Tema 2 "Conjuntos, funciones, recuento"

1. Conjuntos : no importa el orden, no hay repetición

→ Notación extensiva   todos los elementos, uno a uno

→ Notación comprensiva   caracterizar elementos con una propiedad

$\mathcal{U}$ (conjunto universal) $\emptyset$ (conjunto vacío)

$\in$ (símbolo pertenecia; elemento → conjunto) $\notin$ (no pertenece)

$\subseteq$ (símbolo de inclusión; conjunto → conjunto)

- Partes de un conjunto $\boxed{P(A) = [X \mid X \subseteq A]}$

¡OJO! $A = [a, b]$ $|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$; n = nº de elementos de A.

$P(A) = \left[\emptyset, [a], [b], [a, b]\right]$

- Álgebra de los conjuntos

+ $\boxed{\text{Unión}}$ → $A \overset{(o)}{\cup} B$ = [elementos de A + elementos de B]
+ $\boxed{\text{Intersección}}$ → $A \overset{('y')}{\cap} B$ = [elementos comunes de A y B]
+ $\boxed{\text{Complemento}}$ → $\overline{A}$ = [todo lo que no está en A]
+ $\boxed{\text{Diferencia}}$ → $A - B = A \cap \overline{B}$
+ $\boxed{\text{Diferencia simétrica}}$ → $A \triangle B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$
  $= (A - B) \cup (B - A)$

- Propiedades ⇒ comutativa, asociativa, distributiva

+ $\boxed{\text{Absorción}}$ → $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$

+ $\boxed{\text{Idempotencia}}$ $\longrightarrow$ $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

+ $\boxed{\text{Dominancia}}$ $\longrightarrow$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

+ $\boxed{\text{Identidad}}$ $\longrightarrow$ $\emptyset \cup A = A$

+ $\boxed{\text{Cota}}$ $\longrightarrow$ $\cup \Rightarrow$ $A \subseteq B$; $A \cup B = B$

$\cap \Rightarrow$ $A \subseteq B$; $A \cap B = A$

+ $\boxed{\text{Involución}}$ $\rightarrow$ $\overline{\overline{A}} = A$

+ $\boxed{\text{Complemento}}$ $\longrightarrow$ $A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$

+ $\boxed{\text{leyes de Morgan}}$ $\longrightarrow$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

¡Ojo! Demostrar $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} =$ Def. resta

$= (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) =$ Leyes Morgan

$= \big((A \cap B) \cap \overline{A}\big) \cup \big((A \cap B) \cap \overline{C}\big) =$ P. distributiva

$= \emptyset \cup \big((A \cap B) \cap \overline{C}\big) =$ Complemento

$= (A \cap B) \cap \overline{C} =$ Identidad

$= A \cap (B \cap \overline{C}) =$ P. asociativa

$= A \cap (B - C)$ Def. resta

2. Funciones

- Relaciones $\Rightarrow$ $A \times B = [(a,b) \mid a \in A, b \in B]$

① Todo elemento de A está relacionado con algún elemento de B.

② Este elemento sea único.

¡OJO! $[1,2,3] = A$, $[a,b] = B$ $A \times B = [(1,a), (1,b), (2,a) \ldots]$

Subconjuntos de $A \times B$:

- $R = [(1,a)]$ $\Longrightarrow$ NO FUNCIÓN
- $S = [(1,a), (2,b)]$ $\Longrightarrow$ NO FUNCIÓN (falta el 3)
- $T = [(1,a), (1,b), (2,a), (3,b)]$ $\Longrightarrow$ NO FUNCIÓN (dos valores de 1)

✓ $f = [(1,a), (2,b), (3,b)]$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{SI}}$ $\text{Dom} f = A$ obligatorio

$\text{Im} f = B$

- Toda función debe cumplir $\rightarrow$ $\boxed{\text{Dom} f = A}$

– Representar matricialmente relaciones (caso finito)

¡OJO! $A = [1,2,3,4]$, $B = [a,b,c]$, $f = [(1,a), (2,c), (3,c), (4,a)]$

$$M(f) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Conclusiones : $b \notin \text{Im} f$

$f^{-1}(x)$ tiene un único

- Función Inyectiva (tengo un 1 por col

- Función sobreyectiva (la $\text{Im} f = B$)

$f^{-1}(y) \neq \emptyset$

- Una f es inyectiva si todos los elementos del conjunto A tienen una única imagen en el conjunto B. $\rightarrow$ ☐ NO

- Una f es sobreyectiva si todo elemento del conjunto B tiene al menos un elemento del conjunto A. Imagen de $f = B$.

¡ojo!

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(n) = n+7$ ¿Inyectiva? ✓

Si $f(a) = f(a')$ $\to$ si $f(n) = f(n')$

$\boxed{a = a'}$ $n+7 = n'+7 \longrightarrow \boxed{n = n'}$

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(n) = n^2+1$ ¿Inyectiva? ✗

Contraejemplo $\Rightarrow$ $f(1) = 2$, $f(-1) = 2$

¡ojo!

- $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; $f(n) = n+7$ ¿Sobreyectiva? ✗

Contraejemplo $\Rightarrow$ $3 = n+7$; $n = -4 \notin \mathbb{N}$

- $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$; $f(n) = n+7$ ¿Sobreyectiva? ✓

$n+7 = m$; $n = m-7 \in \mathbb{Z}$

- Función biyectiva (inyectiva + sobreyectiva)

- Composición de funciones ¡No son comutativas!

$f: A \to B$
$g: B \to C$ $\Rightarrow$ $g \circ f : A \to C$ $\boxed{g \circ f(x) = g(f(x))}$

- Funciones inversibles $\Rightarrow$ si es $\boxed{\text{biyectiva}}$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 7$ es inversible ; $f^{-1}(x) = x - 7$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \iff (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f(x-7) = x - 7 + 7 = \boxed{x}$$
$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x+7) = x + 7 - 7 = \boxed{x}$$

- Principio de Dirichlet (Palomar)

$|A| > |B|$ $\Rightarrow$ No se puede definir una función inyectiva

Ⓐ $\to$ palomas : m

Ⓑ $\to$ nidos : n

$\boxed{m > n}$ $\Rightarrow$ hay al menos un nido con 2 o más palomas

¡OJO! Demostrar que cualquier subconjunto de 6 elems. de $D = [1, 2, 3, \ldots, 9]$ debe contener dos elementos cuya suma es 10.

Palomas : 6

Nidos : $[x + y = 10;\ x, y \in D] \Rightarrow [(1,9), (2,8), (3,7), (4,6)]$: 4

$6 > 4 \Rightarrow$ por el principio del palomar la función no es inyectiva

3. Recuento

- **Principios básicos:** ¡Ojo! $- |A \cap B|$

⇒ Principio de la suma (de adición) $|A \cup B| = |A| + |B|$

⇒ Principio del producto (de multiplicación) $|A \times B| = |A| \times |B|$

- **Pasos a seguir en un problema:**

① Identificar elementos n

② Dar algún ejemplo de lo que se pide.

③ Dividir en tareas: –
–

④ Principio de adición y/o regla del producto

¡Ojo!

L ó L + (S) hasta 7 símbolos

L (letra) S (símbolo): letra, dígito

- Elementos ⇒ 26 letras, 10 dígitos
- Ejemplos ⇒ A, B7, C80, T742C
- Tareas ⇒
  L ⟶ 26
  LS ⟶ $26 \cdot (26+10) = 26 \cdot 36$
  LSS ⟶ $26 \cdot 36 \cdot 36 = 26 \cdot 36^2$
  LSSS ⟶ $26 \cdot 36^3$
  ....
  LSSSSSSS ⟶ $26 \cdot 36^7$

Principio de la suma
Principio del producto

- Solución ⇒ $\boxed{26 \cdot \sum_{i=0}^{7} 36^i}$

¡Ojo! clave : L + L + L + D + D + D + D

① No puedo repetir letras ni dígitos

- Elementos ⇒ letras 26, dígitos 10
- Ejemplos ⇒ abc0123, tkq8765 ...
- Tareas ⇒ $\underset{L}{26}\ \underset{L}{25}\ \underset{L}{24}\ \underset{D}{10}\ \underset{D}{9}\ \underset{D}{8}\ 7$

Solución ⇒ Regla del producto $\boxed{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}$

② Sí se pueden repetir

- Tareas ⇒ $\underset{L}{26}\ \underset{L}{26}\ \underset{L}{26}\ \underset{D}{10}\ \underset{D}{10}\ \underset{D}{10}\ \underset{D}{10}$

Solución ⇒ $\boxed{26^3 \cdot 10^4}$

③ letras iguales y dígitos pares

- Tareas ⇒ $\underset{L}{26}\ \underset{L}{1}\ \underset{L}{1}\ \underset{D}{5}\ \underset{D}{5}\ \underset{D}{5}\ \underset{D}{5}$
- Solución ⇒ $\boxed{26 \cdot 5^4}$

- Permutaciones ordinarias $n! = P_n$
- Permutaciones con repetición $PR_n^{n_1 \dots n_z} = \dfrac{n!}{n_1! \dots n_z!}$
- Variaciones ordinarias $V_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Variaciones con repetición $VR_{n,k} = n^k$
- Combinaciones ordinarias $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$
- Combinaciones con repetición $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Máxima

- ¿Grupos?
  - Sí → k (tamaño grupo)
    - ¿Orden en el grupo?
      - Sí → ¿Repetir elms en el grupo?
        - Sí → $VR_{n,k} = n^k$ → n^k
        - No → $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ → load(functs)$, permutation (n,
      - No → ¿Repetir elms en el grupo?
        - Sí → $CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$ → binomial (n+k-1, k)
        - No → $C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ → binomial (n, k)
  - No → ¿Ordenar los elementos?
    - Sí → ¿Hay elms repetidos?
      - Sí → $PR_n^{n_1, n_2 \dots n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \dots n_r!}$ → multinomial_coeff (n, ... n / permutations ([ ])
      - No → $P_n = n!$ → factorial (n) / permutations ({ })
    - No → 1

- Principio de Inclusión - Exclusión (resolución de problemas)

⟹ Definir los conjuntos : $A, B, C, \dots$ → condiciones

⊛ Escribir lo contrario $A = \{ \dots \}$

¡Complementos!

⟹ Fórmula : 2 conjuntos → $|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$

3 conjuntos → $|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A \cup B \cup C| =$

$= |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

¡Ojo! Determinar el número de enteros positivos n, donde $1 \leq n \leq 100$ y n no es divisible entre $2, 3, 5$.

- $A = \{ n^o \text{ enteros entre } 1 \text{ y } 100,\ 2|n \}$
- $B = \{ n^o \text{ enteros entre } 1 \text{ y } 100,\ 3|n \}$
- $C = \{ n^o \text{ enteros entre } 1 \text{ y } 100,\ 5|n \}$

parte entera

$$|\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}| = 100 - 50 - 33 - 20 + \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor + 10 + \left\lfloor \frac{100}{15} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor =$$

⊛ $|A \cap B|$ ⟹ si $2|n$ y $3|n$ y $mcd(2,3) = 1$ ent. $2 \cdot 3 | n$

⊛ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 2 conjuntos

⊛ $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

3 conjuntos

- **Números de Stirling** (repartiendo n objetos $\neq$)

$k \leq n \Rightarrow \boxed{S(n,k)}$ formas de distribuir n objetos distintos en k recipientes idénticos si dejar ninguno vacío.

$\boxed{k! \cdot S(n,k)} \Rightarrow$ k recipientes distintos sin dejar ninguno vacío.

Máxima $\Rightarrow$ stirling2(n,k) // set_partitions ([ ],)

$\Rightarrow$ Forma recursiva: $\boxed{S(n,k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1,k)}$

$S(n,1) = 1 \qquad S(n,n) = 1$

¡ojo! 4 alumnos, 7 problemas distintos, distribuimos? cada alumno al menos 1 problema

$n = 7, \quad k = 4$

Alumnos distintos $\Rightarrow \boxed{4! \cdot S(7,4)}$

Importante !!

$C_{n,k}$
$V_{n,k}$
$CR_{n,k}$
$VR_{n,k}$

- No sé el números de grupos.
- El tamaño de cada grupo es fijo (k).
- Todos los grupos tienen el mismo tamaño.

$S(n,k)$

$k! \, S(n,k)$ → recipientes distintos

- Repartimos n objetos distintos. recipientes iguales
- Sé el número de grupos (k).
- El tamaño de cada grupo es variable.

$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$
$x_i \geq 1$
$\Rightarrow CR_{k,\, n-k}$

- Repartimos objetos idénticos

- Funciones generatrices $f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$

a_1 → nº de formas de repartir 1 elemento con las condiciones del problema

x → nº de unidades que se reparten

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

$$(1-x)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} x^n$$

$$(1-x)^{-n} = \sum_{z=0}^{\infty} \binom{n+z-1}{z} x^{z}$$

z → coef. que quiero

¡OJO! soluciones enteras $\boxed{x_1 + x_2 = 6}$ $1 \leq x_1 \leq 3$; $1 \leq x_2 \leq 4$

1) Asignamos un función generatriz a cada variable x_i :

$f_1(x) = x + x^2 + x^3$

$f_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$

2) Multiplicamos :

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = (x + x^2 + x^3)(x + x^2 + x^3 + x^4)$

3) ¿Qué buscamos? ⇒ Coeficiente que acompaña a x^6

$x^2 \cdot x^4 + x^3 \cdot x^3 = x^6 + x^6 = 2x^6$ ⇒ Solución ⇒ 2 soluciones enteras

Máxima ⇒ { gen sum (x^n, n, 0, 25)^4, expand

coeff (gen, x, 25)

ejemplo ⇒ $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{25})^4$

{ taylor (gen, x, 0, 35) ejemplo ⇒ $f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{26}, \ldots)$

¡Ojo! soluciones enteras $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25}$ $x_i \geq 0$

$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^{25})^4$ Buscamos el coeficiente de x^{25}

Suma de una progresión geométrica $\rightarrow \left(\frac{1 - x^{26}}{1 - x}\right)^4 =$

$= (1 - x^{26})^4 \cdot (1 - x)^{-4} = \binom{4}{0} \cdot \binom{4 + 25 - 1}{25} = 1 \cdot \binom{28}{25}$

(*) Podemos llevarlo hasta el infinito:

$f(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{25} + x^{26} \dots)$

$\left(\frac{1}{1 - x}\right)^4 = (1 - x)^{-4} = \binom{4 + 25 - 1}{25} = \binom{28}{25}$

¡Ojo! 12 regalos iguales entre 3 personas

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 12}$; $x_1 \geq 4$ $x_2 \geq 2$ $2 \leq x_3 \leq 5$

$f_1(x) = (x^4 + x^5 + x^6 + \dots)$ ∞

$f_2(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + \dots)$ ∞ (nos conviene llevarla a infinito)

$f_3(x) = (x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$ tiene tope

$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) = x^8 (1 + x + x^2 + \dots)(1 + x + x^2 + x^3) =$

$= x^8 \left(\frac{1}{1 - x}\right)^2 \left(\frac{1 - x^4}{1 - x}\right) = x^8 (1 - x)^{-2} (1 - x^4)(1 - x)^{-1} =$

$= x^8 \underbrace{(1 - x^4)(1 - x)^{-3}}_{\text{coef } x^4} = \binom{3 + 4 - 1}{4} = \binom{6}{4}$

¡OJO! 25 bolas indistinguibles x_1 (par blancas) x_2 (impar negras)

$$\boxed{x_1 + x_2 = 25}$$

$$f_1(x) = (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots)$$

no acotada superiormente, la llevamos al ∞

$$f_2(x) = (x + x^3 + x^5 + \ldots)$$

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = x^3(1 + x^2 + x^4 + \ldots)^2 = x^3\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2 =$$

$$= x^3(1-x^2)^2 \underset{\circledast}{=} \binom{2+11-1}{11} = \binom{12}{11} = 12$$

$$\circledast \ (1-x^2)^{-n} = (1-y)^{-2} = \sum \binom{n+z-1}{z} y^z = \sum \binom{n+z-1}{z} \cdot x^{2 \cdot z}$$

$$\boxed{y = x^2}$$

$$x^{22} = x^{2 \cdot z}$$

$$z = 11$$

¡OJO! soluciones enteras $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 24}$ $3 \leq x_i \leq 8$

$$f(x) = (x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8)^4 = x^{12}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4 =$$

$$= x^{12}\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^{12} \cdot \underbrace{(1-x^6)^4} \cdot (1-x)^{-4} = \circledast$$

¡buscamos el coeficiente que acompaña a x^{12}!

$$\circledast \ (1-x^6)^4 = (1-y)^4 = \binom{4}{0} - \binom{4}{1}y + \binom{4}{2}y^2 - \binom{4}{3}y^3 + \binom{4}{4}y^4$$

$$y = x^6 \qquad x^0 \qquad x^6 \qquad x^{12} \qquad x^{18} \qquad x^{24}$$

$$= x^0 x^{12} + x^6 x^6 + x^{12} x^0 = \binom{4}{0}\binom{4+12-1}{12} - \binom{4}{1}\binom{4+6-1}{6} + \binom{4}{2}\binom{4+0-1}{0}$$

$$= \binom{4}{0}\binom{15}{12} - \binom{4}{1}\binom{9}{6} + \binom{4}{2}\binom{3}{0}$$

4 Recuento recursivo

- Funciones generadoras
- Ecuaciones de recurrencia :

Homogénas

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}$

$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \dots - c_k a_{n-k} = 0$

$z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} - \dots - c_k = 0$

Soluciones : z_i

Multiplicidad : m_i

$a_n = p_1(n) z_1^n + p_2(n) z_2^n \dots$

$\boxed{gr(p_i) < m_i}$

¡Ojo!

$\boxed{a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}}$, $\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = 4 \\ a_2 = 8 \end{cases}$

1) $n - (n-3) = \boxed{3}$ orden de la ecuación

2) Ecuación polinómica grado 3 :

$a_n - 3a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0$, $z^3 - 0 \cdot z^2 - 3z + 2 = 0$

$z^3 - 3z + 2 = 0$

- $z_1 = 1$; $m_1 = 2$
- $z_2 = -2$; $m_2 = 1$

¡Ruffinni!

3) $a_n = (An+B)\, 1^n + C(-2)^n$, $a_n = An + B + C(-2)^n$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &\Rightarrow -1 = B + C \\ a_1 &\Rightarrow 4 = A + B - 2C \\ a_2 &\Rightarrow 8 = 2A + B + 4C \end{aligned}\right\} \quad A = \frac{14}{3} \quad B = \frac{-8}{9} \quad C = \frac{-1}{9}$$

4) Solución $\Rightarrow$ $\boxed{a_n = \frac{14}{3} n - \frac{8}{9} - \frac{1}{9} (-2)^n}$

Lineales

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = P(n) \cdot b^n$$

$$(z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_k)(z-b)^{(e+1)} = 0 \rightarrow$$ grado del polinomio que acompaña a b^n

¡Ojo!

$a_0 = 5$, $a_1 = 6$; $\boxed{a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2^{n-1}}$, $n \geq 2$

$\downarrow$
$(-1) \cdot 2^{n-1}$

1) Ecuación característica:

$$(z^2 - 3z + 2)(z-2)^1 = 0$$

- $z_1 = 2$; $m_1 = 2$
- $z_2 = 1$; $m_2 = 1$

$$a_n = A \cdot 1^n + (Bn + C) \cdot 2^n$$

- $a_0 \Rightarrow 5 = A + C$
- $a_1 \Rightarrow 6 = A + 2B + 2C$
- $a_2 = 3a_1 - 2a_0 - 2 = -6 \Rightarrow -6 = A + (2B + C) \cdot 2^2$

$\Bigg\} \; A = 2,\; B = 3,\; C = -1$

2) Solución: $\boxed{a_n = 2 + (3n-1) \cdot 2^n}$

Demostrar por inducción fuerte

$$\begin{cases} a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \\ a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0 \; ; \; n \geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \text{Solución: } \boxed{a_n = 2^n}$$

1) Caso base $\Rightarrow a_0 = 2^0 = 1$; $a_1 = 2^1 = 2$

2) Paso inductivo: Suponemos que es cierto para $n \leq k$; $a_k = 2^k$

$$a_k = -a_{k-1} + 6a_{k-2} = -2^{k-1} + 6 \cdot 2^{k-2} = 2^{k-2}(-2+6) =$$

$$= 2^{k-2} \cdot 2^2 = \boxed{2^k}$$

Por tanto, $a_n = 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$