Taller de Metodologías

Simulación y Aplicaciones en Optimización

Matías De Geyter Messina

Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas (DIIS)

Pontificia Universidad Católica de Chile

mdegeyter@uc.cl

ICS2122 - Taller de Investigación Operativa

Contenidos

Definición

Un modelo de simulación es una representación computacional de la evolución en el tiempo de un cierto sistema. El estado del sistema en cada instante quedará representado por un conjunto de variables de estado.

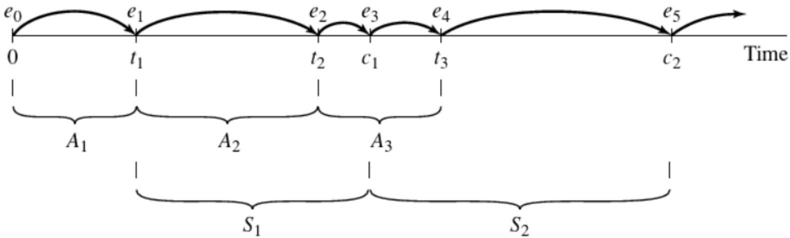

Figure: Ejemplo de un Proceso de Simulación (Law, 2014)

- Es decir, Simulación implica crear un modelo que aproxima ciertos aspectos de un sistema real y que puede ser usado para generar historias artificiales del sistema.
- Así, se puede predecir el comportamiento del sistema real.

Simulación III

Razones para usar Simulación

- Experimentar con el sistema real puede ser costoso, peligroso o provocar desequilibrios significativos. Por ejemplo: un sistema de transporte.
- El sistema real aún no existe, y la construcción de prototipos resulta extremadamente costosa. Por ejemplo: un reactor nuclear.
- Es necesario estudiar el comportamiento pasado, presente o futuro del sistema en tiempo real. Por ejemplo: la operación de un puerto durante un periodo de 10 años.
- El sistema es tan complejo que su análisis analítico es impracticable. Por ejemplo: colas en redes de espera.

Simulación IV

Ventajas

- Permite manejar modelos con un nivel arbitrario de complejidad.
- Facilita el estudio de modelos que no pueden ser abordados analíticamente.
- Un modelo bien diseñado permite predecir con precisión el comportamiento de un sistema.

Desventajas

- La validación de los modelos puede resultar complicada.
- En ocasiones, un proyecto de simulación requiere mucho tiempo y recursos computacionales significativos.
- No siempre es rentable desarrollar un modelo de simulación.

Problema de Motivación: Inventario Estocástico I

Consideremos el siguiente problema:

- Tenemos una bodega de capacidad Q.
- Al inicio de cada periodo t tenemos un estado del inventario y_t.
- A partir de y_t, debemos decidir cuántas unidades de inventario reponer x_t, con *lead time* despreciable.
- Al final del periodo t, una volumen de demanda estocástico $D_t \sim F$ consume las unidades de la bodega.
- Se pueden producir quiebres de stock.

Problema de Motivación: Inventario Estocástico II

Si diagramamos el proceso a simular, tenemos la siguiente figura:

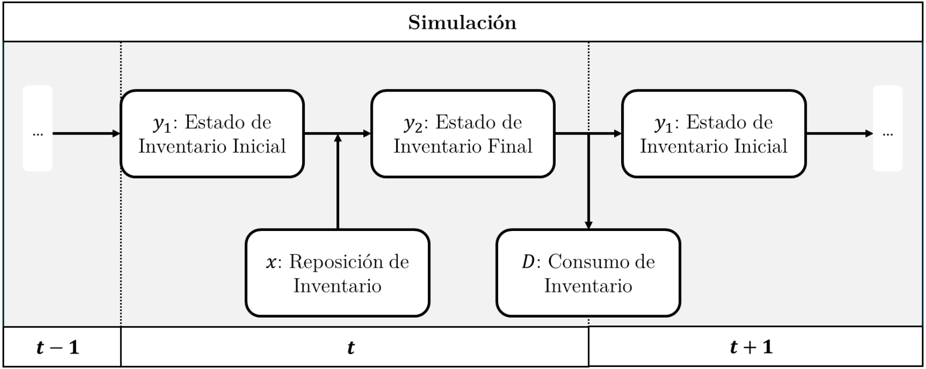

Figure: Diagrama Básico de Simulación

Problema de Motivación: Inventario Estocástico III

En términos de costos debemos considerar:

1. Costo de Inventario:
$$q \cdot \frac{\max\{0,\ y_1\} + y_2}{2}$$
2. Costo de Quiebre de Stock:
$$w \max \cdot \{0,\ -y_1\}$$
3. Costo de Compra:
$$K \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}} + k \cdot x$$

Donde $y_2 = \max\{0,\ y_1\} + x$

De esta manera, el costo por periodo se calcula como:

$$r(y_1, x) = q \cdot \frac{2 \cdot \max\{0,\ y_1\} + x}{2} + w \max \cdot \{0,\ -y_1\} + K \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}} + k \cdot x$$

Por otro lado, la transición estocástica por periodo se define como:

$$y_2 - D \longrightarrow y_1$$

Problema de Motivación: Inventario Estocástico V

Inicialmente, en cada periodo t simulado, el tomador de decisiones busca minimizar el siguiente problema de optimización:

$$\min_{x \in [0,\ Q - \max(0,\ y_1)]} \left\{ q \cdot \frac{2 \cdot \max\{0,\ y_1\} + x}{2} + w \max \cdot \{0,\ -y_1\} + K \cdot \mathbb{I}_{\{x>0\}} + k \cdot x \right\}$$

O, en un formato más amigable:

$$\min_{x \in [0,\ Q - \max(0,\ y_1)]} \{r(y_1, x)\}$$

Problema de Motivación: Inventario Estocástico VI

Problema

Los periodos son dependientes en el tiempo, es decir, mis decisiones hoy afectan el desempeño en el futuro.

Solución

Dado un factor de descuento $\lambda \in [0, 1)$ y un inventario inicial y_0, podemos optimizar la esperanza (dada la incertidumbre) del costo total descontando.

$$\lim_{T \to \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{T} \lambda^{t-1} \cdot r_t \left(y_1^t, x^t \right) \mid y_1^1 = y_0 \right]$$

Donde $\left(y_1^t, x^t\right)$ corresponde al estado inicial y la acción tomada en cada periodo t.

Problema de Motivación: Inventario Estocástico VII

¿Qué es una solución óptima ahora? ¿Es un vector de solución fijo? **NO**

Política

Una polítca π es una estrategia o regla que especifica la acción que un agente debe tomar en cada estado del sistema para maximizar su recompensa esperada a lo largo del tiempo. En otras palabras, una política define el comportamiento del agente en términos de qué acción debe tomar en cada situación posible.

Dentro del espacio de políticas Π, revisaremos aquellas que definen una Regla Markoviana Determinística y Estacionaria ($\Pi^S \subset \Pi$), es decir, aquellas que escogen una acción $x = d^\pi(y_1)$ de forma determinística en función del estado y_1, independiente de t.

Problema de Motivación: Inventario Estocástico VIII

De esta forma, nuestro problema de optimización considera encontrar la política óptima que minimice la esperanza del costo total descontando, es decir:

$$\min_{\pi \in \Pi^S} \left\{ \lim_{T \to \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^{T} \lambda^{t-1} \cdot r_t \left(y_1^t, d^\pi(y_1^t) \right) \mid y_1^1 = y_0 \right] \right\}$$

De esta forma, si unimos el enfoque de optimización con el de simulación, obtenemos lo siguiente:

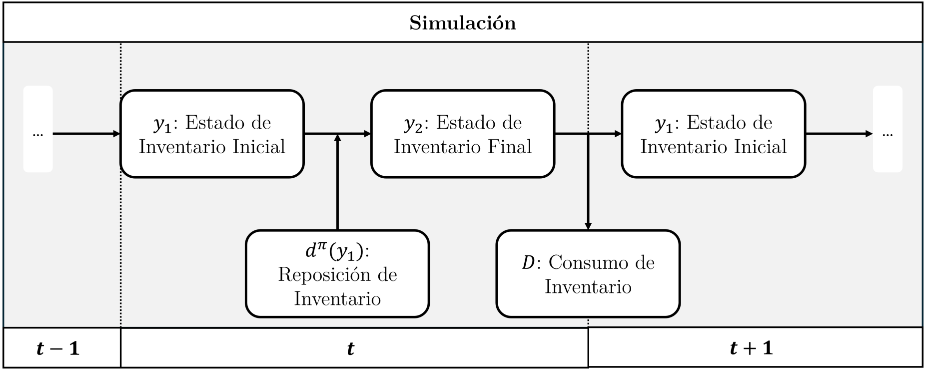

Figure: Diagrama Básico de Simulación, dada una política π

Contenidos

Réplica

Réplica

Se define a una réplica como la ejecución de una simulación (proceso estocástico).

Se define como $\vec{r}_j = \{r_j^1, r_j^2, \ldots, r_j^T\}$ el vector de costos por periodo de la réplica j con horizonte de simulación T

Estadígrafos I

Nos gustaría estudiar el valor de la variable aleatoria r^i. Dadas m réplicas, los estimadores muestrales de media y varianza para r^i son:

$$\mathbb{E}\left[r^i\right] \approx \bar{r}^i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_j^i$$

$$\mathbb{V}\left[r^i\right] \approx S^2\left(r^i\right) = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(r_j^i - \bar{r}^i\right)^2$$

Estadígrafos II

En el largo plazo, queremos conocer:

$$v = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E}\left[r^i\right]$$

Desafío

1. En la práctica, siempre tenemos índices de tiempo finitos.
2. Debemos determinar el valor k, tal que desde ese periodo las variables $r^k, r^{k+1}, \ldots$ se comporten similar.

Estadígrafos III

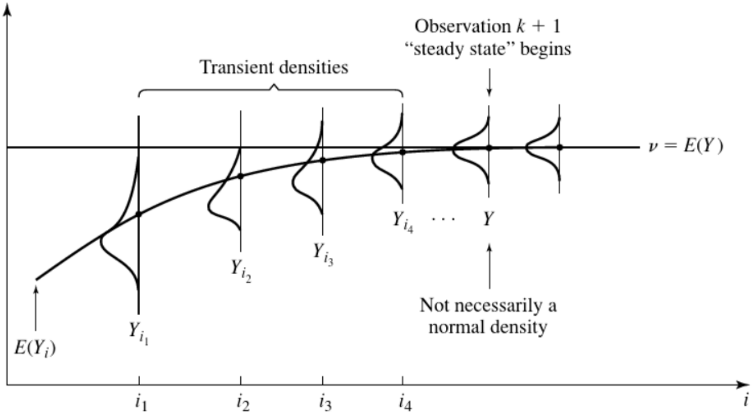

Figure: Diagrama de Estados Transiente y Estacionario (Law, 2014)

Determinar Estado Estacionario I

Supongamos que tenemos m réplicas de horizonte T cada una, donde r_j^i corresponde al costo de la réplica j en el periodo i. Definimos como $\bar{r}^i$:

$$\bar{r}^i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} r_j^i$$

Se puede determinar que:

$$\mathbb{E}\left[\bar{r}^i\right] = \mathbb{E}\left[r^i\right]$$

$$\mathbb{V}\left[\bar{r}^i\right] = \frac{1}{m}\cdot\mathbb{V}\left[r^i\right]$$

El proceso promediado tiene la misma curva media transiente que el proceso original, pero su gráfico sólo posee una fracción de la varianza.

Determinar Estado Estacionario II

Se define la media móvil de $\bar{r}^i$ como:

$$\bar{\bar{r}}^i(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2u+1} \cdot \displaystyle\sum_{k=-u}^{u} \bar{r}^{i+k} & u < i \leq T - u \\ \dfrac{1}{2i-1} \cdot \displaystyle\sum_{k=-(i-1)}^{i-1} \bar{r}^{i+k} & i \leq u \end{cases}$$

A partir del gráfico de $\bar{\bar{r}}^i(u)$ podemos determinar el periodo transiente de r^i. El valor de u se debe fijar de forma conservadora, donde $u \leq \lfloor T/4 \rfloor$.

Estimando v y su Intervalo de Confianza I

Queremos estimar el valor v, donde:

$$v = \lim_{i \to \infty} \mathbb{E}\left[r^i\right]$$

En la práctica, tenemos índices finitos de tiempo. Ahora bien, dado un periodo transiente hasta k, para cada réplica j de horizonte T definimos:

$$X_j = \frac{1}{T-k} \sum_{i=k+1}^{T} r_j^i$$

Se puede demostrar que $\mathbb{E}\left[X_j\right] \approx v$.

Estimando v y su Intervalo de Confianza II

A partir de lo anterior:

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} X_j$$

Es un estimador puntual aproximadamente insesgado para v. Además, la varianza de la muestra es:

$$S^2(X) = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \left(X_j - \bar{X}\right)^2$$

Estimando v y su Intervalo de Confianza III

A partir de los estimadores anteriores, un intervalo aproximado al $100(1-\alpha)\%$ de confianza es igual a:

$$\bar{X} \pm t_{m-1,\, 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2(X)}{m}}$$

Estimando el Número de Réplicas I

Supongamos que queremos que, con una confianza al $100(1-\alpha)\%$, se cumpla que:

$$\frac{|\bar{X}-\mu|}{|\mu|} \leq \gamma$$

Esto se conoce como el error relativo de $\bar{X}$. Lamentablemente, no conocemos μ. Ahora bien, se puede demostrar que, el cumplimento de la siguiente expresión garantiza también lo anterior:

$$\frac{t_{m-1,\,1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2(X)}{m}}}{|\bar{X}|} \leq \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

Esto se conoce como el error relativo ajustado.

Estimando el Número de Réplicas II

Por lo tanto, para determinar el número mínimo de réplicas para asegurar un error relativo de $\bar{X}$ menor a *gamma* al $100(1-\alpha)\%$ debemos:

1. Hacer m_0 réplicas de la simulación. Se recomienda empezar con $m_0 = 2$.
2. Calcular $\bar{X}$ y el ancho del intervalo de confianza.
3. Si se cumple que el error relativo ajustado es menor a $\frac{\gamma}{1+\gamma}$, se ha alcanzo el número mínimo de réplicas necesarias para el error relativo de γ. En caso contrario, simular una réplica adicional y volver al paso 2.

Contenidos

Comparación de Políticas I

Cuando tenemos dos políticas π_1 y π_2, ¿Cómo determinar cuál es mejor? (basados en la función objetivo).

En teoría, se prefiere π_1 sobre π_2 si $\mu^{\pi_1} - \mu^{\pi_2} < 0$.

Problema

¿Es lo mismo que decir $\bar{X}^{\pi_1} - \bar{X}^{\pi_2} < 0$?

Se debe estudiar el intervalo de confianza de la variable aleatoria de la diferencia sincronizada.

Comparación de Políticas II

Esto implica estudiar la variable definida por:

$$Z_j = \bar{X}_j^{\pi_1} - \bar{X}_j^{\pi_2}$$

$$\bar{Z} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Z_j$$

$$S^2(Z) = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} \left(Z_j - \bar{Z}\right)^2$$

$$\left[\bar{Z} - t_{m-1,\ 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2(Z)}{m}},\ \bar{Z} + t_{m-1,\ 1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{S^2(Z)}{m}}\right]$$

Comparación de Políticas III

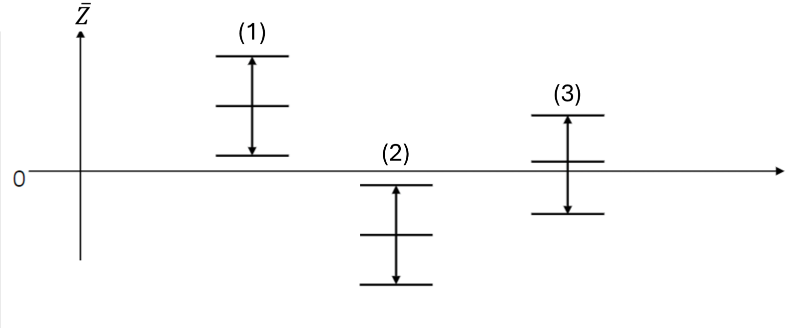

Figure: Diagrama de los Intervalos de Confianza para $\bar{Z}$

Comparación de Políticas IV

A partir de la figura anterior se pueden apreciar tres casos:

1. Si el intervalo de confianza contempla valores estrictamente mayores que 0, se asegura en probabilidad que la mejor política es π_2.
2. Si el intervalo de confianza contempla valores estrictamente menores que 0, se asegura en probabilidad que la mejor política es π_1.
3. Si el intervalo de confianza contempla al 0, no se puede asegurar qué política es mejor, por lo que se requiere seguir realizando nuevas réplicas.

Para mejorar el resultado de esta comparación, es necesario sincronizar los escenarios de simulación, con el fin de minimizar la varianza de la variable aleatoria que define la diferencia en valor entre las políticas, es decir $\mu^{\pi_1} - \mu^{\pi_2}$.

Contenidos

Relajación de Información Perfecta (PIR) I

Subestima el valor óptimo **relajando totalmente** el acceso a la información futura de las variables aleatorias.

Realiza acciones 100% adaptadas al valor de las variables aleatorias en las etapas futuras. Esto lo hace super-óptimo, pero infactible, puesto que no respeta las restricciones de no anticipatividad.

Supongamos que tenemos una política cualquiera $\pi \in \Pi^S$, la política óptima π^* y el PIR. Se cumple que:

$$\mu^{\pi} \geq \mu^{\pi^*} \geq \mu^{PIR}$$

Problema

En problemas de alta complejidad, es probable que no conozcamos μ^{π^*}

Relajación de Información Perfecta (PIR) II

Buscamos determinar el gap de optimalidad para una política π cualquiera:

$$\mu^{\pi} - \mu^{\pi^*}$$

Sabemos que:

$$\mu^{\pi} - \mu^{\pi^*} \geq \mu^{\pi} - \mu^{PIR}$$

Podemos estimar, como cota superior del gap de optimalidad:

$$\mu^{\pi} - \mu^{PIR}$$

Relajación de Información Perfecta (PIR) III

De esta forma:

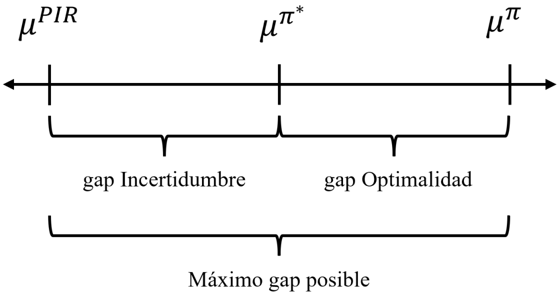

Figure: Diagrama de los gaps

Relajación Imperfecta de Información (IIR)

Se sobrestima el valor óptimo, relajando parte de la información. Algunos ejemplos:

1. Relajación Imperfecta de dos etapas: Respeta la filtración de información hasta $t = 1$, luego se revela todo el futuro en $t = 2$.
2. Relajación Imperfecta de tres etapas: Respeta la filtración de información hasta $t = 2$, luego se revela todo el futuro en $t = 3$.

Supongamos que tenemos una política cualquiera $\pi \in \Pi^S$, la política óptima π^* y el PIR. Se cumple que:

$$\mu^{\pi} \geq \mu^{\pi^*} \geq \mu^{IIR} \geq \mu^{PIR}$$

Contenidos

Referencias

Law, Averill (2014). *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw-Hill Higher Education.

Taller de Metodologías

Simulación y Aplicaciones en Optimización

Matías De Geyter Messina

Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas (DIIS)

Pontificia Universidad Católica de Chile

mdegeyter@uc.cl

ICS2122 - Taller de Investigación Operativa