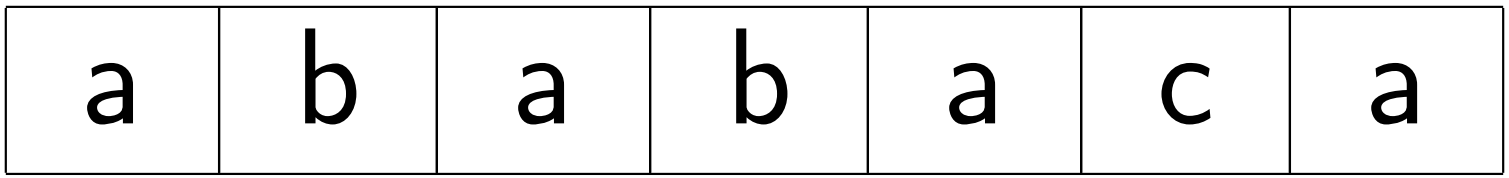
String Matching

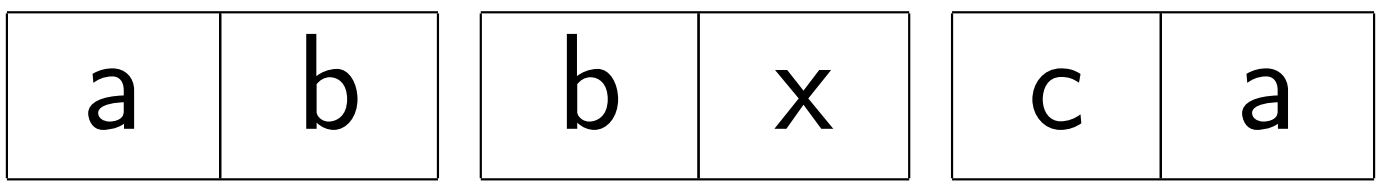
Algoritmos y Estructuras de Datos I

Strings

- Llamamos un string a una secuencia de **Char**.
- Los strings no difieren de las secuencias sobre otros tipos, dado que habitualmente no se utilizan operaciones particulares de los **Char**s.
- Los strings aparecen con mucha frecuencia en diversas aplicaciones.
    1. Palabras, oraciones y textos.
    2. Nombres de usuario y claves de acceso.
    3. Secuencias de ADN.
    4. Código fuente!
    5. ...
- El estudio de algoritmos sobre strings es un tema muy importante.

Ejemplo





Búsqueda de un patrón en un texto

- **Problema:** Dado un string t (texto) y un string p (patrón), queremos saber si p se encuentra dentro de t.
- **Notación:** La función $subseq(t, d, h)$ denota al substring de t entre d y $h - 1$ (inclusive).
- proc $contiene(\text{in } t, p : seq\langle Char\rangle, \text{out } result : \text{Bool})\{$

  $\text{Pre } \{True\}$

  $\text{Post } \{result = true \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i \leq |t| - |p| \wedge_L subseq(t, i, i + |p|) = p)\}$

  $\}$

- ¿Cómo resolvemos este problema?

Función Auxiliar `matches`

- Implementemos una función auxiliar con la siguiente especificación:
- proc $matches(\text{in } s : seq\langle Char\rangle, \text{in } i : \mathbb{Z},$
  $\text{in } r : seq\langle Char\rangle, \text{out } result : \text{Bool})\{$

  $\text{Pre } \{0 \leq i < |s| - |r| \wedge |r| \leq |s|\}$
  $\text{Post } \{result = true \leftrightarrow subseq(s, i, i + |r|) = r\}$
  $\}$

Función Auxiliar `matches`

```
bool matches(string &s, int i, string &r) {
  bool result = true;
  for (int k = 0; k < r.size() ; k++) {
    if (s[i+k]!=r[k]) {
      result = false;
    }
  }
  return result;
}
```

¿Se puede hacer que sea más eficiente?

Función Auxiliar `matches`

```
bool matches(string &s, int i, string &r) {
    int k = 0;
    while (k < r.size() && s[i+k] == r[k]) {
        k++;
    }
    return k == r.size();
}
```

Este programa se interrumpe tan pronto como detecta una desigualdad.

Función Auxiliar `matches`

```
bool matches(string &s, int i, string &r) {

    for (k = 0; k < r.size() && s[i+k] == r[k]; k++) {
        // skip
    }
    return k == r.size();
}
```

Este programa se interrumpe tan pronto como detecta una desigualdad.

¿Cuál es la complejidad?
En peor caso, el `for` se ejecuta $|r| + 1$ veces y las demás son operaciones elementales. Por lo tanto $T_{matches}(s, i, r) \in O(|r|)$

Búsqueda de un patrón en un texto

- **Algoritmo sencillo:** Recorrer las posiciones i de t donde podría empezar p y verificar si $subseq(t, i, i + |p|) = p$.

```
bool contiene(string &t, string &p) {
    for (int i=0; i<=t.size()-p.size()
                  && !matches(t,i,p); i++) {
        // skip
    }
    return i<=t.size()-p.size();
}
```

- `matches` es la función auxiliar definida anteriormente.

Búsqueda de un patrón en un texto

- ¿Cuál es el tiempo de ejecución en peor caso de para la función `contiene`?

```
bool contiene(string &t, string &p) {
    for (int i=0; i<=t.size()-p.size()
                  && !matches(t,i,p); i++) { // O(|p|)
        // skip
    }
    return i<=t.size()-p.size(); // O(1)
}
```

- El `for` se ejecuta $|t| - |p|$ veces en peor caso.
- La comparación `matches(t,i,p)` requiere realizar $|p|$ comparaciones entre `chars`.
- $T_{contiene}(t, p) \in O(|p|) * O(|t|) = O(|p| * |t|)$

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- En 1977, Donald Knuth, James Morris y Vaughan Pratt propusieron un algoritmo más eficiente.
- **Idea:** Tratar de no volver a inspeccionar todo el patrón cada vez que avanzamos en el texto.
- Mantenemos dos índices l (left) y r (right) a la secuencia, con el siguiente invariante:
  1. $0 \leq l \leq r \leq |t|$
  2. $subseq(t, l, r) = subseq(p, 0, r - l)$
  3. No hay apariciones de p en $subseq(t, 0, r)$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Planteamos el siguiente esquema para el algoritmo.

- ```
  bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
    int l = 0, r = 0;
    while( r < t.size() ) {
      // Aumentar l o r
      // Verificar si encontramos p
    }
    return // resultado
  }
  ```

- ¿Cómo aumentamos l o r preservando el invariante?
  ```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Si $r - l = |p|$, entonces encontramos p en t.
- Si $r - l < |p|$, consideramos los siguientes casos:

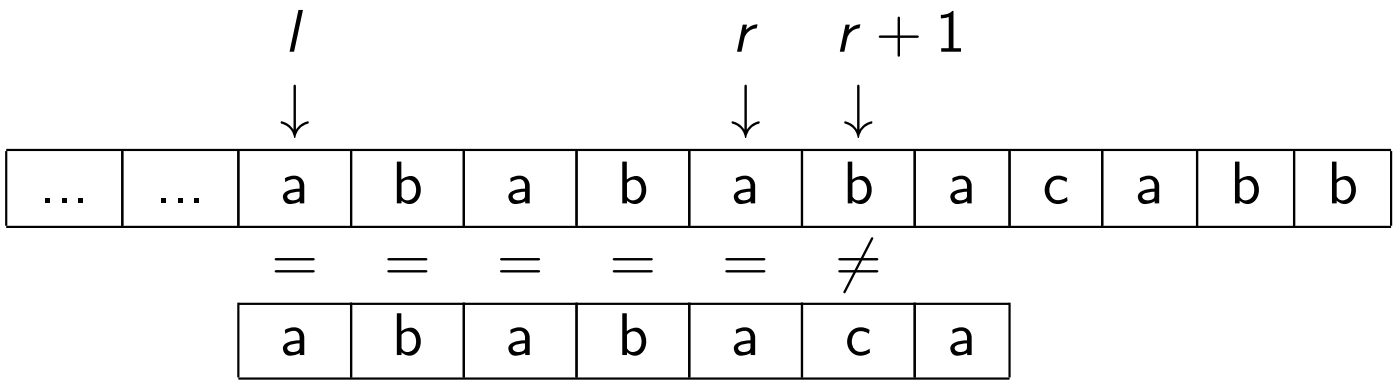
  1. Si $t[r] = p[r - l]$, entonces encontramos una nueva coincidencia, y entonces incrementamos r para reflejar esta nueva situación.
  2. Si $t[r] \neq p[r - l]$ y $l = r$, entonces no tenemos un prefijo de p en el texto, y pasamos al siguiente elemento de la secuencia avanzando l y r.
  3. Si $t[r] \neq p[r - l]$ y $l < r$, entonces debemos avanzar l. ¿Cuánto avanzamos l en este caso? ¡Tanto como podamos! (más sobre este punto a continuación)

Algoritmo (parcial) de Knuth, Morris y Pratt

```
bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
  int l = 0, r = 0;
  while( r < t.size() && r-l < p.size()) {
    if( t[r] == p[r-l] ){
      r++;
    } else if( l == r ) {
      r++;
      l++;
    } else {
      l = // avanzar l
    }
  }
  return r-l == p.size();
}
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Si $t[r] \neq p[r-l]$ y $l < r$, ¿cuánto podemos avanzar 1?
- El invariante implica que $subseq(t, l, r) = subseq(p, 0, r-l)$, pero esta condición dice que $subseq(t, l, r+1) \neq subseq(p, 0, r+1-l)$.
- Ejemplo:



- ¿Hasta donde puedo avanzar l?

Bifijos: Prefijo y Sufijo simultáneamente

- **Definición:** Una cadena de caracteres b es un *bifijo* de s si $b \neq s$, b es un prefijo de s y b es un sufijo de s.
- Ejemplos:

s	bifijos
a	$\langle\rangle$
ab	$\langle\rangle$
aba	$\langle\rangle$,a
abab	$\langle\rangle$,ab
ababc	$\langle\rangle$
aaaa	$\langle\rangle$,a, aa, aaa, aaa
abc	$\langle\rangle$
ababaca	$\langle\rangle$,a

- **Observación:** Sea una cadena s, su máximo bifijo es único.

KMP: Función π

- **Definición:** Sea $\pi(i)$ la longitud del máximo bifijo de $subseq(p, 0, i)$
- Por ejemplo, sea p=abbabbaa:

i	$subseq(p, 0, i)$	Máx. bifijo	$\pi(i)$
1	a	$\langle\rangle$	0
2	ab	$\langle\rangle$	0
3	abb	$\langle\rangle$	0
4	abba	a	1
5	abbab	ab	2
6	abbabb	abb	3
7	abbabba	abba	4
8	abbabbaa	a	1

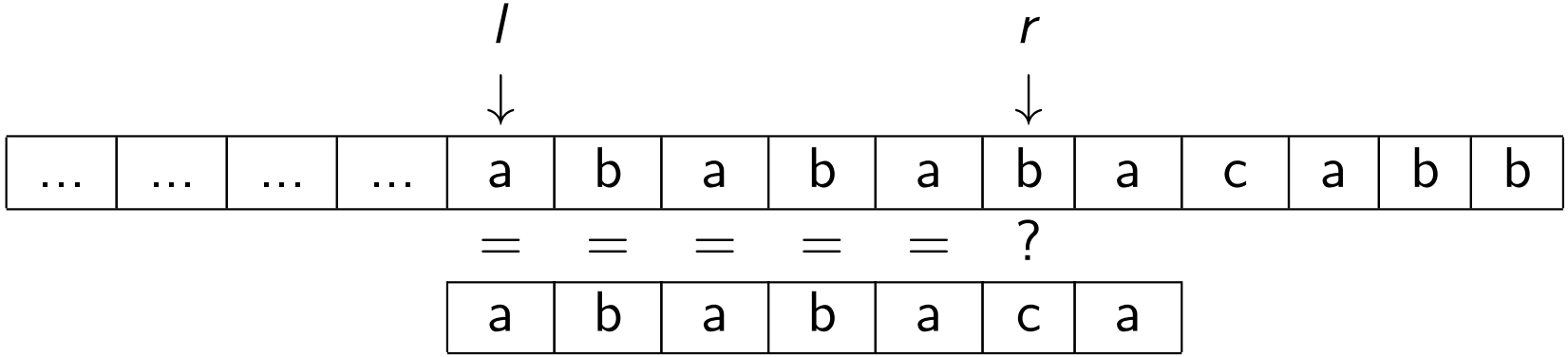
KMP: Función π

- **Definición:** Sea $\pi(i)$ la longitud del máximo bifijo de $subseq(p, 0, i)$
- Otro ejemplo, sea p=ababaca:

i	$subseq(p, 0, i)$	Máx. bifijo	$\pi(i)$
1	a	$\langle\rangle$	0
2	ab	$\langle\rangle$	0
3	aba	a	1
4	abab	ab	2
5	ababa	aba	3
6	ababac	$\langle\rangle$	0
7	ababaca	a	1

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

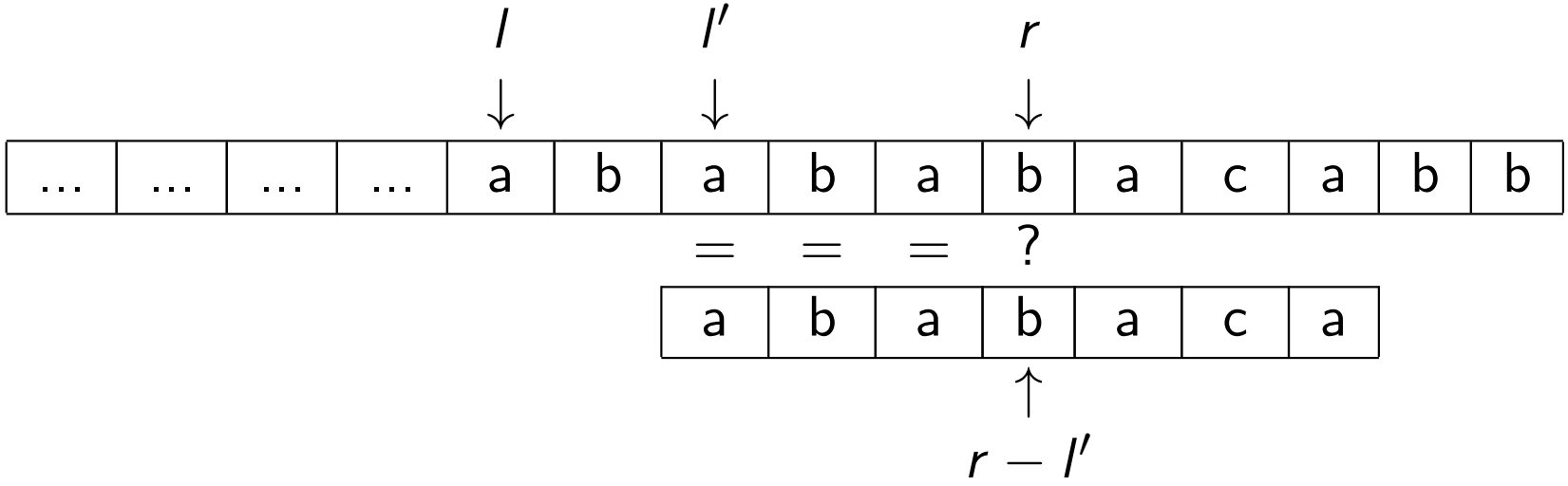
- **Ejemplo:** Supongamos que ...



- En este caso, podemos avanzar l hasta la posición *ababa* ($\pi(r - l) = \pi(5) = 3$), dado que no tendremos coincidencias en las posiciones anteriores.
- Por lo tanto, en este caso fijamos $l' = r - \pi(r - l)$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- **Ejemplo:** Supongamos que ...



- En este caso, podemos avanzar l hasta la posición *ababa* ($\pi(r-l) = \pi(5) = 3$), dado que no tendremos coincidencias en las posiciones anteriores.
- Por lo tanto, en este caso fijamos $l' = r - \pi(r-l)$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Podemos calcular $\pi(i)$ usando una función auxiliar.
- Supongamos que ya tenemos una función auxiliar `calcular_pi(p)` que retorna una secuencia de enteros con los valores de π,
- Asumamos que su tiempo de ejecución de peor caso $\in O(|p|)$
- Implementemos ahora `contieneKMP`

Algoritmo (parcial) de Knuth, Morris y Pratt

```
bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
  int l = 0, r = 0;
  while( r < t.size() && r-l < p.size()) {
    if( t[r] == p[r-l] ){
      r++;
    } else if( l == r ) {
      r++;
      l++;
    } else {
      vector<int> pi = calcular_pi(p);
      l = r - pi[r-l];
    }
  }
  return r-l == p.size();
}
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

Recordemos el invariante para el algoritmo KMP:

1. $0 \leq l \leq r \leq |t|$
2. $subseq(t, l, r) = subseq(p, 0, r - l)$
3. No hay apariciones de p en $subseq(t, 0, r)$.

- ¿Se cumplen los tres puntos del teorema del invariante?
  1. El invariante vale con $l = r = 0$.
  2. Cada caso del `if...` preserva el invariante.
  3. Al finalizar el ciclo, el invariante permite retornar el valor correcto.
- ¿Cómo es una función variante para este ciclo?
  - Notar que en cada iteración se aumenta l o r (o ambas) en al menos una unidad.
  - Entonces, una función variante puede ser:

$$fv = (|t| - l) + (|t| - r) = 2 * |t| - l - r$$

  - Es fácil ver que se cumplen los dos puntos del teorema de terminación del ciclo, y por lo tanto el ciclo termina.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Para completar el algoritmo debemos calcular $\pi(i)$.
- Para este cálculo, recorremos p con dos índices i y j, con el siguiente invariante:
  1. $0 \leq i < j \leq |p|$
  2. $pi[k] = \pi(k+1)$ para $k = 0, \ldots, j-1$ (vector empieza en 0)
  3. i es la longitud del máximo bifijo para $subseq(p, 0, j)$.
  4. $0 \leq \pi(j) \leq i+1$

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

```
vector<int> calcular_pi(string &p) {
  vector<int> pi(p.size(),0); // inicializado en 0
  int i = 0;
  for(int j=1; j < p.size();j++) {
    // Si no coincide busco bifijo mas chico
    while(i>0 && p[i] != p[j])
      i = pi[i-1];

    // Si coincide, aumento tama~no bifijo
    if( p[i] == p[j] )
      i++;

    pi[j] = i;
  }
  return pi;
}
```

Veamos como funciona `calcular_pi()` con el patrón $\langle a, b, a, b, a, c, a \rangle$

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¡Es importante observar que sin el invariante, es muy difícil entender este algoritmo!
- ¿Cómo es una función variante adecuada para el ciclo?
  1. ¿Para el loop interno? $fv = i$
  2. ¿y para el externo? $fv = |p| - j$.
- ¿Y el tiempo de ejecución de peor caso?
  1. siempre se incrementa j
  2. i disminuye a lo sumo $|p|$-veces sumando todas las j iteraciones!
- Entonces, el tiempo de ejecución de peor caso de `calcular_pi` $\in O(|p| + |p|) = O(|p|)$

Algoritmo (completo) de Knuth, Morris y Pratt

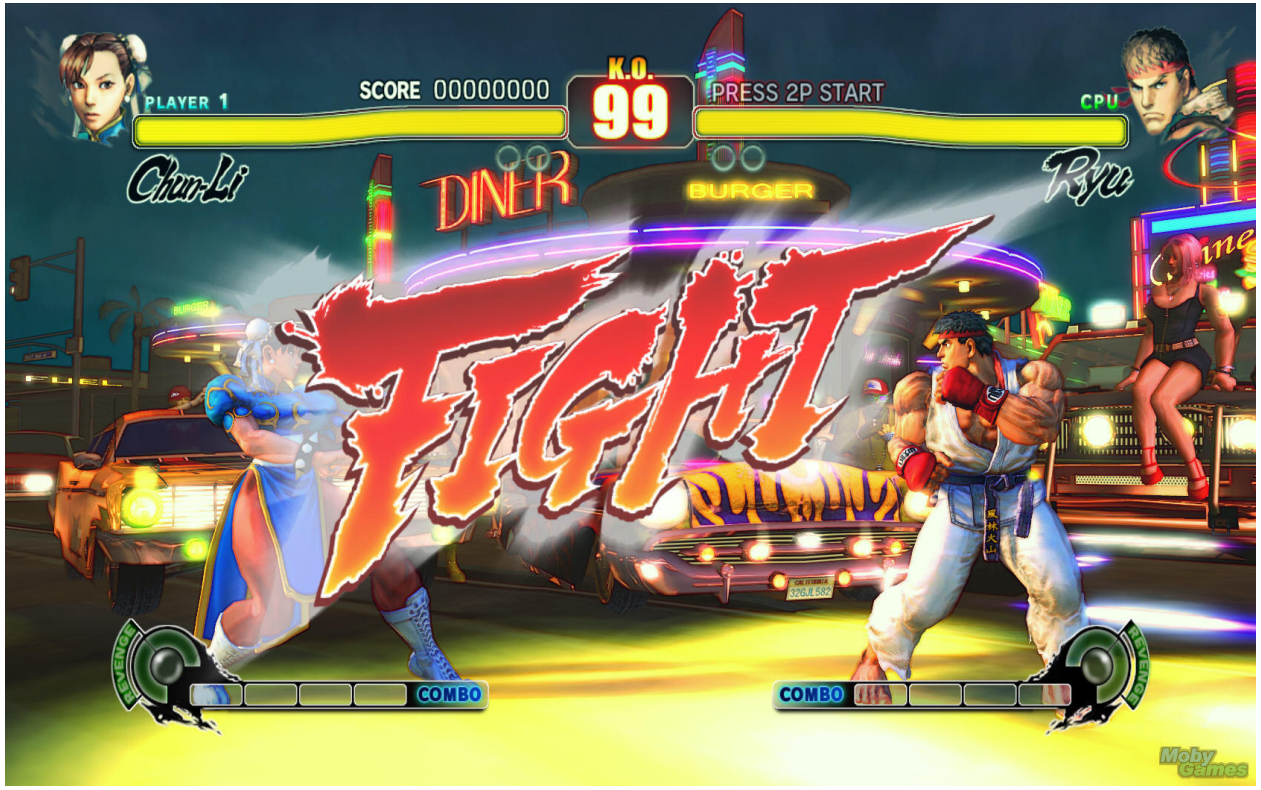
```
bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
  int l = 0, r = 0;
  vector<int> pi = calcular_pi(p);
  while( r < t.size() && r-l < p.size()) {
    if( t[r] == p[r-l] ){
      r++;
    } else if( l == r ) {
      r++;
      l++;
    } else {

      l = r - pi[r-l];
    }
  }
  return r-l == p.size();
}
```

Tiene tiempo de ejecución de peor caso $\in O(|t| + |p|)$

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

¿Es realmente mejor la eficiencia de KMP en comparación con la solución trivial?



Veamos como funciona cada algoritmo en la computadora

`http://whocouldthat.be/visualizing-string-matching/`

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¿Es realmente mejor la eficiencia de KMP en comparación con la solución trivial?
  - El algoritmo naïve tiene tiempo de ejecución de peor caso $\in O(|t| * |p|)$
  - El algoritmo KMP tiene tiempo de ejecución de peor caso $\in O(|t| + |p|)$
- Por lo tanto, el tiempo de ejecución de peor caso del algoritmo KMP crece asintóticamente mas despacio que el tiempo de ejecución de peor caso del algoritmo naïve.
- Existen más algoritmos de búsqueda de strings (o string matching):
  - Rabin-Karp (1987)
  - Boyer-Moore (1977)
  - Aho-Corasick (1975)

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Linear Search, Binary Search)
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein- Introduction to Algorithms, 3rd edition
  - Chapter 32.1 The naive string-matching algorithm
  - Chapter 32.4 The Knuth-Morris-Pratt algorithm