Tema 3 "Relaciones y grafos"

1. Relaciones

- Relaciones binarias $\longrightarrow$ $\boxed{R \subseteq A \times B}$; $\boxed{xRy}$ $\Rightarrow$ "x está relacionado (mediante R) con y"

- Representación de relaciones binarias (A y B son finitos):
Utilizamos una matriz o un grafo dirigido.

- Operaciones entre relaciones:

$$\begin{cases} M(R \cup S) = M(R) \vee M(S) \\ M(R \cap S) = M(R) \wedge M(S) \\ M(\overline{R}) = \overline{M(R)} \end{cases}$$

Relación inversa (R^{-1}): $M_{R^{-1}} = M_R^t$

- Composición de relaciones: $A \xrightarrow{R_1} B \xrightarrow{R_2} C$

$R_1 \subseteq A \times B$; $R_2 \subseteq B \times C$ $\Rightarrow$ $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$

¡Ojo! $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c,d\}$ $C = \{x,y,z\}$

$$M(R_1) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M(R_2) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Utilizamos el producto booleano $\odot$:

$$M(R_1 \circ R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Propiedades básicas

Reflexiva

* Para cada $a \in A$, $(a,a) \in R$
* $\boxed{I \text{ (matriz identidad)} \leq M(R)}$

"todo elemento está relacionado consigo mismo"

Simétrica

* Para cada $a,b \in A$, si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$.
* $\boxed{M^t(R) = M(R)}$

M^t → matriz traspuesta

"si un elemento está relacionado con un segundo, ese segundo está relacionado con el primero"

Antisimétrica

* Para cada $a,b \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ entonces $a = b$.
* $\boxed{M(R) \wedge M(R)^t \leq I}$

Transitiva

* Para cada $a,b,c \in A$, si $(a,b) \in R$ y $(b,c) \in R$ entonces $(a,c) \in R$.
* $\boxed{(M(R))^2 \leq M(R)}$

Conexa $\Rightarrow$ $\boxed{M(R) \vee M(R)^t = \text{todo } 1}$

* Relación de equivalencia: reflexiva + simétrica + transitiva (RST)
* Relación de orden: reflexiva + antisimétrica + transitiva (RAT)

Cuando tengamos que estudiar las propiedades:
- No se cumple ⟶ contraejemplo
- Sí se cumple ⟶ utilizamos las matrices

¡ojo! $A = \{1,2,3,4\}$ → $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (4,2)\}$
$A \times A$

$$M(R) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Reflexiva $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No}}$ $(3,3) \notin R$, $(4,4) \notin R$

2) Simétrica $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No}}$ $(2,3) \in R$ pero $(3,2) \notin R$

3) Antisimétrica $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No}}$ $(1,2) \in R$ y $(2,1) \in R$ pero $1 \neq 2$

4) Transitiva $\Rightarrow$ $\boxed{\text{No}}$ $(4,2) \in R$ y $(2,3) \in R$ pero $(4,3) \notin R$

¡ojo! $A = \mathbb{Z}^+$, mRn si y solo si $6 \mid m+n$, $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : 6 \mid m+n\}$

1) Reflexiva $\Rightarrow$ para cada $m \in \mathbb{Z}^+$, mRm ¿$6 \mid 2m$?

$\boxed{\text{No}}$ si $m = 2 \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 6 \mid 4$

2) Simétrica $\Rightarrow$ para cada $m, n \in \mathbb{Z}^+$ si mRn entonces nRm
$mRn \Rightarrow 6 \mid m+n$, ¿$nRm \Rightarrow 6 \mid n+m$?
$\boxed{\text{Si}}$ Debido a la propiedad comutativa

3) Antisimétrica $\Rightarrow$ $6 \mid m+n$ y $6 \mid n+m \Rightarrow$ ¿$n = m$?
$\boxed{\text{No}}$ $m = 4$, $n = 2$ $6 \mid 4+2$ y $6 \mid 2+4 \Rightarrow 2 \neq 4$

4) Transitiva $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} 6 \mid m+n \\ 6 \mid n+s \end{array} \Rightarrow$ ¿$6 \mid m+s$?

$\boxed{\text{No}}$ $\begin{array}{l} m = 1 \\ n = 5 \\ s = 1 \end{array}$ $\begin{array}{l} 6 \mid 1+5 \\ 6 \mid 5+1 \end{array} \Rightarrow 6 \nmid 1+1$

- **Relaciones de orden** (orden total o parcial)

(Propiedad conexa) $\Rightarrow$ $a, b \in E$ o $\boxed{a \leq b}$ o $\boxed{b \leq a}$

¡ojo! Orden total $(\mathbb{Z}, \leq)$

$m \leq n \Rightarrow m + k = n$ para algún $k \in \mathbb{N}$

$-4 \leq 5 \Rightarrow -4 + 9 = 5$; $k = 9 \in \mathbb{N}$

¡ojo! Orden parcial $(P(A), \subseteq)$

$A = \{1,2,3,4\}$ $P(A) = 2^4 = 16 \Longrightarrow \emptyset, \underbrace{\quad}_{1}, \underbrace{\quad}_{2}, \underbrace{\qquad}_{3}, A$

Si es orden total, para cada pareja me tienes que decir cuál es menor :

$x = \{2\}$, $y = \{3\}$ $\Longrightarrow x \not\leq y$ NO

$\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \Longrightarrow \{1,2\} \leq \{1,2,3\}$ SI

Como todas las parejas no cumplen la propiedad conexa $\Rightarrow$ es de orden parcial

- **Relaciones de equivalencia** (clases de equivalencia)

$[a] = \{x \in A ; xRa\}$

Conjunto de todas las clases de equivalencia $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Conjunto Cociente}}$

¡ojo! $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$M(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $[1] = \{1,4\}$
- $[2] = \{2,3,5\}$
- Conjunto cociente $\Rightarrow$ $A/_R = \{[1], [2]\}$

¡Ojo! $A = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$ $R \subseteq A \times A$

$a, b \in A$, aRb sii $mcd(a, 18) = mcd(b, 18)$

- $[1] = \{x \in A,\ xR1\} = \{x \in A,\ mcd(x, 18) = mcd(1, 18) = 1\} =$
  $= \{1, 5, 7, 11, 13\}$

- $[2] = \{x \in A,\ xR2\} = \{x \in A,\ mcd(x, 18) = mcd(2, 18) = 2\} = \{2, 4, 8, 10\}$

- $[3] = \dots = \{3\}$ • $[4] =$ No • $[6] = \{6, 12\}$ • $[9] = \{9\}$

Conjunto cociente $\Rightarrow$ $A/R = \{[1], [2], [3], [6], [9]\}$

- Cierres de relaciones.

Añadimos el mínimo nº de pares para que se cumpla una determinada propiedad.

¡Conjuntos finitos!

$\Rightarrow$ Cierre reflexivo $r(R) = \rho(R) = \boxed{R \cup I}$

$\Rightarrow$ Cierre simétrico $s(R) = \sigma(R) = \boxed{R \cup R^{-1}}$

$\Rightarrow$ Cierre transitivo $t(R) = \tau(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \dots = \boxed{\bigcup_{i=1} R^i}$

¡Algoritmo de Warshall!

$A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{(a,a), (a,b), (a,d), (b,c), (b,d), (d,a), (d,d)\}$

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	1	2	4
1	11	12	14
4	41	42	44

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

	3	4
1	13	14
4	43	44

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

	1	2	3	4
1	11	12	13	14
2	21	22	23	24
4	41	42	43	44

$\downarrow$

$W_2 = W_3$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mínima relación de equivalencia ó cierre de equivalencia :

$$t(R \cup R^{-1} \cup I) \implies r\left(\sigma(\rho(R))\right)$$

2. Grafos

• <u>Grafos simples</u> $\Rightarrow G = (V, E)$
→ V: vértices (objetos, datos ...)
→ E: aristas (conexiones físicas, virtuales ...)

$e = \{x, y\} \in E$ → vértices "x" e "y" son <u>adyacentes</u>
→ arista "e" es <u>incidente</u> con los vértices "x" e "y"
"e" <u>conecta</u> a los vertices "x" e "y"

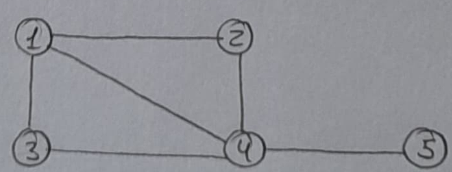
Grado de un vértice $\delta(v)$ nº de aristas incidentes en v

$$\boxed{\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E|}$$

• Formas de representación.

➡ Conjuntos

¡ojo! $V = \{1,2,3,4,5\}$ $E = \{\underset{e_1}{\{1,2\}}, \underset{e_2}{\{1,3\}}, \underset{e_3}{\{1,4\}}, \underset{e_4}{\{3,4\}}, \underset{e_5}{\{2,4\}}, \underset{e_6}{\{4,5\}}\}$



➡ Matriz de adyacencia (matriz simétrica, diagonal principal → ceros)

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$a^{(2)} \Rightarrow$ caminos de longitud 2 de i a j

→ Listas de Adyacencia !!

¡Ojo!

1	2	3	4	5
2	1	1	1	4
3	4	4	2	
			3	
			5	

- Colocar los vértices adyacentes
- Podemos saber el grado de los vértices

→ Matriz de incidencia

	1	2	3	4	5	
e_1	1	1	0	0	0	2
e_2	1	0	1	0	0	2
e_3	1	0	0	1	0	2
e_4	0	0	1	1	0	2
e_5	0	1	0	1	0	2
e_6	0	0	0	1	1	2
	3	2	2	3	1	12

grado vértices

⊕ nº de aristas

⊛ Sucesión gráfica ⇒ es una lista de los grados de los vértices

⊛ Para que exista grafo ⇒ el nº de vértices impares es par

¡Ojo! ¿Existe grafo? 3, 4, 0, 2, 1, 3, 2

$|V| = 7$

Si existe grafo $\sum_{v \in V} \gamma(v) = 2|E|$

$3+4+0+2+1+3+2 = 15 \overset{?}{=} 2|E|$, $15/2 = |E| \notin \mathbb{Z}$

No existe grafo para esa sucesión, además no tengo un nº par de vértices impares.

¡ojo! Algoritmo de Havel - Hakimi

¿Existe grafo? 4, 4, 4, 5, 2, 1

1) $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \cdot |E|$; $20 = 2|E|$; $\boxed{|E| = 10}$

2) Forma decreciente → 5, 4, 4, 4, 2, 1

3, 3, 3, 1, 0

2, 2, 0, 0

1, $\boxed{-1}$, 0 ⟹ $\boxed{\text{No existe grafo}}$

Si $\delta_{max} \geq |V|$ ⟹ no existe grafo

Máxima

load (graphs)

- Mediante conjuntos ⟹ create_graph (|V|, [[,]]);
- Lista de adyacencia ⟹ print_graph (g);
- Matriz de adyacencia ⟹ adjacency_matrix (g);
- Representación del grafo ⟹ draw_graph (g);

- Tipos de grafos

→ Regular: r - regular (todos los vértices tienen el mismo grado)

$\delta(v) = r$

→ Completo: K_n (todos los vértices conectados con los demás)

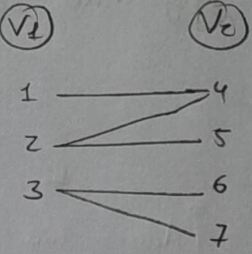
$|E| = \frac{1}{2} |V| \cdot \; = \frac{1}{2} n(n-1)$

draw_graph (complete_graph ( ))

➡ Ciclos : C_n ; $n \geq 3$ (son los polígonos, forman una cadena cerrada)
son 2-regulares ←

draw_graph (cycle_graph ( ))

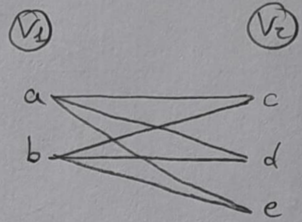
➡ Bipartidos : $K_{n,s}$ → cardinal V_1 → cardinal V_2



➡ Bipartidos completos : $K_{n,m}$

Cada vértice de V_1 está conectado con cada vértice de V_2

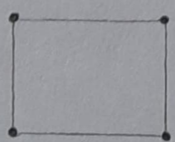
$|E| = n.m$



draw_graph(complete_bipartite_graph(,));

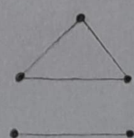
• Grafos conexos (tiene que haber un camino de un vértice a otro)

+ Camino → sucesión de vértices adyacentes $\boxed{acdefgc}$
+ Camino simple → todos los vértices son distintos $\boxed{acdefg}$
+ Ciclo → camino que empieza y termina mismo vértice $\boxed{acdefgca}$
+ Ciclo simple → vértices distintos excepto inicial y final $\boxed{acdefga}$



Sí

1 componente conexa



No

2 componentes conexas ⊗

¿Cómo ver si un grafo es conexo?
- Representación gráfica
- $M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ todo elem no nulo
- Algoritmos BEP y BEA

+ **Árbol** : grafo no dirigido, conexo y sin ciclos

+ Árbol generador : subgrafo de G, contiene todos los vértices, es un árbol

Algoritmo de búsqueda en profundidad (BEP)

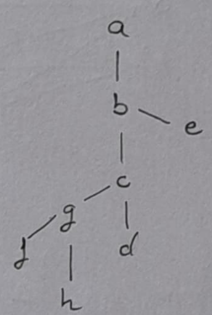
¡Añado una arista en cada iteración!

a	b	c	d	e	f	g	h
~~b~~	~~a~~	~~b~~	a	~~b~~	~~g~~	~~e~~	~~a~~
d	~~e~~	~~d~~	b			~~f~~	~~g~~
h	d	~~g~~	~~c~~			~~h~~	
	~~e~~						

Vértice	Arista
w = a	{a,b}
w = b	{b,c}
w = c	{c,d}
w = d	—
w = e	{c,g}

retroceder ← (w = d) no puede haber ciclos

Árbol



w = g	{g,f}
w = f	—
w = g	{g,h}
w = h	—
w = g	—
w = c	—
w = b	{b,e}
w = e	—

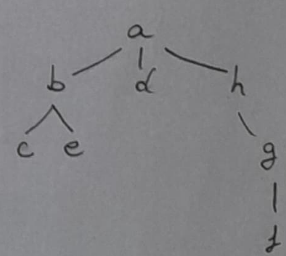
w = b – w = a – FIN

Algoritmo de búsqueda en anchura (BEA)

¡Todas las aristas! aristas incidentes → nuevos vértices → aristas incidentes

Vértice	S	Aristas
w = a	{b,d,h}	{a,b}, {a,d} {a,h}
w = b	{c,e}	{b,c}, {b,e}
w = d	—	—
w = h	{g}	{h,g}
w = c	—	—
w = e	—	—
w = g	{f}	{g,f}
w = f	—	—

Árbol



• Grafos Eulerianos

euleriano

➡ G tiene un $\boxed{\text{ciclo}}$ de Euler sii es conexo y todo vértice tiene grado par.

semieuleriano

➡ G tiene $\boxed{\text{camino}}$ de Euler sii es conexo y tiene sólo dos vertices de grado impar.

Algoritmo de Hierholzer ⟹ hallar ciclos y caminos

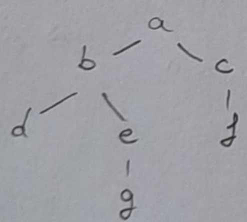
¡ojo!

a	b	c	d	e	f	g
b^1	a^1	a^3	b^4	b^9	c^6	e^{12}
c^3	c^2	b^2	c^5	d^8	d^7	f^{11}
	d^4	d^5	e^8	f^{10}	e^{10}	
	e^9	f^6	f^7	g^{12}	g^{11}	

• ¿Tiene camino de Euler? No, todo los vértices son pares.

• ¿Tiene ciclo de Euler? Sí, porque todo vértice tiene grado par

1) Vemos si es conexo ⟹ Utilizamos el algoritmo BEA



Árbol generador ⟹ tenemos todos los vértices $\boxed{\text{Es conexo}}$

$$|E| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V}\gamma(v) = \frac{1}{2}\cdot 24 = \boxed{12 \text{ aristas}}$$

$$|V| = \boxed{7 \text{ vértices}}$$

2) a - b - c - a
↓
b - d - c - f - d - e - b
↓
e - f - g - e

Solución ⟹ $\boxed{\text{abdcfdefgebca}}$

¡ojo!

a	b	c	d	e
b^2	a^2	b^1	b^5	a^3
e^3	c^1	d^6	c^6	b^4
	d^5	e^7	e^8	c^7
	e^4			d^8

- ¿Tiene camino de Euler?
  Sí, tiene 2 vértices de grado impar
- ¿Tiene ciclo de Euler?
  No, hay vértices impares.

1) Hay que empezar en un vértice impar, para acabar en el otro

c - b - a - e - b - d - c - e - d

- **Grafos hamiltonianos**

camino recorre todos los vs. sólo una vez.

⇒ Existencia de caminos o ciclos de Hamilton

hamilton_cycle(g);

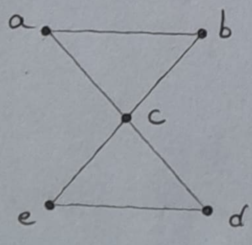
hamilton_path(g);

Teorema de Ore $n \geq 3$, $\delta(x) + \delta(y) \geq n \implies$ Ciclo de Hamilton

Teorema de Dirac $n \geq 3$, $\delta(x) \geq \frac{n}{2} \implies$ Ciclo de Hamilton

Teorema 3 eliminar n vértices y aristas incidentes
nº de componentes conexas $\leq n$ ⇒ Ciclo Hamiltoniano

¡ojo!



1) Ore ⇒ $\delta(a) = \delta(b) = \delta(e) = \delta(d) = 2$

$\delta(c) = 4$

$|V| = 5$ vértices

Comprobamos los vértices no adyacentes:

$\{x, y\} \notin E \to 2 + 2 \not\geq 5$ $\boxed{\text{No sé si existe}}$

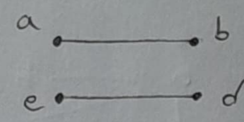
2) Dirac $\delta(x) \geq \frac{5}{2}$ $\forall x \in V$

$4 \geq \frac{5}{2}$ ✓

$2 \geq \frac{5}{2}$ ×

$\boxed{\text{No sé si existe}}$

3) Teorema 3.



Quitamos el vértice "c" y las aristas incidentes

2 componentes conexas $\cancel{\leq}$ 1

Por lo tanto, $\boxed{\text{no existe ciclo de Hamilton}}$

- **Coloración de grafos** ⇒ asignar un color a cada vértice del grafo, de manera que 2 vértices adyacentes no tengan el mismo color.

Número cromático $X(G)$ nº de colores necesarios

1. Algoritmo voraz de coloración ⇒ coloración con m colores
   no $X(G)$

$\boxed{2.}$ Teorema de acotación !!

3. Polinomio cromático ⇒ sí $X(G)$
   no coloración con m colores

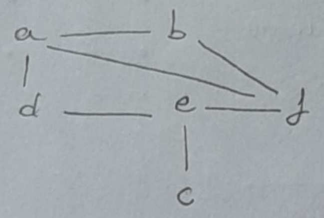
   chromatic_polynomial(g,x);

⊛ $X(G)=2$ en los grafos bipartidos

⊛ En un grafo bipartido, la longitud de los ciclos es 2.
Si hay ciclos de longitud impar, entonces el grafo no es bipartido.

⊛ Si $X(G) = 2$ entonces no puede haber ciclos de longitud impar.

¡Ojo! 6 conferencias de 1h, buscamos el menor nº de horas



1) Ordenar vértices de forma decreciente (nos puede salir el $\chi(G)$)
Primero sin ordenar:

a	b	c	d	e	f	
1	2	1	2	3	4	→ colores
	{1}	∅	{1}	{1,2}	{1,2,3}	→ colores que no puedo asignar

2) Teorema de acotación: si es conexo y no regular el
$\boxed{\chi(G) \leq k}$ → grado máximo

$\chi(G) \leq 3$ → a − b − f − a ciclo long impar ⇒ $\boxed{\chi(G) = 3}$

- Para las cotas superiores tenemos el algoritmo voraz
- Para las cotas inferiores buscamos subgrafos k_n ⇒ $\chi(k_n) = n$

3) Ordenamos de mayor a menor grado:

a	e	f	b	d	c
1	1	2	$\boxed{3}$	2	2
	∅	{1}	{1,2}	{1}	{1}

$\boxed{\chi(G) = 3}$

Solución ⇒ se necesitarán 3 horas.

IS_planar (g);

- **Planaridad** (grafo = plano ⇒ las aristas no se cortan)

⇒ **Teorema de Euler** grafo plano y conexo ⇒ $\boxed{v + r = a + 2}$

(regiones)

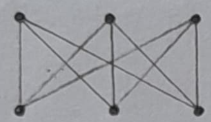
⇒ **Corolario 2** $v \geq 3$, grafo plano y conexo, no tiene ciclos long 3

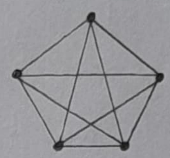
$\boxed{a \leq 2v - 4}$

⇒ **Corolario 1** grafo plano y conexo ⇒ $\boxed{a \leq 3v - 6}$

Los grafos $\boxed{K_{3,3}}$ y $\boxed{K_5}$ no son planos !!

Si se cumple no sé nada





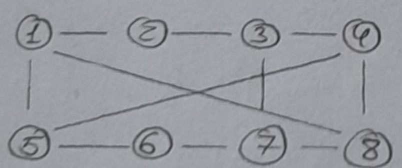
⇒ Si se cumplen los 2 corolarios utilizamos:

Teorema de Kuratowski:

$\boxed{\text{No plano}}$ sii tiene un subgrafo homeomorfo al grado de K_5 o $K_{3,3}$

* Eliminamos vértices de grado 2 y dejamos aristas

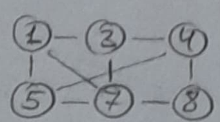
¡ojo!



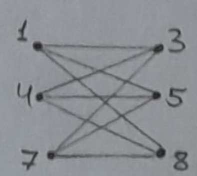
- $\boxed{C. 1}$ ⇒ $11 \leq 3 \cdot 8 - 6$ ✓
- $\boxed{C. 2}$ ⇒ $11 \leq 2 \cdot 8 - 4$ ✓

Teorema de Kuratowski: quitamos vértices de grado 2, dejamos aristas, quitamos una arista (1,8)

(2,6)



⇒



Tenemos un $K_{3,3}$, por lo tanto $\boxed{\text{no es plano}}$

¡ojo! ¿Planaridad?

a	b	c	d	e	f	g	h
b	a	b	c	b	a	b	a
f	c	d	~~e~~	~~d~~	c	~~d~~	c
h	e	f	g	f	e	f	g
	g	h			g	h	

1) 1ª Corolario ⇒ plano + conexo

$a \leq 3v - 6$

Vemos si es conexo como el Algoritmo de Bea.

$|V| = 8$ vértices

$e \Rightarrow \sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$; $28 = 2|E| \Longrightarrow e = 14$ aristas

$14 \leq 3 \cdot 8 - 6$ ✓ No sé nada

2) 2º Corolario ⇒ plano, conexo, no ciclos de long 3

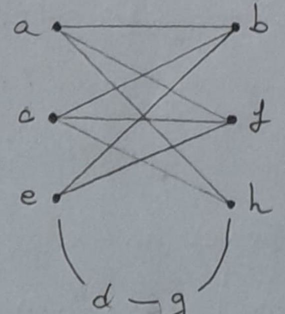
Calculamos $\chi(G) = 2$ (se ve en Al. BEA) ⇒ no hay ciclos de longitud 3

$a \leq 2v - 4$; $14 \not\leq 2 \cdot 8 - 4$ ⇒ $\boxed{\text{No es plano}}$

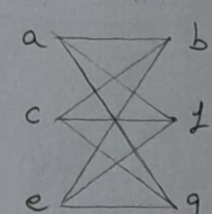
ó

1) Aplicamos el Tª de Kuratowski

- k_5 ⇒ 5 vértices de grado 4 (no los tengo)
- $k_{3,3}$ ⇒ 6 vértices de al menos 3 (sí los tengo)



d y g son de grado 2, los puedo quitar ⇒



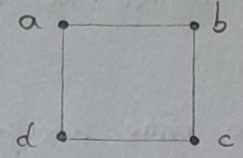
↓

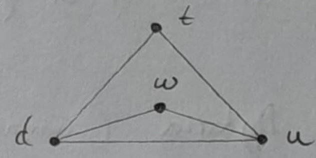
$\boxed{\text{No es plano}}$

- **Isomorfismo de grafos.**

2 grafos son isomorfos $\Rightarrow$ $\{x, y\} \in E_1$ y $\{f(x), f(y)\} \in E_2$

¡ojo!





$f: V_1 \longrightarrow V_2$

$a \longrightarrow t$
$b \longrightarrow d$
$c \longrightarrow w$
$d \longrightarrow u$

(tenemos que tener el mismo número de vértices para que exista una biyección)

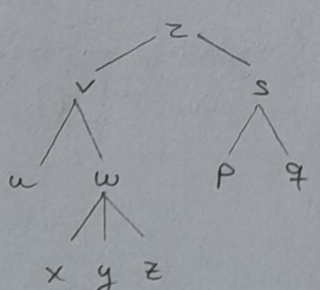
$\boxed{\text{Sí son isomorfos}}$

- **Árboles con raíz.** $\longrightarrow$ binario (cada v. interno a lo sumo 2 hijos)
$\longrightarrow$ ternario (cada v. interno a lo sumo 3 hijos)

m-ario completo: cada v. interno tiene exactamente m hijos.

→ **Árboles con raíz ordenados**

1. Recorrido de orden previo (prefijo) raíz / izquierda / derecha
2. Recorrido de orden posterior (postfijo) izquierda / derecha / raíz ↗ notación polaca
3. Recorrido de orden simétrico (infijo) izquierda / raíz / derecha



¡ojo!

1. z - v - u - w - x - y - z - s - p - q
2. u - x - y - z - w - v - p - q - s - z
3. u - v - x - w - y - z - z - p - s - q

n vértices $\Rightarrow$ $\underline{n-1 \text{ aristas}}$ $|E| = |V| - 1$

árbol m-ario completo $\Rightarrow$ $\underline{n = V_i \cdot m + 1}$

arbol m-ario de altura h $\Rightarrow$ como mucho $\underline{m^h}$ hojas // $n - V_i$ ↗ hojas

- **Grafos ponderados** cada arista $\{x, y\}$ tiene asociado un nº llamado ponderación o peso de la arista.

Peso de un camino de un grafo = Longitud del camino

→ **Alg. de Dykstra** (camino mínimo entre dos puntos)

$$\boxed{L(x) = \min\{L(x), L(v) + w(v,x)\}}$$

¡Ojo!

	A	B	C	D	E	F	G
A	–	1	2	–	–	–	–
B	1	–	3	4	–	–	–
C	2	3	–	1	5	–	–
D	–	4	1	–	3	7	2
E	–	–	5	3	–	4	1
F	–	–	–	7	4	–	6
G	–	–	–	2	1	6	–

shortest_weighted_path (v_1, v_2, g);

Buscamos camino de A a G:

Vértice	L(A)	L(B)	L(C)	L(D)	L(E)	L(F)	L(G)	Camino
	$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	
A	—	$\min\{\infty, 0+1\}$ $\boxed{1_A}$	$\min\{\infty, 0+2\}$ 2_A	∞	∞	∞	∞	
B	—	—	$\min\{2, 1+3\}$ $\boxed{2_B}$	$\min\{\infty, 1+4\}$ 5_B	∞	∞	∞	
C	—	—	—	$\min\{5, 2+1\}$ $\boxed{3_C}$	$\min\{\infty, 2+5\}$ 7_C	∞	∞	
D	—	—	—	—	$\min\{7, 3+3\}$ 6_D	$\min\{\infty, 3+7\}$ 10_D	$\min\{\infty, 3+2\}$ $\boxed{5_D}$	

- Camino ⇒ $\boxed{A - B - C - D - G}$

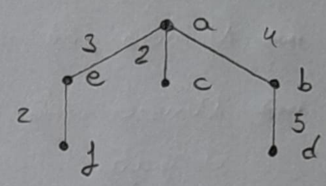
- Peso del camino ⇒ $\boxed{11}$

→ Alg. de Prim (buscamos un árbol generador minimal, todos los vértices, suma pesos = mínima]

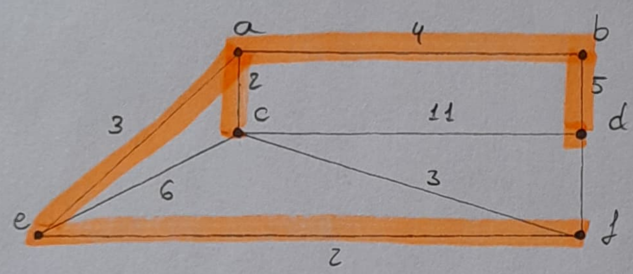
¡ojo! minimum_spanning_tree(g);

Vértices	Aristas
{a}	{a,c}
{a,c}	{a,e}
{a,c,e}	{e,f}
{a,c,e,f}	{a,b}
{a,b,c,e,f}	{b,d}
V	

AGM



Peso : $\boxed{16}$



Importante (nº cromático)

→ Si un grafo contiene un subgrafo isomorfo a K_n, entonces su número cromático es mayor o igual que n. al menos n

→ Si n es par, el grafo C_n es bipartito y, en consecuencia, su número cromático es 2. Sin embargo, si n es impar, su número cromático es 3.

- <u>Invariantes</u> de un grafo (Isomorfismo)

Magnitudes que se mantienen bajo isomorfismo. Si dos grafos difieren en alguna de estas invariantes, no pueden ser isomorfos.

→ Número de vértices.

→ Número de aristas.

→ Sucesión gráfica (orden decreciente).

→ Número de componentes conexas.

→ Número de ciclos o circuitos de determinada longitud incluidos en el grafo.

→ Número cromático.

→ Planaridad.