

# TEMA 2: CONJUNTOS, FUNCIONES, RECUENTO Y RECURRENCIA

## RECUENTO

### 1 Variaciones

EJEMPLOS:  $n=4$  ;  $k=2$

#### 1.1 Con repetición

$4^2$ ;

16

#### 1.2 Sin repetición

`load(funcs)$`

`permutation(4,2);`

12

### 2 Combinaciones

EJEMPLOS:  $n=4$  ;  $k=2$

#### 2.1 Con repetición

Estructura:  $\text{binomial}(n+k-1, k)$

`binomial(4+2-1,2);`

10

#### 2.2 Sin repetición

`binomial(4,2);`

6

### 3 Permutaciones

EJEMPLOS:  $n=4$

#### 3.1 Con repetición

(número de veces que aparece cada letra:  $c \rightarrow 1$  ;  $a \rightarrow 2$ ;  $s \rightarrow 1$ )

`multinomial_coeff(2,1,1);`

12

`permutations([c,a,s,a]);`

```
{[a,a,c,s],[a,a,s,c],[a,c,a,s],[a,c,s,a],[a,s,a,c],[a,s,c,a]
,[c,a,a,s],[c,a,s,a],[c,s,a,a],[s,a,a,c],[s,a,c,a],[s,c,a,a]}
```

### 3.2 Sin repetición

4!;

24

**permutations({c,a,s,a});**

```
{[a,c,s],[a,s,c],[c,a,s],[c,s,a],[s,a,c],[s,c,a]}
```

## 4 Números de Stirling

EJEMPLO: n=3; k=2 --> Si las cajas fuesen iguales

### 4.1 Opción 1

**stirling2(3,2);**

3

### 4.2 Opción 2 (calculando las particiones de un conjunto formadas por dos conjuntos)

**partes32:set\_partitions({1,2,3},2);**

```
{ {{1},{2,3}}, {{1,2},{3}}, {{1,3},{2}} }
```

**cardinality(partes32);**

3

EJEMPLO: n=3; k=2 --> Si las cajas fuesen distintas (se está calculando el número de funciones sobreyectivas de 3 elementos de A en 2 elementos de B)

**factorial(2)\*stirling2(3,2);**

6

## 5 Funciones generatrices

### 5.1 Ejemplo 1

$f(x) = x + x^2 + x^3 = 5$

OPCIÓN 1 ( $0 \leq x_i \leq 10$ ):

**gen1:sum(x^n,n,0,10)^3,expand;**

```

      30      29      28      27      26      25      24      23
      x  + 3 x  + 6 x  + 10 x  + 15 x  + 21 x  + 28 x  + 36 x  +
45 x  + 55 x  + 66 x  + 75 x  + 82 x  + 87 x  + 90 x  + 91 x  + 90
  14      13      12      11      10      9      8      7      6
  x  + 87 x  + 82 x  + 75 x  + 66 x  + 55 x  + 45 x  + 36 x  + 28 x  +
    5      4      3      2
21 x  + 15 x  + 10 x  + 6 x  + 3 x + 1
```

**coeff(gen1,x,5);**

21

OPCIÓN 2 ( $0 \geq x_i$ )

**gen2:sum(x^n,n,0,inf)^3;**

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} (x^n) \right)^3$$

**tay2:taylor(gen2,x,0,10);**

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + 45x^8 + 55x^9 + 66x^{10} + \dots$$

**coeff(tay2,x,5);**

21

## 5.2 Ejemplo 2

$f(x): x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24$  ;  $x_2, x_3 \rightarrow n^\circ \text{pares}$  ;  $x_4 \geq 6$  ;

$2 \leq x_3 < 10$

**gen3:sum(x^(2\*n),n,0,inf)^2\*sum(x^n,n,6,inf)\*sum(x^n,n,2,9)\$**

**tay3:taylor(gen3,x,0,30);**

$$x^8 + 2x^9 + 5x^{10} + 8x^{11} + 14x^{12} + 20x^{13} + 30x^{14} + 40x^{15} + 54x^{16} + 68x^{17} + 86x^{18} + 104x^{19} + 126x^{20} + 148x^{21} + 174x^{22} + 200x^{23} + 230x^{24} + 260x^{25} + 294x^{26} + 328x^{27} + 366x^{28} + 404x^{29} + 446x^{30} + \dots$$

**coeff(tay3,x,24);**

230

# RECURRENCIA

EJEMPLO:

$$a_{(n+4)} - 5a_{(n+3)} + 6a_{(n+2)} + 4a_{(n+1)} - 8a_{(n)} = 0$$

$$a_0 = 0 ; a_1 = -9 ; a_2 = -1 ; a_3 = 21$$

## 1 Opción 1

**eccar1:x^4-5\*x^3+6\*x^2+4\*x-8\$**

NOTA: eccar=ecuación característica

**solve(eccar1,x);**

$$[x = -1, x = 2]$$

Como el polinomio es de grado 4 y hemos obtenido 2 soluciones, significa que están repetidas. Por tanto calculamos su multiplicidad:

**multiplicities;**

[1,3]

Significa que el (-1) tiene multiplicidad 1 y el 2 multiplicidad 3, es decir:  $\text{eccar1} = (x+1)(x-2)(x-2)(x-2) = (x+1)^1 \cdot (x-2)^3$

**sol:(A·n^2+B·n+C)·2^n+D·(-1)^n\$**

**ec1:ev(sol,n=0)=0\$**

**ec2:ev(sol,n=1)=-9\$**

**ec3:ev(sol,n=2)=-1\$**

**ec4:ev(sol,n=3)=21\$**

**solve([ec1,ec2,ec3,ec4],[A,B,C,D]);**

[[A = 1, B = -1, C = -3, D = 3]]

**e:first(%);**

[A = 1, B = -1, C = -3, D = 3]

**ev(sol,e),simplify;**

$(n^2 - n - 3) 2^n + 3 (-1)^n$

## 2 Opción 2 --> función predeterminada de wxMaxima

$a_{(n+4)} - 5a_{(n+3)} + 6a_{(n+2)} + 4a_{(n+1)} - 8a_{(n)} = 0$

$a_0 = 0$  ;  $a_1 = -9$  ;  $a_2 = -1$  ;  $a_3 = 21$

**load(solve\_rec)\$**

ESTRUCTURA: solve\_rec(función entera, "a[n]",condiciones)

**solve\_rec(a[n+4]-5·a[n+3]+6·a[n+2]+4·a[n+1]-8·a[n]=0,a[n],a[0]=0,a[1]=-9,a[2]=·**

$a_n = (n^2 - n - 3) 2^n + 3 (-1)^n$

## EXTRAS

### 1 Ejercicio1

Hallar cuantos números enteros no superiores a 100 son primos:

1-Enumerar los 100 primeros números:

**num100:setify(makelist(i,i,1,100));**

```
{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,
22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,
42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,
62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,
82,83,84,85,86,87,88,89,90,91,92,93,94,95,96,97,98,99,100 }
```

2-Enumerar los primos entre esos 100 números:

**primos:subset(num100,primep);**

```
{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,
71,73,79,83,89,97}
```

3-Contar cuántos primos hay:

**cardinality(primos);**

25

## 2 Ejercicio 2

Número de enteros positivos menores que 600 que son coprimos con 600:

1-Enumerar los 100 primeros números:

**num600:setify(makelist(i,i,1,600))\$**

2-Definir la función para hallar los coprimos:

**cop600(x):=is(gcd(x,600)=1);**

$\text{cop600}(x) := \text{is}(\text{gcd}(x, 600) = 1)$

3-Enumerar los coprimos entre los 600 números:

**coprimos:subset(num600,cop600)\$**

4-Contar cuántos coprimos hay:

**cardinality(coprimos);**

160