

# Modelli probabilistici e Regressione Bayesiana

## Machine Learning 2025/2026

### Laboratorio 4.2 — Modelli Probabilistici e Regressione Bayesiana

**Docenti: Danilo Croce, Giorgio Gambosi**

---

#### Introduzione

Nel laboratorio precedente abbiamo affrontato la regressione lineare come **problema di ottimizzazione deterministica**, stimando i parametri del modello minimizzando l'errore quadratico medio e introducendo la **regolarizzazione** (Ridge, Lasso) per controllare l'overfitting.

In questa seconda parte adottiamo un approccio **probabilistico**: invece di trovare un solo insieme di pesi  $\mathbf{w}$ , descriveremo la **distribuzione di probabilità** sui possibili valori dei parametri e delle predizioni. Questo ci permetterà di modellare anche l'**incertezza** del modello.

---

#### Obiettivi del laboratorio

- Definire un **modello probabilistico** per la regressione:

$$p(t|\mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta) = \mathcal{N}(t|h(\mathbf{x}; \mathbf{w}), \beta^{-1})$$

- Derivare le stime di **massima verosimiglianza (ML)** per  $\mathbf{w}$  e  $\beta$ , mostrando il legame con i **minimi quadrati**.
- Introdurre la **regressione bayesiana**, con prior gaussiano:

$$p(\mathbf{w}|\alpha) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; 0, \alpha^{-1}I)$$

e posterior:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{m}_p, \Sigma_p)$$

dove

$$\Sigma_p = (\alpha I + \beta X^T X)^{-1}$$

$$\mathbf{m}_p = \beta \Sigma_p X^T t$$

- Mostrare graficamente come il **posterior si restringe** man mano che osserviamo nuovi dati (apprendimento sequenziale).

## In sintesi:

- la regressione lineare è reinterpretata in chiave probabilistica,
- l'approccio bayesiano consente di stimare sia il valore previsto sia la **confidenza** della stima,
- e di aggiornare progressivamente le conoscenze man mano che arrivano nuovi dati.

## Setup e generazione del dataset sintetico

Per studiare la regressione probabilistica, generiamo un piccolo dataset artificiale. Il nostro obiettivo è simulare una relazione (non perfettamente lineare) tra una variabile di input  $x$  e un target  $t$ , affetto da **rumore gaussiano**.

In altre parole, assumeremo che:

$$t = f(x) + \epsilon, \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

dove  $f(x)$  è la “vera” funzione sottostante e  $\epsilon$  rappresenta il rumore osservazionale.

Questo ci permetterà di verificare come un modello di regressione lineare — e successivamente bayesiano — possa stimare i parametri anche in presenza di incertezza.

```
# =====
#  Generazione del dataset sintetico
# =====

# =====
#  IMPORT PRINCIPALI
# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as st
```

```

# =====
# ✨ CONFIGURAZIONE PLOTTING
# =====

plt.style.use('default')

plt.rcParams.update({
    'figure.figsize': (10, 6),
    'font.size': 12,
    'axes.labelsize': 13,
    'axes.titlesize': 14,
    'legend.fontsize': 11,
    'lines.linewidth': 2.2,
    'axes.grid': True,
    'grid.alpha': 0.3,
    'axes.edgecolor': '#333333',
    'axes.labelcolor': '#222222',
    'xtick.color': '#222222',
    'ytick.color': '#222222',
})

# (Facoltativo, per risultati riproducibili)
np.random.seed(42)

def f(x):
    """Funzione vera (non lineare) che genera i dati."""
    return 0.7 + 0.25 * x * np.sqrt(np.abs(np.sin(x)))

n = 50
domain = (0, 2 * np.pi)
X = np.random.uniform(domain[0], domain[1], n)

# Rumore gaussiano
noise_sd = 0.05
beta = 1.0 / (noise_sd**2)  # precisione = 1 / varianza del rumore

# Target
t = np.array([f(v) + np.random.normal(0, noise_sd) for v in
X]).reshape(-1, 1)

```

```
# Plot
xx = np.linspace(*domain, 200)
plt.scatter(X, t, color="black", alpha=0.8, label="Training data")
plt.plot(xx, f(xx), "g--", linewidth=2, label="True function $f(x)$")
plt.title("Dataset sintetico con rumore gaussiano")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.legend()
plt.show()
```

Osserviamo che i punti neri rappresentano i dati osservati  $(x_i, t_i)$ , mentre la linea verde tratteggiata mostra la **vera funzione**  $f(x)$  utilizzata per generarli.

Il rumore gaussiano aggiunto ai dati riflette l'assunzione del modello probabilistico:

$$p(t|x; \mathbf{w}, \beta) = \mathcal{N}(t \mid h(x; \mathbf{w}), \beta^{-1})$$

dove  $\beta^{-1} = \sigma^2$  rappresenta la varianza del rumore, e  $h(x; \mathbf{w})$  è la funzione predittiva del modello (nel nostro caso, lineare o polinomiale).

Nei prossimi passi definiremo formalmente tale modello e introdurremo il **prior** sui parametri.

#### **Nota sulla notazione:**

In statistica bayesiana si usa spesso  $\beta$  (chiamata *precisione*) al posto della varianza  $\sigma^2$ .

Le due quantità sono legate da  $\beta = \frac{1}{\sigma^2}$ .

Questa scelta è solo una convenzione utile:

- $\sigma^2$  misura **quanto rumore** c'è nei dati (dispersione).
- $\beta$  misura **quanto è preciso** il modello (l'inverso della dispersione).

Una  $\beta$  grande significa rumore basso e quindi predizioni più "sicure".

La notazione in termini di  $\beta$  rende le formule della *log-likelihood* e del *posterior* più compatte e semplici da derivare.

## **2 Modello probabilistico e prior sui parametri (spiegato semplice)**

Finora, nella regressione lineare classica, cercavamo i **pesi**  $\mathbf{w}$  che meglio approssimano i dati.

In quel caso, i pesi erano **numeri fissi** da stimare risolvendo un problema di ottimizzazione.

Nel mondo **bayesiano**, invece, cambiamo prospettiva:

I pesi  $\mathbf{w}$  non sono valori deterministici, ma **variabili casuali** che possono assumere diversi valori con probabilità diverse.

## Il modello probabilistico

Assumiamo che ogni osservazione  $t$  derivi da:

- una funzione deterministica  $h(\mathbf{x}; \mathbf{w})$  (il nostro modello),
- più un **rumore gaussiano** (errori casuali, misurazioni imperfette...).

$$p(t|\mathbf{x}, \mathbf{w}, \beta) = \mathcal{N}(t | h(\mathbf{x}; \mathbf{w}), \beta^{-1})$$

👉 Significa che ogni valore osservato  $t$  è distribuito secondo una **Gaussiana** centrata sulla previsione del modello, con varianza  $\beta^{-1}$  (cioè  $\sigma^2$ ), che rappresenta l'intensità del rumore.

## Cos'è il “prior”

Prima ancora di osservare i dati, possiamo avere un'idea su **quali valori dei pesi  $\mathbf{w}$  siano plausibili**. Questa credenza iniziale si chiama **prior** (*distribuzione a priori*).

Ad esempio, se pensiamo che i pesi del modello non debbano essere enormi, possiamo esprimere questa idea dicendo che sono distribuiti intorno a zero con una certa incertezza:

$$p(\mathbf{w}|\alpha) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{0}, \alpha^{-1}\mathbf{I})$$

- $\mathbf{w}$  è il vettore dei pesi del modello (es.  $[w_0, w_1, \dots, w_M]^T$ )
- $\mathbf{0}$  è un vettore di zeri: la **media del prior**, cioè il punto in cui crediamo che i pesi tendano a stare
- $\alpha^{-1}\mathbf{I}$  è la **covarianza**, che stabilisce quanto i pesi possono discostarsi da zero

👉 In pratica:

*“Credo che i pesi siano probabilmente piccoli (vicini a zero), ma non escludo che possano assumere valori diversi se i dati lo giustificano.”*

## Il ruolo di $\alpha$

Il parametro  $\alpha$  è detto **precisione del prior** (inverso della varianza).

Controlla quanto fortemente i pesi vengono spinti verso zero:

Caso	Varianza $1/\alpha$	Effetto
$\alpha$ grande	piccola	pesi fortemente penalizzati → modello rigido, poco flessibile
$\alpha$ piccolo	grande	pesi liberi di variare → modello flessibile ma a rischio overfitting

Quindi,  $\alpha$  gioca lo stesso ruolo della **regolarizzazione nella Ridge Regression**: evita che i pesi diventino troppo grandi e che il modello impari il rumore (vedi in fondo!!!).

## Dati + Prior = Posterior

Quando arrivano i dati, aggiorniamo la nostra credenza iniziale combinando **prior** e **verosimiglianza** (likelihood):

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) \propto p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) p(\mathbf{w})$$

- **Likelihood**  $p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta)$  → quanto bene i dati sono spiegati dai pesi
- **Prior**  $p(\mathbf{w}|\alpha)$  → quanto crediamo che certi pesi siano plausibili
- **Posterior**  $p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t})$  → la nuova conoscenza dopo aver visto i dati

## In sintesi

Concetto	Significato	Intuizione
<b>Prior</b>	credenza iniziale sui pesi	“prima dei dati, penso che i pesi siano piccoli”
<b>Likelihood</b>	compatibilità con i dati	“quanto bene i pesi spiegano ciò che ho osservato”
<b>Posterior</b>	conoscenza aggiornata	“ora so quali pesi sono più plausibili”

Nel codice qui sotto:

- definiamo un modello lineare semplice  $h(x) = w_0 + w_1x$ ,
- campioniamo diverse coppie di pesi  $(w_0, w_1)$  dal prior,
- e mostriamo le **rette corrispondenti**: sono le possibili funzioni che il modello ritiene plausibili *prima di aver visto i dati*.

```
# =====
# 2 MODELLO LINEARE E PRIOR GAUSSIANO SUI PARAMETRI
# =====

def design_matrix(x, n_cols):
    """Crea la matrice  $\Phi = [1, x, x^2, \dots]$  per il modello lineare."""
    x = np.asarray(x).reshape(-1)
    return np.vstack([x**i for i in range(n_cols)]).T

# -----
# MODELLO LINEARE:  $h(x) = w_0 + w_1x$ 
# -----
n_coeff = 2 # due parametri: bias e pendenza
Phi = design_matrix(X, n_coeff) # matrice  $\Phi$  per i punti di training

# -----
# PRIOR GAUSSIANO SUI PESI:  $p(w|\alpha) = N(0, \alpha^{-1}I)$ 
# -----
alpha = 0.5 # precisione (1 / varianza)
mu_prior = np.zeros(n_coeff) # media = [0, 0] → pesi attesi vicini a 0
Sigma_prior = np.eye(n_coeff) / alpha # covarianza isotropica (pesi indipendenti)

# Campioniamo n possibili coppie  $(w_0, w_1)$ 
n_sample = 10
samples_prior = np.random.multivariate_normal(mu_prior, Sigma_prior, n_sample)

print("🎲 Campioni dal prior  $(w_0, w_1)$ :\n")
for i, w in enumerate(samples_prior[:n_sample]):
    print(f"{i+1:>2})  $w_0 = \{w[0]: .3f\}, w_1 = \{w[1]: .3f\}$ ")
```

```

# -----
# VISUALIZZAZIONE
# -----

# Griglia regolare di punti per disegnare le rette continue
xx = np.linspace(*domain, 200)
Phi_xx = design_matrix(xx, n_coeff)

# --- Distribuzione del prior nel piano ( $w_0$ ,  $w_1$ )
sd0, sd1 = np.sqrt(Sigma_prior[0, 0]), np.sqrt(Sigma_prior[1, 1])
w0_grid = np.linspace(-4 * sd0, 4 * sd0, 200)
w1_grid = np.linspace(-4 * sd1, 4 * sd1, 200)
prior = st.multivariate_normal(mean=mu_prior, cov=Sigma_prior)
Z_prior = np.array([[prior.pdf([w0, w1]) for w0 in w0_grid] for w1 in
w1_grid])

plt.figure(figsize=(14, 6))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.imshow(Z_prior,
           extent=(w0_grid.min(), w0_grid.max(), w1_grid.min(),
w1_grid.max()),
           origin='lower', aspect='auto')
plt.title("Distribuzione a priori  $p(\mathbf{w}|\alpha)$ ")
plt.xlabel("$w_0$")
plt.ylabel("$w_1$")
plt.colorbar(label="densità")


# --- A destra: rette generate dai pesi campionati
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.scatter(X, t, color="black", alpha=0.6, label="Dati osservati")
for w in samples_prior:
    plt.plot(xx, Phi_xx @ w, color="#fc4f30", alpha=0.7)
plt.title("Rette campionate dal prior (prima dei dati)")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.legend()
plt.show()

```



## Interpretazione

- **A sinistra:** la **distribuzione a priori** dei parametri  $(w_0, w_1)$ , che rappresenta la nostra *conoscenza iniziale* prima di osservare alcun dato. È una Gaussiana centrata in  $(0, 0)$ : significa che riteniamo più probabili i valori dei pesi vicini a zero, ma non escludiamo valori più grandi.
- **A destra:** alcune **rette di regressione campionate** dal prior. Poiché la varianza del prior è ampia (cioè  $\alpha$  è piccolo), le rette risultano molto diverse tra loro — segno di **alta incertezza** su quale modello descriva davvero i dati.

 Nei prossimi passi vedremo come l'osservazione dei dati *aggiorna* questa conoscenza iniziale, portando a una **distribuzione a posteriori** più concentrata attorno ai valori plausibili di  $\mathbf{w}$ .

### 3 Aggiornamento del modello: distribuzione a posteriori dei parametri

Finora abbiamo definito un **prior** sui pesi  $\mathbf{w}$ , che esprime la nostra conoscenza *prima* di osservare i dati.

Ora, dopo aver visto un insieme di esempi  $(\mathbf{x}_i, t_i)$ , possiamo aggiornare tale conoscenza grazie al **teorema di Bayes**:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}; \alpha, \beta) \propto p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) p(\mathbf{w}|\alpha)$$

dove:

- $p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) \rightarrow$  è la **verosimiglianza** (*likelihood*), cioè quanto bene i pesi  $\mathbf{w}$  spiegano i dati osservati;
- $p(\mathbf{w}|\alpha) \rightarrow$  è il **prior**, cioè le nostre credenze iniziali sui pesi.

## Forma del posterior

Poiché **sia la likelihood che il prior sono gaussiane**, il risultato della loro combinazione (il **posterior**) è anch'esso una **Gaussiana**:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}; \alpha, \beta) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{m}_p, \Sigma_p)$$

dove:

- $\mathbf{m}_p$  è la **media a posteriori** (i pesi più probabili dopo aver visto i dati),
- $\Sigma_p$  è la **covarianza a posteriori** (incertezza residua sui pesi).

Le formule sono:

$$\Sigma_p = (\Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \quad \text{e} \quad \mathbf{m}_p = \Sigma_p (\Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \beta \mathbf{X}^T \mathbf{t})$$

Nel nostro caso:

- $\mathbf{m}_0 = 0$  (il prior è centrato in zero),
- $\Sigma_0 = \alpha^{-1} \mathbf{I}$  (prior isotropico).

👉 In pratica, il **posterior** rappresenta una versione aggiornata del prior: dopo aver osservato i dati, la distribuzione diventa **più concentrata** attorno ai valori di  $\mathbf{w}$  che spiegano meglio le osservazioni.

## 📘 APPROFONDIMENTO: Da dove vengono le formule del *posterior*

Finora abbiamo detto che nel mondo bayesiano non stimiamo un singolo vettore di pesi  $\mathbf{w}$ , ma una **distribuzione** su di essi: il *posterior*.

Vediamo ora come si ottiene matematicamente, passo per passo.

### 🎯 1 Likelihood — il modello dei dati

Ricordiamo la forma **base** della distribuzione normale (in una dimensione):

$$\mathcal{N}(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Nella forma **multivariata** (per un vettore  $\mathbf{x}$  di dimensione  $n$ ):

$$\mathcal{N}(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right].$$

Assumiamo che i target  $\mathbf{t}$  siano generati da un modello lineare più rumore:

$$\mathbf{t} = \mathbf{X}\mathbf{w} + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \beta^{-1} \mathbf{I})$$

Qui:

- $\mathbf{X} \rightarrow$  matrice delle feature ( $n \times m$ )
- $\mathbf{w} \rightarrow$  vettore dei coefficienti (bias incluso)
- $\mathbf{t} \rightarrow$  vettore dei target osservati

- $\beta \rightarrow$  **precisione** del rumore, cioè  $\beta = 1/\sigma^2$

La **likelihood** (probabilità dei dati dato  $\mathbf{w}$ ) è:

$$p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\beta^{-1}\mathbf{I}|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w})^\top (\beta^{-1}\mathbf{I})^{-1} (\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}) \right] = \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\beta}{2} \|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2}.$$

👉 Il termine  $\|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2$  è la **somma dei quadrati degli errori di predizione**.

## Log-likelihood

È spesso utile passare ai logaritmi (trasforma prodotti in somme):


$$\log p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) = \frac{n}{2} \log \beta - \frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{\beta}{2} \|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2.$$

- ♦ Usiamo il log perché massimizzare  $p$  o  $\log p$  è equivalente e il log elimina prodotti e costanti inutili ai fini dell'ottimizzazione.

## 2 Prior sui pesi

Prima di osservare i dati, esprimiamo la nostra **credenza iniziale** sui pesi  $\mathbf{w}$  tramite una distribuzione gaussiana:

$$p(\mathbf{w}|\alpha) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{m}_0, \Sigma_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} |\Sigma_0|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0)^\top \Sigma_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0) \right].$$

 Il termine  $(2\pi)^{m/2}$  e il determinante  $|\Sigma_0|^{1/2}$  sono la **costante di normalizzazione** della gaussiana multivariata: garantiscono che l'integrale della distribuzione valga 1.

- $\mathbf{m}_0 \rightarrow$  media del prior (spesso  $\mathbf{0}$ )
- $\Sigma_0 \rightarrow$  covarianza (quanto siamo incerti sui pesi)
- $\alpha \rightarrow$  precisione del prior se  $\Sigma_0 = \alpha^{-1}\mathbf{I}$

♦ Se  $\Sigma_0 = \alpha^{-1}\mathbf{I}$ , il prior è **isotropo**: tutte le direzioni hanno la stessa varianza  $1/\alpha$ , cioè non privilegiamo nessun peso in particolare.

## Log-prior

$$\log p(\mathbf{w}|\alpha) = -\frac{m}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\Sigma_0| - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0)^\top \Sigma_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0).$$



### 3 Applicazione del teorema di Bayes

Combinando **likelihood** e **prior** otteniamo il **posterior**:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \frac{p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) p(\mathbf{w}|\alpha)}{p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \alpha, \beta)} \propto p(\mathbf{t}|\mathbf{X}, \mathbf{w}, \beta) p(\mathbf{w}|\alpha).$$

Sostituendo le due Gaussianne:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) \propto \exp \left[ -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0)^\top \Sigma_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0) \right].$$



In logaritmi:

$$\log p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0)^\top \Sigma_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0) + \text{cost.}$$



### 4 Espansione dei termini in $\mathbf{w}$

Espandiamo i quadrati per evidenziare i termini in  $\mathbf{w}$ .

$$\begin{aligned} \|\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\|^2 &= \mathbf{t}^\top \mathbf{t} - 2\mathbf{w}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{t} + \mathbf{w}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \mathbf{w}, \\ (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0)^\top \Sigma_0^{-1} (\mathbf{w} - \mathbf{m}_0) &= \mathbf{w}^\top \Sigma_0^{-1} \mathbf{w} - 2\mathbf{w}^\top \Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_0^\top \Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0. \end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\log p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top (\Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X}) \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top (\Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{t}) + \text{cost.}$$



### 5 Completamento del quadrato (in forma matriciale)

Nel passo precedente avevamo il logaritmo del posterior (a costanti additive vicine trascurate):


$$\log p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top (\Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X}) \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top (\Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{t}) + \text{cost.}$$

Per semplicità poniamo:

$$\mathbf{A} = \Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X}, \quad \mathbf{b} = \Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{t}.$$

Così possiamo riscrivere:

$$\log p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = -\frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{w}^\top \mathbf{b} + \text{cost.}$$

 **Obiettivo:** Vogliamo riscrivere l'esponente in una forma che somigli a una **Gaussiana centrata in un punto**:

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{m}_p)^\top \mathbf{A}(\mathbf{w} - \mathbf{m}_p),$$

così da poter leggere immediatamente la **media**  $\mathbf{m}_p$  e la **covarianza**  $\Sigma_p$  del posterior. Otteniamo quindi:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{m}_p, \Sigma_p)$$

con:

$$\Sigma_p = (\Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad \mathbf{m}_p = \Sigma_p(\Sigma_0^{-1} \mathbf{m}_0 + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{t}).$$



## 6 Caso isotropo e media zero

Nel caso più comune, il prior è **isotropo e centrato in zero**:

$$\Sigma_0 = \alpha^{-1} \mathbf{I}, \quad \mathbf{m}_0 = \mathbf{0}.$$


Otteniamo:

$$\Sigma_p = (\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1}, \quad \mathbf{m}_p = \beta \Sigma_p \mathbf{X}^\top \mathbf{t}.$$



## 7 Interpretazione finale

Simbolo	Significato	Intuizione
$\Sigma_0$	Covarianza del prior	incertezza sui pesi <i>prima</i> dei dati
$\beta^{-1}$	Varianza del rumore	quanta incertezza hanno i dati
$\Sigma_p$	Covarianza del posterior	incertezza residua <i>dopo</i> i dati
$\mathbf{m}_p$	Media del posterior	stima più probabile dei pesi dopo i dati

 Il termine  $(\Sigma_0^{-1} + \beta \mathbf{X}^\top \mathbf{X})$  rappresenta la **nuova precisione** (somma dell'informazione "a priori" e di quella portata dai dati). Inversandola, otteniamo la nuova **covarianza**  $\Sigma_p$ .



## 8 Perché usare i log e da dove viene il $\pi$

- I **logaritmi** servono a trasformare prodotti in somme e a lavorare più facilmente con la forma esponenziale:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

Inoltre,  $\arg \max p = \arg \max \log p$ , quindi possiamo ignorare le costanti.

- Il termine  $(2\pi)^{k/2}$  e il determinante  $|\Sigma|^{1/2}$  vengono dalla **normalizzazione** della Gaussiana:  
sono ciò che assicura che la densità integri a 1 nello spazio di dimensione  $k$ .



## 9 Mini promemoria

Identità usata	Forma
Norma quadratica	$\ \mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w}\ ^2 = (\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w})^\top (\mathbf{t} - \mathbf{X}\mathbf{w})$
Espansione	$\mathbf{t}^\top \mathbf{t} - 2\mathbf{t}^\top \mathbf{X}\mathbf{w} + \mathbf{w}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\mathbf{w}$
Completamento del quadrato	$(\mathbf{w} - A^{-1}\mathbf{b})^\top A(\mathbf{w} - A^{-1}\mathbf{b}) - \mathbf{b}^\top A^{-1}\mathbf{b}$
Log posterior	$\log p = \log p_{\text{likelihood}} + \log p_{\text{prior}} + \text{cost.}$

```
# =====
# 3 POSTERIOR DISTRIBUTION – BAYESIAN UPDATE
# =====

def compute_posterior(Phi_t, t_t, Sigma_prior, mu_prior, beta):
    """
    Calcola la distribuzione a posteriori dei pesi:

        Σ_p = (Σ_0^{-1} + β Φ^T Φ)^{-1}
        μ_p = Σ_p (Σ_0^{-1} μ_0 + β Φ^T t)

    Parametri
    -----
```

```

Phi_t : ndarray (n, m)
    Matrice delle funzioni base ( $\Phi$ ) per gli n esempi osservati.
t_t : ndarray (n,)
    Vettore dei target osservati.
Sigma_prior : ndarray (m, m)
    Matrice di covarianza del prior  $\Sigma_0$ .
mu_prior : ndarray (m,)
    Media del prior  $\mu_0$ .
beta : float
    Precisione del rumore ( $\beta = 1 / \sigma^2$ ).

Ritorna
-----
mu_post : ndarray (m,)
    Media della distribuzione a posteriori.
Sigma_post : ndarray (m, m)
    Covarianza della distribuzione a posteriori.
"""
# Inversa della covarianza prior
Sigma0_inv = np.linalg.inv(Sigma_prior)

# Precisione totale:  $\Sigma_0^{-1} + \beta \Phi^T \Phi$ 
precision_post = Sigma0_inv + beta * (Phi_t.T @ Phi_t)

# Covarianza posterior (inversa della precisione)
Sigma_post = np.linalg.inv(precision_post)

# Media posterior
mu_post = Sigma_post @ (Sigma0_inv @ mu_prior.reshape(-1, 1) +
beta * Phi_t.T @ t_t.reshape(-1, 1))

# Check di simmetria numerica
assert np.allclose(Sigma_post, Sigma_post.T, atol=1e-10),
"Posterior non simmetrico!"

return mu_post.ravel(), Sigma_post

# =====
# ♦ ESEMPIO: posterior dopo l'osservazione di n=5 dati
# =====

```

```

l = 5
Phi_t, t_t = Phi[:l, :], t[:l]

mu_post, Sigma_post = compute_posterior(Phi_t, t_t, Sigma_prior,
mu_prior, beta)

print("Media del posterior ( $\mu_{\text{post}}$ ):")
print(mu_post)
print("\nCovarianza del posterior ( $\Sigma_{\text{post}}$ ):")
print(Sigma_post)

# =====
# ♦ Visualizzazione: posterior e rette campionate
# =====

plt.figure(figsize=(14, 6))

# --- Posterior in (w0, w1) ---
posterior_pdf = st.multivariate_normal(mean=mu_post, cov=Sigma_post)
w0_grid = np.linspace(mu_post[0] - 1, mu_post[0] + 1, 200)
w1_grid = np.linspace(mu_post[1] - 1, mu_post[1] + 1, 200)
Z_post = np.array([[posterior_pdf.pdf([w0, w1]) for w0 in w0_grid]
for w1 in w1_grid])

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.imshow(Z_post, extent=(w0_grid.min(), w0_grid.max(),
w1_grid.min(), w1_grid.max()),
origin='lower', aspect='auto', alpha=0.95, cmap='viridis')
plt.scatter(mu_post[0], mu_post[1], color='white', edgecolor='black',
marker='s', s=50, label="Media  $\mathbf{\mu}_p$ ")
plt.xlabel("$w_0$")
plt.ylabel("$w_1$")
plt.title(f"Posterior dei parametri – n={l}")
plt.legend()

# --- Rette di regressione dal posterior ---
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.scatter(X[:l], t[:l], color="#fc4f30", label=f"Dati osservati (n=
{l})")
plt.scatter(X[l:], t[l:], color="gray", alpha=0.5, label="Non

```



```
osservati")


for w in np.random.multivariate_normal(mu_post, Sigma_post, 10):
    plt.plot(xx, Phi_xx @ w, color="#008fd5", alpha=0.6)

plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.title("Rette campionate dal posterior")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

## Interpretazione

- **A sinistra:** la distribuzione a posteriori  $p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t})$  risulta più concentrata rispetto al prior: l'osservazione dei dati riduce l'incertezza sui parametri del modello.
- **A destra:** le rette campionate dal posterior si addensano attorno a una direzione coerente con i dati osservati.  
In pratica, il modello aggiorna la propria convinzione su quali valori di  $\mathbf{w}$  siano plausibili.

 All'aumentare del numero di esempi osservati ( $n$ ), la distribuzione a posteriori diventa progressivamente **più stretta** e centrata vicino ai veri parametri generativi della funzione.

Questo riflette il comportamento tipico dell'apprendimento bayesiano: ogni nuovo dato **raffina** la conoscenza, riducendo l'incertezza.

## 4 Sequential Learning — Aggiornamento progressivo del posterior

Una delle caratteristiche più eleganti dell'approccio **bayesiano** è la sua **coerenza sequenziale**:

la conoscenza appresa da un insieme di dati può essere riutilizzata come *prior* per i dati successivi.

---

### Aggiornamento progressivo

Supponiamo di osservare un primo sottoinsieme di dati:

$$\mathcal{T}_1 = \{(\mathbf{x}_i, t_i)\}_{i=1}^{n_1}$$

Dopo questa osservazione, la distribuzione a posteriori dei parametri diventa:

$$p(\mathbf{w}|\mathcal{T}_1) \propto p(\mathcal{T}_1|\mathbf{w}) p(\mathbf{w})$$

Quando arrivano nuovi dati  $\mathcal{T}_2$ , possiamo semplicemente aggiornare la conoscenza già acquisita:

$$p(\mathbf{w}|\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2) \propto p(\mathcal{T}_2|\mathbf{w}) p(\mathbf{w}|\mathcal{T}_1)$$

E così via, per ogni nuovo blocco di dati  $\mathcal{T}_3, \dots, \mathcal{T}_n$ .



## Intuizione

Ad ogni passo:

il *posterior* ottenuto diventa il nuovo *prior* per l'aggiornamento successivo.

Questo significa che il modello non “dimentica” ciò che ha imparato:

ogni nuovo dato **raffina** la conoscenza precedente, rendendo la distribuzione sempre più concentrata

attorno ai valori plausibili dei parametri.



Nel codice che segue, visualizzeremo come la distribuzione a posteriori si restringe progressivamente all'aumentare del numero di punti osservati.

```
# =====
# 4 ONLINE BAYESIAN LEARNING – AGGIORNAMENTO PROGRESSIVO
# =====

# Blocchi di dati "nuovi" osservati in sequenza
batches = [1, 1, 2, 2, 2] # numero di nuovi esempi a ogni step

# Prior iniziale (da blocco precedente)
mu_prev = mu_prior.copy()
Sigma_prev = Sigma_prior.copy()

print("🔄 Online Bayesian Learning – Aggiornamento con nuovi dati\n")

# Funzione vera (definita in precedenza)
```

```

true_fun = f

start = 0
total_seen = 0

for i, batch_size in enumerate(batches):
    # Dati NUOVI (non riutilizziamo i vecchi)
    end = start + batch_size
    Phi_new, t_new = Phi[start:end, :], t[start:end]

    # Aggiorna posterior con i nuovi dati e il prior corrente
    mu_post, Sigma_post = compute_posterior(Phi_new, t_new,
Sigma_prev, mu_prev, beta)

    # Aggiorna prior per lo step successivo
    mu_prev, Sigma_prev = mu_post, Sigma_post
    total_seen += batch_size

    # --- Metriche di incertezza e accuratezza
    var_mean = np.trace(Sigma_post) / len(Sigma_post)
    y_pred = Phi_xx @ mu_post

    # --- Output testuale
    print(f"📦 Step {i+1}: aggiunti {batch_size} nuovi dati → totale
n={total_seen}")
    print(f"    Varianza media posterior: {var_mean:.4f}")

    # -----
    # VISUALIZZAZIONE
    # -----
    posterior_pdf = st.multivariate_normal(mean=mu_post,
cov=Sigma_post)
    w0_grid = np.linspace(mu_post[0] - 1.5, mu_post[0] + 1.5, 200)
    w1_grid = np.linspace(mu_post[1] - 1.5, mu_post[1] + 1.5, 200)
    Z_post = np.array([[posterior_pdf.pdf([w0, w1]) for w0 in
w0_grid] for w1 in w1_grid])

    plt.figure(figsize=(14, 6))

    # --- Distribuzione dei pesi (posterior)
    plt.subplot(1, 2, 1)

```

```

plt.imshow(Z_post,
           extent=(w0_grid.min(), w0_grid.max(), w1_grid.min(),
                  w1_grid.max()),
           origin='lower', aspect='auto', cmap='viridis',
           alpha=0.95)

plt.scatter(mu_post[0], mu_post[1], color='white',
           edgecolor='black', marker='s', s=50)

plt.title(f"Posterior dei pesi – dati totali n={total_seen}")
plt.xlabel("$w_0$")
plt.ylabel("$w_1$")

# --- Rette campionate dal posterior
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.scatter(X[:total_seen], t[:total_seen], color="#fc4f30",
           label=f"Dati visti (n={total_seen})")
plt.scatter(X[total_seen:], t[total_seen:], color="gray",
           alpha=0.5, label="Non osservati")

for w in np.random.multivariate_normal(mu_post, Sigma_post, 10):
    plt.plot(xx, Phi_xx @ w, color="#008fd5", alpha=0.7)

plt.plot(xx, true_fun(xx), 'k--', lw=2, label="Funzione vera
$f(x)$")
plt.title(f"Rette campionate dal posterior – step {i+1}")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()

# Avanza al prossimo blocco
start = end

```

## Analisi dei risultati

- **Step 1 (n = 1)** → dopo aver visto un solo punto, il *posterior* è quasi identico al *prior*: l'incertezza è altissima e le rette campionate sono estremamente variabili.
- **Step 2 (n = 2)** → con un secondo dato, il modello inizia appena a orientarsi: la distribuzione dei pesi si sposta leggermente, ma resta molto ampia.

- **Step 3 (n = 4)** → con più osservazioni, il *posterior* comincia a concentrarsi: il modello riconosce la direzione generale della relazione tra  $x$  e  $t$ .
- **Step 4 (n = 6)** → la distribuzione si restringe visibilmente: le rette campionate diventano più coerenti e attraversano meglio i punti osservati.
- **Step 5 (n = 8)** → il *posterior* è ormai ben concentrato attorno ai valori plausibili di  $w_0$  e  $w_1$ :  
il modello ha appreso la forma generale della funzione  $f(x)$   
e le predizioni diventano stabili e precise.



Questo esperimento mostra la **natura progressiva dell'apprendimento bayesiano**: ogni nuovo dato *aggiorna* la nostra conoscenza senza dover rivedere il passato. La distribuzione dei pesi si restringe gradualmente, segno che il modello diventa sempre più **certo** delle relazioni che ha imparato dai dati.

## 5 Distribuzione predittiva bayesiana

Finora abbiamo stimato la **distribuzione a posteriori dei pesi** del modello:

$$p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{w}; \mathbf{m}_p, \Sigma_p)$$

Questa distribuzione ci dice **quanto siamo incerti sui parametri** del modello dopo aver visto i dati.

Ma quello che vogliamo, in pratica, è **predire nuovi valori target**  $t_*$  per un nuovo input  $\mathbf{x}_*$ .



### L'idea chiave

Nel mondo **bayesiano**, non scegliamo un singolo vettore di pesi  $\mathbf{w}$ , ma consideriamo **tutti i modelli possibili**, pesandoli secondo quanto sono plausibili.



La previsione finale sarà quindi una **media ponderata delle predizioni** di tutti i modelli possibili.

Formalmente, la distribuzione predittiva si ottiene integrando sullo spazio dei pesi:

$$p(t_*|\mathbf{x}_*, \mathbf{X}, \mathbf{t}) = \int p(t_*|\mathbf{x}_*, \mathbf{w}) p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) d\mathbf{w}$$

In altre parole:

- $p(t_*|\mathbf{x}_*, \mathbf{w}) \rightarrow$  **quanto il modello con pesi  $\mathbf{w}$  ritiene probabile il nuovo valore  $t_*$**
- $p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t}) \rightarrow$  **quanto è plausibile quel modello dopo aver visto i dati**

Stiamo quindi integrando (“sommando”) le predizioni di tutti i modelli, pesandole per quanto ogni modello è credibile secondo il *posterior*.



## Forma chiusa della distribuzione

Nel caso lineare con rumore gaussiano:

- la **likelihood**  $p(t_*|\mathbf{x}_*, \mathbf{w})$  è gaussiana,
- il **posterior**  $p(\mathbf{w}|\mathbf{X}, \mathbf{t})$  è gaussiano.

L'integrale tra due gaussiane produce ancora una **Gaussiana**.

Quindi anche la distribuzione predittiva è una **Gaussiana**:

$$p(t_*|\mathbf{x}_*, \mathbf{X}, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(t_* | m(\mathbf{x}_*), s^2(\mathbf{x}_*))$$



## Media e varianza predittiva

- **Media predittiva:**

$$m(\mathbf{x}_*) = \mathbf{x}_*^\top \mathbf{m}_p$$

- **Varianza predittiva:**

$$s^2(\mathbf{x}_*) = \frac{1}{\beta} + \mathbf{x}_*^\top \Sigma_p \mathbf{x}_*$$



## Interpretazione dei due termini

Termine	Significato	Intuizione
$\frac{1}{\beta}$	<b>Rumore osservativo</b>	incertezza intrinseca dei dati (misure rumorose)
$\mathbf{x}_*^\top \Sigma_p \mathbf{x}_*$	<b>Incertezza sul modello</b>	quanto siamo incerti sui pesi — è maggiore lontano dai dati osservati



## Cosa succede nella pratica

- Quando abbiamo **pochi dati**,  $\Sigma_p$  è grande  $\rightarrow$  il modello è molto incerto, quindi la banda di confidenza è ampia.
- Quando arrivano **più dati**,  $\Sigma_p$  si riduce  $\rightarrow$  il modello diventa più sicuro, e la banda di confidenza si restringe attorno alla media  $m(\mathbf{x}_*)$ .

In questo modo, il modello **aggrega informazione dai dati e riduce la propria incertezza** in modo coerente con la teoria bayesiana.

```
# =====
# 5 DISTRIBUZIONE PREDITTIVA BAYESIANA
# =====

def predictive_distribution(Phi_x, mu_post, Sigma_post, beta):
    """
    Calcola media e varianza della distribuzione predittiva
    bayesiana.

    La distribuzione è:
         $p(t_* | x_*, X, t) = \mathcal{N}(t_* | m(x_*), s^2(x_*))$ 

    dove:
         $m(x_*) = \Phi(x_*) \mu_{\text{post}}$ 
         $s^2(x_*) = 1/\beta + \Phi(x_*) \Sigma_{\text{post}} \Phi(x_*)^T$ 

    Parametri:
        Phi_x      : matrice di design per i punti di test
        mu_post     : media del posterior (vettore pesi stimati)
        Sigma_post  : covarianza del posterior
        beta        : precisione del rumore ( $\beta = 1/\sigma^2$ )

    Ritorna:
        mean_pred  : media predittiva
        var_pred   : varianza predittiva
    """
    mu_post = mu_post.reshape(-1, 1)
    mean_pred = (Phi_x @ mu_post).ravel()
    var_model = np.sum((Phi_x @ Sigma_post) * Phi_x, axis=1) #
    incertezza sul modello
    var_pred = (1.0 / beta) + var_model #
```

```

totale: rumore + modello
    return mean_pred, var_pred

# -----
# 1 Calcolo del posterior (usiamo n = 30 dati osservati)
# -----
l = 30
Phi_t, t_t = Phi[:l, :], t[:l]
mu_post, Sigma_post = compute_posterior(Phi_t, t_t, Sigma_prior,
mu_prior, beta)

# Matrice di design per la griglia di test
Phi_test = design_matrix(xx, n_coeff)
mean_pred, var_pred = predictive_distribution(Phi_test, mu_post,
Sigma_post, beta)
std_pred = np.sqrt(var_pred)

# -----
# 2 Stima empirica del rumore dai residui
# -----
residuals = t_t - Phi_t @ mu_post
sigma2_hat = np.mean(residuals**2)
beta_hat = 1.0 / sigma2_hat

print(f"Stima empirica di  $\beta$ : {beta_hat:.2f}")
print(f"(Confronta con  $\beta$  definito nel primo blocco: {beta:.2f})")

# Nota didattica:
# Se la stima di  $\beta$  differisce molto dal valore originale,
# significa che il modello non ha ancora appreso bene il livello di
rumore:
# può essere dovuto a pochi dati o a una base  $\Phi$  troppo rigida.
# Provare ad aumentare n_coeff o n per verificare come cambia la
stima.

# -----
# 3 Visualizzazione della distribuzione predittiva
# -----
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(X[:l], t[:l], color="black", label=f"Training data (n="

```



```
{l})", zorder=3)
plt.plot(xx, f(xx), "g--", linewidth=2, label="True function $f(x)$")
plt.plot(xx, mean_pred, "r", linewidth=2, label="Media predittiva
$m(x)$")

# Bande di confidenza ( $\pm 1\sigma$  e  $\pm 2\sigma$ )
plt.fill_between(xx, mean_pred - 2 * std_pred, mean_pred + 2 *
std_pred,
                color="pink", alpha=0.3, label="+2 $\sigma$  (95%)",
zorder=1)
plt.fill_between(xx, mean_pred - std_pred, mean_pred + std_pred,
                color="lightcoral", alpha=0.3, label="+1 $\sigma$  (68%)",
zorder=2)

plt.title("Distribuzione predittiva bayesiana")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.2)
plt.show()
```

## Interpretazione

- La **linea rossa** mostra la **media predittiva**  $m(x)$  — la miglior stima puntuale del target secondo il modello bayesiano.
- Le **fasce colorate** rappresentano gli **intervalli di confidenza**:
  - la zona rosata chiara ( $\pm 1\sigma$ ) copre circa il 68% delle possibili predizioni;
  - la zona rosata più ampia ( $\pm 2\sigma$ ) copre circa il 95% delle possibili predizioni.



Queste bande diventano più **strette** dove il modello ha visto molti dati e più **larghe** dove i dati sono scarsi o lontani dal dominio osservato.



Questo è il cuore dell'approccio **bayesiano alla regressione**:

il modello non restituisce solo una *predizione media* del valore atteso, ma anche una **stima esplicita dell'incertezza** associata a ogni previsione.

In questo modo, il modello sa *quanto* sa — una caratteristica fondamentale per un apprendimento davvero probabilistico.



## Osservazione didattica su $\beta$

In questo esperimento, la **stima empirica di  $\beta$**  (precisione del rumore) risulta **molto più piccola** rispetto a quella definita nel dataset originale.

Questo accade perché il modello usato (una **regressione lineare**) è troppo semplice per catturare la natura non lineare della funzione vera (in verde).



Il modello quindi interpreta parte dell'errore sistematico come “rumore”, stimando una **varianza del rumore molto più grande** (cioè  $\beta$  più piccolo).



## Esercizio consigliato

Prova ad **aumentare il grado del polinomio** nel modello, ad esempio: `n_coeff=5`



## E dal punto di vista pratico?

Bene: ora hai le curve, le bande di confidenza e la teoria.

Ma cosa *puoi farci* concretamente con la distribuzione predittiva?

- Puoi **stimare il valore atteso** di un nuovo punto  $x_*$  → la miglior previsione del modello.
- Puoi **quantificare l'incertezza** della previsione → dire quanto ti fidi del valore stimato.
- Puoi **costruire intervalli di confidenza** (es. al 95%) attorno alla media.
- Puoi **verificare la plausibilità di un nuovo dato** confrontando il suo valore osservato  $t_*$  con la densità predittiva del modello.

In sintesi:

la distribuzione predittiva non serve solo a disegnare curve,  
 ma a **misurare la fiducia** che il modello ha nelle proprie previsioni,  
 e a capire *quanto una nuova osservazione è coerente o sorprendente*  
 rispetto a ciò che ha appreso dai dati.

```
# =====
# 🧩 Uso pratico della distribuzione predittiva
# =====

from scipy.stats import norm
```

```

# Supponiamo di voler fare una previsione in un nuovo punto
x_star = 3.5          # nuovo input

# Matrice di design per il nuovo punto
Phi_star = design_matrix([x_star], n_coeff)

# Calcolo media e varianza predittiva
mean_star, var_star = predictive_distribution(Phi_star, mu_post,
Sigma_post, beta)
std_star = np.sqrt(var_star)

# -----
# 1 Stima puntuale e incertezza
# -----
print(f"📍 Punto di test x* = {x_star:.2f}")
print(f"   Valore predetto: {mean_star[0]:.3f}")
print(f"   Incertezza ( $\sigma$ ): {std_star[0]:.3f}")

# -----
# 2 Intervallo di confidenza ( $\pm 2\sigma \approx 95\%$ )
# -----
ci_low = mean_star[0] - 2 * std_star[0]
ci_high = mean_star[0] + 2 * std_star[0]
print(f"   Intervallo di confidenza 95%: [{ci_low:.3f},
{ci_high:.3f}]")

```

## Collegamento tra Ridge Regression e Regressione Bayesiana

A prima vista, la **Ridge Regression** e la **Regressione Bayesiana** sembrano due approcci diversi:

- la Ridge nasce come **ottimizzazione deterministica**, dove si minimizza una funzione di costo;
- la Bayesiana nasce come **modellazione probabilistica**, dove si aggiornano distribuzioni di probabilità.

In realtà, sono **due facce della stessa medaglia** 📌



## 1 Punto di partenza: il costo della Ridge

La Ridge minimizza:

$$E_{\lambda}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2n} \|\Phi \mathbf{w} - \mathbf{t}\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{w}\|^2$$

che porta alla soluzione:

$$\mathbf{w}^* = \left( \frac{1}{n} \Phi^{\top} \Phi + \lambda I \right)^{-1} \frac{1}{n} \Phi^{\top} \mathbf{t} = (\Phi^{\top} \Phi + n\lambda I)^{-1} \Phi^{\top} \mathbf{t}.$$



## 2 Vista bayesiana

Nel formalismo bayesiano assumiamo due ipotesi gaussiane:

- **Prior sui pesi**

$$p(\mathbf{w}) = \mathcal{N}(\mathbf{w} \mid 0, \alpha^{-1} I)$$

- **Likelihood dei dati**

$$p(\mathbf{t} \mid \Phi, \mathbf{w}, \beta) = \mathcal{N}(\mathbf{t} \mid \Phi \mathbf{w}, \beta^{-1} I)$$

Applicando il teorema di Bayes:

$$p(\mathbf{w} \mid \Phi, \mathbf{t}) \propto p(\mathbf{t} \mid \Phi, \mathbf{w}) p(\mathbf{w})$$

Il risultato è un **posterior gaussiano** sui pesi:

$$p(\mathbf{w} \mid \Phi, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{w} \mid \mathbf{m}_p, \Sigma_p)$$

dove:

$$\Sigma_p^{-1} = \alpha I + \beta \Phi^{\top} \Phi, \quad \mathbf{m}_p = \beta \Sigma_p \Phi^{\top} \mathbf{t}.$$



## 3 Identificazione con la Ridge

Partiamo dal risultato bayesiano:

$$\Sigma_p^{-1} = \alpha I + \beta \Phi^{\top} \Phi, \quad \mathbf{m}_p = \beta \Sigma_p \Phi^{\top} \mathbf{t}.$$

Sostituiamo la prima nella seconda:

$$\mathbf{m}_p = \beta (\alpha I + \beta \Phi^{\top} \Phi)^{-1} \Phi^{\top} \mathbf{t}.$$

Ora, per confrontarla con la **soluzione Ridge**, portiamo fuori il fattore  $\beta$  dal denominatore:

$$\mathbf{m}_p = (\Phi^\top \Phi + \frac{\alpha}{\beta} I)^{-1} \Phi^\top \mathbf{t}.$$


---

Confrontando con la formula della Ridge Regression:

$$\mathbf{w}_{\text{ridge}}^* = (\Phi^\top \Phi + \lambda I)^{-1} \Phi^\top \mathbf{t},$$

vediamo che le due espressioni **sono identiche** se poniamo:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$


---

👉 Quindi:

- La **media del posterior bayesiano**  $\mathbf{m}_p$  coincide esattamente con la **soluzione Ridge**  $\mathbf{w}_{\text{ridge}}^*$ .
- La **covarianza del posterior**  $\Sigma_p$  fornisce in più la **misura dell'incertezza sui pesi**, informazione che la Ridge standard non include.

In sintesi:

- Ridge = massimo a posteriori (MAP) del modello bayesiano.
  - Bayesian Regression = stessa media + distribuzione completa.
- 

## In sintesi

- **Ridge Regression** → trova il *punto di massimo a posteriori (MAP)* del modello bayesiano.
- **Regressione Bayesiana** → stima l'intera **distribuzione** dei pesi, includendo la misura dell'**incertezza residua**.

💡 In altre parole:

La Ridge è la versione “senza incertezza” della Regressione Bayesiana.

La Bayesiana fa tutto ciò che fa la Ridge — ma **in modo probabilisticamente coerente**.

```

# =====
# 🎯 6 CONFRONTO FINALE – RIDGE vs BAYESIAN REGRESSION
# =====

from sklearn.linear_model import Ridge

# -----
# 1 Mapping teorico tra Bayes e Ridge
# -----
#  $\lambda = \alpha / \beta \rightarrow$  regolarizzazione equivalente
lam = alpha / beta

# Addestramento del modello Ridge (stessa base  $\Phi$ )
ridge = Ridge(alpha=lam, fit_intercept=False)
ridge.fit(Phi_t, t_t.ravel())

# Predizioni Ridge sulla griglia di test
y_ridge = ridge.predict(Phi_test)

# -----
# 2 Visualizzazione del confronto
# -----
plt.figure(figsize=(10, 6))

# Dati osservati
plt.scatter(X[:,l], t[:,l], color="black", label=f"Training data (n={l})", zorder=3)

# Funzione vera
plt.plot(xx, f(xx), "g--", linewidth=2, label="True function  $f(x)$ ", zorder=2)

# Soluzione Ridge
plt.plot(xx, y_ridge, "b", linewidth=2, label=f"Ridge Regression ( $\lambda = \{lam:.3f\}$ ", zorder=3)

# Media predittiva Bayesiana
plt.plot(xx, mean_pred, "r", linewidth=2, label="Bayesian mean  $m(x)$ ", zorder=4)

```

```
# Intervallo di confidenza ( $\pm 2\sigma$ )
plt.fill_between(xx,
                 mean_pred - 2 * std_pred,
                 mean_pred + 2 * std_pred,
                 color="pink", alpha=0.3,
                 label="Bayesian  $\pm 2\sigma$  (95%)", zorder=1)

# -----
# Dettagli grafici
# -----

plt.title("Confronto finale – Ridge vs Bayesian Regression")
plt.xlabel("$x$")
plt.ylabel("$t$")
plt.legend()
plt.grid(alpha=0.25)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

## 6 Confronto finale — Ridge vs Bayesian Regression

A questo punto possiamo confrontare direttamente la **Ridge Regression** e la **Regressione Bayesiana**.

Per garantire un confronto corretto, ricordiamo la relazione teorica tra i parametri:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Utilizziamo quindi lo stesso valore di regolarizzazione per la Ridge e per il prior bayesiano.

### Cosa vediamo nel grafico

- **Linea blu** → soluzione della **Ridge Regression**:  
corrisponde al *punto di massimo a posteriori (MAP)* del modello bayesiano.  
È una singola stima deterministica dei pesi. PS: *non la vedi perchè è sovrapposta alla linea rossa!!!*
- **Linea rossa** → **media predittiva bayesiana**  $m(x)$ :  
coincide esattamente con la soluzione Ridge, come previsto dalla teoria.
- **Fascia rosa** → **intervallo di confidenza bayesiano** ( $\pm 2\sigma$ ):  
mostra l'incertezza del modello, più ampia dove i dati sono scarsi

e più stretta dove il modello ha più evidenza.

- **Linea verde tratteggiata** → la **vera funzione generatrice**  $f(x)$ .



## Interpretazione

Modello	Output	Tipo di soluzione
Ridge Regression	$\mathbf{w}_{\text{ridge}}^* = (\Phi^\top \Phi + \lambda I)^{-1} \Phi^\top \mathbf{t}$	Singolo punto (stima deterministica)
Bayesian Regression	$p(\mathbf{w})$	$p(\Phi, \mathbf{t}) = \mathcal{N}(\mathbf{m}_p, \Sigma_p)$



In altre parole:

- La **Ridge** fornisce *solo* la media del posterior (una soluzione).
- La **Bayesiana** fornisce *la distribuzione intera*, quindi anche l'incertezza.



## Conclusione

- La Ridge Regression è un caso particolare della Regressione Bayesiana.
- Entrambe producono la stessa media, ma la Bayesiana aggiunge informazione preziosa:  
la **stima dell'incertezza** sulle predizioni e sui parametri.