametri  $W$  possa
produrre decisioni non lineari nello spazio di input.")

```

⚙️ Il Percettrone: classificatore lineare e apprendimento iterativo

Il **Percettrone** (Rosenblatt, 1962) è uno dei primi modelli di **classificazione lineare** e rappresenta un punto di partenza storico per la moderna teoria dell'apprendimento automatico.



Obiettivo

Dato un insieme di dati di addestramento:

$$\mathcal{D} = \{(x_n, t_n)\}_{n=1}^N, \quad t_n \in \{-1, +1\},$$

il percettrone cerca un **iperpiano lineare** che separi le due classi:

$$y(x) = f(w^T x + b),$$

dove:

- w è il vettore dei **pesi**,
- b è il **bias** (termine costante),
- $f(a)$ è una **funzione a gradino**:

$$f(a) = \begin{cases} +1 & \text{se } a \geq 0, \\ -1 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Il punto appartiene alla **classe** $+1$ se cade nel semispazio dove $w^T x + b > 0$, alla **classe** -1 altrimenti.



Funzione obiettivo

Per ogni campione vogliamo che:

$$t_n(w^T x_n) > 0.$$

Se un punto è **mal classificato**, allora $t_n(w^T x_n) < 0$.

Il **criterio del percettrone** penalizza solo questi punti, definendo la seguente funzione di errore:

$$E_P(w) = - \sum_{n \in \mathcal{M}} t_n w^T x_n,$$

dove \mathcal{M} è l'insieme dei pattern mal classificati.



Regola di aggiornamento (Perceptron Learning Rule)

Applicando **discesa del gradiente stocastica** all'errore $E_P(w)$ si ottiene la regola di aggiornamento:

$$w^{(\tau+1)} = w^{(\tau)} + \eta t_n x_n,$$

dove:

- η è il **learning rate** (tasso di apprendimento),
- τ indica l'iterazione corrente.

💡 In pratica:

- se un punto è **correttamente classificato**, i pesi non cambiano;
- se è **mal classificato**, il vettore x_n viene **aggiunto** o **sottratto** a w , spostando il confine decisionale nella direzione giusta.

Procedura dell'algoritmo

1. Inizializza i pesi w con valori piccoli casuali.
2. Per ogni punto (x_n, t_n) :
 - calcola $y_n = \text{sign}(w^T x_n)$
 - se $y_n \neq t_n$, aggiorna $w \leftarrow w + \eta t_n x_n$
3. Ripeti fino a convergenza o fino a un numero massimo di epoche.

Teorema di convergenza

Il **teorema di convergenza del percettrone** afferma che:

Se il dataset è *linearmente separabile*, l'algoritmo del percettrone converge in un numero finito di passi a una soluzione esatta.

Tuttavia:

- se i dati **non sono linearmente separabili**, l'algoritmo **non converge**;
- l'iperpiano trovato **non è unico** e dipende dall'ordine dei dati e dai valori iniziali.

Limiti principali

- Il modello produce **decisioni deterministiche** (non probabilità).
- È sensibile ai **dati anomali (outlier)** e (più importante) **dati non separabili linearmente**.
- Non può gestire in modo naturale **più di due classi**.

Nella prossima sezione implementeremo il **Percettrone su dati reali** e visualizzeremo la frontiera di decisione.

```
# =====
# 🛠 Addestramento del Percettrone (versione stocastica)
# =====

# Imposta i parametri di apprendimento
eta = 0.25          # learning rate
epochs = 20         # numero di epoche
theta = np.random.rand(3, 1) * 0.1 - 0.05  # inizializzazione
casuale (3 = bias + 2 feature)

# Lista per tenere traccia dell'evoluzione dei pesi
thetas = [theta.copy()]

# =====
# 🔄 Ciclo di apprendimento (un campione alla volta)
# =====
n = len(t)
for epoch in range(epochs):
    for i in range(n):
        # Calcola la predizione per il singolo campione
        y_i = 1 if np.dot(X_aug[i], theta) > 0 else 0
        # Aggiornamento solo se mal classificato
        theta += eta * (t[i] - y_i) * X_aug[i].reshape(-1, 1)
    # Salva i pesi dopo ogni epoca
    thetas.append(theta.copy())

# Seleziona l'epoca da visualizzare
k = min(10, len(thetas) - 1)  # ad esempio la decima epoca
theta = thetas[k]

# Calcola l'accuratezza corrente
y_pred = np.where(np.dot(X_aug, theta) > 0, 1, 0)
accuracy = np.mean(y_pred == t)

# =====
# 📊 Visualizzazione del gradiente (direzione del vettore w)
# =====
grad = theta[1:].ravel()
```

```

grad_dir = grad / np.linalg.norm(grad)

print(f"📊 Epoca mostrata: {k}")
print(f"📐 Gradiente (non normalizzato):", grad)
print(f"🏹 Direzione del gradiente (unitaria):", grad_dir)
print(f"✅ Accuracy attuale: {accuracy:.3f}")

# Punto di partenza (centro del piano)
x_center = np.mean(X_norm[:, 0])
y_center = np.mean(X_norm[:, 1])

# Griglia per lo sfondo colorato
x_min, x_max = X_norm[:, 0].min() - 0.5, X_norm[:, 0].max() + 0.5
y_min, y_max = X_norm[:, 1].min() - 0.5, X_norm[:, 1].max() + 0.5
xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 300),
                     np.linspace(y_min, y_max, 300))
grid_aug = np.column_stack((-np.ones(xx.size), xx.ravel(),
                             yy.ravel()))
zz = np.dot(grid_aug, theta).reshape(xx.shape)

# -----
# Plot con la freccia del gradiente
# -----

plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.contourf(xx, yy, zz, levels=30, cmap='coolwarm', alpha=0.35)
plt.contour(xx, yy, zz, levels=[0], colors='k', linewidths=2)

# Freccia del gradiente
plt.arrow(x_center, y_center,
          grad_dir[0] * 1.5, grad_dir[1] * 1.5,
          color='black', width=0.02, head_width=0.15,
          alpha=0.8, length_includes_head=True)

# Punti del dataset
plt.scatter(X_norm[:, 0], X_norm[:, 1],
           c=[colors[i] for i in t.ravel()],
           s=40, edgecolor='k', alpha=0.9)

plt.xlabel("x1 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.ylabel("x2 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.title(f"🏹 Direzione del gradiente del Perceptrone – Epoca {k}",

```



```

fontsize=14)

# Box con accuracy
plt.annotate(f"Accuracy = {accuracy:.3f}",
            xy=(0.03, 0.97),
            xycoords='axes fraction',
            va='top',
            fontsize=12,
            backgroundcolor='white')

plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

```



Analisi della convergenza e stabilità del Perceptrone

Il **perceptrone** apprende iterativamente modificando il vettore dei pesi w ogni volta che un campione è **mal classificato**.

Tuttavia, questo processo non garantisce una convergenza stabile, soprattutto se i dati **non sono linearmente separabili**.



Comportamento durante l'apprendimento

Ad ogni iterazione k il modello aggiorna i pesi secondo la regola:

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + \eta(t_n - y_n)x_n$$

dove t_n è l'etichetta vera e y_n la predizione.

Questo può migliorare la classificazione di un punto, ma **peggiorare quella di altri**.



Evoluzione dell'accuratezza

Tracciando l'**accuratezza ad ogni iterazione**, possiamo osservare che il valore tende a **fluttuare**:

- in un dataset **linearmente separabile**, il valore converge a 1.0 (classificazione perfetta);
- in un dataset **non separabile**, l'accuratezza resta **instabile**, oscillando attorno a un valore medio.

Frontiera decisionale nel tempo

Mostrando la **retta di separazione** ogni 10 iterazioni, si vede come l'iperpiano (la linea di decisione) **si sposta continuamente**: ogni aggiornamento tende a correggere errori locali, generando movimenti irregolari.

Questo comportamento evidenzia una **debolezza fondamentale** del percettrone:

non essendo basato su un criterio probabilistico né su una funzione di errore liscia, l'apprendimento può risultare instabile e non convergere mai pienamente.

👉 Nella prossima sezione introdurremo un approccio **probabilistico** — il **Gaussian Discriminant Analysis (GDA)** — che risolve molti di questi problemi, fornendo confini decisionali più stabili e interpretabili.

```
# =====
# 📈 Evoluzione dell'accuratezza del Percettrone (versione
# stocastica)
# =====

# Funzione per calcolare l'accuratezza su tutto il dataset
def accuracy_score(theta, X, t):
    y_pred = np.where(np.dot(X, theta) > 0, 1, 0)
    return np.mean(y_pred == t)

# Calcola l'accuratezza dopo ogni epoca
accuracies = np.array([accuracy_score(th, X_aug, t) for th in
thetas])

# -----
# 🔍 Plot dell'evoluzione dell'accuratezza
# -----

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(range(len(accuracies)), accuracies, color='xkcd:sea blue',
linewidth=2, marker='o')
plt.title("Evoluzione dell'accuratezza del Percettrone (per epoca)",
fontsize=14)
plt.xlabel("Epoche", fontsize=12)
plt.ylabel("Accuratezza", fontsize=12)
plt.ylim(0, 1.05)
```

```

plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

# =====
# ⑥ Evoluzione del confine decisionale (dataset originale)
# =====

plt.figure(figsize=(8, 8))

# Colori per le classi (0 e 1)
colors = ['xkcd:pale red', 'xkcd:sea blue']
plt.scatter(X_norm[:, 0], X_norm[:, 1],
            c=[colors[int(i)] for i in t.ravel()],
            s=40, edgecolor='k', alpha=0.8)

# Range per x1
xx = np.linspace(X_norm[:, 0].min() - 0.5, X_norm[:, 0].max() + 0.5,
                100)

# Disegna la retta di separazione ogni 2 epoche
for epoch in range(0, len(thetas), 2):
    th = thetas[epoch]
    # Evita divisioni per zero (retta verticale)
    if np.abs(th[2]) < 1e-6:
        continue
    theta1 = -th[1] / th[2]
    theta0 = th[0] / th[2]
    yy = theta0 + theta1 * xx
    plt.plot(xx, yy, alpha=0.3, linewidth=1.5,
            label=f"Epoca {epoch}" if epoch % 10 == 0 else None)

plt.title("⑥ Evoluzione del confine decisionale del Percettrone
(epoca per epoca)", fontsize=14)
plt.xlabel("x1 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.ylabel("x2 (normalizzato)", fontsize=12)
plt.legend(loc="best")
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()

```



Dopo aver analizzato i modelli discriminativi lineari — **Percettrone** e **Least Squares** — introduciamo ora un approccio **probabilistico** alla classificazione: la **Gaussian Discriminant Analysis (GDA)**.

♦ Idea di base

Si assume che i dati di ciascuna classe C_k provengano da una **distribuzione gaussiana multivariata**:

$$p(\mathbf{x}|C_k) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2} |\Sigma_k|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)^T \Sigma_k^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_k)\right)$$

dove:

- $\boldsymbol{\mu}_k$ è la media della classe C_k ,
 - Σ_k è la matrice di covarianza della classe C_k .
-

♦ Classificazione bayesiana

Utilizzando la **regola di Bayes**, possiamo stimare la probabilità a posteriori di ciascuna classe:

$$p(C_k|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|C_k) p(C_k)}{p(\mathbf{x})}$$

Il denominatore $p(\mathbf{x})$ è identico per tutte le classi, quindi ai fini della decisione possiamo confrontare direttamente le **funzioni discriminanti**:

$$g_k(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}|C_k) + \ln p(C_k)$$

Il punto viene assegnato alla classe che massimizza $g_k(\mathbf{x})$.

♦ Assunzione di covarianza condivisa

Un caso particolarmente utile (e comune) è quello in cui tutte le classi condividono la **stessa covarianza**:

$$\Sigma_k = \Sigma, \quad \forall k$$

In tal caso, la funzione discriminante diventa **lineare** in \mathbf{x} :

$$g_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x} + w_{k0}$$

con

$$\mathbf{w}_k = \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_k, \quad w_{k0} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}_k^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_k + \ln p(C_k)$$

◆ Decisione finale

Nel caso binario (\$K = 2\$), possiamo riscrivere la funzione discriminante in forma *logistica*:

$$p(C_1|\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w}^T \mathbf{x} + w_0)$$

dove $\sigma(a) = \frac{1}{1 + e^{-a}}$ è la **sigmoide logistica**, e

$$\mathbf{w} = \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0), \quad w_0 = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu}_1^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_0^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu}_0) + \ln \frac{p(C_1)}{p(C_0)}$$

◆ Interpretazione geometrica

- Il **confine decisionale** è una retta (in 2D) o un iperpiano (in generale), come nel Percettrone e nel Least Squares.
- Tuttavia, qui il confine rappresenta i punti per cui $p(C_1 | \mathbf{x}) = p(C_0 | \mathbf{x}) = 0.5$.
- La **decisione** è quindi probabilistica: possiamo anche stimare *quanto* un punto appartiene a una classe.

Nel blocco seguente implementiamo la **GDA** sullo stesso dataset per confrontarla con il Percettrone e il modello ai minimi quadrati. 🙌

```
# =====
# 🧠 Gaussian Discriminant Analysis (GDA)
# - Probabilistic version of the Perceptron
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import expit as sigmoid # logistic sigmoid
```

```

from matplotlib.patches import Ellipse

# -----
# 1 Dataset: stessi dati normalizzati del Percettrone
# -----
X = X_norm                                # features (già normalizzate)
y = t.ravel().astype(int)                 # target come array 1D di interi (0 o 1)

# -----
# 2 Stima dei parametri del modello generativo
# -----
mu1 = np.mean(X[y == 1], axis=0)
mu2 = np.mean(X[y == 0], axis=0)

# Covarianza condivisa  $\Sigma$ 
n1, n2 = np.sum(y == 1), np.sum(y == 0)
S1 = np.cov(X[y == 1].T)
S2 = np.cov(X[y == 0].T)
Sigma = (n1 * S1 + n2 * S2) / (n1 + n2)

# Inversa e priors
Sigma_inv = np.linalg.inv(Sigma)
p1, p2 = n1 / (n1 + n2), n2 / (n1 + n2)

# -----
# 3 Parametri del modello discriminante
# -----
w = Sigma_inv @ (mu1 - mu2)
b = -0.5 * (mu1.T @ Sigma_inv @ mu1 - mu2.T @ Sigma_inv @ mu2) +
np.log(p1 / p2)

print("\n Parametri stimati:\n")
print(f" $\mu_1$  = {mu1}")
print(f" $\mu_2$  = {mu2}")
print(f" $\Sigma$  = {Sigma}")
print(f" $w$  = {w}")
print(f" $b$  = {b:.3f}")

# -----
# 4 Classificatore probabilistico

```

```

# -----
def predict_proba(X):
    """Restituisce  $p(C1 | x)$ """
    return sigmoid(X @ w + b)

def predict(X):
    """Classe più probabile"""
    return (predict_proba(X) >= 0.5).astype(int)

# -----
# 5 Griglia per il calcolo di  $p(C1|x)$ 
# -----
x_min, x_max = X[:, 0].min() - 0.5, X[:, 0].max() + 0.5
y_min, y_max = X[:, 1].min() - 0.5, X[:, 1].max() + 0.5
xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 200),
                     np.linspace(y_min, y_max, 200))
grid = np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()]
probs = predict_proba(grid).reshape(xx.shape)

# -----
# 6 Visualizzazione – doppio pannello
# -----
def plot_cov_ellipse(ax, mu, Sigma, color, alpha=0.25, scale=2.0):
    """Disegna un'ellisse che rappresenta la covarianza  $\Sigma$  attorno a  $\mu$ ."""
    vals, vecs = np.linalg.eigh(Sigma)
    order = vals.argsort()[::-1]
    vals, vecs = vals[order], vecs[:, order]
    theta = np.degrees(np.arctan2(*vecs[:, 0][::-1]))
    width, height = 2 * scale * np.sqrt(vals)
    ell = Ellipse(xy=mu, width=width, height=height,
                  angle=theta, color=color, alpha=alpha, lw=2,
                  edgecolor="k")
    ax.add_patch(ell)

fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(14, 6))

# ==== Pannello 1: distribuzione e covarianze ====
ax = axes[0]
ax.scatter(X[y == 1][:, 0], X[y == 1][:, 1],
          color="xkcd:sea blue", label="Classe 1", edgecolor="k",

```

```

alpha=0.8)
ax.scatter(X[y == 0][:, 0], X[y == 0][:, 1],
           color="xkcd:pale red", label="Classe 0", edgecolor="k",
           alpha=0.8)
plot_cov_ellipse(ax, mu1, Sigma, color="xkcd:sea blue")
plot_cov_ellipse(ax, mu2, Sigma, color="xkcd:pale red")

ax.scatter(mu1[0], mu1[1], s=120, c="xkcd:sea blue", edgecolor="k",
           marker="o")
ax.scatter(mu2[0], mu2[1], s=120, c="xkcd:pale red", edgecolor="k",
           marker="o")
ax.text(mu1[0]+0.1, mu1[1], r"$\mu_1$", fontsize=12,
        color="xkcd:navy", weight="bold")
ax.text(mu2[0]+0.1, mu2[1], r"$\mu_2$", fontsize=12, color="xkcd:dark
red", weight="bold")

ax.set_title("Distribuzione e covarianze (stesso dataset)",
            fontsize=13)
ax.set_xlabel("$x_1$")
ax.set_ylabel("$x_2$")
ax.legend(loc="upper left")
ax.grid(alpha=0.3)

# ==== Pannello 2: iperpiano e probabilità ====
ax = axes[1]
ax.contourf(xx, yy, probs, cmap="coolwarm", alpha=0.35,
            levels=np.linspace(0, 1, 20))
ax.contour(xx, yy, probs, levels=[0.5], colors="k", linewidths=2)
center = (mu1 + mu2) / 2
ax.text(center[0] + w[0]*0.55, center[1] + w[1]*0.55, "w",
        fontsize=12, fontweight="bold")

ax.scatter(X[y == 1][:, 0], X[y == 1][:, 1],
           color="xkcd:sea blue", edgecolor="k", alpha=0.7)
ax.scatter(X[y == 0][:, 0], X[y == 0][:, 1],
           color="xkcd:pale red", edgecolor="k", alpha=0.7)

ax.set_title("Iperpiano decisionale e probabilità", fontsize=13)
ax.set_xlabel("$x_1$")
ax.set_ylabel("$x_2$")
ax.grid(alpha=0.3)

```



```
plt.tight_layout()
plt.show()
```



Gaussian Discriminant Analysis con covarianze diverse ($\Sigma_1 \neq \Sigma_2$)

Finora abbiamo assunto che le due classi condividessero la stessa matrice di covarianza:

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$$

ottenendo un **confine decisionale lineare**.

Ora rilassiamo questa ipotesi e stimiamo una **matrice di covarianza diversa per ciascuna classe**.

In tal caso, le funzioni discriminanti diventano:

$$g_k(x) = -\frac{1}{2}(x - \mu_k)^T \Sigma_k^{-1}(x - \mu_k) - \frac{1}{2} \ln |\Sigma_k| + \ln p(C_k)$$

Imponendo $g_1(x) = g_2(x)$ si ottiene un **confine decisionale quadratico** — una curva che separa le regioni dove ciascuna distribuzione è più probabile.

```
# =====
# 🌀 GDA con covarianze diverse ( $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ ) – stesso dataset reale
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import multivariate_normal

# -----
# 1 Stima separata delle covarianze per ciascuna classe
# -----

mu1 = np.mean(X[y == 1], axis=0)
mu2 = np.mean(X[y == 0], axis=0)
Sigma1 = np.cov(X[y == 1].T)
Sigma2 = np.cov(X[y == 0].T)

p1, p2 = np.mean(y == 1), np.mean(y == 0)

print("📊 Parametri stimati (GDA con covarianze diverse):\n")
```

```

print(f"μ1 = {mu1}")
print(f"μ2 = {mu2}")
print("\nΣ1 =\n", Sigma1)
print("\nΣ2 =\n", Sigma2)

# -----
# 2 Griglia di valutazione (stesso range del dataset)
# -----
x_min, x_max = X[:, 0].min() - 0.5, X[:, 0].max() + 0.5
y_min, y_max = X[:, 1].min() - 0.5, X[:, 1].max() + 0.5
xx, yy = np.meshgrid(np.linspace(x_min, x_max, 300),
                     np.linspace(y_min, y_max, 300))
grid = np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()]

# -----
# 3 Calcolo delle funzioni discriminanti
# -----
logp1 = multivariate_normal.logpdf(grid, mean=mu1, cov=Sigma1) +
np.log(p1)
logp2 = multivariate_normal.logpdf(grid, mean=mu2, cov=Sigma2) +
np.log(p2)
Z = (logp1 - logp2).reshape(xx.shape) # g1 - g2

# -----
# 4 Visualizzazione
# -----
plt.figure(figsize=(8, 8))

# Contour della frontiera decisionale (g1 = g2 → Z = 0)
contour = plt.contour(xx, yy, Z, levels=[0], colors='k',
                      linewidths=2)
plt.clabel(contour, fmt='Confine quadratico', inline=True,
           fontsize=10)

# Contour di probabilità per le due gaussiane
plt.contour(xx, yy,
            multivariate_normal.pdf(grid, mean=mu1,
            cov=Sigma1).reshape(xx.shape),
            levels=5, colors='xkcd:sea blue', alpha=0.5)
plt.contour(xx, yy,
            multivariate_normal.pdf(grid, mean=mu2,

```

```

cov=Sigma2).reshape(xx.shape),
                    levels=5, colors='xkcd:pale red', alpha=0.5)

# Punti originali del dataset
plt.scatter(X[y == 1][:, 0], X[y == 1][:, 1],
            color='xkcd:sea blue', edgecolor='k', s=60, label='Classe
1')
plt.scatter(X[y == 0][:, 0], X[y == 0][:, 1],
            color='xkcd:pale red', edgecolor='k', s=60, label='Classe
0')

plt.title("🌀 GDA con covarianze diverse ( $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ ) – Confine
quadratico", fontsize=14)
plt.xlabel("$x_1$ (normalizzato)")
plt.ylabel("$x_2$ (normalizzato)")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.3)
plt.axis('equal')
plt.show()

```

💬 Osservazioni

- Il confine nero non è più una **retta**, ma una **curva**: una forma quadratica (ellisse o iperbole).
- Questo accade perché i termini quadratici ($x^T \Sigma_k^{-1} x$) *non si cancellano più* tra le due classi.
- Il modello risultante prende il nome di **Quadratic Discriminant Analysis (QDA)**.
- La GDA lineare è quindi un caso particolare della QDA in cui $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

🚩 Conclusioni: tre prospettive su un unico confine lineare

Abbiamo esplorato tre approcci diversi alla **classificazione lineare**, tutti riconducibili a un'unica forma generale di *decision boundary*:

$$w^T x + w_0 = 0$$

Tuttavia, il **modo in cui questo confine viene appreso e interpretato** cambia radicalmente a seconda del modello.

◆ Percettrone — apprendimento iterativo e geometrico

- Nasce da una **visione puramente geometrica**: l'obiettivo è spostare l'iperpiano finché separa correttamente i punti.
- Aggiorna i pesi solo quando un campione è **mal classificato**.
- Il criterio di errore è **discreto e non derivabile**, quindi l'ottimizzazione non è continua.
- Se i dati **sono linearmente separabili**, l'algoritmo converge in un numero finito di passi.
- Tuttavia, su dati **non separabili**, il modello non converge e l'accuratezza oscilla.



Punti deboli: mancanza di interpretazione probabilistica, sensibilità ai dati non lineari, e comportamento instabile.



Forza: estrema semplicità e interpretazione geometrica intuitiva.

◆ Least Squares — la via analitica

- Riutilizza la **regressione lineare** per la classificazione.
- La soluzione è ottenuta in forma **chiusa**:

$$W = (X^T X)^{-1} X^T T$$

- Fornisce un iperpiano simile al Percettrone, ma basato su una **funzione di costo continua e derivabile**.
- Tuttavia, il modello **non garantisce coerenza probabilistica**: le “probabilità” possono uscire da $[0, 1]$.
- Inoltre è **molto sensibile agli outlier**, che spostano fortemente il confine.



Punti deboli: mancanza di interpretazione probabilistica, scarsa robustezza.



Forza: soluzione esatta, utile per introdurre concetti di regressione e matrici.

◆ Gaussian Discriminant Analysis — la visione probabilistica

- Assume che i dati di ciascuna classe provengano da una **distribuzione gaussiana multivariata**:

$$p(x|C_k) = \mathcal{N}(x|\mu_k, \Sigma)$$

- Utilizzando la regola di Bayes, la decisione è basata sulla probabilità a posteriori:

$$p(C_k|x) = \frac{p(x|C_k)p(C_k)}{p(x)}$$

- Con covarianze condivise ($\Sigma_1 = \Sigma_2$), il confine decisionale è **lineare**, ma ora ha un significato probabilistico:
ogni punto è classificato **secondo la probabilità** di appartenere a ciascuna classe.

🧩 **Forza:** fornisce una visione *generativa* coerente, interpretabile e stabile.

🧠 **Limite:** richiede l'assunzione di gaussianità (non sempre realistica).

⚖️ Riflessione comparativa

Aspetto	Percettrone	Least Squares	GDA
Tipo di modello	Discriminativo (iterativo)	Discriminativo (analitico)	Generativo (probabilistico)
Funzione di costo	Discreta, non derivabile	Quadratica (MSE)	Log-verosimiglianza
Interpretazione	Geometrica	Algebra lineare	Probabilistica
Stabilità	Instabile su dati non separabili	Sensibile agli outlier	Stabile e coerente
Decisione	Segno di $w^T x$	Segno di $w^T x$	Posterior $p(C_k x)$
Probabilità	❌ No	⚠️ Approssimata	✅ Sì
Estendibilità	Difficile	Limitata	Naturale (multi-classe)

🌌 Conclusione finale

I tre metodi mostrano come **la stessa forma funzionale** — un iperpiano lineare — possa derivare da **motivazioni completamente diverse**:

- dal **tentativo di correggere errori** (Percettrone),
- dalla **minimizzazione di una distanza quadratica** (Least Squares),
- o dalla **modellazione probabilistica delle classi** (GDA).

In altre parole:

- ♦ *Il Percettrone guarda il confine.*
- ♦ *Il Least Squares guarda le distanze.*
- ♦ *La GDA guarda la distribuzione.*

Messaggio chiave:

Comprendere i legami tra modelli discriminativi e generativi è essenziale per capire come la probabilità, la geometria e l'ottimizzazione si incontrano nel cuore del *Machine Learning*.

Appendice

Appendice 1: **Il problema XOR e i limiti del Percettrone**

Il **Percettrone** di Rosenblatt è un classificatore lineare: cerca una frontiera della forma

$$w^T x + b = 0$$

che separi due classi nello spazio delle feature.

Finché i dati sono **linearmente separabili**, l'algoritmo converge e trova un iperpiano corretto.

Ma cosa succede se le classi **non sono separabili con una retta**?

Il caso classico: XOR

Il problema **XOR** (*exclusive OR*) è un esempio emblematico:

x_1	x_2	$\text{XOR}(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Non esiste **alcuna retta** che separi perfettamente i punti con output 0 da quelli con output 1.

È necessario un **confine non lineare**, come due semipiani o una curva chiusa.

✗ Perché il Percettrone fallisce

Il Percettrone applica una funzione a soglia $f(a) = \text{sign}(w^T x + b)$, e ogni aggiornamento modifica il vettore w per spostare la linea di separazione.

Tuttavia, se il problema non è linearmente separabile:

- l'algoritmo **non converge**;
- i pesi oscillano all'infinito;
- l'accuratezza resta inferiore a 100%.

Questo era esattamente il punto sollevato da **Minsky e Papert (1969)**:

“Il Percettrone, in quanto modello a singolo strato, non può risolvere nemmeno il problema XOR.”

Le loro critiche erano corrette — e portarono al cosiddetto “**AI Winter**”, ma anche a una consapevolezza fondamentale:

per risolvere problemi non lineari, servono **più strati di neuroni** e un metodo per addestrarli —
ciò che, anni dopo, diventerà il **backpropagation**.

Esperimento: il Percettrone sul problema XOR

Nel codice seguente, alleniamo un Percettrone semplice (con bias e due feature) sul dataset XOR.

Vedremo che, anche dopo molte epoche, **l'algoritmo non riesce a trovare un confine corretto**.

```
# =====
# ✗ Percettrone sul problema XOR (versione isolata, non
interferisce)
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# -----
# 1 Dataset XOR (variabili locali)
```

```

# -----
X_xor = np.array([
    [0, 0],
    [0, 1],
    [1, 0],
    [1, 1]
])

y_xor = np.array([0, 1, 1, 0])

# Aggiunge il bias come prima colonna (1)
X_aug_xor = np.column_stack((np.ones(len(X_xor)), X_xor))

# -----
# 2 Percettrone: inizializzazione e training
# -----
np.random.seed(0)
w_xor = np.random.randn(3) * 0.1 # pesi casuali (bias + 2 feature)
eta = 0.2 # learning rate
epochs = 20 # numero di epoche

history_xor = []

for epoch in range(epochs):
    for i in range(len(X_aug_xor)):
        a = np.dot(w_xor, X_aug_xor[i])
        y_pred = 1 if a >= 0 else 0
        w_xor += eta * (y_xor[i] - y_pred) * X_aug_xor[i]
    # memorizza accuracy
    y_preds = (X_aug_xor @ w_xor >= 0).astype(int)
    acc = np.mean(y_preds == y_xor)
    history_xor.append(acc)

# -----
# 3 Risultati numerici
# -----
print("📊 Pesi finali:", w_xor)
print("✅ Accuracy finale:", history_xor[-1])

# -----
# 4 Visualizzazione XOR

```



```
# -----
plt.figure(figsize=(8, 8))
colors_xor = ['xkcd:pale red' if yi == 0 else 'xkcd:sea blue' for yi
in y_xor]

plt.scatter(X_xor[:, 0], X_xor[:, 1], c=colors_xor, s=120,
edgecolor='k')
plt.title("❌ Percettrone sul problema XOR", fontsize=14)
plt.xlabel("$x_1$")
plt.ylabel("$x_2$")
plt.grid(alpha=0.3)

# Mostra il confine decisionale (se possibile)
x1_vals = np.linspace(-0.2, 1.2, 100)
if w_xor[2] != 0:
    x2_vals = -(w_xor[1] * x1_vals + w_xor[0]) / w_xor[2]
    plt.plot(x1_vals, x2_vals, 'k--', label="Confine lineare")
plt.legend()
plt.show()

# -----
# 5 Evoluzione dell'accuratezza
# -----

plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(history_xor, color='xkcd:goldenrod', linewidth=2)
plt.title("📉 Evoluzione dell'accuratezza (Percettrone XOR)",
fontsize=13)
plt.xlabel("Epoca")
plt.ylabel("Accuratezza")
plt.ylim(0, 1.05)
plt.grid(alpha=0.3)
plt.show()
```

Appendice 2: Verso l'idea di margine e la SVM

Abbiamo visto tre approcci diversi per costruire un classificatore lineare:

1. **Percettrone:** cerca una direzione di separazione qualsiasi, ma può trovare *infinite* soluzioni equivalenti (diverse scale di w).
2. **Minimi Quadrati:** trova un optimum in senso "numerico", ma non è pensato per classificare — penalizza anche i punti *troppo corretti*

perché si concentra sulla distanza verticale, non sulla separazione.

3. Metodo probabilistico (GDA o regressione logistica):

cerca il piano che massimizza la probabilità di classificare correttamente i punti, ma **non controlla la distanza dal confine**: può separare bene, ma con un margine stretto.

👉 Nelle prossime lezioni vedremo come risolvere tutti questi limiti:

un metodo che, come il Percettrone, cerca una separazione netta, ma allo stesso tempo **massimizza la distanza dal confine**.

Questa distanza è il **margine** — e sarà il cuore della *Support Vector Machine (SVM)*.



Il ruolo di w e il concetto di margine (spoiler SVM)

In tutti i modelli lineari, la funzione discriminante ha la forma:

$$y(x) = w^\top x + w_0$$

Il vettore w definisce la **direzione ortogonale** al confine decisionale:

- la sua **direzione** indica l'orientamento della frontiera;
- la sua **norma** $\|w\|$ controlla “quanto ripida” è la separazione;
- il **bias** w_0 sposta il piano lungo tale direzione.



Margine funzionale vs. margine geometrico

Ogni punto x_i si trova a una certa distanza dal confine:

- **Margine funzionale:**

$$\gamma_i = t_i(w^\top x_i + w_0)$$

misura quanto fortemente un punto è classificato correttamente, ma dipende dalla scala di w .

- **Margine geometrico:**

$$\hat{\gamma}_i = \frac{\gamma_i}{\|w\|} = \frac{t_i(w^\top x_i + w_0)}{\|w\|}$$

rappresenta la **vera distanza ortogonale** dal confine, ed è **invariante** rispetto alla scala di w .



Idea chiave

Molte combinazioni di (w, w_0) producono **lo stesso confine decisionale**,
ma **distanze diverse dai punti**: il margine geometrico cambia inversamente a $\|w\|$.

La **Support Vector Machine (SVM)** nasce proprio da qui:

cerca il piano che separa le classi **massimizzando il margine geometrico**,
cioè minimizzando la norma di w .