Tema 4 "lógica clásica proposicional"

1. lógica y computación

- Elementos :

→ lenguaje formal

→ Semántica o Teoría de Modelos : validez y satisfacibilidad.

→ Teoría de Demostración

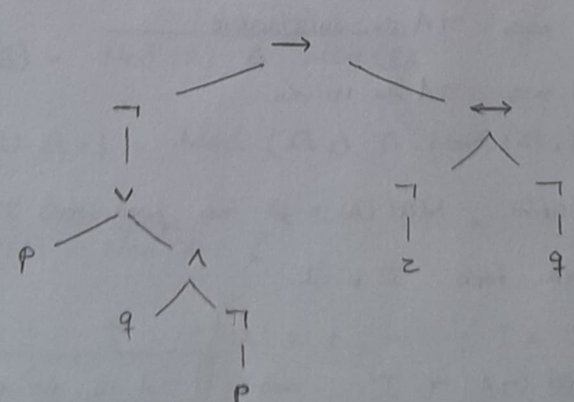
2. lenguajes formales

→ Alfabeto (conjunto de símbolos admitidos en el lenguaje)

+ Variables o símbolos proposicionales $Q = \{p, q, r, \dots\}$
+ Conectivos u operadores lógicos $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
  $\vee$ → "o", $\wedge$ → "y"
+ Delimitadores $\{(,)\}$

→ Gramática (conjunto de reglas semánticas que cadenas se consideran fbfs)

Ej. Árboles sintácticos $A = \neg(p \vee (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg r \leftrightarrow \neg q)$



3. Semántica o teoría de modelos

Valores semánticos $S = \{0, 1\}$

Valores destacados $D = \{1\}$

Funciones (interpretaciones) $\mathcal{I} = \{ I \in \mathcal{I} ;\ I : \mathcal{L} \rightarrow \{0,1\} \}$

$A \longrightarrow I(A)$

- Si existe $I \in \mathcal{I}$ tal que $I(A) = 1 \Rightarrow$ A es satisfacible

$Mod(A) = \{ I \in \mathcal{I} : I(A) = 1 \}$ $\quad Mod(A) \neq \emptyset$ → I es un modelo de A

- Si para todo $I \in \mathcal{I}$: $I(A) = 0 \Rightarrow$ A es insatisfacible

$Mod(A) = 0$ $\quad Mod(A) = \emptyset$ → I es un contramodelo de A

- Si para todo $I \in \mathcal{I}$: $I(A) = 1 \Rightarrow$ A es válida

$Mod(A) = \mathcal{I}$

¡ojo!

* Si A es satisfacible $\not\Longrightarrow$ A es válida $\boxed{\text{Falso}}$ p
* Si A es válida $\Longrightarrow$ A es satisfacible

Ej Demostración

$$\begin{cases} A \text{ es insatisfacible} \Longrightarrow \neg A \text{ es satisfacible} \\ A \text{ es insatisfacible} \Longrightarrow \neg A \text{ es válida} \end{cases}$$

- Si A es insatisfacible, $Mod(A) = \emptyset \Rightarrow$ para todo $I \in \mathcal{I}$; $I(A) = 0$

$I(\neg A) = 1$ para todo $I \in \mathcal{I}$

- Por lo tanto, $Mod(\neg A) = \mathcal{I} \Longrightarrow \boxed{\neg A \text{ es válida}}$

4. Lógica Clásica Proposicional

- $I(\neg A) = 1$ si y solo si $I(A) = 0$
- $I(A \wedge B) = 1$ si y solo si $I(A) = I(B) = 1$
- $I(A \vee B) = \boxed{0}$ si y solo si $I(A) = I(B) = 0$
- $I(A \rightarrow B) = \boxed{0}$ si y solo si $I(A) = 1$ y $I(B) = 0$
- $I(A \leftrightarrow B) = 1$ si y solo si $I(A) = I(B)$

¡ojo!

	p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg p \wedge q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge q)$
I_1	0	0	1	1	0	0
I_2	0	1	1	1	1	1
I_3	1	0	0	0	0	1
I_4	1	1	0	1	0	0

$Mod(A) = \{I_2, I_3\}$ ya que $I_2 = I_3 = 1$

Sean A y B fórmulas:

- $Mod(\neg A) = \overline{Mod(A)} = \mathcal{I} - Mod(A)$
- $Mod(A \wedge B) = Mod(A) \cap Mod(B)$
- $Mod(A \vee B) = Mod(A) \cup Mod(B)$
- $Mod(A \rightarrow B) = \overline{Mod(A)} \cup Mod(B)$
- $Mod(A \leftrightarrow B) = \overline{Mod(A) \, \Delta \, Mod(B)}$
- $Mod(\Omega_1 \cup \Omega_2) = Mod(\Omega_1) \cap Mod(\Omega_2)$

¡ojo! $Mod(\neg A) = \overline{Mod(A)}$?

$Mod(\neg A) = \{ I \in \mathcal{I} , \ I(\neg A) = 1 \} = \{ I \in \mathcal{I} , \ I(A) = 0 \} = \overline{Mod(A)}$

¡ojo!

$Mod(A \vee B) = Mod(A) \cup Mod(B)$?

$Mod(A \vee B) = \{ I \in \mathcal{I} ; I(A \vee B) = 1 \} = \{ I \in \mathcal{I} ; I(A) = 1$ o $I(B) = 1 \} = \{ I \in \mathcal{I} ; I(A) = 1 \} \cup \{ I \in \mathcal{I} ; I(B) = 1 \} =$
$= Mod(A) \cup Mod(B)$

5. Inferencia y equivalencia semántica

$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \Longrightarrow$ conjunto de fórmulas

$A \Longrightarrow$ fórmula

"por tanto, por consiguiente"

$\Omega \models A$

A es consecuencia, se deriva semánticamente o se infiere de Ω si todo modelo de Ω es modelo de A $(Mod(\Omega) \subseteq Mod(A))$

¡ojo! Demostrar que $\Omega \models A$ para $\Omega = \{\neg q \rightarrow p, \neg q \vee r\}$ y $A = \{\neg p \rightarrow r\}$

	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow p$	$\neg q \vee r$	$\neg p \rightarrow r$
I_1	0	0	0	1	1	0	1	0
I_2	0	0	1	1	1	0	1	1
I_3	0	1	0	1	0	1	0	0
I_4	0	1	1	1	0	1	1	1
I_5	1	0	0	0	1	1	1	1
I_6	1	0	1	0	1	1	1	1
I_7	1	1	0	0	0	1	0	1
I_8	1	1	1	0	0	1	1	1

$Mod(\Omega) = \{I_4, I_5, I_6, I_8\} \subseteq \{I_2, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8\}$

$\Rightarrow$ Dos fórmulas son equivalentes si $Mod(A) = Mod(B) \Rightarrow A \equiv B$

$A \equiv B$ si y solo si $A \leftrightarrow B$ es una fórmula válida.

¡ojo! Demostramos por tabla de verdad ó aplicando las leyes:

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$

$$\begin{aligned} Mod(\neg(A \wedge B)) &= \overline{Mod(A \wedge B)} = \\ &= \overline{Mod(A) \cap Mod(B)} = \\ &= \overline{Mod(A)} \cup \overline{Mod(B)} = \\ &= Mod(\neg A) \cup Mod(\neg B) = \boxed{Mod(\neg A \vee \neg B)} \end{aligned}$$

- <u>leyes de Morgan</u> $\Rightarrow$ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
  $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

- <u>leyes conmutativas</u> $\Rightarrow$ $A \wedge B \equiv B \wedge A$, $A \vee B \equiv B \vee A$

- <u>leyes asociativas</u> $\Rightarrow$ $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

- <u>ley distributiva de $\wedge$ respecto $\vee$</u> $\Rightarrow$ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

- <u>ley distributiva de $\vee$ respecto $\wedge$</u> $\Rightarrow$ $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

- <u>Absorción</u> $\Rightarrow$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
  $A \vee (A \wedge B) \equiv A$

- <u>Trasposición</u> $\Rightarrow$ $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

- <u>Interdefinición</u> de $\to$ y $\vee$ $\Rightarrow$ $A \to B \equiv \neg A \vee B$
  $A \vee B \equiv \neg A \to B$

- <u>Conmutatividad</u> $\leftrightarrow$ $\Rightarrow$ $A \to B \equiv B \to A$

- <u>Idempotencia</u> $\Rightarrow$ $A \wedge A \equiv A$
  $A \vee A \equiv A$

- <u>Doble negación</u> $\Rightarrow$ $\neg\neg A \equiv A$

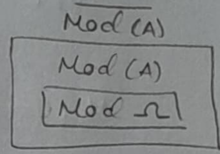
- <u>Interdefinición</u> de $\to$ y $\wedge$ $\Rightarrow$ $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$
  $A \wedge B \equiv \neg(A \to \neg B)$

- <u>Asociatividad</u> $\leftrightarrow$ $\Rightarrow$ $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

6. Principio de refutación

$\Omega \vDash A$ correcto $\Leftrightarrow$ $Mod(\Omega) \subseteq Mod(A)$ $\Leftrightarrow$ $\Omega \cup \{\neg A\}$ es insatisfacible

Demostración :



$\boxed{\Omega \vDash A} \Longrightarrow Mod(\Omega) \subseteq Mod(A) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Mod(\Omega) \cap \overline{Mod(A)} = \emptyset \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Mod(\Omega) \cap Mod(\neg A) = \emptyset \Longrightarrow$

$\Longrightarrow Mod(\Omega \cup \neg A) = \emptyset \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \Omega \cup \neg A$ insatisfacible //

$Mod(\neg A) = \overline{Mod(A)}$

$Mod(C) \subseteq Mod(D) \Longrightarrow Mod(C) \cap \overline{Mod(D)}$

$\Omega \subseteq \Omega' \Longrightarrow Mod(\Omega) \supseteq Mod(\Omega')$

$\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

$\Omega' = \{A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}, A_m\}$

¡ojo! Demostración $Mod(\Omega \cup \Omega') = Mod(\Omega) \cap Mod(\Omega')$

$\Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ $\qquad \Omega' = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$

$\Omega \cup \Omega' = \{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$

$Mod(\Omega \cup \Omega)' = \{I \in \mathcal{I} : I(A_1) = \dots = I(A_n) = I(B_1) = \dots = I(B_m) = 1\} =$

$= Mod(\Omega) \cap Mod(\Omega')$

7. Método de las tablas semánticas

→ Literal : fórmula atómica y la negación de una fórmula atómica. Vamos a cerrar las ramas cuando tengamos dos literales opuestos

p

$\neg p$

→ Fórmulas α o conjuntivas $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$

A_1
|
A_2

→ Fórmulas β o disyuntivas $\beta \equiv \beta_1 \vee \beta_2$

B_1 / \ B_2

α	α_1	α_2
$A_1 \wedge A_2$	A_1	A_2
$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg A_1$	$\neg A_2$
$\neg(A_1 \to A_2)$	A_1	$\neg A_2$
$\neg\neg A$	A_1	A_2

β	β_1	β_2
$B_1 \vee B_2$	B_1	B_2
$\neg(B_1 \wedge B_2)$	$\neg B_1$	$\neg B_2$
$B_1 \to B_2$	$\neg B_1$	B_2

✓ la fórmula ya ha sido usada para extender la tabla ⇄ α prioridad; arriba - abajo

✗ rama cerrada, no colgamos nada de ella

Tabla cerrada (todas las ramas cerradas) ⟹ $\boxed{\text{entrada insatisfacible}}$

Tabla abierta y completa (hay ramas abiertas) ⟹ $\boxed{\text{entrada satisfacible}}$

	Entrada
A es válida	$\neg A$
$\Omega \models A$	$\Omega \cup \{\neg A\}$
$\Omega = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ es satisfacible	Ω

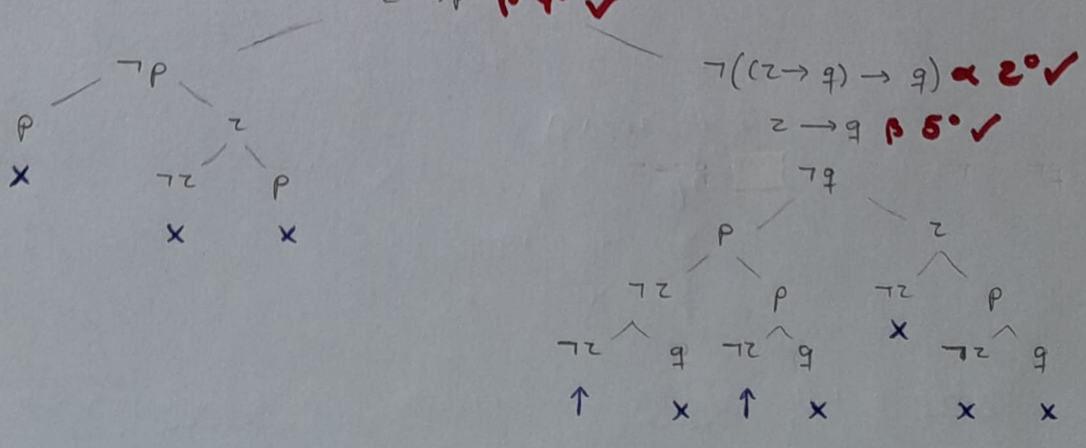
¡Ojo con interpretar la solución!

Ej. $\Omega = \{p \to \neg((r \to q) \to q),\ p \vee r,\ r \to p\}$ es satisfacible ??

$p \to \neg((r \to q) \to q)$ β 1° ✓

$p \vee r$ β 3° ✓

$r \to p$ β 4° ✓



Solución : tabla abierta y completa, es satisfacible

$I(q) = I(z) = 0$ y $I(p) = 1$ es un modelo de Ω

Ej. $A = (((p \wedge q) \to z) \wedge (p \to q)) \to (p \to z)$ es válida ??

$\neg((((p \wedge q) \to z) \wedge (p \to q)) \to (p \to z))$ α 1º ✓

$((p \wedge q) \to z) \wedge (p \to q)$ α 2º ✓

$\neg(p \to z)$ α 3º ✓

$(p \wedge q) \to z$ β 4º ✓

$p \to q$ β 5º ✓

p

$\neg z$

β $\neg(p \wedge q)$ | z

$\neg p$ | q | ×

× | $\neg p$ | $\neg q$

× | ×

Solución : tabla cerrada $\Rightarrow$ insatisfacible . Por lo tanto, si $\neg A$ es insatisfacible, $\boxed{A \text{ es válida}}$

Ej. $\{(p \wedge q) \to z,\ p \to q\} \models p \to z$

$(p \wedge q) \to z$ β 2º ✓

$p \to q$ β 3º ✓

$\neg(p \to z)$ α 1º ✓

p

$\neg z$

✓ 4º $\neg(p \wedge q)$ | z

$\neg p$ | q | ×

× | $\neg p$ | $\neg q$

× | ×

Solución : tabla cerrada $\Rightarrow$ insatisfacible, se cumple $\boxed{\Omega \models A}$

Ej. $\{ (p \vee q) \rightarrow r, \ \neg q \} \models p \vee r$

$(p \vee q) \rightarrow r$ β 2° ✓

$\neg q$

$\neg (p \vee r)$ α 1° ✓

$\neg p$

$\neg r$

3° α $\neg (p \vee q)$ | r

$\neg p$ | ×

$\neg q$

↑

Solución: tabla completa y abierta $\Rightarrow$ satisfacible. $\boxed{\text{No se da } \Omega \models A}$

$I(p) = I(q) = I(r) = 0$ (contramodelo)

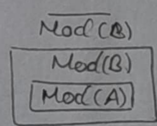
7. Teoría resolver ejercicios teóricos !!

① Me tengo que saber las relaciones entre los modelos y las leyes.

② Propiedad de monotonía: $\Omega \subseteq \Omega' \Longleftrightarrow Mod(\Omega') \subseteq Mod(\Omega)$

③ $Mod(\Omega \cup \Omega') = Mod(\Omega) \cap Mod(\Omega')$

④ $Mod(A) \subseteq Mod(B) \Longleftrightarrow Mod(A) \cap \overline{Mod(B)} = \emptyset$



¡ojo! "Si $\Omega \models B \wedge C$ entonces $\Omega \models B$ y $\Omega \models C$" Demostrar

- Hipótesis $\Rightarrow$ $\Omega \models B \wedge C$ por definición es $Mod(\Omega) \subseteq Mod(B \wedge C)$

  $Mod(\Omega) \subseteq Mod(B) \cap Mod(C)$ ⟵

- objetivo $\Rightarrow$ $Mod(\Omega) \subseteq Mod(B)$ y $Mod(\Omega) \subseteq Mod(C)$

Definición de intersección $\begin{cases} C \cap D \subseteq C \\ D \cap C \subseteq D \end{cases}$

¡ojo! Demostrar $\Omega \cup \{A\} \vDash A \vee B$

• Hipótesis $\Rightarrow$ $Mod(\Omega \cup \{A\}) = Mod(\Omega) \cap Mod(A)$ ⊕

Sabemos que $Mod(A \vee B) = Mod(A) \cup Mod(B)$

⊕ $Mod(\Omega) \cap (Mod\, A) \subseteq Mod(A) \subseteq Mod(A) \cup Mod(B)$

¡ojo! "Si $\Omega \cup \{A\} \vDash B$ entonces $\Omega \vDash A \rightarrow B$"

• Hipótesis $\Rightarrow$ $\Omega \cup \{A\} \vDash B$, def $\Rightarrow$ $Mod(\Omega \cup \{A\}) \subseteq Mod(B)$ ⊛

• Objetivo $\Rightarrow$ $Mod(\Omega) \subseteq Mod(A \rightarrow B) \Leftrightarrow Mod(\Omega) \subseteq \overline{Mod(A)} \cup Mod(B)$

⊛ Sabemos que $Mod(\Omega \cup \{A\}) = \underbrace{Mod(\Omega) \cap Mod(A)}_{①} \subseteq \underbrace{Mod(B)}_{②}$

$Mod(\Omega) \cap Mod(A) \cap \overline{Mod(B)} = \varnothing$

$\downarrow$

$Mod(\Omega) \subseteq \overline{Mod(A) \cap \overline{Mod(B)}} = \overline{Mod(A)} \cup \overline{\overline{Mod(B)}} =$

$= \overline{Mod(A)} \cup Mod(B)$