Esame 14-9-22

Esercizio 1

(a)

- $n + n^2 log(n)^2 = o(n^2 log(n))$? NO
- $2^{\sqrt{log(n)}} = o(\sqrt{n}^3)$? Si
- $log(n)^4 = o(\sqrt{n}^3)$? Si
- $2^n = \Theta(2^n + 1.5^n)$? Si
- $n^2 = \Omega(\frac{n^2}{log(n)^{2001}})$? NO
- $2^{n+8} = \omega(2^n)$? NO
- $\frac{n\sqrt{n+log(n)}}{\sqrt{n^3+3}} = \Theta(log(n))$? NO
- $2^n = \Theta(2^n + 2^{n/2})$? Si

(b)

1. $T(n) = T(n/3) + n, T(1) = 1$
   1. $a = 1, b = 3, f(n) = n = \Omega(n^{log_3 1} + \varepsilon) \implies$ caso 3 TH Master $\implies T(n) = \Theta(n)$
2. $$T(n) = 2T(n-4) + 1 \implies 4T(n-8) + 2 + 1 \implies$$
   $$8T(n-12) + 4 + 2 + 1 \implies \dots \implies 2^i T(n-4i) + \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

   caso base per $i = \frac{n-1}{4}$, quindi

   $$T(n) = 2^{\frac{n-1}{4}} T(1) + \sum_{j=0}^{\frac{n+3}{4}} 2^j \implies T(n) = \Theta(2^n)$$

(c)

1. Utilizzo il BucketSort e come chiave uso il voto dell'esame di algoritmi, costo $O(n+k)$
2. Uso l'algoritmo di visita in preordine, costo $O(n)$
3. Posso usare l'algoritmo di visita in ampiezza o in profondita, costo $O(n+m)$
4. Uso l'algoritmo di Dijkstra che usa una coda con priorità implementata con Heap di Fibonacci, costo $O(m + nlog(n))$

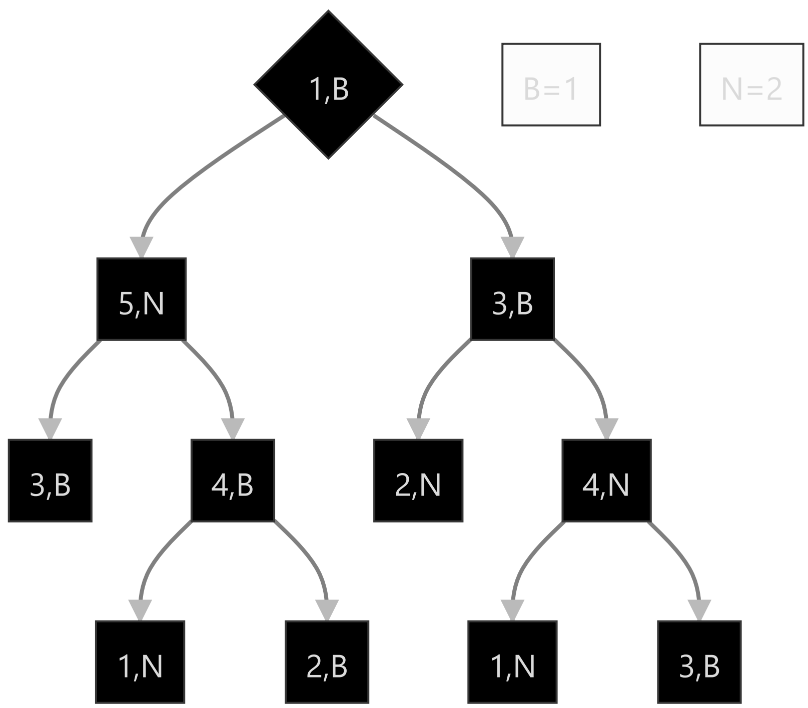
Esercizio 2

Idea

L'idea è quella di tenere le informazioni "dall'alto" quando si visita un nodo, per poi andare a calcolare il numero di antenati blu o gialli del nodo stesso, e verificare se il nodo rispecchia la condizione dell'esercizio

Correttezza

Prendiamo un istanza di esempio, tipo :



Possiamo subito dire che la radice non farà parte dei nodi che rispecchiano la prorpietà richiesta, dato che la radice non ha antenati(e quindi il numero di antenati blu sarà 0, così come il numero di antenati gialli)

L'algoritmo va a visitare ogni nodo dell'albero, e per ogni nodo che visita si porta alcune informazioni "dall'alto", ovvero la somma dei nodi neri e dei nodi bianchi, che poi verrano usati come "antenati" del nodo successivo.

Se il nodo che si sta visitando è una foglia, l'algoritmo va a controllare se la somma degli antenati blu è $\geq b$ o se la somma degli antenati neri è $\geq n$.
Se si, ritorno 1 (sto dicendo che il nodo in questione è uno dei nodi che rispecchiano la prorpietà), altrimenti ritorno 0

Se il nodo non è una foglia, l'algoritmo istanzia una variabile, "s", che è la variabile che mi dice se il nodo appartiene (s=1) o non appartiene (s=0) alla lista di nodi che devo ritornare
Poi l'algoritmo va a controllare se la somma degli antenati blu è $\geq b$ o se la somma degli antenati neri è $\geq n$; se si, imposto s=1, altrimenti s rimarrà uguale a 0

Poi controllo il colore del nodo che sto visitando:

1. se $col(v) = b$, incremento di 1 il valore di sb
2. se $col(v) = n$, incremento di 1 il valore di sn

Infine, applico la ricorsione dell'algoritmo DFS su i due sottoalberi del nodo v in questione, sommando il valore di s

Pseudocodice

```
DFS(nodo v,b,n,sn,sb)
S=[]
S.append(v)
if left(v)=Null and right(v)=Null then
        if sn>=n or sb>=b then return 1
        else return 0
s=0
if sn>=n or sb>=b then s=1
if col(v) = B then sb++
else sn++
return s+DFS(left(v),b,n,sn,sb)+DFS(right(v),b,n,sn,sb)
```

Analisi temporale

L'algoritmo ha costo $O(n)$, ovvero il costo della visita in DFS classica

Esercizio 3

Abbiamo il vincolo di usare memoria $O(k)$, quindi serve una struttura dati che è in grado di effettuare ricerce, inserimenti e cancellazioni in tempo $O(log(k))$
Possiamo usare un min-heap

L'idea è quella di creare un min-heap di dimensione k, basato sui primi k elementi della sequenza.
Poi per ogni elemento della sequenza che leggo faccio una di queste operazioni:

- se l'elemento che sto leggendo è maggiore del massimo nel min-heap, non faccio niente e vado avanti
- se l'elemento è minore del massimo nel min-heap, lo inserisco nel min-heap,elimino l'elemento massimo e richiamo il fixHeap per sistemare l'heap e mantenere la prorpietà del min-heap

Alla fine della sequenza, il min-heap conterrà i k elementi più piccoli della sequenza

Il costo dell'algoritmo è $O(nlog(k))$, perchè per n-k elementi vado ad effettuare al più n-k insert, n-k delete
Il costo rispetta il vincolo $o(n\sqrt{n})$.