



1. Secuencias

Ejercicio 1. ★ Evaluar las siguientes expresiones:

- | | |
|--|--|
| a) $ \langle 4, 3, 1 \rangle $ | f) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 0, 3)$ |
| b) $\text{addFirst}(\pi, \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle)$ | g) $\pi \in \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle$ |
| c) $\langle 0, 1, 2, 3 \rangle[3]$ | h) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 3, 2)$ |
| d) $\text{concat}(\langle 2, 3 \rangle, \langle 5, 7, 11 \rangle)$ | i) $1 \in \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$ |
| e) $\text{head}(\text{tail}(\langle 5, 6, 7, 8 \rangle))$ | j) $\text{subseq}(\langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle, 0, 65536)$ |

Ejercicio 2. ★ Sea x de tipo $\text{seq}(\mathbb{Z})$. ¿Cuáles de las siguientes igualdades sobre secuencias son válidas?

- | | |
|--|--|
| a) $ x = \text{tail}(x) + 1$ | e) $x = \text{addFirst}(\text{head}(x), \text{tail}(x))$ |
| b) $x = \text{subseq}(x, 0, x - 1)$ | f) $x[0] = \text{head}(x)$ |
| c) $x = \text{subseq}(x, 0, x)$ | g) $i \in x = \text{head}(\text{subseq}(x, i, i + 1))$ |
| d) $\text{concat}(\text{addFirst}(3, x), y) = \text{addFirst}(3, \text{concat}(x, y))$ | h) $\text{tail}(x) = \text{subseq}(x, 1, x)$ |

En los casos incorrectos, ¿puede dar condiciones sobre las listas en cuestión para que lo sean?

Ejercicio 3. ★ Sea s_0, s_1 secuencias de tipo T y e un elemento de tipo T . Indicar para cada una de las siguientes afirmaciones si son verdaderas o falsas. En caso de ser falsa, mostrar un contraejemplo.

- a) $|\text{addFirst}(e, s_0)| = 1 + |s_0|$
- b) $|\text{addFirst}(e, s_0)| = |\text{tail}(s_0)|$
- c) $|\text{concat}(s_0, s_1)| = |s_0| + |s_1|$
- d) $s_0 = \text{tail}(\text{addFirst}(e, s_0))$
- e) $\text{head}(\text{addFirst}(e, s_0)) = e$
- f) $\text{addFirst}(e, s_0) = \text{tail}(s_0)$
- g) $\text{head}(\text{addFirst}(e, \text{tail}(s_0))) = \text{head}(\text{tail}(\text{addFirst}(e, s_0)))$
- h) $\text{addFirst}(e, s_0)[0] = e$
- i) $\text{addFirst}(e, s_0)[0] = \text{head}(\text{addFirst}(e, s_0))$

Ejercicio 4. ★ Escriba los siguientes predicados auxiliares sobre secuencias de enteros, aclarando los tipos de los parámetros que recibe:

- a) *estáAcotada*, que determina si todos los elementos de una secuencia están dentro del rango $[1, 100]$.
- b) *capicúa*, que es verdadera sii una secuencia es capicúa. (Por ejemplo, $\langle 0, 2, 1, 2, 0 \rangle$ es capicúa y $\langle 0, 2, 1, 4, 0 \rangle$ no).
- c) *esPrefijo*, que es verdadera sii una secuencia es prefijo de otra.

- d) *estáOrdenada*, que es verdadera sii la secuencia está ordenada de menor a mayor.
- e) *todosPrimos*, que es verdadera sii todos los elementos de la secuencia son números primos.
- f) *primosEnPosicionesPares*, que es verdadero sii todos los elementos primos de una secuencia están en una posición par.
- g) *todosIguales*, que es verdadera sii todos los elementos de la secuencia son iguales.
- h) *hayUnoParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento par en la secuencia que divide a todos los otros elementos de la secuencia.
- i) *hayUnoEnPosiciónParQueDivideAlResto*, que determina si hay un elemento en una posición par de la secuencia que divide a todos los otros elementos contenidos en la secuencia.
- j) *sinRepetidos*, que determina si la secuencia no tiene repetidos.
- k) *otroMayorADerecha*, que determina si todo elemento de la secuencia, salvo el último, tiene otro mayor a su derecha.
- l) *todoEsMúltiplo*, que determina si todo elemento de la secuencia es múltiplo de algún otro.
- m) *enTresPartes*, que determina si en la secuencia aparecen (de izquierda a derecha) primero 0s, después 1s y por último 2s. Por ejemplo $\langle 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle$ cumple con *enTresPartes*, pero $\langle 0, 1, 3, 0 \rangle$ o $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$ no. ¿Cómo modificaría la expresión para que se admitan cero apariciones de 0s, 1s y 2s (es decir, para que por ejemplo $\langle 0, 0, 0, 1, 1 \rangle$ o $\langle \rangle$ sí cumplan *enTresPartes*)?
- n) *esPermutaciónOrdenada*, que dadas dos secuencias s y t sea verdadero sii s es permutación de t y está ordenada.

Ejercicio 5. Especificar las siguientes funciones y predicados auxiliares. En caso de no ser posible, explicar las razones.

- a) *aux intercambiarPrimeroPorUltimo*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que intercambia el último valor por el primero en una secuencia.
- b) *pred esReverso*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$, $t : \text{seq}(\mathbb{Z})$). Que indica si la secuencia s es el reverso de la secuencia t .
- c) *aux reverso*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que indica el reverso de una secuencia.
- d) *aux agregarTresCeros*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que agrega 3 ceros al final de la secuencia s .
- e) *aux agregarNCeros*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$, $n : \mathbb{Z}$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que agrega n ceros al final de la secuencia s .
- f) *aux sumarUno*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que suma 1 a cada uno de los elementos de la secuencia s .
- g) *aux ordenar*($s : \text{seq}(\mathbb{Z})$) : $\text{seq}(\mathbb{Z})$. Que ordena la lista de menor a mayor.

Ejercicio 6. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sea s una secuencia de enteros. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- a) “Si un entero en s cumple P , también cumple Q ”
- b) “Todos los enteros de s que cumplen P , no cumplen Q ”
- c) “Todos los enteros de s que están en posiciones pares y cumplen P , no cumplen Q ”
- d) “Todos los enteros de s que cumplen P y están en posiciones que cumplen Q , son pares”
- e) “Si hay un entero en s que no cumple P entonces ninguno en s cumple Q ”
- f) “Si hay un entero en s que no cumple P entonces ninguno en s cumple Q ; y si todos los enteros de s cumplen P entonces hay al menos dos elementos de s que cumplen Q ”

Ejercicio 7. Sea $P(x : \mathbb{Z})$ un predicado cualquiera y s una secuencia de enteros. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

- a) “Todo elemento en una posición válida de la secuencia cumple P ”: $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \wedge_L P(s[i]))$
- b) “Algún elemento en una posición válida de la secuencia cumple P ”: $(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L P(s[i]))$

Ejercicio 8. ★

Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen, sea s una secuencia de enteros y sean a , b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

- a) $P(3)$ y $(\forall k : \mathbb{Z})((0 \leq k < 10) \rightarrow P(k))$
- b) $P(3)$ y $k > 5 \wedge (\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < k) \rightarrow P(i))$
- c) $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$ y $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n))$
- d) $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$ y $(\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n))$
- e) $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$ y $|s| > 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((n \in s) \rightarrow Q(n)))$
- f) $(\exists n : \mathbb{Z})(n \in s \wedge P(n) \wedge Q(n))$ y $(\forall n : \mathbb{Z})(n \in s \rightarrow (P(n) \wedge Q(n)))$

Ejercicio 9. Sea s una secuencia de enteros. Determinar si los siguientes pares de expresiones son equivalentes. En caso de que no lo sean, ilustrar con ejemplos.

- a)
 - $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s|) \rightarrow_L ((\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s|) \wedge i < j) \rightarrow_L s[i] < s[j]))$ y
 - $(\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < |s|) \rightarrow_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s|) \wedge i < j) \rightarrow_L s[i] < s[j]))$
- b)
 - $(\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \wedge_L ((\exists j : \mathbb{Z})((0 \leq j < |s| \wedge i < j - 1) \wedge_L \text{TodosIguales}(\text{subseq}(s, i, j)))))$ y
 - $(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L ((\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |s| \wedge i < j - 1) \wedge_L \text{TodosIguales}(\text{subseq}(s, i, j)))))$.

donde *todosIguales* es el definido en el item g) del ejercicio 4.
- c)
 - $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s| \rightarrow_L ((\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L s[i] = s[j])))$ y
 - $(\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |s| \wedge_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |s|) \rightarrow_L s[i] = s[j])))$

2. Sumatorias y Productorias

Ejercicio 10. ★ Evaluar las siguientes expresiones:

- | | |
|---|--|
| a) $\sum_{i=0}^2 \langle 4, 3, 1 \rangle[i]$ | f) $\sum_{i=15}^2 \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ |
| b) $\sum_{i=0}^0 \langle \pi, 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ | g) $\sum_{i=2}^{15} \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ |
| c) $\sum_{i=0}^{-1} \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle[i]$ | h) $\sum_{i=1}^3 \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ |
| d) $\sum_{i=0}^5 \frac{1}{i}$ | i) $\sum_{i=0}^4 \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle[i]$ |
| e) $\sum_{i=0}^{\sqrt{-1}} \langle 2, 3, 5, 7, 11 \rangle[i]$ | j) $\sum_{i=0}^4 \langle 0, 0, 0, 0, 0 \rangle[i]$ |

Ejercicio 11. ★ Escribir un predicado que usando sumatorias indique si un número entero es primo .

Ejercicio 12. Sea s una secuencia de elementos de tipo \mathbb{Z} . Escribir una expresión tal que:

- a) Cuento la cantidad de veces que aparece el elemento e de tipo \mathbb{Z} en la secuencia s .
- b) Sume los elementos en las posiciones impares de la secuencia s .
- c) Sume los elementos mayores a 0 contenidos en la secuencia s .
- d) Sume los inversos multiplicativos ($\frac{1}{x}$) de los elementos contenidos en la secuencia s distintos a 0.
- e) Cuento la cantidad de elementos primos no repetidos en la secuencia s .

Ejercicio 13. Escribir un predicado que indique si una secuencia es permutación de otra secuencia. Una secuencia es permutación de otra secuencia si ambas secuencias poseen los mismos elementos y la misma cantidad de apariciones por elemento. Ejemplos:

- $\langle 1, 2, 3 \rangle$ es permutación de $\langle 3, 2, 1 \rangle$
- $\langle 1, 2, 3 \rangle$ es permutación de $\langle 1, 2, 3 \rangle$
- $\langle 1, 1, 2, 3 \rangle$ es permutación de $\langle 3, 2, 1, 1 \rangle$
- $\langle 1, 2, 3 \rangle$ no es permutación de $\langle 1, 1, 3 \rangle$
- $\langle 1, 1, 2, 3 \rangle$ es permutación de $\langle 1, 3, 2, 1 \rangle$

Ejercicio 14. ★ Sea m una secuencia de secuencias de tipo \mathbb{Z} , escribir una expresión tal que:

- a) Sume los elementos contenidos en todas las secuencias.
- b) Cuenten la cantidad de secuencias vacías
- c) Sume el valor del último elemento de cada secuencia no vacía
- d) Retorne True si todas las secuencias poseen el mismo tamaño.
- e) Retorne la suma de todas las posiciones impares de cada secuencia.

Ejercicio 15. Sea s una $seq(\text{Char})$, escribir una expresión que cuente la cantidad de apariciones del carácter vacío (' ').

Ejercicio 16. ★ Sea s una $seq(\text{Char})$, escribir una expresión que cuente la cantidad de apariciones de dígitos (caracteres '0' al '9').