UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E.T.S.I. Informática

Primer apellido:...

Segundo apellido:...

Nombre:...

DNI:...

Matemática Discreta (IB): temas 3 y 4; 21-12-2022	T3:	T4:

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas. Para que un ejercicio se considere resuelto correctamente se debe indicar claramente el modelo matemático usado en la resolución y la justificación de su adecuación. No se valorará la mera coincidencia del resultado propuesto.
- No usar lápiz, se debe escribir con bolígrafo azul o negro.
- No se puede utilizar ningún dispositivo electrónico.

Tema 3

1. (Hasta 2 puntos) Estudia si el grafo de la derecha contiene un circuito o un camino de Euler y, en tal caso, utiliza un algoritmo adecuado para determinarlo. (La explicación debe dejar claro cómo se aplica el algoritmo).

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_3	u_3	u_1	u_1	u_1	u_2	u_1	u_4
u_4	u_4	u_2	u_2	u_2	u_3	u_2	u_5
u_5	u_5	u_4	u_3	u_3	u_8	u_3	u_6
u_7	u_6	u_5	u_5	u_4		u_4	u_7
	u_7	u_6	u_7	u_7		u_5	
		u_7	u_8	u_8		u_8	

2. (Hasta 3 puntos) Consideremos los siguientes grafos:

G

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_2	u_1	u_2	u_1	u_1	u_1	u_1
u_4	u_3	u_4	u_2	u_2	u_4	u_3
u_5	u_4	u_7	u_3	u_6	u_5	u_5
u_6	u_5		u_6	u_7	u_7	u_6
u_7						

H

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_3	v_3	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1
v_4	v_4	v_2	v_2	v_2	v_4	v_2
v_5	v_5	v_4	v_3	v_6	v_5	v_5
v_6	v_7		v_6	v_7	v_7	v_6
v_7						

   a) Estudia si el grafo G es o no plano.

   b) Estudia si los grafos son o no isomorfos y en tal caso determina un isomorfismo.

3. (Hasta 3 puntos) Determina el número cromático del grafo de la derecha y determina una coloración con ese número de colores. Estudia si contiene ciclos de Hamilton.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_2	w_1	w_2	w_1	w_4	w_1	w_2
w_4	w_3	w_4	w_3	w_6	w_3	w_5
w_6	w_7	w_6	w_5	w_7	w_5	

4. (Hasta 2 puntos) Dada la fórmula de la Lógica Clasica $\neg \rightarrow \vee \wedge \neg\, p\, q\, q\, \neg \wedge p\, q$ escrita en forma prefija, escríbela en forma infija y en forma postfija.

Tema 4

5. (Hasta 4 puntos)

   a) Escribe $\mathtt{Mod}(\{A\} \cup \{B\})$, $\mathtt{Mod}(A \vee B)$, $\mathtt{Mod}(A \rightarrow B)$, $\mathtt{Mod}(A \leftrightarrow B)$, $\mathtt{Mod}(A \wedge B)$ y $\mathtt{Mod}(\neg A)$ en función de $\mathtt{Mod}(A)$ y $\mathtt{Mod}(B)$ (no es necesario demostrar las igualdades).

   b) Utiliza las propiedades anteriores para demostrar la siguiente propiedad:

   Si $\Omega \cup \{A\} \models B \rightarrow C$, *entonces* $\Omega \cup \{B\} \models A \rightarrow C$.

6. (Hasta 3 puntos) Formalice en el lenguaje de la Lógica Clásica Proposicional el siguiente razonamiento:

   Sócrates no cometería una mala acción. Si devuelve mal por mal, estará cometiendo una mala acción. Si rompe un acuerdo con el Estado porque ha sido injustamente condenado, está devolviendo mal por mal. Por tanto, si el huir de la prisión significa romper un acuerdo por haber sido injustamente castigado, Sócrates no huirá de la prisión.

7. (Hasta 3 puntos) Usa Tablas Semánticas para estudiar la validez del siguiente razonamiento y si no lo es, determina un contramodelo:

$$r \rightarrow p, (\neg q \rightarrow r) \rightarrow q, \neg p \rightarrow (\neg q \vee r) \models \neg q \rightarrow r$$

1. (Hasta 2 puntos) Estudia si el grafo de la derecha contiene un circuito o un camino de Euler y, en tal caso, utiliza un algoritmo adecuado para determinarlo.
(La explicación debe dejar claro cómo se aplica el algoritmo).

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_1}$	$\cancel{u_1}$	$\cancel{u_1}$	$\cancel{u_2}$	$\cancel{u_1}$	$\cancel{u_4}$
$\cancel{u_4}$	$\cancel{u_4}$	$\cancel{u_2}$	$\cancel{u_2}$	$\cancel{u_2}$	$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_2}$	$\cancel{u_5}$
$\cancel{u_5}$	$\cancel{u_5}$	$\cancel{u_4}$	$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_8}$	$\cancel{u_3}$	$\cancel{u_6}$
$\cancel{u_7}$	$\cancel{u_6}$	$\cancel{u_5}$	$\cancel{u_5}$	$\cancel{u_4}$		$\cancel{u_4}$	$\cancel{u_7}$
	$\cancel{u_7}$	$\cancel{u_6}$	$\cancel{u_7}$	$\cancel{u_7}$		$\cancel{u_5}$	
		$\cancel{u_7}$	$\cancel{u_8}$	$\cancel{u_8}$		$\cancel{u_8}$	

0'5 El grafo contiene puede contener un camino de Euler de u_2 a u_6, ya que estos son los únicos vértices de grado impar. Para ello, tendrá que ser conexo. Usamos el algoritmo de Hierholzer para determinarlo en tal caso:

Empezamos en u_2 y, buscando vértices primero en profundidad, añadimos todas las aristas que podamos

1'5

$u_2\, u_3\, u_1\, u_4\, u_2\, u_5\, u_1\, u_7\, u_2\, u_6\, u_3\, u_4\, u_5\, u_3\, u_7\, u_4\, u_8\, u_5\, u_7\, u_8\, u_6$

Hemos podido encontrar el camino en una única etapa.

Sin explicación −0'5

2. (Hasta 3 puntos) Consideremos los siguientes grafos:

G

u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_2	u_1	u_2	u_1	u_1	u_1	u_1
u_4	u_3	u_4	u_2	u_2	u_4	u_3
u_5	u_4	u_7	u_3	u_6	u_5	u_5
u_6	u_5		u_6	u_7	u_7	u_6
u_7						

H

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_3	v_3	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1
v_4	v_4	v_2	v_2	v_2	v_4	v_2
v_5	v_5	v_4	v_3	v_6	v_5	v_5
v_6	v_7		v_6	v_7	v_7	v_6
v_7						

a) Estudia si el grafo G es o no plano.

b) Estudia si los grafos son o no isomorfos y en tal caso determina un isomorfismo.

(a) • Número de aristas de G: $\frac{1}{2}(5+4+3+4+4+4+4) = \frac{28}{2} = 14$

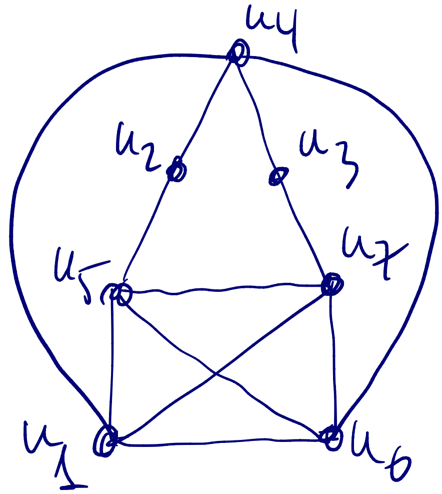
• G contiene ciclos de longitud 3: $u_1 u_2 u_4$

$$3 \cdot 5 - 6 = 3 \cdot 7 - 6 = 15 \not\leq 14$$

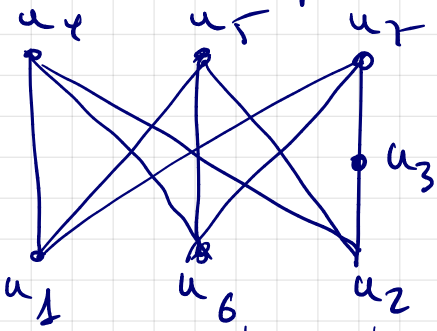
• Por lo tanto, el teorema de Euler no permite concluir que el grafo no sea plano

• Los vértices $u_1\ u_5\ u_6\ u_7$ forman un subgrafo isomorfo a K_4.

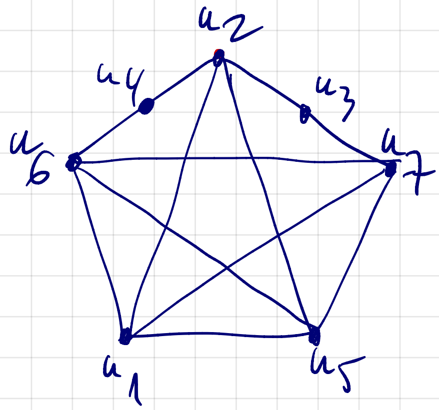
A partir de ahí, es fácil encontrar un subgrafo homeomorfo a K_5:



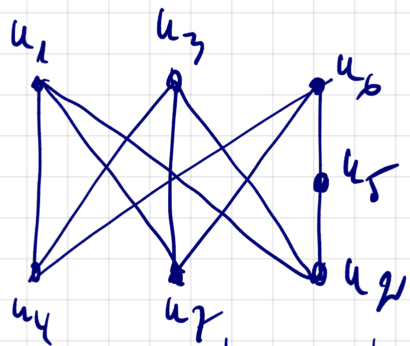
Otros subgrafos:



Homeomorfo a $K_{3,3}$



Homeomorfo a K_5



Homeomorfo a $K_{3,3}$

(b) No son isomorfos:

Si hubiera un isomorfismo ϕ, necesariamente,

$$\phi(u_1) = v_1 \qquad \phi(u_3) = v_3$$

1

ya que son los únicos vértices con grados 5 y 3 respectivamente en ambos grafos.

Pero esto no puede ser un isomorfismo, ya que $\{u_1 u_3\} \notin E_G$ y $\{v_1 v_3\} \in E_H$

(a)

3. (Hasta 3 puntos) Determina el número cromático del grafo de la derecha y determina una coloración con ese número de colores.

(b) Estudia si contiene ciclos de Hamilton.

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_2	w_1	w_2	w_1	w_4	w_1	w_2
w_4	w_3	w_4	w_3	w_6	w_3	w_5
w_6	w_7	w_6	w_5	w_7	w_5	
Color: A	R	A	R	A	R	V

(a) Por lo tanto, $\chi(G) \leq 3$

El grafo contiene un ciclo de longitud impar, $w_2 w_3 w_6 w_5 w_7 w_2$, y por lo tanto, $\chi \geq 3$

En consecuencia: $\chi(G) = 3$

0'5

0'5

(b) El grafo no verifica las condiciones de Dirac ni las condiciones de Ore

$$\delta(v) \leq 3 < \frac{7}{2} \quad \text{para todo } v$$

$$\Rightarrow \delta(u) + \delta(v) \leq 3 + 3 = 6 < 7 \quad \text{para todo } v$$

Por lo tanto, estos resultados no permiten concluir nada sobre la existencia de ciclos de Hamilton.

1

Hacemos una busqueda del ciclo de Hamilton siguiendo una estrategia primero en profundidad:

$w_4 - w_5 - w_6$

$w_4 - w_5 - w_7$

$w_3 - w_6 - w_5 - w_4$

$w_3 - w_6 - w_5 - w_7$

Descartados

$w_1 - w_2 - w_7 - w_5 - w_4 - w_3 - w_6 - w_1$

1

Otros ciclos de Hamilton

$w_1 \; w_2 \; w_7 \; w_5 \; w_6 \; w_3 \; w_4 \; w_1$

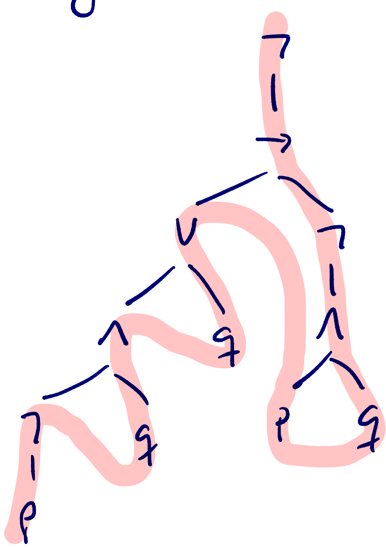
$w_1 \; w_2 \; w_7 \; w_5 \; w_4 \; w_3 \; w_6 \; w_1$

$w_1 \; w_4 \; w_5 \; w_7 \; w_2 \; w_3 \; w_6 \; w_1$

$w_1 \; w_4 \; w_3 \; w_2 \; w_7 \; w_5 \; w_6 \; w_1$

4. (Hasta 2 puntos) Dada la fórmula de la Lógica Clasica $\neg \rightarrow \vee \wedge \neg p\, q\, q \neg \wedge p\, q$ escrita en forma prefija, escríbela en forma infija y en forma postfija.

Empezamos construyendo el árbol:



Forma infija: $\neg(((\neg p \wedge q) \vee q) \rightarrow \neg(p \wedge q))$ 1

Forma postfija: $p \neg q \wedge q \vee p\, q \wedge \neg \rightarrow \neg$ 1

5. (Hasta 4 puntos)

a) Escribe $\mathtt{Mod}(\{A\}\cup\{B\})$, $\mathtt{Mod}(A\vee B)$, $\mathtt{Mod}(A\to B)$, $\mathtt{Mod}(A\leftrightarrow B)$, $\mathtt{Mod}(A\wedge B)$ y $\mathtt{Mod}(\neg A)$ en función de $\mathtt{Mod}(A)$ y $\mathtt{Mod}(B)$ (no es necesario demostrar las igualdades).

b) Utiliza las propiedades anteriores para demostrar la siguiente propiedad:

Si $\Omega\cup\{A\}\models B\to C$, *entonces* $\Omega\cup\{B\}\models A\to C$.

ⓐ (i) $Mod(\{A\}\cup\{B\}) = Mod(A)\cap Mod(B)$

(ii) $Mod(A\vee B) = Mod(A)\cup Mod(B)$

(iii) $Mod(A\to B) = \overline{Mod(A)}\cup Mod(B)$

(iv) $Mod(A\leftrightarrow B) = \left(\overline{Mod(A)}\cup Mod(B)\right)\cap\left(Mod(A)\cup\overline{Mod(B)}\right) =$

$= \overline{Mod(A)\,\Delta\, Mod(B)}$

(v) $Mod(A\wedge B) = Mod(A)\cap Mod(B)$

(vi) $Mod(\neg A) = \overline{Mod(A)}$

1

ⓑ $\Omega\cup\{A\}\models B\to C$

$\Rightarrow Mod(\Omega\cup\{A\}) \subseteq Mod(B\to C)$ (Def. de $\models$)

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(A) \subseteq \overline{Mod(B)}\cup Mod(C)$ (i) y (iii)

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(A)\cap\overline{\left(\overline{Mod(B)}\cup Mod(C)\right)} = \emptyset$

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(A)\cap Mod(B)\cap\overline{Mod(C)} = \emptyset$ (Ley de De Morgan Idempotencia)

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(B)\cap\overline{\overline{\left(Mod(A)\cap\overline{Mod(C)}\right)}} = \emptyset$ (Idempotencia)

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(B)\cap\overline{\left(\overline{Mod(A)}\cup Mod(C)\right)} = \emptyset$ (Ley de De Morgan)

$\Rightarrow Mod(\Omega)\cap Mod(B) \subseteq \overline{Mod(A)}\cup Mod(C)$

$\Rightarrow Mod(\Omega\cup\{B\}) \subseteq Mod(A\to C) \Rightarrow \Omega\cup\{B\}\models A\to C$

3

-0'5 si no se añade

Alternation

$\Omega \cup \{A\} \models B \to C$

$\Rightarrow Mod(\Omega \cup \{A\}) \subseteq Mod(B \to C)$ (Def. de $\models$)

$\Rightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(A) \subseteq \overline{Mod(B)} \cup Mod(C)$ (i) y (iii)

$\Rightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(A) \cap Mod(B) \subseteq \left(Mod(B) \cup Mod(C)\right) \cap \overline{Mod(B)}$

$\Rightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(A) \cap Mod(B) \subseteq \underbrace{\cancel{\left(Mod(B) \cap \overline{Mod(B)}\right)}}_{=\emptyset} \cup \left(Mod(C) \cap \overline{Mod(B)}\right)$

(Complemento y dominancia)

$\Rightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(A) \cap Mod(B) \subseteq Mod(C) \cap Mod(\bar{B}) \subseteq Mod(C)$

$\Rightarrow \left(Mod(\Omega) \cap Mod(A) \cap Mod(B)\right) \cup \overline{Mod(A)} \subseteq \overline{Mod(A)} \cup Mod(C)$

$\Rightarrow \left[\left(Mod(\Omega) \cap Mod(B)\right) \cup \overline{Mod(A)}\right] \cap \underbrace{\cancel{\left(Mod(A) \cup \overline{Mod(A)}\right)}}_{I} \subseteq \overline{Mod(A)} \cup Mod(C)$ complemento e identidad

$\Rightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(B) \subseteq \overline{Mod(A)} \cup Mod(C)$

$\Longrightarrow \Omega \cup \{B\} \models A \to C$

6. (Hasta 3 puntos) Formalice en el lenguaje de la Lógica Clásica Proposicional el siguiente razonamiento:

> *Sócrates no cometería una mala acción. Si devuelve mal por mal, estará cometiendo una mala acción. Si rompe un acuerdo con el Estado porque ha sido injustamente condenado, está devolviendo mal por mal. Por tanto, si el huir de la prisión significa romper un acuerdo por haber sido injustamente castigado, Sócrates no huirá de la prisión.*

"Socrates cometeria una mala accion" = p

"Socrates devuelve mal por mal" = q

"Socrates rompe un acuerdo con el Estado por haber sido injustamente castigado" = r

"Socrates huye/huira de la prision" = s

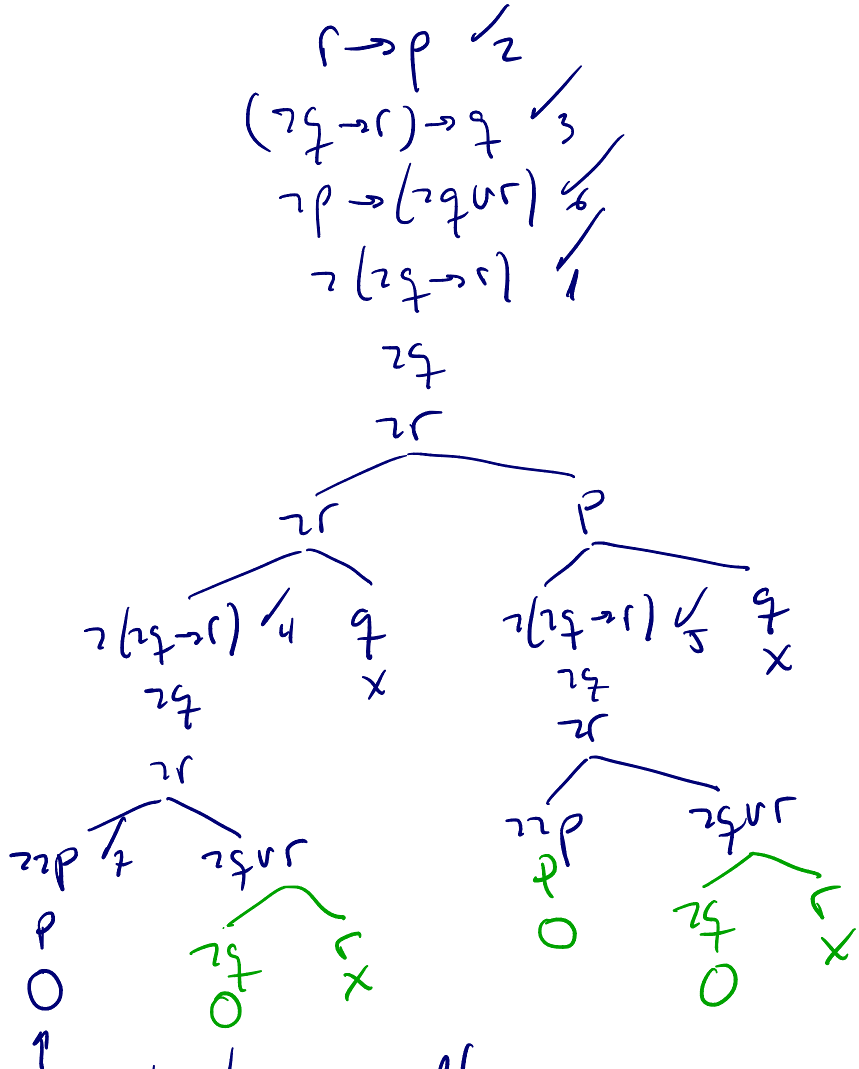
1'5

$$\neg p, \; q \to p, \; s \to q \; \models (t \to r) \to \neg t$$

1'5

7. (Hasta 3 puntos) Usa Tablas Semánticas para estudiar la validez del siguiente razonamiento y si no lo es, determina un contramodelo:

$$r \to p, (\neg q \to r) \to q, \neg p \to (\neg q \vee r) \models \neg q \to r$$



1'5

Rama abierta y completa

⇒ Tabla inicial satisfacible

⇒ Razonamiento no-válido

Contramodelo: $I(p)=1$, $I(q)=I(r)=0$

1'5