MG2 - Luźne notatki: Tensory

Franek Jełowicki

Disclaimer:

To są tylko takie luźne notatki, mój konspekt na podstawie którego prowadziłem zajęcia. Mogą zawierać błędy (proszę wtedy zgłaszać). Lepiej nie używać jako argumentu w dyskusji, zwłaszcza z matematykiem.

1 Powtórzenie z poprzednich semestrów

1.1 Formy liniowe

- Forma jest to taki „poziomy wektor". Traktujemy ją jako funkcję, która przekształca wektor w skalar, czyli $F : V \to K$, np. dla wektora $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ oraz formy $f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ mamy:

$$f(v) = fv = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 30$$

- Formy są w pełni analogiczne do wektorów. Możemy je dodawać i mnożyć przez skalar, więc tworzą sobie przestrzeń liniową. Nazywamy ją przestrzenią dualną i oznaczamy V^*.

- Jako że formy tworzą przestrzeń liniową mamy tam też bazy. W szczególności interesuje nas baza dualna (tzw. kobaza) do danej bazy wektorowej. Definiujemy ją w taki sposób, że dla każdej pary v_i wektora bazowego oraz f_j formy z bazy dualnej zachodzi:

$$< v_i, f_j >= \delta_{ij}$$

gdzie δ_{ij} to delta Kroneckera - jest równa 1 wtw. $i = j$ (uwaga! W tym miejscu stosujemy jeszcze znany wszystkim zapis algebraiczny. W dalszej części będziemy zapisywać takie rzeczy inaczej (notacja Einsteina) i z tamtego punktu widzenia ten zapis może być niepoprawny). Można zapisać to macierzowo jako:

$$AB = I$$

gdzie A i B oznaczają odpowiednie bazy. Widać więc stąd że baza dualna to w takiej sytuacji po prostu odwrotność bazy przestrzeni wektorowej.

- Wartość formy na wektorze nie zależy od wyboru bazy - jest to ważna cecha, bo oznacza, że możemy prowadzić obliczenia w dowolnej, wygodnej dla nas bazie. Dzięki temu działają nam te wszystkie Bernstainy, bspline etc.

1.2 Iloczyn skalarny

- Dwa wektory są ortogonalne gdy $< u, v >= 0$. Ortogonalność to taka uogólniona prostopadłość.
- Układ ortogonalny wektorów jest też liniowo niezależny. To znaczy, że jak tych wektorów jest wystarczająco dużo tworzą bazę - tzw. bazę ortogonalną
- Każdą bazę można też zortogonalizować - np. ortogonalizacja Grama-Schmidta.
- W dalszej części będziemy sporo mówić o iloczynie zewnętrznym. Czym jest iloczyn wewnętrzny? To właśnie iloczyn skalarny - gdy szukamy w internecie informacji najlepiej właśnie szukać jako *inner product*.
- A co jeżeli zdefiniujemy iloczyn skalarny inaczej niż „normalnie”? Iloczyn skalarny możemy potraktować jako macierz (a ściśle rzecz biorąc to formę dwuliniową, czyli tensor dwukrotnie kowariantny - będzie dalej) - w normalnej sytuacji ta macierz to I i mnożenie skalarnie wektorów u, v to po prostu $< u, v >= u^T I v$. A co jak weźmiemy inną macierz? Było o tym trochę na symulacjach - prostopadłość (ortogonalność) nie działa jak jesteśmy przyzwyczajeni, przestrzeń robi się dziwna - patrz niżej.

1.3 Przestrzenie unitarne - czyli przestrzenie Hilberta

(Łukasz mówi że w sensie ścisłym przestrzeń Hilberta to przestrzeń unitarna zupełna)

- Przestrzeń Hilberta (czyli unitarna, choć patrz uwaga wyżej) to po prostu przestrzeń liniowa + iloczyn skalarny.
- Iloczyn skalarny mówi nam o normie, metryce, kątach oraz długościach, polach etc. Tak więc, ogólnie rzecz biorąc wprowadza do przestrzeni liniowej analizę.
- Tak jak było wyżej powiedziane, ten iloczyn skalarny może być zdefiniowany w inny sposób niż normalnie. Gdy jest niestandardowy, to przestrzeń zachowuje się dziwnie.
- Spoiler: To jest przydatne. Np. szczególna teoria względności (będzie w drugiej połowie semestru) polega na tym, że bierze się czasoprzestrzeń Minkowskiego - czyli taką zwykłą czasoprzestrzeń, tylko z dziwnym iloczynem skalarnym - i z tego wychodzą wszystkie fizyczne właściwości (znowu

uwaga, zanim się jakiś matematyk przyczepi: czasoprzestrzeń Minkowskiego nie jest w sensie ścisłym przestrzenią Hilberta - bo te mają dodatkowy warunek, że iloczyn skalarny musi być dodatnio określony - a tutaj nie jest, przez co zachodzą różne relatywistyczne efekty.).

1.4 Przestrzeń dualna w przestrzeni unitarnej

Wspominaliśmy o tym, że w „normalnej" przestrzeni mamy warunek $AIB = I$ gdzie A to baza V a B to baza V^*. Stąd wynika, że $B = A^{-1}$ - wyznaczenie bazy dualnej jest bardzo proste. Jeżeli mamy inny iloczyn skalarny niż I rzecz się trochę komplikuje: $ASB = I$ - gdzie S to „macierz" (wciąż stosujemy pojęcia z poprzednich semestrów, ale przypominam, że to tak naprawdę forma dwuliniowa) definiująca iloczyn skalarny. Tak więc jest trochę inaczej, ale ogólna zasada pozostaje ta sama.

Dlatego to czy wektor jest „poziomy" czy „pionowy" jest od tego momentu **bardzo ważne**. „Poziome wektory" to tak naprawdę formy. Należą one do innej przestrzeni i są innymi bytami matematycznymi niż „pionowe wektory" - czyli wektory w sensie ścisłym. Dotąd traktowaliśmy to dość swobodnie, jak coś trzeba było przemnożyć i się wymiary nie zgadzały, to się robiło jakieś transpozycje tu i tam, żeby wszystko się jakoś liczyło. Teraz wchodzimy na wyższy poziom matematyki, gdzie te rzeczy mają znaczenie - **OD TEGO MOMENTU UŻYWANIE TRANSPOZYCJI JEST ZABRONIONE I KARALNE**.

2 Nowe rzeczy - tensory

2.1 Tensor

- Najprościej jest chyba o tym myśleć w ten sposób:
  - Forma to przekształcenie zmieniające wektory w skalary
  - Wektor to przekształcenie zmieniające formy w skalary
  - Skalar to przekształcenie zmieniające skalary w skalary (nazwałem to „mnożeniem" - fajne, prawda?)

  A gdyby to uogólnić? (zapytał jakiś matematyk i teraz musimy się męczyć)

- **TENSOR**:
  - Skalar to tensor zerowego rzędu
  - Forma (pozioma!) to tensor pierwszego rzędu **kowariantny** (można pamiętać w ten sposób, że jak są formy, to jest to przestrzeń dualna i ma **ko**bazę)
  - Wektor (pionowy!) to tensor pierwszego rzędu **kontrawariantny**
  - Macierz to tensor drugiego rzędu, jednokrotnie **kontrawariantny** i jednokrotnie **kowariantny**

– Ogólna definicja tensora: przekształcenie:

$$F : V^p \times V^{*q} \to K$$

to tensor p-krotnie kowariantny i q-krotnie kontrawariantny (można porównać z definicją formy na początku).

– Powiecie - skoro tak, to macierz powinna przekształcać inne macierze w skalary, a jak robimy mnożenie, to tak się nie dzieje - jest to kwestia tego, w jaki sposób się mnoży. Iloczyn macierzy znany z algebry nie jest do końca mnożeniem o jakie tu chodzi - będzie o tym zaraz niżej.

– Możemy mieć też tensory drugiego rzędu podwójnie ko- albo kontrawariantne. Czyli takie "wektory wektorów" albo "formy form".

2.2 Notacja sumacyjna Einsteina

Notacja sumacyjna Einsteina ma na pomóc ogarnąć się trochę w tym bałaganie. Definiuje ona, w jaki sposób „iterujemy" się po tensorach (używając analogii programistycznej). Konkretnie to „iterowanie pionowo" będziemy oznaczać indeksem górnym, natomiast „iterowanie poziomo" indeksem dolnym. Tak więc:

- Wektor v będziemy zapisywać jako v^i, bo $v^i = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$
- Formę f będziemy zapisywać jako f_i bo $f_i = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix}$
- Macierz A będziemy zapisywać jako A_i^j, bo

$$A_i^j = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix}$$

- Tensor drugiego rzędu podwójnie kowariantny D (forma dwuliniowa) będziemy oznaczać jako D_{ij}. Na potrzeby zapisywania zadania możemy czasem trochę nagiąć nasze zasady i napisać go jak macierz, np:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

  Trzeba pamiętać, że robimy tak tylko dlatego, że jest to czytelniejsze niż pisane tego w jednej linii z dużą ilością nawiasów. Nie jest to natomiast do końca spójne z resztą tego co pisaliśmy. Analogicznie jest z tensorem podwójnie kontrawariantnym.

- Przy mnożeniu mnożymy i sumujemy po tych samych indeksach, np:
  – $v^i f_i = v^1 f_1 + v^2 f_2$ - wynikiem jest skalar

– $v^i A_i^j = \begin{bmatrix} v^1 A_1^1 + v^2 A_2^1 \\ v^1 A_1^2 + v^2 A_2^2 \end{bmatrix}$ - wynikiem jest wektor

– $A_i^j B_j^i = A_1^1 B_1^1 + A_2^1 B_1^2 + A_1^2 B_2^1 + A_2^2 B_2^2$ - wynikiem jest skalar

– $A_i^j B_j^k = \begin{bmatrix} A_1^1 B_1^1 + A_1^2 B_2^1 & A_2^1 B_1^1 + A_2^2 B_2^1 \\ A_1^1 B_1^2 + A_1^2 B_2^2 & A_2^1 B_1^2 + A_2^2 B_2^2 \end{bmatrix}$ - wynikiem jest macierz. Czyli to jest takie „zwykłe” mnożenie macierzy

- Będziemy często używać delty Kroneckera w podobnym charakterze co macierz identycznościowa.

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

2.3 Iloczyn tensorowy („żarówa”)

- Iloczyn tensorowy najprościej traktować jako takie narzędzie pozwalające tworzyć tensory wyższego rzędu z niższych.
- Tensory tworzą przestrzeń liniową - możemy je dodawać i mnożyć przez skalar
- Bazy będziemy oznaczać w trochę dziwny (trochę nieintuicyjny czasami) sposób. Weźmy bazę jakiejś przestrzeni liniowej $\overline{b}$. Składa się ona z wektorów bazowych - a samą bazę zapisujemy jako macierz. Czyli $\overline{b} = \overline{b}_i^j = \begin{bmatrix} \overline{b}_1^j & \overline{b}_2^j & \overline{b}_3^j \end{bmatrix}$. W praktyce będziemy pomijać ten drugi indeks (j w tym wypadku) i oznaczać całą bazę jako $\overline{b}_i$ a konkretny wektor bazowy jako np. $\overline{b}_1$. Może to być mylące, ponieważ mamy indeks dolny, ale **to jest wektor**.
- Analogicznie jest z kobazą. Oznaczamy ją jako $\overline{b}^i$ a konkretny jej wektor (wektor z przestrzeni dualnej, czyli formę) jako np. $\overline{b}^1$
- Czyli np. przez $\overline{e}_i$ rozumiem bazę kanoniczną przestrzeni wektorów, a $\overline{e}_1$ to będzie wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Z kolei $\overline{e}^i$ to kobaza kanoniczna.
- Mamy sobie dwa wektory v^i oraz w^i w bazie $\overline{b}$. Czyli tak naprawdę $v^i = v^i \overline{b}_i$ oraz $w^i = w^i \overline{b}_i$. Te bazy są ważne, po prostu czasami, gdy wiadomo w jakiej jesteśmy bazie i nie ma to znaczenia to pomijamy w zapisie - jak tutaj wszędzie wcześniej. Iloczyn tensorowy tech wektorów to:

$$v^i \otimes w^j = v^i \overline{b}_i \otimes w^j \overline{b}_j = v^i w^j \overline{b}_i \otimes \overline{b}_j = t^{ij} \overline{b}_i \otimes \overline{b}_j$$

Czyli chodzi o to, że powstał nam tensor drugiego rzędu t o wartościach $t^{ij} = v^i w^j$. Iloczyn tensorowy jest tym, co tak naprawdę sprawia, że jest to tensor - czyli pilnuje nam bazy, $\overline{b}_i \otimes \overline{b}_j$ jest bazą tego tensora.

Przykład:

$v^i = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $w^j = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ w bazie kanonicznej $\overline{e}_i$:

$$v^i \otimes w^j = v^i \overline{e}_i \otimes w^j \overline{e}_j = v^i w^j \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = 3\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_1 + \overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 + 6\overline{e}_2 \otimes \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 \otimes \overline{e}_2$$

Notacja sumacyjna Einsteina to konwencja - mówi o tym, jak zapisujemy obliczenia. Iloczyn tensorowy to operacja matematyczna. Jak widać na przykładzie tensor można zapisać w jednej linii, bez używania macierzy, ponieważ iloczyn tensorowy dba o bazę i o współrzędne. Widać też, że **iloczyn tensorowy nie jest przemienny**, np: $\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 \neq \overline{e}_2 \otimes \overline{e}_1$, jakbyśmy wpisali to w macierz, to te wyrazy odpowiadają za inną współrzędną.

2.4 Zmiana bazy

- Możemy to zrobić "ręcznie" - tzn. podstawiając i wykorzystując właściwości kobazy. Najprościej pokazać to na przykładowym zadaniu:

  Mamy tensor $t \in V^{*2}$ $t_i j = \overline{e}^1 \otimes \overline{e}^2 + \overline{e}^2 \otimes \overline{e}^1 + 2\overline{e}^2 \otimes \overline{e}^2$ Chcemy mieć go w bazie:

  $$\begin{cases} \overline{d}^1 = \overline{e}^1 + \overline{e}^2 \\ \overline{d}^2 = \overline{e}^1 - 2\overline{e}^2 \end{cases}$$

  Rozwiązanie:

  Odejmujemy stronami. Dostajemy:

  $$\overline{d}^1 - \overline{d}^2 = 3\overline{e}^2$$

  czyli:

  $$\overline{e}^2 = \frac{1}{3}(\overline{d}^1 - \overline{d}^2)$$
  $$\overline{e}^1 = \frac{2}{3}\overline{d}^1 + \frac{1}{3}\overline{d}^2$$

  Następnie mamy:

  $$t = t_i j(\overline{e}^i \otimes \overline{e}^j) = t_{11}(\frac{2}{3}\overline{d}^1 + \frac{1}{3}\overline{d}^2) \otimes (\frac{2}{3}\overline{d}^1 + \frac{1}{3}\overline{d}^2) + t_{12}...$$

  Trzeba to tylko rozpisać, pogrupować i wyjdzie

- Gdyby tensor był mieszany trzeba byłoby jeszcze znaleźć bazę dualną do $\overline{d}^i$ (jak w pracy domowej).

- Macierz zmiany bazy - było trochę o tym na wcześniejszych przedmiotach (przy okazji zmiany bazy na Bernstaina etc.). Jeśli M jest macierzą zmiany bazy z e_i na d_i to zachodzi:

  $$d_i = M_i^j e_j$$

Czyli tak, jak było zawsze. Chcemy pokazać, że zachodzi związek między współrzędnymi wektorów, tzn. że:

$$w^j = {M^{-1}}^j_i v^i$$

Gdzie v^i jest wektorem w bazie kanonicznej a w^j tym samym wektorem w bazie d_i. Czyli:

$$v^j \overline{e}_j = w^j \overline{d}_j = w^i M^j_i \overline{e}_j$$

$$v^j = w^i M^j_i$$

Mnożymy obustronnie przez ${M^{-1}}^k_j$:

$$v^j {M^{-1}}^k_j = w^i M^j_i {M^{-1}}^k_j$$

$$v^j {M^{-1}}^k_j = w^i \delta^k_i$$

$$v^j {M^{-1}}^k_j = w^k$$

$$w^j = {M^{-1}}^j_i v^i \quad QED$$

- Zupełnie analogicznie jest dla form:

$$g_i = M^j_i f_j$$

- To jest bardzo przydatne, ponieważ pozwala uprościć rozwiązywanie zadanek na zmianę bazy tensorów. Można zapisać wszystko macierzowo i wymnożyć, trzeba tylko upewnić się, że pamiętamy co jest wektorem a co formą.

2.5 Tensory proste

- Tensory proste, to po prostu tensory, które są iloczynem tensorów niższego rzędu. Czyli jeżeli mamy sobie 2 tensory $v = v^i \overline{e}_i$ oraz $w = w^j \overline{e}_j$ to tensor $t = v \otimes w$ jest tensorem prostym.
- **Nie wszystkie tensory są tensorami prostymi**. To, że często konstruujemy je przy użyciu iloczynu tensorowego i są wtedy proste, nie znaczy że nie istnieją inne tensory, których nie da się tak przedstawić. Najprostszym przykładem jest δ_{ij} - nie jest tensorem prostym.
- Jak sprawdzić czy tensor jest prosty? Można sobie rozpisać ten iloczyn tensorowy i spróbować wyznaczyć współczynniki składowych tensorów niższego rzędu. Jak się uda to jest prosty, jak wychodzi sprzeczność to nie jest.
- Dla tensorów drugiego rzędu można zapisać je macierzowo i policzyć wyznacznik. Tensory proste mają wyznacznik równy 0.