

UNIVERSIDAD DE CÁDIZ

FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

El Movimiento Browniano: Aplicaciones en Finanzas

Realizado por
Francisco José Galán Ranea

**Para la obtención del título de
Grado en Matemáticas**

Dirigido por
Dr. Miguel Ángel Sordo Díaz
Patricia Ortega Jimenez

Fecha

Agradecimientos

Quiero agradecer a X por...

También quiero agradecer a Y por...

Resumen

Incluya aquí un resumen de los aspectos generales de su trabajo, en español.

Palabras clave: Palabra clave 1, palabra clave 2, ..., palabra clave N

Abstract

This section should contain an English version of the Spanish abstract.

Keywords: Keyword 1, keyword 2, ..., keyword N

Contents

1	Introducción	1
2	Conceptos previos	4
3	Movimiento Browniano	6
3.1	Paseo aleatorio	6
3.2	Definición y propiedades	7
3.3	Variantes del movimiento Browniano	10
3.3.1	El movimiento browniano con drift	10
3.3.2	El movimiento browniano geométrico	11
3.4	Trayectorias de un movimiento browniano	11
3.4.1	Variación no acotada del movimiento browniano	12
3.4.2	Variación cuadrática acotada de un movimiento browniano	15
4	Movimiento Browniano Geométrico	18
4.1	Propiedades	18
4.2	Aplicaciones	20
5	Introducción al Cálculo Estocástico	23
5.1	Contexto	23
5.2	Integral de Itô	25
5.3	Ecuaciones diferenciales estocásticas y Lema de Itô	28
5.3.1	Algunos ejemplos	30
5.3.2	Movimiento Browniano Geométrico	31
6	Aplicaciones en Finanzas	33
6.1	Conceptos previos	33
6.2	El Modelo de Black-Scholes	36
6.3	Teoría de martingalas	37
6.3.1	Cambio de medida. El Teorema de Cameron-Martin-Girsanov.	39
6.4	Estrategias de replicación. Fórmula de Black-Scholes	42
6.4.1	Tasa de interés nula	42
6.4.2	Tasa de interés no nula	43
7	Conclusiones	47
A	Extractos de código	48
B	Bibliography	54

List of Figures

3.1	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	6
3.2	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	8
3.3	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	10
3.4	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	13
3.5	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	17
4.1	Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb	18
6.1	Payoff de una opción Call con Strike 15	34
6.2	Payoff de una opción Put con Strike 15	34

Índice de extractos de código

A.1	Clase Brownian()	48
A.2	Random Walk	51
A.3	Brownian Motion	52
A.4	Brownian Motion with drift	52
A.5	Geometric Brownian Motion	52
A.6	Payoff Call Europea	53
A.7	Payoff Call Europea	53

1. Introducción

Este trabajo tiene como finalidad presentar algunas aplicaciones del movimiento browniano en finanzas y una breve introducción al Cálculo Estocástico, una generalización de la teoría de integración de Riemann-Stieltjes que, a su vez, conecta el análisis matemático, la teoría de probabilidad y los procesos estocásticos. Esta nace con el objetivo de modelar aquellos procesos que no son deterministas, por ejemplo, los activos volátiles del mercado financiero.

La historia de la integración estocástica y la modelización de los precios de los activos de riesgo comienzan con el movimiento browniano, tema que trataremos en el Capítulo 3.

El movimiento browniano empezó a desarrollarse en 1827 de la mano de Robert Brown, en su trabajo [7]. Botánico de profesión, se encontraba investigando una suspensión de partículas microscópicas de polen en una solución acuosa cuando observó que tales partículas, en vez de permanecer estáticas, estaban permanentemente sometidas a un movimiento errático y zigzagueante.

El fenómeno fue investigado por el mismo Brown y diversos científicos a lo largo del siglo XIX. Las experiencias mostraron que un aumento de la temperatura de la solución hacía que el movimiento fuese más rápido. En cambio, el aumento de la viscosidad del fluido ralentizaba el movimiento y la trayectoria de las partículas se alejaban menos de su posición inicial en el mismo transcurso de tiempo.

Los primeros intentos de modelar matemáticamente el movimiento browniano se remontan a tres fuentes, cada una de las cuales no sabía nada de las otras:

- T. N. Thiele, de Copenhague, quien creó un modelo del movimiento browniano mientras estudiaba series temporales, en 1880. ([28])
- L. Bachelier, de París, quién creó un modelo del movimiento browniano en su intento de modelar el comportamiento dinámico de la bolsa de París, en 1900. ([4])
- A. Einstein, quién propuso un modelo del movimiento de pequeñas partículas suspendidas en una disolución líquida, en un intento de convencer a la comunidad científica de la naturaleza molecular de la materia, en 1905. ([8])

De estos tres modelos, los de Thiele y Bachelier tuvieron poca repercusión durante mucho tiempo, mientras que el de Einstein tuvo una influencia inmediata. Einstein asumió que el movimiento browniano era un proceso estocástico con trayectorias continuas, incrementos independientes e incrementos gaussianos estacionarios. Sin embargo, este no fue capaz de demostrar que el proceso que proponía existía realmente como objeto matemático, lo cual es comprensible, ya que se encontraba en 1905 y las ideas de Borel y Lebesgue sobre la teoría de la medida estaban aún siendo desarrolladas.

En 1913, apareció el enfoque de P. J. Daniell sobre la teoría de la medida (en la que las integrales se definen sin necesidad de desarrollar una teoría de la medida), siendo estas ideas, combinadas con las series de Fourier, las que N. Wiener utilizó en 1923 para construir el movimiento browniano, justificando a posteriori el enfoque de Einstein. En reconocimiento a su trabajo, al movimiento browniano se le denomina a menudo proceso de Wiener.

Los inicios de la teoría de la Integración Estocástica, desde la perspectiva no financiera, estuvieron motivados y entrelazados con la teoría de los procesos de Markov, en la que, por supuesto, Kolmogorov desempeñó un papel fundamental. Lo más significativo es que Kolmogorov demostró que los procesos de Markov continuos (proceso de difusión) dependen esencialmente de dos parámetros:

uno para la velocidad de la desviación y otro para el tamaño de la parte puramente aleatoria (el componente difusivo). Por ello, este será el principal concepto bajo el que empezaremos a introducir la teoría de Integración Estocástica en el Capítulo 5.

Pasamos ahora a mencionar el trabajo realizado por Kiyosi Itô, conocido como el padre de la Integración Estocástica. Es más, en muchas ocasiones, se refiere al Cálculo Estocástico como Cálculo de Itô. Sin duda, el intento de establecer una diferencial estocástica que se utilizara en el estudio de los procesos de Markov fue una de las principales motivaciones de Itô para estudiar las integrales estocásticas.

El primer trabajo de Itô sobre Integración Estocástica se publicó en 1944 ([12]). En sus esfuerzos por modelar los procesos de Markov, Itô construyó una ecuación diferencial estocástica de la forma:

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

donde W representa un proceso Wiener estándar.

Finalmente, su esfuerzo por conectar el trabajo de Kolmogorov sobre los procesos de Markov con su interpretación dio como resultado su trabajo [13] en 1951, donde enunció y demostró lo que ahora se conoce como el Lema (o Fórmula) de Itô:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)[dX_t]^2$$

Aquí, la función f se supone C^2 . Además, el Lema de Itô revela la principal diferencia entre el Cálculo de Itô y el cálculo clásico debido a la aparición de un segundo término en la diferencial de f . Esto se debe a las propiedades tan características que presentan las trayectorias del movimiento browniano de las cuales hablaremos al final del Capítulo 3.

Además, estas propiedades tan características imposibilitaban la integración de cualquier proceso estocástico, por lo que Itô tuvo que limitar el espacio de los integrandos a aquellos que fuesen "adaptados" a la información generada por el movimiento browniano. Concepto que trataremos al inicio del Capítulo 5.

Durante estas últimas décadas, la teoría de la integral estocástica se ha estado estudiando extensivamente, así como siendo aplicada a un amplio rango de campos científicos que involucran el estudio de comportamientos irregulares. Tal vez, la más notable aplicación es la Teoría de Black-Scholes en finanzas, objeto de nuestro estudio en el Capítulo 6. Por ello, cabe destacar qué fue lo que ocurrió con el trabajo realizado por Bachelier, ya que muchos lo consideran el fundador de las finanzas matemáticas modernas.

Bachelier intentó modelar el ruido del mercado de la bolsa de París. Exprimiendo las ideas del Teorema Central del Límite, y bajo la hipótesis de que el ruido del mercado no debería tener memoria, razonó que los incrementos de los precios de las acciones deberían ser independientes y estar normalmente distribuidos. De esta manera, combinó su razonamiento con la propiedad de Markov y los semigrupos, y conectó el movimiento browniano con la ecuación del calor, usando que el kernel Gaussiano es la solución fundamental de la ecuación del calor.

Su tesis fue apreciada por su mentor H. Poincaré, pero, debido al desinterés de este por estudiar los fenómenos económicos como aplicación de las matemáticas, no fue aceptado en la élite de París. Esto hizo que, en ese momento, su trabajo pasase totalmente desapercibido hasta que, por accidente, fue redescubierto en los años 50 por Jimmie Savage, un estadístico matemático de Chicago. Savage alertó al economista Paul Samuelson del trabajo de Bachelier que, después de una década de conferencias

por todo el país, publicó en 1965 dos documentos en los que expuso sus argumentos económicos para afirmar que los precios fluctúan aleatoriamente, 65 años después de que Bachelier lo asumiera.

En [25], Samuelson muestra que un buen modelo para los movimientos de los precios de las acciones es lo que hoy se conoce como movimiento browniano geométrico. Samuelson explica que el modelo de Bachelier no garantiza que los precios de las acciones sean siempre positivos, y que, por tanto, su modelo conduce a incoherencias con los principios económicos. En cambio, el movimiento browniano geométrico evita estos obstáculos. Por ello, en el Capítulo 4, aprovechando su conexión con el Capítulo 3, hablaremos de las propiedades de este proceso. Además, al igual que hizo Samuelson, motivaremos su uso para modelar el precio de los activos que fluctúan en el mercado financiero.

Este documento también derivó en fórmulas de valoración tanto para las opciones europeas como para las americanas. Estas eran prácticamente idénticas a la que se utilizó casi una década más tarde para obtener la fórmula de Black-Scholes, con la salvedad de que, en lugar de invocar un principio de no arbitraje para derivar la fórmula de valoración, basó su estudio en la condición de que los payoff descontados de las opciones siguieran una martingala (véase [25] p. 19).

De aquí, siguiendo un razonamiento similar y con el objetivo de ver una aplicación directa de la integración estocástica, acabaremos nuestro trabajo viendo una forma alternativa de como construir estrategias de replicación que nos permita dar precio a distintos instrumentos financieros derivados. Para ello, introduciremos primero los conceptos financieros, y algunos resultados asociados a la Teoría de Martingalas, necesarios para alcanzar nuestro objetivo.

2. Conceptos previos

En este capítulo expondremos algunos conceptos básicos que usaremos en nuestro desarrollo, la mayoría de ellos estudiados a lo largo del Grado en Matemáticas e impartidos en las asignaturas de Modelos del Análisis Multivariante, Procesos Estocásticos y Teoría de la Probabilidad.

Un concepto fundamental con el que trabajaremos será el Teorema Central del Límite:

Teorema 2.1 (Central del Límite de Lindeber-Lévy). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media $E[X_n] = \mu$ y con $0 < \text{Var}[X_n] = \sigma^2 < \infty$. Denotemos por $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Entonces,*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1).$$

Además, como veremos más adelante, en cada instante de tiempo t la variable aleatoria que define un movimiento browniano es idénticamente distribuida a una normal. Por ello, necesitaremos algunos conceptos relacionados con esta distribución:

Definición 2.1 (Distribución Normal Multivariante). *Se dice que un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) sigue una distribución normal multivariante o multinormal si toda combinación lineal del vector $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$ esta normalmente distribuida.*

Nota. Al igual que una distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ esta completamente determinada por su media μ y su varianza σ^2 , un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ que sigue una distribución normal multivariante esta completamente determinado por el vector de medias $\mathbf{m} := (\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})$ y la matriz de covarianza \mathbf{K} , donde

$$\mathbf{K} := \begin{bmatrix} \text{Var}[X_1] & \text{Cov}[X_1, X_2] & \dots & \text{Cov}[X_1, X_n] \\ \text{Cov}[X_2, X_1] & \text{Var}[X_2] & \dots & \text{Cov}[X_2, X_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}[X_n, X_1] & \text{Cov}[X_n, X_2] & \dots & \text{Var}[X_n] \end{bmatrix}.$$

Es más, se tiene que la función de densidad del vector \mathbf{X} es

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{K}|^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^\top \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right)$$

para $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.2 (Proceso Gaussiano). *Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ se conoce como proceso Gaussiano si el vector aleatorio (X_1, X_2, \dots, X_n) sigue una distribución normal multivariante para cualquier n y para todo $t_1, \dots, t_n \in T$.*

En la introducción de nuestro trabajo, hablamos de que la creación de la integración estocástica estuvo motivada en sus inicios por el estudio de los procesos markovianos o de Markov. Por ello, presentamos la siguiente definición:

Definición 2.3 (Proceso estocástico de Markov). *Un proceso estocástico $\{X(t); t \in T\}$ es de Markov si*

$$P[X(t_2) \leq x | X(t), t \leq t_1] = P[X(t_2) \leq x | X(t_1)]$$

para todo $t_1 < t_2$.

Dos propiedades claves en las que haremos hincapié son las siguientes: las trayectorias del movimiento browniano son, casi seguro, de variación no acotada mientras que su variación cuadrática es acotada y, además, coincide con la longitud del intervalo en la que se estudie. Por ello, es necesario que definamos los conceptos de variación y variación cuadrática de una función:

Definición 2.4 (Funciones de variación acotada). *Se dice que una función continua de variable real, f , definida sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es de variación acotada si su variación total*

$$V_{[a,b]}(f) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^{n_P} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de todas las particiones del intervalo considerado, es finita. Si además lo verifica para cada subintervalo de $[a, b]$ diremos que f es de variación acotada localmente.

Definición 2.5 (Funciones de variación cuadrática acotada). *Se dice que una función continua de variable real, f , definida sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es de variación cuadrática acotada si su variación cuadrática total,*

$$Q_{[a,b]}(f) = \lim_{\Delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n_P} |f(x_k) - f(x_{k-1})|^2,$$

es finita. Donde $P \in \mathcal{P}$, siendo \mathcal{P} es el conjunto de todas las particiones del intervalo considerado y, además,

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|.$$

Por último, con el objetivo de justificar la definición de integral estocástica necesitaremos conocer los siguiente conceptos asociados a la integral de Riemann-Stieltjes:

Definición 2.6 (Suma de Riemann-Stieltjes). *Sean f y α funciones definidas sobre un intervalo $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Denominamos suma de Riemann-Stieltjes, $S(P, f, \alpha)$, a una suma de la forma*

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})), \text{ con } x_{k-1} \leq t_k \leq x_k.$$

Definición 2.7 (Integral de Riemann-Stieltjes). *Sean f y α funciones de variable real definidas sobre un intervalo $[a, b]$ siendo α monótona o al menos función de variación acotada. Se dice que f es Riemann-Stieltjes integrable respecto a α en el intervalo $[a, b]$ si existe un número A tal que, para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P_ϵ que verifica que toda partición P más fina y para cualquier elección de los t_k , tenemos que $|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$. En tal caso, denotamos*

$$\int_a^b f d\alpha = A.$$

3. Movimiento Browniano

Como comentamos en la introducción, la integración estocástica comenzó con la definición del movimiento browniano, luego, este también será nuestro punto de partida.

Antes de dar una definición formal de este proceso estocástico, vamos a comenzar viendo una construcción del mismo mediante un paseo aleatorio. Esto nos ayudará a entender de una forma más intuitiva su comportamiento.

3.1. Paseo aleatorio

En primer lugar, consideramos un paseo aleatorio en el cual, en cada instante de tiempo, una partícula da un paso a la derecha o a la izquierda con la misma probabilidad. Formalmente, consideramos una cadena de Markov $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ cuyo espacio de estado es el conjunto de todos los enteros, \mathbb{Z} , y las probabilidades de transición son $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, i \in \mathbb{Z}$.

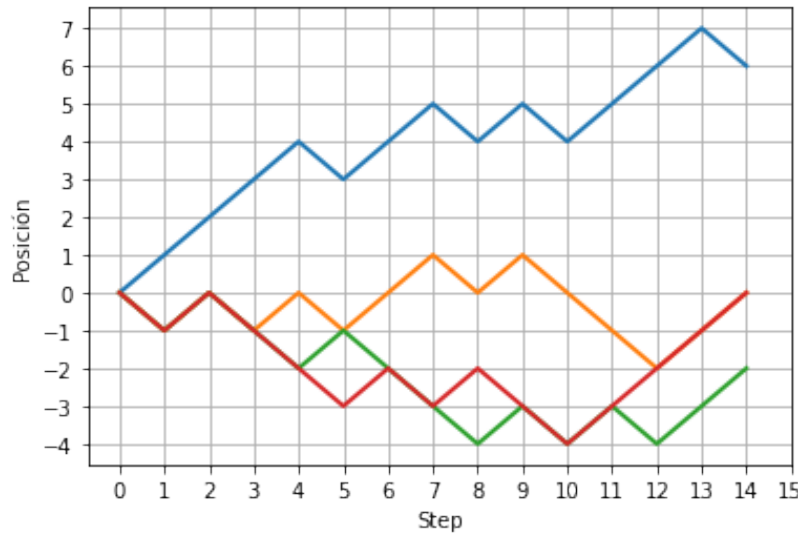


Figure 3.1: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

Ahora, la idea es tomar pasos e intervalos de tiempos cada vez más pequeños de modo que, llevando este proceso al límite de la manera correcta, obtengamos una definición del movimiento browniano.

Supongamos que en cada unidad de tiempo Δt la partícula da un paso de tamaño Δx bien a la izquierda, bien a la derecha con igual probabilidad. De esta manera, podemos determinar la posición de dicha partícula en cada instante t mediante la variable aleatoria

$$X(t) = \Delta x (X_1 + X_2 + \dots + X_{[t/\Delta t]}) \quad (3.1)$$

donde

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{si el } i\text{-ésimo paso es hacia la derecha} \\ -1, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (3.2)$$

siendo $[t/\Delta t]$ el mayor número entero menor o igual que $t/\Delta t$. Las variables aleatorias X_i son independientes e idénticamente distribuidas con

$$P[X_i = 1] = P[X_i = -1] = \frac{1}{2}$$

Ahora, puesto que $E[X_i] = 0$ y $Var[X_i] = E[X_i^2] = 1$, se tendrá que

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= 0 \\ Var[X(t)] &= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t} \right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como dijimos en un principio, nuestra idea es la de hacer tender Δx y Δt a 0. En un primer intento podríamos considerar $\Delta x = \Delta t$, de modo que, si $\Delta t \rightarrow 0$ entonces $E[X(t)] = Var[X(t)] = 0$. Esto implicaría que la variable aleatoria $X(t)$ tomaría el valor 0 con probabilidad 1, lo cual carece de interés.

Ahora bien, si tomamos $\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$ con $\sigma \in \mathbb{R}^+$ de (3.3) deducimos que

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E[X(t)] &= 0 \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} Var[X(t)] &= \sigma^2 t. \end{aligned}$$

De este modo, haciendo uso del Teorema Central del Límite (ver Teorema 2.1), podemos deducir las siguientes propiedades con respecto a la variable $X(t)$

- i. $X(t)$ es normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$. Esto se deduce de tomar para cada $t \geq 0$ la sucesión de variables aleatorias definidas en (3.1) y considerar

$$S_n(t) = X_n(t)/\Delta x_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_{[t/\Delta t_n]} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

siendo $\Delta t_n = \frac{t}{n}$ y $\Delta x_n = \sigma\sqrt{\Delta t_n}$. De aquí que

$$\frac{S_n(t) - nE[X_i]}{Var[X_i]\sqrt{n}} = \frac{X_n(t)/\Delta x_n}{\sqrt{n}} = \frac{X_n(t)}{\sigma\sqrt{t}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1)$$

- ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes. Esto es, para todo $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ se verifica que las variables aleatorias $X(t_i) - X(t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$ son independientes. Esto se debe a que en intervalos de tiempos disjuntos los cambios producidos en un paseo aleatorio son independientes.
- iii. $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios. Esto es, la distribución de la variable aleatoria $X(t+s) - X(t)$ no depende de t . Esto se debe a que los sucesivos cambios en el proceso son independientes e idénticamente distribuidos y en intervalos de misma longitud se producen el mismo número de cambios. Por tanto $X(t+s) - X(t)$ sigue la misma distribución que $X(s) - X(0)$.

3.2. Definición y propiedades

Una vez presentada la construcción del movimiento browniano como el límite de un paseo aleatorio, pasamos a introducir la definición formal de la siguiente forma:

Definición 3.1. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ se conoce como movimiento browniano si verifica las siguientes propiedades:

- i. $X(0) = 0$;
- ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios;
- iii. Para cada $t > 0$, $X(t)$ sigue una distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2 t$.

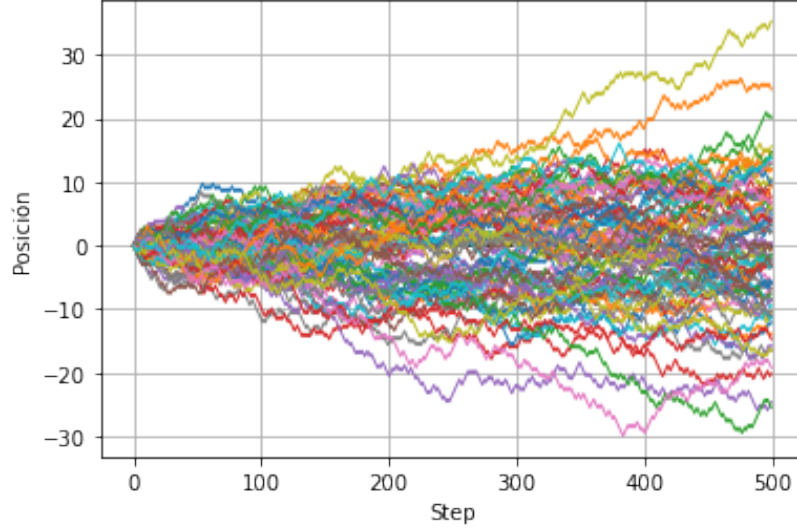


Figure 3.2: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

Nota. Cuando $\sigma = 1$, el proceso se conoce como *movimiento browniano estándar* o *proceso de Wiener* y lo denotaremos como $W(t)$. Todo movimiento browniano puede ser estandarizado considerando $W(t) = X(t)/\sigma$.

Nota. A lo largo de este trabajo iremos intercambiando las notaciones $\{X(t), t \geq 0\}$ y $\{X_t, t \geq 0\}$ cuando nos refiramos a un proceso estocástico. Este hecho tiene el único objetivo de generar una mejor legibilidad.

La interpretación del movimiento browniano como el límite de un paseo aleatorio sugiere que cada realización de $X(t)$ sea una función continua con respecto a t . De hecho, con probabilidad 1, esto es así. La demostración, que excede el alcance de este trabajo, puede encontrarse en el Corolario 3.2.3 de [14]. Debido a esto, en algunas referencias académicas podemos encontrar este hecho como una condición más a considerar en la definición anteriormente dada.

Veamos ahora algunas propiedades acerca de este proceso. Puesto que $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$ su función de densidad viene dada por

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ y $t > 0$.

Ahora, para obtener la función de densidad conjunta del vector aleatorio $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ siendo $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ observamos que el conjuntos de sucesos

$$\begin{aligned} X(t_1) &= x_1 \\ X(t_2) &= x_2 \\ &\dots \\ X(t_n) &= x_n \end{aligned}$$

es equivalente a considerar el conjunto de sucesos

$$\begin{aligned} X(t_1) &= x_1 \\ X(t_2) - X(t_1) &= x_2 - x_1 \\ &\dots \\ X(t_n) - X(t_{n-1}) &= x_n - x_{n-1}, \end{aligned}$$

y, puesto que el proceso tiene incrementos independientes, $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ serán independientes y, además, las variables $X(t_k) - X(t_{k-1})$ seguirán una distribución normal con media 0 y varianza $\sigma^2(t_k - t_{k-1})$. Por ello, la función de densidad conjunta vendrá dada por

$$\begin{aligned} f_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1} + \cdots + \frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}\right]\right\}}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}[t_1(t_2-t_1) \cdots (t_n-t_{n-1})]^{1/2}} \end{aligned}$$

donde $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, coincidiendo con la función de densidad de una distribución normal multivariante. Por tanto, se tendrá que $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano (ver Definición 2.2).

Ahora, debido a que el movimiento browniano es un proceso Gaussiano, este queda definido por su media y su función autocovarianza. Con el objetivo de dar una definición alternativa, estudiemos la función autocovarianza de este proceso:

$$\begin{aligned} C_X(t, t+s) &= \text{Cov}[X(t), X(t+s)] \\ &= \text{Cov}[X(t), X(t) + X(t+s) - X(t)] \\ &\stackrel{\text{cov. bilinear}}{=} \text{Cov}[X(t), X(t)] + \text{Cov}[X(t), X(t+s) - X(t)] \\ &\stackrel{\text{incr. ind.}}{=} \text{Cov}[X(t), X(t)] = V[X(t)] = \sigma^2 t \end{aligned}$$

para todo $s, t \geq 0$. Es decir,

$$C_X(s, t) = \sigma^2 \min\{s, t\} \quad \text{para todo } s, t \geq 0.$$

De este modo, podemos redefinir el proceso como sigue:

Definición 3.2. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ se conoce como movimiento browniano si verifica las siguientes propiedades:

- i. $X(0) = 0$;
- ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso Gaussiano;
- iii. $E[X(t)] = 0$;
- iv. $C_X(s, t) = \text{Cov}[X(s), X(t)] = \sigma^2 \min\{s, t\}$, $\forall s, t \geq 0$, donde $\sigma > 0$ es una constante.

El motivo de esta definición no es más que simplificar la identificación de un proceso estocástico como un movimiento browniano. Esto se debe a que las cuatro propiedades presentadas en esta última definición son más fáciles de probar que las propiedades relacionadas con los incrementos estacionarios e independientes de un proceso estocástico.

Por último, se tiene que es posible obtener una expresión explícita para la función de densidad de $X(s)$ condicionada a $X(t) = B$ cuando $s < t$. Esta es:

$$f_{s|t}(x|B) = \frac{f_s(x) f_{t-s}(B-x)}{f_t(B)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s(t-s)/t}} \exp\left\{-\frac{(x - Bs/t)^2}{2\sigma^2 s(t-s)/t}\right\}$$

observando que

$$X(s)|X(t) = B \sim N\left(\frac{Bs}{t}, \sigma^2 \frac{s}{t(t-s)}\right).$$

3.3. Variantes del movimiento Browniano

Con propiedades similares al movimiento browniano encontramos varios procesos estocásticos cuyas aplicaciones son de gran utilidad. De entre ellos, destacamos los siguientes:

3.3.1 El movimiento browniano con drift

Definición 3.3. Un proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es conocido como movimiento browniano con coeficiente drift μ (desviación) y varianza σ^2 si verifica:

- i. $X(0) = 0$;
- ii. $\{X(t), t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes;
- iii. $X(t)$ sigue una distribución normal con media μt y varianza $\sigma^2 t$.

Nota. Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener, podemos definir el proceso anterior como

$$X(t) = \sigma W(t) + \mu t.$$

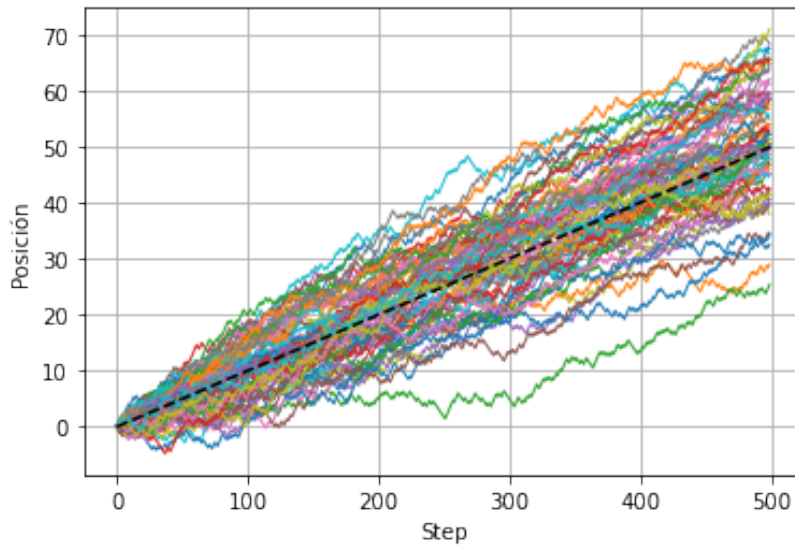


Figure 3.3: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

Al igual que hicimos con el movimiento browniano, podemos calcular la función autocovarianza de este proceso. Para ello, primeros notemos que

$$\begin{aligned} E[X(t+s)X(t)] &= E[\{X(t+s) - X(t) + X(t)\}X(t)] \\ &\stackrel{\text{incr. ind.}}{=} E[X(t+s) - X(t)]E[X(t)] + E[X^2(t)] \\ &\stackrel{\text{incr. est.}}{=} E[X(s)]E[X(t)] + E[X^2(t)] \\ &= (\mu s)(\mu t) + (\sigma^2 t + \mu^2 t^2). \end{aligned}$$

Haciendo uso de ello, se tiene que

$$\begin{aligned} C_X(t+s, t) &= \text{Cov}[X(t+s), X(t)] \\ &= E[X(t+s)X(t)] - E[X(t+s)]E[X(t)] \\ &= \mu^2 st + \sigma^2 t + \mu^2 t^2 - \mu(t+s)\mu t = \sigma^2 t \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned}$$

Nota. Observamos que la función autocovarianza es igual a la del movimiento browniano. Esto implica que podemos definir este proceso imitando la Definición 3.2 pero reemplazando la condición (iii) por la condición $E[X(t)] = \mu t$.

También es interesante estudiar la distribución que sigue la variable aleatoria $X(t) + X(t+s)$, ya que obtendremos un resultado importante en secciones posteriores. En particular, se tiene que

$$X(t) + X(t+s) = 2X(t) + [X(t+s) - X(t)] = Y + Z$$

donde $Y = 2X(t) \sim N(2\mu t, 4\sigma^2 t)$ y $Z = X(t+s) - X(t) \sim N(\mu s, \sigma^2 s)$ son independientes al ser $\{X(t), t \geq 0\}$ un proceso con incrementos independientes. Por tanto, por la reproductividad de la normal será

$$X(t+s) + X(t) \sim N(\mu(2t+s), \sigma^2(4t+s)). \quad (3.4)$$

Un importante resultado es que, al igual que hicimos con la versión más simple del movimiento browniano, puede comprobarse que la distribución que sigue $X(s)$ conocido $X(t) = B$ cuando $s < t$ no depende del valor del parámetro μ ([23], Teorema 3.2.1).

La incorporación del coeficiente de drift a este proceso estocástico también da lugar a otra conocida variación del movimiento browniano y con aplicaciones aún más interesante: el *movimiento browniano geométrico*.

3.3.2 El movimiento browniano geométrico

Definición 3.4. Sea $\{X(t), t \geq 0\}$ un movimiento browniano con coeficiente drift μ y varianza (o coeficiente de difusión) σ^2 . Un proceso estocástico $\{Y(t), t \geq 0\}$ es conocido como *movimiento browniano geométrico* si esta definido como

$$Y(t) = e^{X(t)}.$$

En el siguiente capítulo desarrollaremos este importante proceso estocástico e investigaremos acerca de sus múltiples aplicaciones, destacando la aplicación en el estudio de ciertos instrumentos financieros que introduciremos más adelante.

3.4. Trayectorias de un movimiento browniano

En esta sección, vamos a repasar algunas de las principales características de las trayectorias de un movimiento browniano. De aquí en adelante, modificaremos ligeramente la notación al objeto de adaptarla a la notación habitualmente empleada en la literatura del cálculo estocástico. Vamos a considerar W_t un proceso de Wiener, o movimiento browniano estándar, siendo las siguientes propiedades fácilmente generalizables para el resto de casos.

Las demostraciones de aquellos resultados dados sin demostración pueden consultarse en [11]. En nuestro trabajo nos centraremos en darles una interpretación a estos resultados, así como centrarnos en aquellas demostraciones cuya implicación sea directa en próximos capítulos.

Proposición 3.1. *Dado W_t un proceso de Wiener, se verifica*

$$\mathbb{P}(\limsup_{t \rightarrow \infty} W_t = \infty) = \mathbb{P}(\liminf_{t \rightarrow \infty} W_t = -\infty) = 1$$

Es decir, cuando $t \rightarrow \infty$ podemos asegurar que las trayectorias de un movimiento browniano alcanzarán cualquier valor de \mathbb{R} . Además, puesto que toma valores tanto positivos como negativos tendrá que volver al cero en algún instante. De aquí, debido a la propiedad de incrementos independientes, si una trayectoria alcanza un valor volverá a alcanzarlo con probabilidad 1.

Proposición 3.2. *Para cada $\epsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}(\max_{t \leq \epsilon} W_t > 0) = 1$$

$$\mathbb{P}(\max_{t \leq \epsilon} W_t < 0) = 1$$

Esto, sumado a la propiedad de incrementos independientes de un movimiento browniano, implica que cualquier trayectoria tiene una infinidad de ceros. Además:

Proposición 3.3. *Con probabilidad 1, el conjunto*

$$S_0(\omega) = \{t \geq 0 \mid W_t(\omega) = 0\}$$

es un conjunto cerrado, no acotado, de longitud cero y sin puntos aislados. En consecuencia, es un conjunto no numerable.

Otra propiedad importante es que es posible relacionar el comportamiento a gran escala del movimiento browniano con su comportamiento local en los alrededores del origen de tiempos:

Proposición 3.4. *El proceso $tW_{1/t}$ es un movimiento browniano.*

Esto nos permite interpretar que, con probabilidad 1, las trayectorias de un movimiento browniano tienen un carácter fractal.

A continuación, entraremos más en detalle en algunas propiedades de las trayectorias de un movimiento browniano, ya que serán de gran importancia en próximos capítulos.

3.4.1 Variación no acotada del movimiento browniano

Como comentamos con anterioridad, cada observación asociada al proceso W_t es continua, sin embargo, puede demostrarse que estas trayectorias no son diferenciables en casi ningún punto. Veamos que esto es así:

Teorema 3.1. *El movimiento browniano no es diferenciable en casi ningún punto con probabilidad 1. En concreto,*

$$\mathbb{P}\left(\forall t \geq 0 : \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{W(t+h) - W(t)}{h} \right| = \infty\right) = 1.$$

Demostración. Para probarlo vamos a ver que, en efecto, el suceso comprendido por todas las posibles observaciones de un movimiento browniano que son diferenciables en algún punto tiene probabilidad 0. Para ello, dados $T, M > 0$ definimos el siguiente conjunto

$$A(M, T) = \{\omega \in C[0, +\infty) : \exists t \in (0, T) \text{ tal que } \limsup_{h \rightarrow 0} \left| \frac{W(t) - W(t+h)}{h} \right| \leq M\}$$

de modo que, si $\mathbb{P}(A(M, T)) = 0$ el resultado habrá quedado probado. De la definición de $A(M, T)$ podemos deducir que si $\omega \in A(M, T)$ entonces existe algún $t \in [0, T]$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|W(s) - W(t)| \leq M|s - t| \leq 2M|s - t|$$

para todo $s \in (t - \frac{2}{n}, t + \frac{2}{n})$. Por tanto, si definimos

$$A_n = \{\omega \in C[0, +\infty) : \exists t \in (0, T) \text{ y } \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que} \\ |W(s) - W(t)| \leq 2M|s - t| \text{ para todo } s \in (t - \frac{2}{n}, t + \frac{2}{n})\}$$

se tendrá que

$$A_n \subset A_{n+1} \quad \text{y} \quad A(M, T) \subset \bigcup_n A_n. \quad (3.5)$$

Dado $0 \leq k \leq Tn$, definimos

$$Y_k = \max \left\{ \left| W\left(\frac{k+2}{n}\right) - W\left(\frac{k+1}{n}\right) \right|, \left| W\left(\frac{k+1}{n}\right) - W\left(\frac{k}{n}\right) \right|, \left| W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right) \right| \right\}. \quad (3.6)$$

Ahora, dado $\omega \in A_n$, tomamos $k = \max\{j : \frac{j}{n} \leq t\}$ y observamos que $\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}, \frac{k+2}{n} \in (t - \frac{2}{n}, t + \frac{2}{n})$:

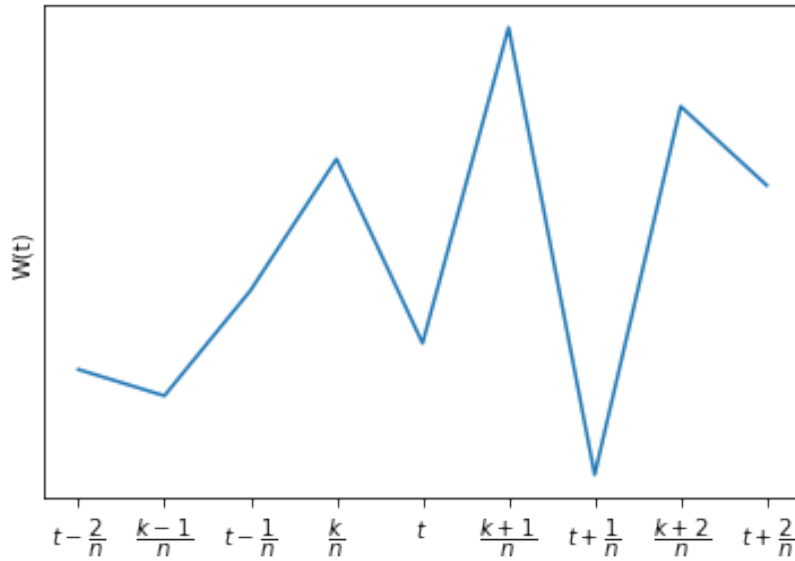


Figure 3.4: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

Por tanto, de la definición de A_n se deduce que

$$\begin{aligned}
|W(\frac{k+2}{n}) - W(\frac{k+1}{n})| &\leq |W(\frac{k+2}{n}) - W(t)| + |W(t) - W(\frac{k+1}{n})| \\
&\leq 2M\frac{2}{n} + 2M\frac{1}{n} \\
&\leq \frac{6M}{n}; \\
|W(\frac{k+1}{n}) - W(\frac{k}{n})| &\leq |W(\frac{k+1}{n}) - W(t)| + |W(t) - W(\frac{k}{n})| \\
&\leq 2M\frac{1}{n} + 2M\frac{1}{n} \\
&\leq \frac{4M}{n}; \\
|W(\frac{k}{n}) - W(\frac{k-1}{n})| &\leq |W(\frac{k}{n}) - W(t)| + |W(t) - W(\frac{k-1}{n})| \\
&\leq 2M\frac{1}{n} + 2M\frac{2}{n} \\
&\leq \frac{6M}{n},
\end{aligned}$$

de modo que, $Y_k \leq \frac{6M}{n}$. Definimos ahora el suceso

$$B_n = \{\omega \in C[0, +\infty) : Y_k \leq \frac{6M}{n} \text{ para algún } 0 \leq k \leq Tn\}$$

siendo $A_n \subset B_n$. Si probamos que $\lim_n \mathbb{P}(B_n) = 0$, entonces debido a (3.5) se tendrá que

$$\mathbb{P}(A(M, T)) \leq \mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_n \mathbb{P}(A_n) \leq \lim_n \mathbb{P}(B_n) = 0,$$

luego $\mathbb{P}(A(M, T)) = 0$, como queremos probar. En primer lugar, observamos que si

$$B_{n,k} = \{\omega \in C[0, +\infty) : Y_k \leq \frac{6M}{n}\}$$

entonces $B_n = \bigcup_{0 \leq k \leq Tn} B_{n,k}$, de modo que $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{0 \leq k \leq Tn} B_{n,k}) \leq \sum_{0 \leq k \leq Tn} \mathbb{P}(B_{n,k})$.

Ahora, usando que los incrementos de un movimiento browniano definidos de la forma que han sido definidos en (3.6) son independientes e idénticamente distribuidos tendremos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &\leq \sum_{0 \leq k \leq Tn} \mathbb{P}(B_{n,k}) \\
&\leq Tn \mathbb{P}\left(\max\left\{|W(\frac{3}{n}) - W(\frac{2}{n})|, |W(\frac{2}{n}) - W(\frac{1}{n})|, |W(\frac{1}{n}) - W(0)|\right\} \leq \frac{6M}{n}\right) \\
&\leq Tn \left[\mathbb{P}(|W(\frac{1}{n})| \leq \frac{6M}{n})\right]^3 = Tn \left[\mathbb{P}(|W(1)| \leq \frac{6M}{\sqrt{n}})\right]^3.
\end{aligned}$$

donde $W(1)$ sigue una distribución normal estándar. Ahora bien, puesto que su función de densidad esta acotada por $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, se tendrá que

$$\mathbb{P}(B_n) \leq Tn \left(\int_{-\frac{6M}{\sqrt{n}}}^{\frac{6M}{\sqrt{n}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx\right)^3 = Tn [2\frac{6M}{\sqrt{2\pi n}}]^3. \quad (3.7)$$

Por tanto, salvo constantes, la expresión (3.7) es $\mathcal{O}(n(\frac{1}{\sqrt{n}})^3) = \mathcal{O}(\frac{1}{\sqrt{n}})$, lo cual converge a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Aquí,

$$g(h) = \mathcal{O}(h^m) \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^m} = C \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la expresión (3.7) tiene el mismo carácter que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ cuando $n \rightarrow \infty$, probando de esta manera que $\lim_n \mathbb{P}(B_n) = 0$. \square

Una de las inmediatas consecuencias que tiene el anterior resultado es que las trayectorias de un movimiento Browniano son de variación no acotada con probabilidad 1. Esto se deduce del siguiente resultado cuya demostración puede ser consultada en el Capítulo 3 de [27].

Teorema 3.2. *Sea $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada (ver Definición 2.4), entonces f es diferenciable en $[0, T]$ con probabilidad 1.*

Cuyo contrarrecíproco, apoyándonos en el resultado anteriormente probado, nos dice que

Corolario 3.1. *El conjunto de observaciones de un movimiento Browniano cuya variación es acotada es de probabilidad nula. Esto es, para cada $T > 0$*

$$\mathbb{P}(\omega \in C[0, T] : V_{[0, T]}(\omega) < \infty) = 0.$$

Es decir, para cualquier intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$ podremos encontrar una partición $T_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_2$ para la que $\sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|$ es tan grande como queramos. En particular, una implicación directa de esto es que, como cualquier función monótona en un intervalo es de variación acotada, con probabilidad 1, las trayectorias del movimiento browniano no son monótonas en ningún intervalo.

Además, el hecho de que las trayectorias del movimiento browniano sean de variación no acotada, nos planteará un problema a la hora de definir integrales cuya función integrador es un movimiento Browniano, ya que no será posible su interpretación como una integral de Riemann-Stieltjes (ver Definición 2.7). Hablaremos de esto más adelante.

3.4.2 Variación cuadrática acotada de un movimiento browniano

A pesar de las propiedades de no diferenciabilidad y variación no acotada de un movimiento browniano, puede demostrarse que tiene variación cuadrática finita. Además, esta coincide con la longitud del intervalo que consideremos lo cual será una propiedad fundamental a la hora de construir el Cálculo Estocástico, estudiado en próximas secciones.

Para ver que esto es así, comenzamos considerando \mathcal{P} el conjunto de todas las particiones del intervalo $[0, T]$. Definimos ahora

$$Q(P, W) = \sum_{1 \leq k \leq n} (W(t_k) - W(t_{k-1}))^2$$

donde $P \in \mathcal{P}$ y consideramos, sin pérdida de generalidad, $t_0 = 0$ y $t_n = T$. Para cada P definimos

$$\Delta(P) = \max_{1 \leq k \leq n} |t_k - t_{k-1}|.$$

Nuestro objetivo es probar que $Q(P_i, W)$ converge en probabilidad a T siendo $\{P_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}$ una sucesión tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(P_i) = 0$. De este modo habremos probado que un movimiento browniano tiene variación cuadrática finita igual a T .

Teorema 3.3. Sea P_i una sucesión de particiones del intervalo $[0, T]$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(P_i) = 0$. Entonces

$$\lim_{i \rightarrow \infty} E[(Q(P_i, W) - T)^2] = 0$$

y como consecuencia $Q(P_i, W) \xrightarrow{P} T$.

Demostración. Para probarlo usaremos que dada $Z \sim N(0, t)$, entonces $E[Z^4] = 3t^2$ (puede comprobarse mediante la función generatriz de momentos).

En primer lugar, observamos que

$$Q(P_i, W) - T = \sum_{1 \leq i \leq n} (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (t_i - t_{i-1}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} E[(Q(P_i, W) - T)^2] &= \sum_{1 \leq i \leq n} E[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^4] \\ &\quad - 2 \sum_{1 \leq i \leq n} E[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2](t_i - t_{i-1}) + \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})^2. \end{aligned}$$

Ahora, puesto que $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ y $E[(W(t_i) - W(t_{i-1}))^4] = 3(t_i - t_{i-1})^2$ se tendrá que

$$\begin{aligned} E[(Q(P_i, W) - T)^2] &= \sum_{1 \leq i \leq n} 3(t_i - t_{i-1})^2 - 2 \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})^2 + \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})^2 \\ &= 2 \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2\Delta(P_i) \sum_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \\ &= 2\Delta(P_i)T \end{aligned}$$

de modo que, si $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(P_i) = 0$, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} E[(Q(P_i, W) - T)^2] = 0$ como queríamos probar. \square

Nota. Puede probarse también que, si $\lim_{i \rightarrow \infty} i^2 \Delta(P_i) = 0$, esto es, $\Delta(P_i)$ converge a 0 más rápido que $1/i^2$, entonces se tiene la convergencia casi segura. [2]

Las conclusiones anteriores ponen de manifiesto que las trayectorias del movimiento browniano tienen un carácter vibratorio muy característico. No obstante, en sentido contrario, cualquier función continua puede ser uniformemente aproximada por una posible trayectoria del movimiento browniano. En concreto, puede probarse el resultado siguiente ([11]) :

Proposición 3.5. Si f es cualquier función continua definida en el intervalo $[0, 1]$, con $f(0) = 0$, para cualquier $\epsilon > 0$ es

$$P[|W(t) - f(t)| \leq \epsilon \quad \forall t \in [0, 1]] > 0.$$

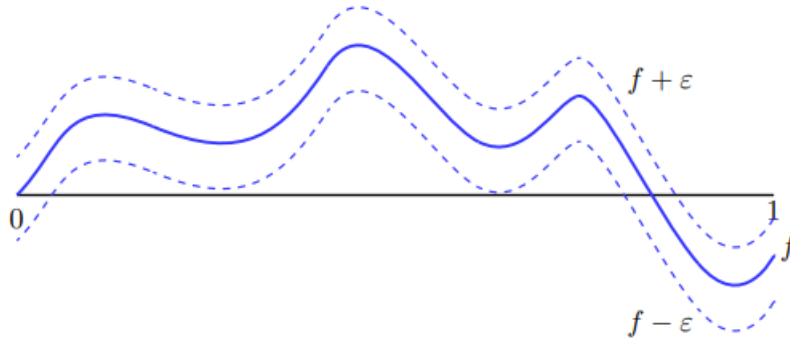


Figure 3.5: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

Es decir, el conjunto de trayectorias posibles de un movimiento browniano que no se salen de la banda señalada en la imagen es no vacío.

4. Movimiento Browniano Geométrico

En este capítulo introduciremos el proceso estocástico comúnmente conocido como movimiento browniano geométrico que previamente definimos en la Definición 3.4.

Una de las principales observaciones que hizo Samuelson sobre el trabajo de Bachelier fue percatarse de que su modelo fallaba a la hora de garantizar que el precio de los activos era siempre positivo. Esto entraba en contradicción con los más básicos principios económicos. Sin embargo, con la definición del movimiento browniano geométrico, se conseguían evitar estas complicaciones.

Por ello, y por razones que veremos más adelante, este proceso estocástico tendrá un papel importante a la hora de modelar los precios de aquellos activos que fluctúan en el mercado financiero.

4.1. Propiedades

En efecto, una de las primeras diferencias que encontramos con respecto al movimiento browniano es que el espacio de estado es $(0, +\infty)$. Esto se deduce directamente de su definición, ya que no es más que una transformación continua de un movimiento browniano con drift mediante la función exponencial, $g(X) = e^X$.

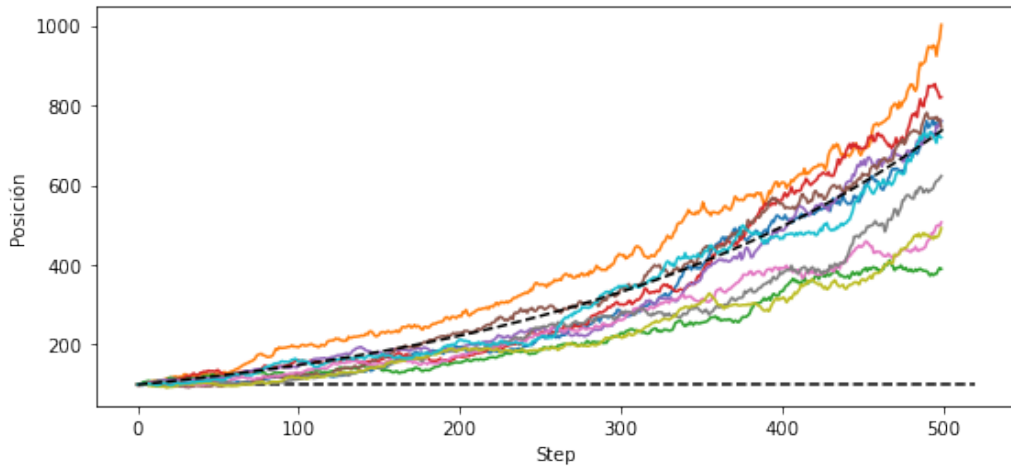


Figure 4.1: Un ejemplo de ilustración. BrownianMotion.ipynb

De esto, podemos deducir también que el movimiento browniano geométrico deja de ser un proceso Gaussiano, es más, cada variable aleatoria asociada al proceso $\{Y(t), t \geq 0\}$ seguirá una distribución log-normal de parámetros μt y $\sigma^2 t$. Por ello, la función de densidad asociada a $Y(t)$ para cada $t > 0$ será

$$f_t(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}y} \exp\left\{-\frac{(\ln y - \mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right\}, \quad y > 0.$$

Para calcular $E[Y(t)]$ y $Var[Y(t)]$, haremos uso de la función generatriz de momentos de una variable aleatoria X que sigue una distribución normal $N(\mu t, \sigma^2 t)$, esto es

$$M_X(\theta) = E[\exp\{\theta X\}] = \exp\left\{\left(\theta\mu + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2\right)t\right\}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

De aquí,

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= M_X(1) = \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \\ \text{Var}[Y(t)] &= M_X(2) - M_X(1)^2 = \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)2t\right\}(\exp\{\sigma^2 t\} - 1) \end{aligned} \quad (4.2)$$

para todo $t \geq 0$. Vemos que $E[Y(0)] = 1$, como cabría esperar ya que $Y(0) = 1$ al ser, por hipótesis, $X(0) = 0$.

Podríamos calcular también $C_Y(t+s, t) = \text{Cov}[Y(t+s), Y(t)]$, resultado que aplicaremos en posteriores propiedades. Notemos primero que

$$E[Y(t+s)Y(t)] = E[\exp\{X(t+s)\}\exp\{X(t)\}] = E[\exp\{X(t+s) + X(t)\}].$$

Ahora, puesto que $Z = X(t+s) + X(t) \sim N(\mu(2t+s), \sigma^2(4t+s))$ (ver (3.4)), de (4.1) se deduce que

$$E[Y(t+s)Y(t)] = M_Z(1) = \exp\left\{\mu(2t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(4t+s)\right\}$$

para cada $s, t \geq 0$. Esto nos conduce a que

$$\begin{aligned} C_Y(t+s, t) &= \text{Cov}[Y(t+s), Y(t)] = E[Y(t+s)Y(t)] - E[Y(t+s)]E[Y(t)] \\ &= \exp\left\{\mu(2t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(4t+s)\right\} - \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t+s)\right\} \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\} \\ &= \exp\left\{\mu(2t+s) + \frac{1}{2}\sigma^2(4t+s)\right\} - \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(2t+s)\right\} \\ &= \exp\left\{\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(2t+s)\right\}(\exp\{\sigma^2 t\} - 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

En cuanto a otras de las principales diferencias con respecto a los procesos anteriores, el movimiento browniano geométrico carece de incrementos independientes y estacionarios. Veámoslo:

En primer lugar, observamos que

$$\begin{aligned} Y(s+t) - Y(s) &= Y(0)e^{X(t+s)} - Y(0)e^{X(s)} = Y(0)(e^{X(t+s)} - e^{X(s)}) \\ Y(t) - Y(0) &= Y(0)e^{X(t)} - Y(0) = Y(0)(e^{X(t)} - 1) \end{aligned}$$

no siguen la misma distribución, luego el proceso no tiene incrementos estacionarios.

Para probar que el proceso no tiene incrementos independientes, i.e. las variables $Y(t+s) - Y(t)$ y $Y(t) - Y(0)$ no son independientes, calcularemos la covarianza de estas variables y veremos que es no nula (recuerda que $Y(0) = 1$).

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y(t+s) - Y(t), Y(t) - Y(0)] &= E[\{Y(t+s) - Y(t)\}\{Y(t) - Y(0)\}] \\ &\quad - E[Y(t+s) - Y(t)]E[Y(t) - Y(0)] \\ &= \{E[Y(t+s)Y(t)] - Y(0)E[Y(t+s)] \\ &\quad - E[Y^2(t)] + Y(0)E[Y(t)]\} \\ &\quad - \{E[Y(t+s)] - E[Y(t)]\}\{E[Y(t)] - Y(0)\} \\ &= \text{Cov}[Y(t+s), Y(t)] - \text{Var}[Y(t)]. \end{aligned}$$

Ahora, haciendo uso de (4.2) y (4.3) se tiene que

$$\begin{aligned}
Cov[Y(t+s) - Y(t), Y(t) - Y(0)] &= \exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(2t+s)\}(\exp\{\sigma^2 t\} - 1) \\
&\quad - \exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)2t\}(\exp\{\sigma^2 t\} - 1) \\
&= (\exp\{\sigma^2 t\} - 1)(\exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(2t+s)\} - \exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)2t\}) \\
&= (\exp\{\sigma^2 t\} - 1)\exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)2t\}(\exp\{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)s\} - 1)
\end{aligned}$$

que es diferente de 0 para todo $s, t > 0$. Por tanto, las variables aleatorias consideradas no son independientes, i.e, el proceso no tiene incrementos independientes.

También, podemos obtener una expresión explícita para el valor esperado del proceso en el instante t conocido todos los valores hasta un tiempo $s < t$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
E[Y(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s] &= E[e^{X(t)} \mid X(u), 0 \leq u \leq s] \\
&= E[e^{X(s)+X(t)-X(s)} \mid X(u), 0 \leq u \leq s] \\
&= e^{X(s)} E[e^{X(t)-X(s)} \mid X(u), 0 \leq u \leq s] \\
&\stackrel{\text{incr. ind.}}{=} Y(s) E[e^{X(t)-X(s)}].
\end{aligned}$$

Puesto que $X(t) - X(s) \sim N(\mu(t-s), \sigma^2(t-s))$ de (4.1) se deduce que

$$E[e^{X(t)-X(s)}] = \exp\{\mu(t-s) + \frac{1}{2}\sigma^2(t-s)\}$$

de modo que

$$E[Y(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s] = X(s) \exp\{(t-s)(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)\}.$$

4.2. Aplicaciones

El movimiento browniano geométrico es un proceso frecuentemente utilizado para modelar diversos elementos cuantitativos como pueden ser el precio de acciones, de recursos naturales o incluso el crecimiento en la demanda de ciertos productos o servicios. Por ello, en [10] se refieren a este como “*the model for stock prices*”.

(CAMBIAR POR LA VERSIÓN DE MARF?) Para ver porque esto es así, partimos de que es razonable suponer que los cambios porcentuales en el precio de un determinado stock sobre intervalos de tiempo disjuntos y de igual longitud son independientes e idénticamente distribuidos. Esto se debe a que las variaciones en el precio en dichos intervalos depende de múltiples factores que se suponen independientes (ejemplos). En tal caso, sea Y_n el precio del stock en el instante $n = 0, 1, 2, \dots$ se supone que $Y_{n+1}/Y_n, n \geq 0$, son independientes e idénticamente distribuidas. Ahora, definimos

$$X_n = \frac{Y_{n+1}}{Y_n}$$

de tal modo que $\log(X_n) = \log(Y_{n+1}) - \log(Y_n)$ indica la variación del precio del stock entre el instante $n+1$ y n .

Observamos que, al ser $Y_{n+1}/Y_n, n \geq 0$ i.i.d, entonces $X_n, n \geq 0$ también lo serán y además es razonable suponer que $\log(X_n)$ siga una distribución normal. Esto se puede interpretar como que

si particionamos el intervalo $[n, n + 1]$ en subintervalos de tiempo infinitesimales, los cambios en el precio del stock van a experimentar una variación acorde a una distribución normal en cada uno de ellos y, debido a la independencia de estos, la variación en todo el intervalo seguirá también una distribución normal. Por tanto, asumimos que

$$\log(X_n) = \log(Y_{n+1}) - \log(Y_n) \sim N(\mu, \sigma)$$

Como consecuencia de esto, se tiene que iterando la igualdad $Y_{n+1} = X_n Y_n$,

$$Y_{n+1} = X_n X_{n-1} Y_{n-1} = \cdots = X_n X_{n-1} \cdots X_0 Y_0$$

de modo que

$$\log(Y_{n+1}) = \sum_{i=0}^n \log(X_i) + \log(Y_0).$$

De aquí, al ser $\log(X_i), i \geq 0$ i.i.d y $\log(Y_0)$ constante, bajo la reproductividad de la distribución normal se deduce que $\log(Y_{n+1})$ también sigue una distribución normal, por tanto, Y_{n+1} seguirá una distribución log-normal que verifica

$$\begin{aligned} E[\log(\frac{Y_t}{Y_0})] &= \mu t \\ V[\log(\frac{Y_t}{Y_0})] &= \sigma^2 t. \end{aligned}$$

De este modo, podemos definir nuevamente el movimiento browniano geométrico como sigue:

Definición 4.1. *Decimos que el proceso estocástico $\{Y(t); t \geq 0\}$ sigue un movimiento browniano geométrico (con drift μ y varianza σ^2) si verifica:*

- i. $\frac{Y(s+t)}{Y(s)}$ sigue una distribución independiente del valor de s para todo $t, s \geq 0$;
- ii. $\log(\frac{Y(s+t)}{Y(s)}) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ para todo $t, s \geq 0$.

Una de las principales y más conocidas aplicaciones de este proceso viene dada por su aparición en la construcción del Modelo de Black-Scholes, cuyos autores recibieron el premio Nobel de Economía en 1997. De esta manera, se ha convertido en uno de los pilares fundamentales de la teoría financiera moderna.

Para conocer mejor este modelo, es necesario introducir antes la Teoría de Integración Estocástica o, como la hemos llamado hasta ahora, Cálculo Estocástico. Este modelo tiene como objetivo la definición de un mercado eficiente (no hay posibilidades de arbitraje) y completo (todos los derivados financieros pueden ser replicados). Por ello, una vez que hayamos introducido toda la teoría necesaria, entraremos en más detalle acerca de este modelo y sus posibles aplicaciones.

Sin embargo, a pesar de la simplicidad y las buenas propiedades que presenta el movimiento browniano geométrico, son pocos los estudios que prueban que se ajuste a la realidad. En la práctica, los datos reales que proporciona el mercado necesitan ser interpretados antes de aplicar cualquier modelo.

En [22], encontramos un estudio que utiliza el movimiento browniano geométrico (GBM) para simular las trayectorias de los precios de las acciones, y comprueba si los precios simulados de las acciones se ajustan a los rendimientos reales de las mismas. La muestra de este estudio se basa en las grandes empresas australianas que cotizan en el índice SP/ASX 50 y ofrece tres métodos para comprobar la validez del modelo. El primer método calcula el coeficiente de correlación entre las cotizaciones simuladas y las reales. El segundo método utilizado es la técnica del error porcentual medio absoluto

(MAPE). El tercer y último método utiliza un proceso sencillo para comprobar si las cotizaciones diarias simuladas presentan el mismo movimiento direccional que las cotizaciones reales.

En [18] y [19], M. M. Jaffar y S. Z. Abidin prueban que el GBM es un modelo muy adecuado para la inversión a corto plazo, con un máximo de dos semanas. Aunque el modelo GBM tiene algunos puntos débiles, en este se demuestra que da un valor exacto a los precios reales.

Además, el modelo GBM también se ha utilizado para representar la demanda futura en estudios de capacidad. En [17] podemos encontrar diferentes análisis que intentan probar si el modelo GBM es válido para predecir la demanda futura; sin embargo, los métodos empleados son aplicables a cualquier serie de datos. Los datos analizados en este artículo proceden de diversos sectores: la industria de la telefonía móvil, el número de pasajeros de las aerolíneas, el consumo de energía eléctrica y el crecimiento de Internet.

5. Introducción al Cálculo Estocástico

5.1. Contexto

Como comentamos en la Introducción, la principal motivación en la creación de lo que hoy conocemos como Cálculo Estocástico fue modelar los procesos de difusión. Y bien, ¿a qué nos referimos con esto?

Bajo ciertas condiciones, los procesos estocásticos de Markov (ver Definición 2.3) definidos sobre espacios continuos, y cuyo espacio de estado también lo es, se denominan procesos de difusión. De entre estos, el movimiento browniano es el más conocido. La definición de procesos de difusión es la siguiente:

Definición 5.1. *Un proceso estocástico de Markov en tiempo continuo, $\{X(t); t \geq 0\}$, cuyo espacio de estado es un intervalo (a, b) es un proceso de difusión si*

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[|X(t + \epsilon) - X(t)| > \delta \mid X(t) = x] = 0 \quad (5.1)$$

para todo $\delta > 0$ y para todo $x \in (a, b)$ y además los parámetros infinitesimales $m(t; x)$ y $v(t; x)$, definidos como siguen

$$\begin{aligned} m(t; x) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[X(t + \epsilon) - X(t) \mid X(t) = x] \\ v(t; x) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[(X(t + \epsilon) - X(t))^2 \mid X(t) = x], \end{aligned} \quad (5.2)$$

son funciones continuas respecto de x y t .

La interpretación de la anterior definición es la siguiente:

- i. La condición (5.1) quiere decir que la probabilidad de que el proceso varíe una cierta cantidad δ durante un intervalo de tiempo infinitesimal es muy pequeña. En otras palabras, $X(t)$ es una función continua en t con probabilidad 1.
- ii. El espacio de estado $S_{X(t)}$ del proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ puede ser cualquier intervalo. Más aún, si el intervalo no contiene al último punto este puede ser $-\infty$ o $+\infty$.
- iii. La función $m(t; x)$ se conoce como la media infinitesimal o coeficiente de desviación, mientras que $v(t; x)$ se conoce como la varianza infinitesimal o coeficiente de difusión. Se asume que $m(t; x)$ y $v(t; x)$ existen. Además, si $S_{X(t)} = [a, b]$ entonces $m(t; x)$ y $v(t; x)$ deben existir y ser continuas para todo $x \in (a, b)$.

Veamos que, en efecto, el movimiento browniano es un proceso de difusión y calcularemos la expresión de $m(t; x)$ y $v(t; x)$. Consideramos $\{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. Debido a la propiedad de incrementos independientes, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[|W(t + \epsilon) - W(t)| > \delta \mid W(t) = w] &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[|N(0, \epsilon)| > \delta] \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} P[|N(0, 1)| > \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}] \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2}{\epsilon} \{1 - \Phi(\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}})\} \end{aligned}$$

donde $\Phi(x)$ es la función de distribución de una variable $Z \sim N(0, 1)$. Esta, puede escribirse como:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{x}{\sqrt{2}}))$$

donde $\operatorname{erf}(x)$ es la función error, cuya expansión asintótica ([16]) es

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \dots \right\}$$

para $x > 1$. Por tanto, se tendrá que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2}{\epsilon} \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}\right) \right\} = 0.$$

Además,

$$m(t; \omega) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[W(t + \epsilon) - W(t) \mid W(t) = w] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} 0 = 0$$

y

$$\begin{aligned} v(t; \omega) &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[(W(t + \epsilon) - W(t))^2 \mid W(t) = w] = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} E[Z^2], \text{ donde } Z \sim N(0, \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \sigma^2 \epsilon = \sigma^2 \end{aligned}$$

Nota. Observamos como tanto $m(t; \omega)$ como $v(t; \omega)$ no dependen de ω . Por ello, con el objetivo de simplificar la notación, en ciertas ocasiones escribiremos, sin pérdida de generalidad, $\mu(t, X(t)) = \mu(t) = \mu_t$ y $\sigma(t, X(t)) = \sigma(t) = \sigma_t$.

De forma alternativa, la definición de los parámetros coeficiente de desviación y difusión pueden venir dada, respectivamente, como las funciones que verifican

$$\begin{aligned} E[X(t + \epsilon) - X(t) \mid X(t) = x] &= m(t; x)\epsilon + o(\epsilon), \\ E[(X(t + \epsilon) - X(t))^2 \mid X(t) = x] &= v(t; x)\epsilon + o(\epsilon). \end{aligned}$$

Como consecuencia, el coeficiente de desviación define la velocidad media del proceso estocástico $X(t)$, mientras que el coeficiente de difusión es una función que mide las fluctuaciones de $X(t + \epsilon) - X(t)$ con respecto a la media.

Bajo estas condiciones, puede demostrarse que si X es un proceso de difusión, de forma local se verifica que

$$X(t + \Delta t) - X(t) \approx \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))(W(t + \Delta t) - W(t)) \quad (5.3)$$

donde $\mu(t, X(t)) = m(t; X(t))$, $\sigma^2(t, X(t)) = v(t; X(t))$ y W representa un proceso de Wiener. [21]

En resumidas cuentas, podemos entender que $X(t)$ es un proceso de difusión si puede ser aproximado de forma local mediante la anterior ecuación estocástica en diferencias. En la expresión (5.3) podemos diferenciar dos sumandos, cuyas características son particularmente diferentes:

- i. Una velocidad determinista $\mu(t, X(t))$.
- ii. Una perturbación Gausiana amplificada por el factor $\sigma(t, X(t))$.

En términos financieros, si estuviésemos modelando el precio de un activo, el coeficiente $\mu(t, X(t))$ correspondería a la tendencia asociada a este mientras que $\sigma(t, X(t))$ correspondería a la volatilidad.

Ahora bien, conocidos $\mu(t, X(t))$ y $\sigma(t, X(t))$, ¿podríamos construir a partir de esta expresión una ecuación diferencial a la que podamos encontrar solución y, de este modo, conocer más en detalle el proceso estocástico $X(t)$? Veamos que podemos hacer:

- **Intento 1.** Basados en el cálculo clásico, un primer intento podría ser dividir la expresión (5.3) por Δt y luego considerar $\Delta t \rightarrow 0$. En tal caso obtendríamos la identidad

$$\begin{aligned} X'(t) &= \mu(t, X(t)) + \sigma(t, X(t))v(t), \\ X(0) &= a \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $v(t) = \frac{dW(t)}{dt}$. Sin embargo, como vimos en el Teorema 3.1, el movimiento browniano no es diferenciable con probabilidad 1 en casi ningún punto, de modo que, la definición de v y (5.4) carece de sentido.

- **Intento 2.** Otra opción sería hacer en primer lugar $\Delta t \rightarrow 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \\ X(0) &= a \end{aligned} \quad (5.5)$$

entendiendo (5.5) como

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s). \quad (5.6)$$

Ahora bien, la dt -integral puede interpretarse como una integral del Riemann pero, ¿cómo interpretamos la dW -integral? Podríamos intentar considerarla como una integral de Riemann-Stieltjes para cada W -trayectoria (ver Definición 2.6 y 2.7), sin embargo, el Corolario 3.1 nos dice que dichas trayectorias no son funciones de variación acotada localmente. Esto hace imposible considerar la dW -integral como una integral de Riemann-Stieltjes para cada W -trayectoria.

Hemos visto que no es viable darle sentido a la ecuación (5.5) para cada W -trayectoria por separado. Sin embargo, si relajamos nuestras exigencias y definimos la dW -integral de forma adecuada quizás podamos proceder. Este hecho motiva el estudio de las integrales del tipo

$$\int_0^t g(s)dW(s) \quad (5.7)$$

para una amplia clase de funciones g . Este nuevo concepto de integral es llamado Integral de Itô y nos permitirá establecer toda una teoría del análisis que engloba a las ecuaciones diferenciales estocásticas: el Cálculo de Itô.

5.2. Integral de Itô

Antes de comenzar con la construcción de la Integral de Itô, es importante introducir el concepto de filtración. Las principales definiciones con las que trabajaremos son las siguientes

Definición 5.2. Una filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) es una familia indexada de σ -álgebras sobre Ω que verifica

- i. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para todo $t \geq 0$
- ii. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ para todo $s \leq t$

Definición 5.3. Dada una filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ sobre cierto espacio de probabilidad, consideramos un proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ sobre el mismo espacio de probabilidad. Decimos que el proceso X es adaptado a la filtración \mathbf{F} si $X(t) \in \mathcal{F}_t$ para todo $t \geq 0$.

La interpretación que tiene esta última definición es la siguiente. Para cada t , el valor de X_t esta completamente determinado por la información que proporciona \mathcal{F}_t . Una observación importante es que el proceso X se adapta a la filtración generada por si mismo, es decir, \mathcal{F}_t^X .

En lo que sigue, daremos una definición más informal y algunos ejemplos que nos ayudará a entender mejor el significado de las definiciones previamente dadas

Definición 5.4. Dado un proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ denotamos como \mathcal{F}_t^X a la información generada por X hasta tiempo t . De este modo:

- i. Si basados en la observación de la trayectoria $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ es posible decidir si un evento A ha ocurrido o no, entonces decimos que A es \mathcal{F}_t^X y lo denotamos como $A \in \mathcal{F}_t^X$.
- ii. Si el valor de una variable aleatoria Y esta totalmente determinado bajo las observaciones de la trayectoria $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$, entonces escribimos $Y \in \mathcal{F}_t^X$.
- iii. Si $\{Y(t); t \geq 0\}$ es un proceso estocástico tal que $Y(t) \in \mathcal{F}_t^X$ para cada $t \geq 0$ entonces decimos que Y es adaptado a la filtración $\mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

Ejemplo 5.1. Algunos ejemplos son:

- i. Si definimos el suceso $A = \{X(s) \leq 2, \forall s \leq 9\}$ para cierto proceso X , entonces se tiene que $A \in \mathcal{F}_t^X$ para $t \geq 9$.
- ii. Si definimos la variable aleatoria

$$Z = \int_0^5 X(s)ds,$$

entonces $Z \in \mathcal{F}_t^X$ para $t \geq 5$.

- iii. Si W es un proceso de Wiener y definimos X como

$$X(t) = \sup_{s \leq t} W(s)$$

entonces X esta adaptado a la filtración \mathcal{F}_t^W (\mathcal{F}^W -adaptado).

Volviendo a la construcción de la integral estocástica, comencemos definiendo el conjunto de funciones para las que estudiaremos la existencia de dicha integral.

Definición 5.5.

- i. Decimos que el proceso g pertenece a la clase $\mathcal{L}^2[a, b]$ si se satisface las siguientes condiciones:
 - $\int_a^b E[g^2(s)]ds < \infty$
 - El proceso g esta adaptado a la filtración \mathcal{F}_t^W
- ii. Decimos que el proceso g pertenece a la clase \mathcal{L}^2 si $g \in \mathcal{L}^2[0, t]$ para todo $t > 0$.

Ahora, los pasos a seguir para definir la integral estocástica (5.7) son los siguientes:

- i. Comenzamos definiendo la integral para los procesos $g \in \mathcal{L}^2[a, b]$ *simples*, estos son aquellos en los que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de modo que $g(s) = g(t_k)$ para $s \in [t_k, t_{k+1}]$. La definición que vamos a utilizar para este tipo de funciones parece obvia:

$$\int_a^b g(s) dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k) [W(t_{k+1}) - W(t_k)].$$

- ii. Ahora, nuestro objetivo es generalizar la definición para cualquier función $g \in \mathcal{L}^2[0, t]$. Para ello, aproximamos g como una sucesión de procesos simples g_n de modo que

$$\int_0^t E[\{g_n(s) - g(s)\}^2] ds \rightarrow 0$$

Puede demostrarse que, para cada n , la integral $\int_a^b g_n(s) dW(s)$ es una variable aleatoria bien definida ([3]) y puede definirse la integral estocástica como:

$$\int_a^b g(s) dW(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(s) dW(s).$$

Nota. Una vez dada la definición de la integral de Itô, cabe destacar las siguientes observaciones:

- i. El resultado de una integral estocástica es una variable aleatoria. Esto es, para cada observación se obtiene un número real.
- ii. En su construcción, en el término genérico $g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]$, la función g es evaluada a la izquierda del intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ sobre el que tomamos el W -incremento. De aquí la hipótesis de que g debe ser \mathcal{F}^W -adaptado.
- iii. Además, esto también será esencial en el marco financiero puesto que las decisiones que tomemos, al inicio de un nuevo periodo, deben de tomarse con la información que tenemos hasta el comienzo de este.

En la siguiente proposición recogeremos algunas de las propiedades más importantes en la Teoría de Integración Estocástica:

Proposición 5.1. *Sea g un proceso que satisface las condiciones*

- $\int_a^b E[g^2(s)] dW(s) < \infty$,
- g esta adaptada a la filtración \mathcal{F}_t^W .

Entonces se verifican las siguientes relaciones

i.

$$E\left[\int_a^b g(s) dW(s)\right] = 0 \quad (5.8)$$

ii. *Isometría de Itô*

$$E\left[\left(\int_a^b g(s) dW(s)\right)^2\right] = \int_a^b E[g^2(s)] ds \quad (5.9)$$

iii.

$$\int_a^b g(s) dW(s) \text{ es } \mathcal{F}_b^W\text{-medible.} \quad (5.10)$$

5.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas y Lema de Itô

Sea X un proceso estocástico tal que existe un número real, a , y dos procesos adaptados μ y σ de modo que para todo $t \geq 0$ se verifica la siguiente relación

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(t, X(t))dt + \int_0^t \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (5.11)$$

podríamos escribir dicha relación de la siguiente forma, sin alterar su significado original, como ya hicimos con anterioridad

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad (5.12)$$

$$X(0) = a. \quad (5.13)$$

En este caso, diremos que X tiene una diferencial estocástica dada por (5.12) con una condición inicial dada por (5.13), siendo X solución de la ecuación diferencial estocástica (SDE) formada por (5.12) y (5.13). Reiteramos que esto no es más que una forma de escribir la expresión (5.11) ya que la expresión $dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$ carece de sentido por sí sola.

Teorema 5.1 (Condiciones para la existencia y unicidad de soluciones de SDEs). *Para $0 < T < \infty$, sea $t \in [0, T]$. Consideramos la SDE dada por*

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

y la condición inicial $X(0) = a$. Las siguientes condiciones son suficientes para asegurar la existencia y unicidad de soluciones de cuadrado integrable para la SDE (esto es, soluciones que verifican $E[\int_0^T |X(t)|^2 dt] < \infty$). [20]

- **Crecimiento lineal**

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

para algún $C > 0$.

- **Condición Lipschitziana**

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y| \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$$

donde $0 < D < \infty$ es la constante de Lipschitz.

Ahora bien, ya hemos conseguido nuestro objetivo de transformar la expresión (5.3) en una ecuación diferencial estocástica bien definida y sabemos condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones de estas. Pero, ¿cómo son estas soluciones? ¿Podemos encontrar una expresión explícita?

Desafortunadamente, y como cabría esperar, obtener una solución explícita no es tarea sencilla. Sin embargo, existen herramientas que, en determinados casos, nos sirven de gran ayuda. La principal herramienta que se utiliza en la resolución, y no solo resolución, de SDEs es el conocido como Lema (o Fórmula) de Itô.

Dada una función $f(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, el Lema de Itô nos proporciona la diferencial de cualquier proceso estocástico $Z(t) = f(t, X(t))$, siempre que $X(t)$ tenga asociado una SDE. Podemos entender este resultado como la analogía estocástica de la diferenciación.

Lema 5.1 (Lema de Itô). Consideramos el proceso estocástico $\{X(t); t \geq 0\}$ asociado a la SDE

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t).$$

Sea $f(t, x)$ una función $C^{1,2}$, se tiene que

$$df(t, X(t)) = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mu(t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} f(t, X(t))dt + \sigma(t) \frac{\partial}{\partial x} f(t, X(t))dW(t).$$

Detalles del Lema de Itô

Este resultado se basa en el hecho de que el movimiento browniano, a pesar de ser de variación no acotada, es de variación cuadrática acotada (ver Teorema 3.3) y una de las principales implicaciones que esto tiene es que podemos considerar $(dW)^2 = dt$. Motivemos porque esto es así.

Puesto que $\lim_{i \rightarrow \infty} Q(P_i, W) \rightarrow T$ cuando $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta(P_i) = 0$, esto nos motiva a escribir que

$$\int_0^T (dW_t)^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} Q(P_i, W) = T,$$

o equivalentemente, $(dW_t)^2 = dt$. En [6] puede consultarse una motivación alternativa del porqué esto es así y, además, vemos que admite este resultado como un dogma.

Volviendo al Lema de Itô, una demostración formal de este resultado queda fuera de nuestros objetivos, sin embargo, daremos una demostración heurística que nos hará comprender mejor el resultado.

Si tomamos el desarrollo de Taylor de f hasta los términos de segundo orden tenemos que

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}dtdX. \quad (5.14)$$

Ahora, por definición $dX = \mu dt + \sigma dW$, de modo que

$$(dX)^2 = \mu^2(dt)^2 + 2\mu\sigma(dt)(dW) + \sigma^2(dW)^2.$$

De aquí, teniendo en cuenta que $(dt)^2$ y $(dt)(dW)$ son despreciables comparado con el término dt y además $(dW)^2 = dt$, se tendrá que $(dX)^2 = \sigma^2 dt$. Si sustituimos esto en la expresión (5.14), tendremos que

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW(t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dt \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} f dt + \sigma \frac{\partial}{\partial x} f dW(t) \end{aligned}$$

que coincide justo con la expresión del Lema de Itô.

Nota. Una interesante observación es que, incluso mediante transformaciones no lineales, aún se conserva la estructura diferencial estocástica formada por un término determinista y una perturbación gaussiana. Además, la diferencial estocástica de estos procesos viene dada de forma explícita por el Lema de Itô.

5.3.1 Algunos ejemplos

Para familiarizarnos con el Lema de Itô, vamos a presentar algunas situaciones en las que veremos como esta herramienta nos sirve de gran ayuda.

En primer lugar, vamos a ver como el Lema de Itô es usado para calcular el valor esperado en algunas situaciones en las que interviene un proceso de Wiener.

Ejemplo 5.2. Vamos a calcular $E[W^4(t)]$. Para ello definimos $Z(t) = (W(t))^4$. Por tanto, $Z(t) = f(t, X(t))$ siendo $X = W$. De aquí, usando el Lema de Itô para $\mu \equiv 0$ y $\sigma \equiv 1$, tenemos la siguiente SDE asociada a Z

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \left\{ \frac{1}{2} 12W^2(t) \right\} dt + 4W^3(t) dW(t) \\ Z(0) &= W^4(0) = 0. \end{aligned}$$

Escrito en forma integral, tenemos que

$$Z(t) = 0 + 6 \int_0^t W^2(s) ds + 4 \int_0^t W^3(s) dW(s).$$

Ahora, tomamos valor esperado en esta expresión. Debido a la linealidad de la esperanza y a la propiedad (i) de la Proposición 5.1, la integral estocástica desaparecerá. Por tanto,

$$E[W^4(t)] = E[Z(t)] = 6 \int_0^t E[W^2(s)] ds = 6 \int_0^t s ds = 3t^2.$$

Ejemplo 5.3. Vamos a calcular $E[\exp\{\alpha W(t)\}]$. Siguiendo un proceso análogo al anterior, definimos $Z(t) = \exp\{\alpha W(t)\}$. El Lema de Itô nos proporciona la siguiente SDE

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \frac{1}{2} \alpha^2 \exp\{\alpha W(t)\} dt + \alpha \exp\{\alpha W(t)\} dW(t) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^2 Z(t) dt + \alpha Z(t) dW(t) \\ Z(0) &= 1. \end{aligned}$$

Escribiéndolo en su forma integral,

$$Z(t) = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t Z(s) ds + \alpha \int_0^t Z(s) dW(s).$$

Tomando valor esperado, al igual que en el caso anterior, la dW -integral se hará 0 quedando

$$E[Z(t)] = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t E[Z(s)] ds.$$

Si definimos $m(t) := E[Z(t)]$ obtenemos la ecuación

$$m(t) = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^t m(s) ds,$$

correspondiente a la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{1}{2} \alpha^2 m(t) \\ m(0) &= 1, \end{aligned}$$

cuya solución es $m(t) = \exp\{\frac{\sigma^2 t}{2}\}$. Luego

$$E[\exp\{\alpha W(t)\}] = E[Z(t)] = E[m(t)] = \exp\{\frac{\sigma^2 t}{2}\}.$$

Ahora, cabría preguntarnos como calcular (en algún sentido) una integral estocástica. Sin embargo, salvo en contadas ocasiones, la respuesta es que no se puede encontrar una solución explícita. En el siguiente ejemplo expondremos el caso más famoso en el que sí es viable encontrar una solución:

Ejemplo 5.4. Vamos a encontrar la distribución de

$$\int_0^t W(s) dW(s).$$

Para ello, teniendo en cuenta la expresión del Lema de Itô, parece razonable estudiar el proceso $Z(t) = W^2(t)$. De aquí que tengamos,

$$dZ(t) = dt + 2W(t)dW(t),$$

cuya forma integral

$$W^2(t) = t + 2 \int_0^t W(s) dW(s)$$

nos proporciona la respuesta que estábamos buscando. Esta es,

$$\int_0^t W(s) dW(s) = \frac{W^2(t)}{2} - \frac{t}{2}.$$

Por último, acabamos con una propiedad que usaremos más adelante:

Ejemplo 5.5 (La regla del producto). La formulación multidimensional del Lema de Itô ([6]) nos proporciona una importante propiedad acerca de la forma dinámica del producto de dos procesos. Se tiene que, dados

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu_t dt + \sigma_t dW_t \\ dY_t &= \nu_t dt + \rho_t dW_t \end{aligned}$$

se verifica que

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \sigma_t \rho_t dt. \quad (5.15)$$

Este resultado puede consultarse en [5].

5.3.2 Movimiento Browniano Geométrico

Como justificamos en capítulos anteriores, nuestro modelo para el precio de los activos estará basado en el movimiento browniano geométrico, de modo que la SDE asociada a este será la herramienta principal con la que trabajaremos en próximos capítulos. Esta es la siguiente

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t) \\ X(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

siendo $-\infty < \mu < +\infty$ y $\sigma > 0$.

Para ver que, en efecto, esta SDE esta asociada a un movimiento browniano geométrico haremos uso, como no podría ser de otra forma, del Lema de Itô.

Comencemos suponiendo que

$$X(t) = f(t, W(t)).$$

Aplicando el Lema de Itô (Lema 5.1) para el caso particular en el que $\mu(t) \equiv 0$ y $\sigma(t) \equiv 1$, se tiene

$$dX(t) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dW(t). \quad (5.17)$$

Ahora, identificando los dos sumando de (5.17) con los dos sumando de la SDE (5.16)

$$\mu X(t) = \mu f = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (5.18)$$

$$\sigma X(t) = \sigma f = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (5.19)$$

resultando un sistema de ecuaciones en derivadas parciales. De (5.19) deducimos que

$$f(t, x) = \exp\{\sigma x + g(t)\}$$

para cierta función g dependiente de t . Ahora, volviendo a la ecuación (5.18), tenemos

$$g'(t)f + \frac{1}{2}\sigma^2 f = \mu f,$$

esto es,

$$g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2,$$

de modo que

$$g(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + c.$$

Por tanto

$$f(t, x) = \exp\{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + c\}$$

y, haciendo uso de la condición inicial dada en (5.16), obtenemos que

$$f(t, x) = x_0 \exp\{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}.$$

De este modo, hemos visto que

$$X(t) = x_0 \exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)\}$$

es solución de (5.16) y, en efecto, X es un movimiento browniano geométrico de parámetros $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ y σ .

6. Aplicaciones en Finanzas

mencionar a Maria Jose

definir payoff, cambiar notación

Como hemos hablado a lo largo de nuestro trabajo, una de las principales aplicaciones que se tiene del Cálculo Estocástico es su uso en las Matemáticas Financieras, especialmente en el apartado de valoración de derivados financieros. Antes, necesitaremos unos conceptos previos que nos ayudarán a entender mejor el entorno financiero en el que trabajaremos.

Posteriormente, entraremos en detalle en la Teoría de Martingalas y su conexión con las ecuaciones diferenciales estocásticas. Parte fundamental en el desarrollo de estrategias de replicación, principal argumento que utilizaremos para establecer los precios de los distintos derivados financieros.

Seguiremos definiendo el Modelo de Black-Scholes. Este será el marco financiero bajo el que valoraremos nuestros contratos, el cual se caracteriza por el uso del movimiento browniano geométrico para modelar el precio de los activos volátiles.

Finalmente, con todo lo aprendido, estableceremos estrategias de replicación que nos permitan hallar el precio de cualquier derivado financiero, alcanzando de esta manera las conocidas Fórmulas de Black-Scholes para opciones Call/Put Europeas.

6.1. Conceptos previos

Los instrumentos de un mercado financiero pueden dividirse en dos grupos:

- **Activos subyacentes:** tipos de interés, acciones, índices, productos agrícolas, etc.
- **Derivados financieros:** futuros, opciones, warrants, swaps, etc.

La relación que existe entre estos dos grupos de instrumentos es la siguiente: Los derivados financieros son aquellos acuerdos (contratos) que se comprometen a diversos pagos o entregas en un futuro dependiendo del comportamiento de ciertos activos subyacentes. Es decir, los derivados financieros dependen siempre de algún activo subyacente, de modo que el comportamiento aleatorio que presentan estos es heredado por los derivados financieros.

Podemos formalizar y generalizar este concepto de la siguiente manera:

Definición 6.1 (Derivado financiero). *Consideramos un mercado financiero con un activo subyacente cuyo valor en cada instante de tiempo t viene descrito por S_t . Un derivado financiero con fecha de vencimiento T es una variable aleatoria $X \in \mathcal{F}_T^S$.*

Podemos interpretar esta definición como un contrato que permite a su comprador obtener X unidades monetarias (puede ser negativas o positivas) en fecha de vencimiento T . La condición de que $X \in \mathcal{F}_T^S$ significa que solo es posible conocer el valor de X a partir de tiempo T .

Definición 6.2 (Payoff).

Dentro de los derivados financieros, los contratos más conocidos son las opciones. Una primera definición es la siguiente

Definición 6.3 (Opción financiera). *Una opción financiera es un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción call) o vender (opción put) activos subyacentes*

a un precio determinado (*strike* o *precio de ejercicio*) en una fecha concreta (*vencimiento*) en el caso de una opción europea o hasta dicha fecha en el caso de una opción americana.

Nuestro propósito es valorar este tipo de contratos, es decir, hallar, en cierta medida, el precio justo que debemos pagar por estos.

Algunos de los ejemplos de opciones más comunes son los siguientes:

Ejemplo 6.1 (Call Europea). Contrato que nos da la opción de comprar una unidad de cierto activo subyacente S a precio K en fecha de vencimiento T . En este caso, ejerceríamos esta opción si y solo si $S_T > K$.

Por tanto, podemos escribir el payoff de este contrato como $X = \max\{S_T - K, 0\} = \Psi(S_T)$.

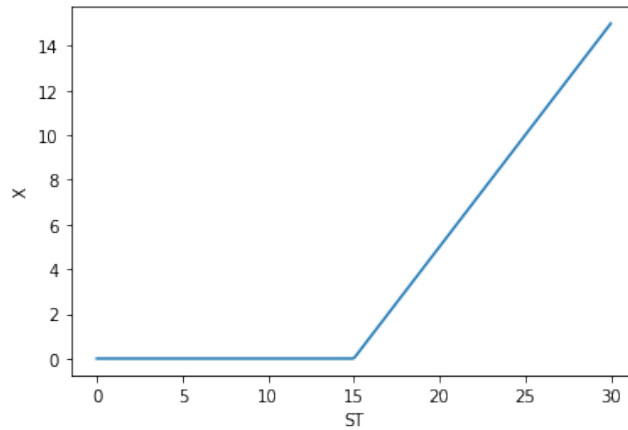


Figure 6.1: Payoff de una opción Call con Strike 15

Ejemplo 6.2 (Put Europea). Contrato que nos da la opción de vender una unidad de cierto activo subyacente S con strike K en fecha de vencimiento T . En este caso, ejerceríamos esta opción si y solo si $S_T < K$.

Por tanto, podemos escribir el payoff de este contrato como $X = \max\{K - S_T, 0\} = \Psi(S_T)$.

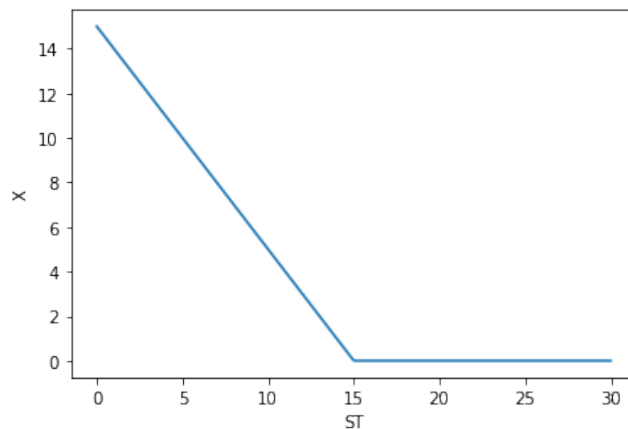


Figure 6.2: Payoff de una opción Put con Strike 15

Ejemplo 6.3 (Call/Put Americana). Contrato que nos da la opción de comprar/vender una unidad de cierto activo subyacente con strike K en cualquier instante $t \leq T$. En este caso, $X \neq \Psi(S_T)$.

La principal forma de abordar este problema es mediante estrategias de replicación, esto es, el precio de estos contratos será aquel que nos permita construir una cartera que replique los pagos futuros.

De forma general, los principales modelos asumen que el mercado financiero se compone de al menos un activo con riesgo, denominado *stock* y denotado por S_t , y un activo sin riesgo, denominado cuenta bancaria o *bono* y denotado por B_t .

A partir de un modelo de mercado financiero podemos definir el concepto de cartera o portfolio:

Definición 6.4 (Portfolio). *Consideramos un mercado financiero compuesto por dos activos S_t y B_t .*

Un portfolio (ϕ, ψ) es un par de procesos (ϕ_t, ψ_t) que describen, respectivamente, el número de unidades de S_t y B_t que tenemos en posesión en cada instante t . Pueden ser positivos o negativos y, además, ϕ_t debe ser \mathcal{F} -adaptado.

El valor de un portfolio (ϕ_t, ψ_t) vendrá dado por $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$.

Por tanto, un portfolio (ϕ_t, ψ_t) describe una estrategia dinámica que detalla la cantidad de cada instrumento que compone el mercado financiero poseemos en cada instante de tiempo t .

Las principales estrategias de replicación se basan en aquellos portfolios que son auto-financiados, es decir, aquellos en los que los cambios producidos en su valor dependen solo de los cambios que se producen en los instrumentos que componen el mercado. En el caso continuo, esto es equivalente a:

Definición 6.5 (Portfolios auto-financiados). *Un portfolio (ϕ_t, ψ_t) con respecto a S_t y B_t es auto-financiado si y solo si $dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$.*

Es decir, si el coste de ajustar el portfolio se corresponde perfectamente con las pérdidas o ganancias del mismo, entonces no es necesario la intervención de capital externo. En tal caso, se dice que el portfolio es auto-financiado

Llegados a este punto, ya podemos definir el concepto de estrategia de replicación:

Definición 6.6 (Estrategias de replicación). *Consideramos un mercado financiero compuesto por un activo sin riesgo S_t , con volatilidad σ_t , y un activo libre de riesgo B_t .*

Dado X un contrato con fecha de vencimiento T , definimos una estrategia de replicación para X como el portfolio auto-financiado (ϕ_t, ψ_t) que verifica $\int_0^T \sigma_t^2 \phi_t dt < \infty$ y $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X$.

En tal caso, diremos que X es replicado por el portfolio (ϕ_t, ψ_t) .

Definición 6.7 (Mercado completo). *Se dice que el mercado es completo si todos los derivados financieros pueden ser replicados.*

Dado un contrato X , si existiera una estrategia de replicación (ϕ_t, ψ_t) , entonces el precio de X en tiempo t debe ser $V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t$, es más, en tiempo 0 será $V_0 = \phi_0 S_0 + \psi_0 B_0$. En caso de ser distinto, podríamos hacer dinero de manera ilimitada, veamos porque esto es así.

Supongamos que $C(X)$ es el precio del contrato derivado X en tiempo t . Si fuese $C(X) < V_t$ entonces podríamos comprar una unidad de X y vender un portfolio (ϕ_t, ψ_t) generando un beneficio de $C(X) - V_t$. En fecha de vencimiento, al ser (ϕ, ψ) auto-financiado, se tendrá que $V_T = X$ de modo que el pago del portfolio vendido queda cubierto por X . Por tanto, hemos generado beneficios sin riesgo ninguno.

De igual forma, si $C(X) > V_t$, en tiempo t podemos vender un contrato X por $C(X)$ y usar este capital para construir un portfolio (ϕ_t, ψ_t) . Nuestra cartera estará compuesta por (ϕ_t, ψ_t) y $C(X) - V_t > 0$ unidades monetarias. En fecha de vencimiento, al ser (ϕ, ψ) auto-financiado, se tendrá que $V_T = X$ de modo que el pago del contrato X vendido queda cubierto por (ϕ, ψ) . Al igual que antes, hemos generado beneficios sin riesgo ninguno.

Estas situaciones se conocen como situaciones de arbitraje, esto es, una posibilidad de generar beneficios sin tomar ningún tipo de riesgo. La principal asunción que haremos es que el mercado con el que trabajaremos es eficiente, esto es, no es posible encontrar situaciones de arbitraje. Esto implica que todos los instrumentos que toman lugar dentro del mercado financiero tienen un único precio.

6.2. El Modelo de Black-Scholes

Una vez expuestos todos los conceptos necesarios para motivar nuestro objetivo, pasemos a definir el mercado financiero bajo el que trabajaremos.

Las principales hipótesis bajo las que definiremos nuestro modelo son las siguientes:

- i. **Eficiente.** No es posible encontrar situaciones de arbitraje.
- ii. **Líquido.** El intercambio de activos puede darse en cualquier instante de tiempo y podemos intercambiar activos que no tenemos en posesión.
- iii. **Libre de comisiones.** No hay costes adicionales por cada transacción.

El modelo de mercado que vamos a considerar será el conocido como Modelo de Black-Scholes. Este fue el primer modelo formal que solucionaba el problema de dar precio a las diferentes opciones. Fue desarrollado de manera independiente por Fischer Black y Myron Scholes, de forma conjunta, y Robert Merton en 1976. La solución propuesta suponía, además de las propiedades antes mencionadas, que el mercado estaba compuesto por un activo libre de riesgo, un activo con riesgo y una opción.

Black, Scholes y Merton resolvieron el problema determinando el valor de un portfolio replicante de manera exacta mediante la solución de una ecuación en derivadas parciales. Sin embargo, nosotros veremos la misma solución desde otro punto de vista, lo haremos mediante un argumento basado en la Teoría de Martingalas. El desarrollo realizado por Black, Scholes y Merton puede consultarse en el Capítulo 3 de [20].

La aparición de estas fórmulas lideraron un boom en el mercado de las opciones. Fue tal que, en 1997, Merton y Scholes recibieron el Premio Nobel en Economía por sus trabajos. Puesto que Black murió en 1995, no pudo ser galardonado. A pesar de ello, fue mencionado en la ceremonia como gran contribuidor.

Este modelo, como comentamos con anterioridad, asume que el mercado financiero se compone de un activo con riesgo, denominado *stock* y denotado por S_t , y un activo sin riesgo, denominado cuenta bancaria o *bono* y denotado por B_t .

Definición 6.8 (Activo libre de riesgo). *El proceso B_t que define el activo libre de riesgo viene dado por su forma dinámica*

$$dB_t = r_t B_t dt$$

donde r_t es un proceso adaptado. Observamos que, en concreto, $B_t = B_0 \exp\{\int_0^t r_s ds\}$.

Una interpretación de este proceso es que este corresponde con un deposito bancario con una tasa de interés por unidad de tiempo r (que puede ser estocástica). Cuando r es una constante, que es el caso del modelo de Black-Scholes, podemos interpretar B_t como el valor de un bono en tiempo t .

En cuanto al activo con riesgo, como motivamos en el capítulo anterior, los procesos de difusión son usados para modelar los precios de estos activos y, en efecto, el Modelo de Black-Scholes así lo considera. En concreto, este modelo asume que el activo con riesgo sigue un movimiento Browniano

Geométrico. Como vimos en la Sección 5.3.2, S_t viene dado por su forma dinámica como

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

siendo μ el retorno medio y σ la volatilidad.

Definición 6.9 (Modelo de Black-Scholes). *El Modelo de Black-Scholes consiste en dos activos cuya expresiones dinámicas son:*

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \\ dB_t &= r B_t dt \end{aligned}$$

donde r , μ y σ son constantes deterministas.

Nota. De la Sección 5.3.2 deducimos que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}. \quad (6.1)$$

Una vez presentado el modelo bajo el que vamos a trabajar, pasamos a desarrollar las herramientas necesarias que nos permitirán alcanzar nuestro objetivo.

6.3. Teoría de martingalas

La teoría de integración estocástica está íntimamente ligada a la teoría de martingalas, y a su vez, la teoría moderna de los derivados financieros está basada en la teoría de martingalas. Debido a la gran importancia de este campo utilizaremos esta sección para introducir el concepto de martingala y los principales resultados que usaremos en la construcción de las estrategias de replicación.

Para ello, consideremos una filtración dada $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$, donde, como explicamos en el anterior capítulo, debemos entender este concepto como el de la información generada por la observación de todos los elementos hasta tiempo t . De aquí, tenemos la siguiente definición

Definición 6.10 (\mathbb{P} -martingala). *Un proceso estocástico M_t es una martingala con respecto a una medida de probabilidad \mathbb{P} si y solo si*

- $E_{\mathbb{P}}(|M_t|) < \infty$ para todo t ;
- $E_{\mathbb{P}}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ para todo $s \leq t$.

La condición principal es la segunda, la cual nos dice que el valor esperado de en un futuro dada la información hasta el instante presente es precisamente el valor este instante. En otras palabras, podemos decir que una martingala no tiene tendencia sistemática.

Veamos algunos de los principales ejemplos con los que trabajaremos:

Ejemplo 6.4. Un \mathbb{P} -movimiento browniano W_t es una \mathbb{P} -martingala.

Para probarlo necesitamos ver que $E_{\mathbb{P}}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$. Para ello, tendremos en cuenta que $W_t - W_s$ es independiente de \mathcal{F}_s y al ser idénticamente distribuido a una $N(0, t - s)$ se tendrá que $E_{\mathbb{P}}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = 0$. De aquí que

$$E_{\mathbb{P}}[W_t | \mathcal{F}_s] = E_{\mathbb{P}}[W_s | \mathcal{F}_s] + E_{\mathbb{P}}[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = W_s$$

Ejemplo 6.5. Para cualquier instrumento derivado, X , que depende solamente de lo ocurrido hasta fecha de vencimiento T , el proceso $E_t = E_{\mathbb{P}}[X|\mathcal{F}_t]$ es una \mathbb{P} -martingala sea cual sea la medida de probabilidad \mathbb{P} .

Esto se debe a la propiedad conocida como “tower law” ([1], p. 5), la cual nos afirma que

$$E[E[X|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = E[X|\mathcal{F}_s]$$

para $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Luego, en efecto, E_t sería martingala.

Este último ejemplo será muy importante para la construcción de nuestras estrategias de replicación.

Una vez definido el concepto de martingala, un resultado realmente interesante es que dadas M_t y N_t dos \mathbb{P} -martingalas sin, a priori, relación alguna, bajo ciertas condiciones podemos encontrar un proceso ϕ_t que nos permita escribir una en función de otra. Este resultado se conoce como Teorema de Representación de Martingalas:

Teorema 6.1 (Teorema de Representación de Martingalas). *Sea M_t una \mathbb{P} -martingala, cuya volatilidad σ_t satisface la condición de que (con probabilidad 1) es no nula. Entonces, si N_t es otra \mathbb{P} -martingala, existe un proceso ϕ_t \mathcal{F} -adaptado tal que $\int_0^T \phi_t^2 \sigma_t^2 dt < \infty$ y N_t puede ser escrito como*

$$N_t = N_0 + \int_0^t \phi_s dM_s.$$

o, de forma equivalente, $dN_t = \phi_s dM_s$. Además, ϕ es única.

Con este resultado, y recordando que la definición de nuestras ecuaciones diferenciales estocásticas venía dada por una interpretación integral del tipo (5.6), nos podríamos preguntar si todo proceso cuya diferencial asociada no tiene dt -términos es una martingala, y de forma recíproca, si un proceso que es martingala tiene asociada una forma diferencial que no tiene dt -términos.

Esta última implicación parece sencilla de probar gracias al último resultado que acabamos de conocer. En efecto, Sea X_t una \mathbb{P} -martingala y sea W_t un \mathbb{P} -BM, del Teorema de representación de martingalas se deduce la existencia de un proceso ϕ_t adaptado a \mathcal{F} tal que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi_s dW_s,$$

que es precisamente la forma integral de la diferencial $dX_t = \phi_t dW_t$, que carece de dt -término.

Además, aunque de forma menos sencilla, puede demostrarse que bajo ciertas condiciones la primera implicación también se cumple. Esto queda recogido en los siguientes resultados:

Teorema 6.2 (Caracterización de Martingalas I). *Sea X_t un proceso estocástico tal que*

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

y además $E[(\int_0^T \sigma_s^2 ds)^{1/2}] < \infty$, entonces

$$X_t \text{ es martingala} \Leftrightarrow \mu_t \equiv 0.$$

Alternativamente, con el objetivo de simplificar la comprobación de la condición técnica del anterior teorema, se tiene el siguiente resultado

Teorema 6.3 (Caracterización de Martingalas II). *Sea X_t un proceso estocástico tal que*

$$dX_t = \sigma_t X_t dW_t$$

para algún proceso σ_t \mathcal{F} -adaptado, si $E[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds)] < \infty$ entonces X_t es una martingala.

Por tanto, ya sabemos identificar cuando un proceso de difusión es martingala mediante su forma diferencial. Además, sabemos que dadas dos martingalas definidas sobre el mismo espacio de probabilidad, existe un proceso auxiliar que nos permite establecer una relación entre ambas.

Recordamos que nuestro objetivo era dar precio a aquellos contratos que sean del tipo $X = \Psi(S_t)$, luego si S_t fuese martingala quizás podríamos establecer alguna relación entre E_t (definida en el Ejemplo 6.5) y S_t .

Sin embargo, el activo S_t que aparece en el modelo de Black-Scholes no es una martingala bajo el espacio de probabilidad en el que esta definido, aunque... ¿podríamos cambiar la medida de probabilidad de manera que el proceso no quede alterado y sí sea martingala bajo esta nueva medida?

6.3.1 Cambio de medida. El Teorema de Cameron-Martin-Girsanov.

Hasta ahora hemos ignorado la importancia de la medida de probabilidad y es que, en realidad, W_t no es estrictamente un movimiento browniano por sí solo. Es realidad, se tiene que, bajo cierta medida de probabilidad \mathbb{P} , W_t es un \mathbb{P} -movimiento browniano (\mathbb{P} -BM). De este modo, la formulación que planteamos para las SDEs describen el comportamiento del proceso X_t con respecto a la medida de probabilidad que hace de W_t un movimiento Browniano.

En esta sección veremos como varía dicho comportamiento según la medida de probabilidad que consideremos. Para ello, comencemos dando la siguiente definición

Definición 6.11 (Medidas equivalentes). *Las medidas \mathbb{P} y \mathbb{Q} son equivalentes si están definidas sobre el mismo espacio de probabilidad (Ω, S) y, además, verifican que si $A \in S$ entonces*

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) > 0.$$

Esto es, cualquier suceso que sea posible bajo una medida también lo es para la otra, y viceversa.

Imaginemos ahora que tenemos un proceso $\{X_t, t \geq 0\}$ definido sobre un espacio de probabilidad (Ω, S) . Sin embargo, tenemos definidas sobre este dos medidas distintas, \mathbb{P} y \mathbb{Q} . ¿Podríamos relacionar el comportamiento de X_t bajo estas dos medidas de alguna manera? La respuesta es que sí, siempre y cuando sean equivalentes.

Definición 6.12 (Derivada de Radon-Nikodym). *Dadas \mathbb{P} y \mathbb{Q} medidas equivalentes y un tiempo T , podemos definir una variable aleatoria, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, definida sobre las \mathbb{P} -posibles observaciones, tomando valores reales positivos, tal que*

- i. $E_{\mathbb{Q}}(X_T) = E_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X_T)$
- ii. $E_{\mathbb{Q}}(X_t | \mathcal{F}_s) = \zeta_s^{-1} E_{\mathbb{P}}(\zeta_t X_t | \mathcal{F}_s) \quad s \leq t \leq T.$

donde ζ_t es el proceso $E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_t)$ y X_t es cualquier proceso adaptado a \mathcal{F}_t .

Nota. La derivada Radon-Nikodym puede interpretarse como el límite

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(w) = \lim_{A \rightarrow \{\omega\}} \frac{\mathbb{Q}(A)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Veamos un ejemplo que nos hará entender mejor que consecuencias tiene lo anteriormente expuesto. Supongamos que W_t es un \mathbb{P} -BM. ¿Como se comportará W_t bajo una medida equivalente \mathbb{Q} ? ¿Seguirá siendo un movimiento Browniano?

Ejemplo 6.6. Consideramos W_t un \mathbb{P} -BM, entonces definimos una medida equivalente \mathbb{Q} mediante

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T)$$

para cierto valor de tiempo T . Veremos que W_t es un movimiento browniano con un coeficiente de desviación $-\gamma$ bajo \mathbb{Q} .

Para ello, debemos estudiar la función de densidad de W_t bajo \mathbb{Q} , o algo con lo que podamos corroborar nuestro resultado. Sabiendo que W_t debe seguir la distribución de un $N(-\gamma t, t)$, podemos abordar este problema mediante la función generatriz de momentos.

Comencemos cuando $t = T$, en tal caso, la propiedad (i) de la Definición 6.12 nos dice que

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}[\exp\{\theta W_T\}] &= E_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \exp\{\theta W_T\}] \\ &= E_{\mathbb{P}}\{\exp(-\gamma W_T - \frac{1}{2}\gamma^2 T + \theta W_T)\} \\ &= \exp\{(-\frac{1}{2}\gamma^2 T + \frac{1}{2}(\theta - \gamma)^2 T)\} \end{aligned}$$

puesto que $W_T \sim N(0, T)$ bajo \mathbb{P} . Por tanto,

$$E_{\mathbb{Q}}[\exp\{\theta W_T\}] = \exp\{-\theta\gamma T + \frac{1}{2}\theta^2 T\}$$

que, en efecto, es la función generatriz de momentos de una $N(-\gamma T, T)$.

Ahora, para $t < T$, usando nuestros dos resultados acerca de $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$, vamos a probar las tres condiciones para que $\widetilde{W}_t = W_t + \gamma t$ sea un movimiento browniano:

- i. $\widetilde{W}_0 = 0$;
- ii. $\widetilde{W}_s \sim N(0, s)$ bajo \mathbb{Q} ;
- iii. $\widetilde{W}_{t+s} - \widetilde{W}_t \sim N(0, s)$ independiente de \mathcal{F}_t .

La propiedad (i) es trivial, mientras que la propiedad (ii) es un caso particular de la propiedad (iii) cuando $t = 0$. Por tanto, bastaría con probar (iii). En primer lugar, observamos que es equivalente a probar

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(\widetilde{W}_{t+s} - \widetilde{W}_t)) \mid \mathcal{F}_t) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 s).$$

De la propiedad (ii) de la Definición 6.12, se tiene que,

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(W_{t+s} - W_t + \gamma s)) \mid \mathcal{F}_t) = \zeta_t^{-1} E_{\mathbb{P}}(\zeta_{t+s} \exp(\theta(W_{t+s} - W_t + \gamma s)) \mid \mathcal{F}_t), \quad (6.2)$$

donde $\zeta_t = E_{\mathbb{P}}(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \mid \mathcal{F}_t)$. Además, podemos reescribir $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ como

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 T) \exp(-\gamma(W_T - W_t))$$

donde $W_T - W_t \sim N(0, T - t)$ independiente de \mathcal{F}_t . De aquí, haciendo uso de la función generatriz de una distribución normal, tenemos

$$\begin{aligned} \zeta_t &= \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 T) \exp(\frac{1}{2}\gamma^2(T - t)) \\ &= \exp(-\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t). \end{aligned}$$

De aquí y (6.2), operando algebraicamente se deduce

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_t)) \mid \mathcal{F}_t) = \exp(\theta\gamma s - \frac{1}{2}\gamma^2 s) E_{\mathbb{P}}(\exp((\theta - \gamma)(W_{t+s} - W_t)) \mid \mathcal{F}_t).$$

Bajo el hecho de que $W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$ independiente de \mathcal{F}_s , se tendrá que,

$$E_{\mathbb{Q}}(\exp(\theta(\tilde{W}_{t+s} - \tilde{W}_t)) \mid \mathcal{F}_t) = \exp(\theta\gamma t - \frac{1}{2}\gamma^2 t) \exp(\frac{1}{2}(\theta - \gamma)^2 s) = \exp(\frac{1}{2}\theta^2 s),$$

justo como queríamos probar.

Con este ejemplo, hemos visto que W_t y \tilde{W}_t son ambos movimientos brownianos pero bajo diferentes medidas. Es decir, el hecho de cambiar de \mathbb{P} a \mathbb{Q} solo altera la probabilidad de que un camino se de o no. Por tanto, un cambio de medida puede convertir un movimiento browniano estándar a uno con desviación, y viceversa. Esto queda recogido en el siguiente e importante resultado:

Teorema 6.4 (Teorema de Cameron-Martin-Girsanov). *Sea W_t un \mathbb{P} -BM y sea γ_t un proceso \mathcal{F} -adaptado que satisface la condición $E_{\mathbb{P}}[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds)] < \infty$, entonces existe una medida de probabilidad \mathbb{Q} tal que*

- \mathbb{Q} es equivalente a \mathbb{P} ,
- $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(-\int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds)$,
- $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$ es un \mathbb{Q} -BM.

Teorema 6.5 (Cameron-Martin-Girsanov converse). *Sea W_t un \mathbb{P} -BM y sea \mathbb{Q} una medida equivalente a \mathbb{P} , entonces existe un proceso γ_t un proceso \mathcal{F} -adaptado tal que*

$$\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \gamma_s ds$$

es un \mathbb{Q} -BM. Además, la Radon-Nikodym derivative de \mathbb{Q} con respecto a \mathbb{P} (en tiempo T) es

$$\exp(-\int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds).$$

El Teorema de C-M-G afecta solo a movimientos brownianos pero, en cierta medida, todos los procesos que estamos estudiando derivan de estos. En las siguientes líneas veremos como hacemos de este teorema una poderosa herramienta que nos permitirá controlar el drift de cualquier proceso.

Supongamos que X_t es un proceso estocástico tal que

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

donde W es un \mathbb{P} -BM. Supongamos que queremos encontrar una medida \mathbb{Q} tal que la desviación de X_t bajo \mathbb{Q} sea v_t en lugar de μ_t . En primer lugar observamos que podemos escribir dX_t como

$$dX_t = \sigma_t \left(\left(\frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t} \right) dt + dW_t \right) + v_t dt.$$

En tal caso, si consideramos $\gamma_t = \frac{\mu_t - v_t}{\sigma_t}$ y es tal que verifica la condición del C-M-G Theorem, existirá \mathbb{Q} tal que $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \frac{\mu_s - v_s}{\sigma_s} ds$ es un \mathbb{Q} -BM. Esto implica que la diferencial de X_t bajo \mathbb{Q} es

$$dX_t = v_t dt + \sigma_t \tilde{W}_t$$

donde \tilde{W}_t es un \mathbb{Q} -BM y cuya desviación es la deseada.

Llegados a este punto, ya tenemos las herramientas necesarias para construir estrategias de replicación que nos permitan dar precio a los diferentes derivados financieros definidas bajo el Modelo de Black-Scholes.

6.4. Estrategias de replicación. Fórmula de Black-Scholes

Haciendo un pequeño resumen, comenzamos definiendo el concepto de \mathbb{P} -martingala y vimos que dada un contrato cualquiera X , el proceso $E_{\mathbb{P}}[X|\mathcal{F}_t]$ era siempre una \mathbb{P} -martingala (indiferentemente de la medida de probabilidad).

Posteriormente, vimos la relación que mantienen, bajo ciertas condiciones, dos martingalas definidas bajo la misma medida de probabilidad mediante el Teorema de Representación de Martingalas. De aquí pudimos deducir una caracterización de martingalas mediante su expresión diferencial y un resultado adicional que, en determinados casos, evitaba la comprobación de una condición técnica del resultado anterior.

Llegados a este punto, nuestro objetivo era relacionar los procesos de difusión y las martingalas. Para ello, basamos nuestro estudio en ver como afectaba un cambio de medida al comportamiento de estos.

En primer lugar, vimos como un cambio en la medida de probabilidad podía convertir un movimiento browniano en otro con diferente coeficiente de desviación. De aquí que, sabiendo que un proceso de difusión es, en cierta medida, un movimiento browniano hicimos del anterior resultado una herramienta que nos permitía modificar la tendencia asociada a un proceso de difusión.

La idea ahora es, haciendo uso de todos estos resultados, encontrar una medida de probabilidad, \mathbb{Q} , bajo la que el precio de los activos sea martingala y hacer uso del Teorema de Representación de Martingalas para encontrar una relación entre estos y $E_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t]$. Una vez hecho esto, mediante una estrategia de replicación, construir un portfolio autofinanciado con el que poder dar precio a este tipo de contratos.

6.4.1 Tasa de interés nula

En primer lugar, para ponernos en situación, estudiemos el caso en el que el parámetro r asociado al activo sin riesgo, B_t , es 0. En tal caso, se tendrá que $B_t \equiv 1$.

Consideramos un contrato X con fecha de vencimiento en un instante futuro T . Nuestro objetivo es encontrar una estrategia replicante mediante el uso de un portfolio (ϕ, ψ) .

Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

- i. Encontrar una medida de probabilidad bajo la que S_t sea una martingala.
- ii. Bajo esta medida, formar el proceso $E_t = E[X|\mathcal{F}_t]$.
- iii. Encontrar un proceso \mathcal{F} -adaptado que verifique $dE_t = \phi_t dS_t$.
- iv. Construir una estrategia de replicación.

El stock viene dado por un movimiento browniano geométrico, esto es,

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Para convertir S_t en una martingala debemos de eliminar el coeficiente de desviación (el dt -termino) de esta SDE. Para ello, tenemos la herramienta del Teorema de Cameron-Martin-Girsanov.

Definimos $\gamma_t \equiv \mu/\sigma = \gamma$, de modo que γ_t verifica la condición del Teorema C-M-G. Como consecuencia, podemos asegurar la existencia de una medida de probabilidad \mathbb{Q} tal que $\widetilde{W}_t = W_t + \gamma t$ es un \mathbb{Q} -BM. Esto implica que, bajo \mathbb{Q} , podemos escribir

$$dS_t = \sigma S_t d\widetilde{W}_t$$

consiguiendo nuestro objetivo de eliminar el coeficiente de desviación. Ahora bien, por el Teorema 6.3, al ser σ constante, tendremos que S_t es una \mathbb{Q} -martingala. Con esto concluimos el primer paso de nuestro esquema.

El segundo paso ya fue expuesto en el Ejemplo 6.5. Bajo cualquier medida de probabilidad \mathbb{Q} , el proceso $E_t = E[X|\mathcal{F}_t]$ es una \mathbb{Q} -martingala.

Ahora, puesto que tanto S_t como E_t son martingalas bajo la misma medida de probabilidad, aplicando el Teorema de Representación de Martingalas, podemos encontrar un proceso ϕ_t tal que

$$E_t = E[X|\mathcal{F}_t] = E_{\mathbb{Q}}[X] + \int_0^t \phi_s dS_s,$$

de modo que, $dE_t = \phi_t dS_t$.

Llegados a este punto, ya estamos en condiciones de construir una estrategia de replicación. Recordamos que buscamos un portfolio autofinanciado (ϕ_t, ψ_t) tal que $V_T = E_T = X$.

Para ello, podemos intentar construir un portfolio tal que $V_t = E_t$ en cada instante t . La manera más sencilla de hacerlo es tomando $\psi_t = E_t - \phi_t S_t$, de modo que,

$$V_t = \phi_t S_t + \psi_t B_t = \phi_t S_t + E_t - \phi_t S_t = E_t.$$

Pero, ¿qué proceso es ϕ_t ? Teniendo en cuenta que $dB_t \equiv 0$, se tendrá que, al ser portfolio autofinanciado,

$$dV_t = dE_t = \phi_t dS_t + \psi_t 0 = \phi_t dS_t.$$

Por tanto, el proceso ϕ_t existe y es además el proceso resultante de la aplicación del Teorema de Representación de Martingalas.

Una vez presentada la estrategia de replicación, el precio del contrato X en cada instante de tiempo t será el valor del portfolio (ϕ_t, ψ_t) en el instante t , es decir, V_t . En concreto, en el instante 0, el precio del contrato será $V_0 = E_0 = E_{\mathbb{Q}}[X]$, esto es, el valor del contrato será la esperanza de X bajo la medida de probabilidad que hace de S_t una martingala.

Es muy importante resaltar esto último y es que esta esperanza no es la esperanza "real" sino la esperanza bajo una medida de probabilidad alternativa. Puesto que los contratos dependen de S_t , esto implica que calcular el valor esperado, bajo \mathbb{Q} , significa calcular el valor esperado de alguna función de S_t . De modo que, si S_t es un proceso desagradable bajo \mathbb{Q} , entonces calcular su valor esperado también lo será.

Por suerte, bajo el Modelo de Black-Scholes, S_t es también un movimiento browniano geométrico bajo \mathbb{Q} . De la Sección 5.3.2 podemos deducir que, en efecto, $S_t = \exp\{\sigma \widetilde{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\}$. De aquí que su distribución sea conocida y no habrá mayores problemas en valorar contratos del tipo $X = \Psi(S_t)$.

6.4.2 Tasa de interés no nula

Una vez familiarizados con el procedimiento a seguir para la construcción de estrategia de replicación, podemos considerar el caso más general, aquel en el que la constante r es no nula.

En primera instancia, podemos estar tentados a asumir que la medida de probabilidad bajo la que S_t es martingala también nos proporciona la manera de valorar cualquier contrato X bajo este nuevo modelo. Sin embargo, veremos con un ejemplo sencillo esto no es así.

Supongamos que hemos acordado intercambiar, en un instante futuro T , un activo cuyo valor hoy es S_0 . Bajo el Modelo de Black-Scholes, siendo $r \neq 0$, y haciendo uso un argumento de no arbitraje,

es fácil comprobar que el precio de este intercambio debe ser $S_0 \exp\{rT\}$. Este tipo de contrato se conoce como *forward* y su precio, debido al argumento de no arbitraje, sería 0.

Sin embargo, si \mathbb{Q} fuese una medida de probabilidad bajo la que S_t es martingala, entonces

$$E_{\mathbb{Q}}[S_T - S_0 \exp\{rT\}] = S_0(1 - \exp\{rT\}) \neq 0.$$

De modo que, como comentamos con anterioridad, este argumento no es valido para valorar contratos en esta situación.

Por tanto, nuestra estrategia de valorar bajo la medida \mathbb{Q} que hace que S_t sea martingala solo nos sirve cuando r es 0. En el momento en que esto no se verifica, el crecimiento continuo del valor de B_t no puede ser obviado.

Sin embargo, una forma de eludir este problema puede ser descontando todas las variables que intervienen en el proceso. De este modo, considerando todos estos instrumentos descontados quizás nuestro argumento sí sea valido. Para ello, veamos si aplicando esta idea podemos encontrar una estrategia de replicación.

Comenzamos considerando B_t^{-1} , proceso que usaremos para descontar. A partir de este, definimos el stock descontado, $Z_t = B_t^{-1}S_t$, y el contrato descontado, $B_t^{-1}X$. Ahora bien, ¿tiene Z_t una SDE asociada? Veremos que haciendo uso del Lema de Itô podemos encontrar una SDE para Z_t .

Definimos el proceso $L_t = \log(Z_t)$, de modo que,

$$\begin{aligned} L_t &= \log(B_t^{-1}S_t) = \log(B_t^{-1}) + \log(S_t) \\ &= -rt + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t = (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t \end{aligned}$$

De aquí que

$$Z_t = \exp\{L_t\} = \exp\{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\} = f(t, W_t)$$

Luego estamos en disposición de aplicar el Lema de Itô:

$$\begin{aligned} dZ_t &= df(t, W_t) = \{(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)Z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 Z_t\}dt + \sigma Z_t dW_t \\ &= (\mu - r)Z_t dt + \sigma Z_t dW_t \end{aligned}$$

Una vez que ya tenemos la forma diferencial del proceso Z_t , nuestros pasos a seguir son los mismos que en el caso anterior.

En primer lugar, convirtamos Z_t en martingala. Para ello, haciendo uso del Teorema de C-M-G, tomando el proceso constante $\gamma_t = (\mu - r)/\sigma$ sabemos de la existencia de una medida \mathbb{Q} y un proceso $\widetilde{W}_t = W_t + t(\mu - r)/\sigma$, que es movimiento browniano bajo \mathbb{Q} , tal que

$$dZ_t = \sigma Z_t d\widetilde{W}_t$$

Esto implica que Z_t es \mathbb{Q} -martingala y, puesto que $E_t = E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1}X|\mathcal{F}_t]$ también lo es, el Teorema de Representación de Martingalas nos proporciona un proceso \mathcal{F} -adaptado ϕ tal que $dE_t = \phi_t dZ_t$.

Por último, debemos de encontrar el portfolio que replique los pagos futuros, esto es, encontrar (ϕ_t, ψ_t) tal que en fecha de vencimiento $V_T = \phi_T S_T + \psi_T B_T = X = B_T E_T$. Nuestra estrategia será parecida a la que hicimos en el caso anterior. Consideramos un proceso ϕ_t y definimos $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$. De esta manera $V_t = B_t E_t$ como deseamos.

Tan sólo falta ver qué proceso debe ser ϕ_t para que este portfolio sea autofinanciado. En el caso anterior vimos que este era aquel que nos proporcionaba el Teorema de Representación de Martingalas, veamos si en este caso ocurre igual. Consideramos ϕ_t aquel que verifica $dE_t = \phi_t dZ_t$.

Al ser $V_t = B_t E_t$, la regla del producto (Ejemplo 5.5) nos dice que

$$dV_t = d(B_t E_t) = B_t dE_t + E_t dB_t.$$

Debido a la elección de ϕ_t , se tiene que

$$dV_t = B_t \phi_t dZ_t + E_t dB_t$$

También, de $\psi_t = E_t - \phi_t Z_t$, deducimos que $E_t = \psi_t + \phi_t Z_t$, luego

$$\begin{aligned} dV_t &= B_t \phi_t dZ_t + (\psi_t + \phi_t Z_t) dB_t \\ &= \phi_t (B_t dZ_t + Z_t dB_t) + \psi_t dB_t. \end{aligned}$$

Y de nuevo, por la regla del producto se tiene que

$$dV_t = \phi_t dS_t + \psi_t dB_t$$

luego el portoflio (ϕ_t, ψ_t) es autofinanciado y constituye una estrategia de replicación.

En conclusión, bajo el mercado financiero modelado a través del Modelo de Black-Scholes todo contrato derivado X , con fecha de vencimiento T (adaptado a \mathcal{F}_T), tiene asociado una estrategia de replicación (ϕ_t, ψ_t) . Además, el valor del contrato X en el instante t es:

$$V_t = B_t E_{\mathbb{Q}}[B_T^{-1} X | \mathcal{F}_t] = \exp\{-r(T-t)\} E_{\mathbb{Q}}[X | \mathcal{F}_t]$$

donde \mathbb{Q} es la medida de probabilidad que hace de el stock descontado, $B_t^{-1} S_t$, una \mathbb{Q} -martingala.

Por último, veamos como podemos usar este resultado para valorar distintos tipos de opciones, alcanzando el principal resultado que deriva de este modelo, la Fórmula de Black-Scholes para valorar opciones europeas.

Call Europea

Como comentamos en la Definición 6.3, una opción financiera es un contrato entre dos partes que da a su comprador la opción, y nunca la obligación, de comprar/vender/intercambiar cierto activo subyacente en un instante futuro, T , a un precio fijado hoy, K . En concreto, una opción Call se caracteriza por la opción de poder comprar este activo en dicha fecha de vencimiento. Por tanto, se tendrá que $X = \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+$.

Nuestro objetivo es calcular el valor de dicho contrato en el instante en el que este se lleva acabo. Como indicamos anteriormente, esto es,

$$\exp\{-rT\} E_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+], \quad (6.3)$$

donde \mathbb{Q} es la medida de probabilidad que hace de $B_t^{-1} S_t$ una \mathbb{Q} -martingala.

Observamos que, en este caso, la expresión $(S_T - K)^+$ solo depende de la variable aleatoria S_T . Veamos que distribución sigue bajo \mathbb{Q} :

Puesto que, bajo el Modelo de Black-Scholes, se tiene que $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, se deduce que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}. \quad (6.4)$$

De la aplicación del Teorema C-M-G, sabemos que $\widetilde{W}_t = W_t + \frac{\mu-r}{\sigma}t$ es un movimiento browniano bajo \mathbb{Q} . Reemplazando \widetilde{W}_t por W_t en (6.4), tenemos que

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widetilde{W}_t\right\},$$

destacando la desaparición del coeficiente μ . Además, se tiene que S_t sigue siendo un movimiento browniano geométrico bajo \mathbb{Q} . Es más, si definimos $Z \sim N(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$, entonces podremos escribir S_T como $S_0 \exp\{rT + Z\}$. De este modo, calcular (6.3) es equivalente a calcular

$$\exp\{-rT\}E\left((S_0 \exp\{rT + Z\} - K)^+\right), \quad (6.5)$$

esto es,

$$\int_{\log \frac{K}{S_0} - rT}^{\infty} (S_0 e^x - K e^{-rT}) h(x) dx, \quad (6.6)$$

donde $h(x)$ es la función de densidad de Z

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2T}} e^{-\frac{\left(x + \frac{\sigma^2}{2}T\right)^2}{2\sigma^2T}}. \quad (6.7)$$

Esta integral puede descomponerse, mediante un cambio de variables, en dos integrales que representen la acumulación de una variable normal estándar como se indica en ([1]).

De este modo, si denotamos $\Phi(x)$ como la función de distribución de una variable aleatoria $N(0, 1)$, se tiene que

$$V_0 = S_0 \Phi(D^+) - K e^{-rT} \Phi(D^-) \quad (6.8)$$

donde

$$D^+ = \frac{\left(\log \frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}} \quad (6.9)$$

y

$$D^- = \frac{\left(\log \frac{S_0}{K} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}, \quad (6.10)$$

cuya principal interpretación es que el valor del contrato solo depende de su volatilidad, σ , y no de su rendimiento, μ . Esta expresión es la conocida como Fórmula de Black-Scholes.

Put Europea

Siguiendo un proceso análogo, es posible encontrar una expresión para el valor de un contrato Put, donde ahora tenemos la opción de vender este activo subyacente, luego se tendrá que $X = \max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+$. Esta expresión es la siguiente:

$$V_0 = K e^{-rT} \Phi(-D^-) - S_0 \Phi(-D^+) \quad (6.11)$$

donde D^+ y D^- son los anteriormente expuestos.

7. Conclusiones

A. Extractos de código

Con la ayuda de [\[26\]](#)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

class Brownian():
    """
    A Brownian motion class constructor
    """
    def __init__(self, x0=0):
        """
        Init class
        """
        assert (type(x0)==float or type(x0)==int or x0 is None), "
            Expect_a_float_or_None_for_the_initial_value"

        self.x0 = float(x0)

    def gen_random_walk(self, n_step=100):
        """
        Generate motion by random walk

        Arguments:
            n_step: Number of steps

        Returns:
            A NumPy array with 'n_steps' points
        """
        # Warning about the small number of steps
        #if n_step < 30:
        #    print("WARNING! The number of steps is small. It may
        #        not generate a good stochastic process sequence!")

        w = np.ones(n_step)*self.x0

        for i in range(1, n_step):
            # Sampling from the Normal distribution with
            # probability 1/2
            yi = np.random.choice([1, -1])
            # Wiener process
            #w[i] = w[i-1] + (yi/np.sqrt(n_step))
            w[i] = w[i-1] + yi

        return w

def gen_brownianmotion(
```

```

        self,
        s0=0,
        sigma=1,
        deltaT=100,
        dt=0.2
    ):
        """
        a
        """
        n_step = int(deltaT/dt)

        # Warning about the small number of steps
        if n_step < 30:
            print("WARNING!_The_number_of_steps_is_small._It_may_
                  not_generate_a_good_stochastic_process_sequence!")

        w = np.ones(n_step)*self.x0

        for i in range(1,n_step):
            # Sampling from the Normal distribution with
              probability 1/2
            yi = np.random.choice([1,-1])
            # Weiner process
            w[i] = w[i-1]+yi*sigma*np.sqrt(dt)

        return w

def gen_brownianmotiondrift(
    self,
    s0=0,
    mu=0.5,
    sigma=1,
    deltaT=100,
    dt=0.2
    ):
    """
    a
    """
    n_step = int(deltaT/dt)
    time_vector = np.linspace(0,deltaT,num=n_step)

    # Warning about the small number of steps
    if n_step < 30:
        print("WARNING!_The_number_of_steps_is_small._It_may_
              not_generate_a_good_stochastic_process_sequence!")

    w = np.ones(n_step)*self.x0

    w = self.gen_brownianmotion(s0, sigma, deltaT, dt) + mu*
        time_vector

```



```

    return w

def gen_normal(self,n_step=100):
    """
    Generate motion by drawing from the Normal distribution

    Arguments:
        n_step: Number of steps

    Returns:
        A NumPy array with 'n_steps' points
    """
    if n_step < 30:
        print("WARNING!_The_number_of_steps_is_small._It_may_not_generate_a_good_stochastic_process_sequence!")

    w = np.ones(n_step)*self.x0

    for i in range(1,n_step):
        # Sampling from the Normal distribution
        yi = np.random.normal()
        # Weiner process
        w[i] = w[i-1]+(yi/np.sqrt(n_step))

    return w

def gen_geombrownianmotion(
    self,
    s0=100,
    mu=0.2,
    sigma=0.68,
    deltaT=100,
    dt=0.2
):
    """
    Models a geometric brownian motion  $S(t)$  using the Weiner
    process  $W(t)$  as
    ' $S(t) = S(0).exp\{\mu.t+sigma.W(t)\}$ '

    Arguments:
        s0: Initital value, default 100
        mu: 'Drift' (upwards or downwards), default 0.2
        sigma: 'Volatility', default 0.68
        deltaT: The time period for which the process is
            computed, default 100
        dt (optional): The granularity of the time-period,
            default 0.2

```

```

Returns:
    s: A NumPy array with the simulated process over the
        time-period deltaT
    """
    n_step = int(deltaT/dt)
    time_vector = np.linspace(0,deltaT,num=n_step)
    # Stock variation
    drift = mu*time_vector
    # Forcefully set the initial value to zero for the stock
    price simulation
    self.x0=0
    # Wiener process (calls the 'gen_normal' method)
    weiner_process = sigma*self.gen_normal(n_step)
    # Add two time series, take exponent, and multiply by the
    initial stock price
    s = s0*(np.exp(drift+weiner_process))

    return s

```

Extracto de código A.1: Clase Brownian()

```

b = Brownian()

def plot_random_walk(n_step):
    """
    Plots random walk for multiple scenarios
    """

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111)
    ymax = 0
    ymin = 0

    for i in range(4):
        y = b.gen_random_walk(n_step=n_step)
        plt.plot(y, linewidth=2)
        if (ymax < max(y)):
            ymax=max(y)
        if (ymin > min(y)):
            ymin=min(y)

    ax.set_yticks(np.arange(ymin, ymax+1, 1.0)) #setting the ticks
    ax.set_xticks(np.arange(0, n_step+1, 1.0)) #setting the ticks

    plt.ylabel('Posici n')
    plt.xlabel('Step')

    plt.grid()
    plt.show()

```

Extracto de código A.2: Random Walk

```

b = Brownian()

def plot_bm(sigma):
    """
    Plots brownian motion for multiple scenarios
    """

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111)

    for i in range(70):
        y = b.gen_brownianmotion(sigma=sigma)
        plt.plot(y, linewidth=1)

    plt.hlines(y=0, xmin=0, xmax=500, linestyle = '--', color = 'k'
    )

    plt.ylabel('Posici n')
    plt.xlabel('Step')

    plt.grid()
    plt.show()

```

Extracto de código A.3: Brownian Motion

```

b = Brownian()

def plot_bmdrift(mu, sigma):
    """
    Plots brownian motion with drift for multiple scenarios
    """

    fig = plt.figure()
    ax = fig.add_subplot(111)

    for i in range(70):
        y = b.gen_brownianmotiondrift(mu=mu, sigma=sigma)
        plt.plot(y, linewidth=1)

    x = np.linspace(0, 500, 100)
    plt.plot(x, mu*0.2*x, linestyle = '--', color = 'k')

    plt.ylabel('Posici n')
    plt.xlabel('Step')

    plt.grid()
    plt.show()

```

Extracto de código A.4: Brownian Motion with drift

```

b = Brownian()

def plot_gbm(mu, sigma):
    """
    Plots geometric brownian motion for multiple scenarios
    """
    plt.figure(figsize=(9,4))
    for i in range(10):
        plt.plot(b.gen_geombrownianmotion(mu=mu, sigma=sigma))
    plt.hlines(y=100,xmin=0,xmax=520,
               linestyle='--',color='k')
    x = np.linspace(0,500,100)
    plt.plot(x, 100*np.exp(mu*0.2*x), linestyle = '--', color = 'k'
             )
    plt.ylabel('Posici n')
    plt.xlabel('Step')
    plt.show()

```

Extracto de código A.5: Geometric Brownian Motion

```

def call(x):
    y = []
    for a in x:
        y.append(max(a-15,0))
    return y

x=np.linspace(0,30,300)

plt.plot(x,call(x))
plt.xlabel('ST')
plt.ylabel('X')

```

Extracto de código A.6: Payoff Call Europea

```

def put(x):
    y = []
    for a in x:
        y.append(max(15-a,0))
    return y

x=np.linspace(0,30,300)

plt.plot(x,put(x))
plt.xlabel('ST')
plt.ylabel('X')

```

Extracto de código A.7: Payoff Call Europea

B. Bibliography

- [1] Conditional expectations, filtration and martingales, 2013. Massachusetts Institute of Technology. URL https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013/lecture-notes/MIT15_070JF13_Lec9.pdf.
- [2] Quadratic variation property of Brownian motion, 2013. Massachusetts Institute of Technology. URL https://ocw.mit.edu/courses/sloan-school-of-management/15-070j-advanced-stochastic-processes-fall-2013/lecture-notes/MIT15_070JF13_Lec8.pdf.
- [3] Aureli Alabert. Introduccion a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Universitat Autònoma de Barcelona, 2004.
- [4] Louis Bachelier. Théorie de la spéculation. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure, volume 17, pages 21–86, 1900.
- [5] Martin Baxter and Andrew Rennie. Financial calculus: an introduction to derivative pricing. Cambridge University Press, 1996.
- [6] Tomas Björk. Arbitrage theory in continuous time. Oxford University Press, 2009.
- [7] Robert Brown. A brief account of microscopical observations made in the months of june, july and august 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. The Philosophical Magazine, 4(21):161–173, 1828.
- [8] Albert Einstein et al. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. Annalen der physik, 17(549-560):208, 1905.
- [9] Angeliki Ermogenous. Brownian motion and its applications in the stock market. 2006.
- [10] John C. Hull. Options futures and other derivatives. Pearson Education India, 2003.
- [11] Ricardo Vélez Ibarrola. Introducción al Movimiento Browniano. Univeridad Nacional de Educación a Distancia, 2005.
- [12] Kiyosi Itô. 109. stochastic integral. Proceedings of the Imperial Academy, 20(8):519–524, 1944.
- [13] Kiyosi Itô. On a formula concerning stochastic differentials. Nagoya Mathematical Journal, 3: 55–65, 1951.
- [14] Gregory F. Lawler and Vlada Limic. Random walk: a modern introduction, volume 123. Cambridge University Press, 2010.
- [15] Mario Lefebvre. Applied stochastic processes. Springer Science & Business Media, 2007.
- [16] Joseph C. Majdalani. Asymptotic expansions of special functions. 2003. URL http://majdalani.eng.auburn.edu/courses/06_perturbations_2/handout_p6_SpFuncExps.pdf.

- [17] Rahul R. Marathe and Sarah M. Ryan. On the validity of the geometric brownian motion assumption. The Engineering Economist, 50(2):159–192, 2005.
- [18] Maheran Mohd Jaffar and Siti Zainol Abidin. A review on geometric brownian motion in forecasting the share prices in bursa malaysia. World Applied Sciences Journal, 17, 2012.
- [19] Maheran Mohd Jaffar and Siti Zainol Abidin. Forecasting share prices of small size companies in bursa malaysia using geometric brownian motion. Applied Mathematics & Information Sciences, 8, 2014.
- [20] Andrew Papanicolaou. Introduction to stochastic differential equations (sdes) for finance. arXiv preprint arXiv:1504.05309, 2015.
- [21] Grigorios A. Pavliotis. Applied stochastic processes. Imperial College London, 2009.
- [22] K. Reddy and V. Clinton. Simulating stock prices using geometric brownian motion: Evidence from australian companies. Australasian Accounting, Business and Finance Journal, 10(3):23–47, 2016.
- [23] Sheldon M. Ross. An elementary introduction to mathematical finance. Cambridge University Press, 2011.
- [24] Sheldon M. Ross. Introduction to probability models. Academic Press, 2014.
- [25] Paul A. Samuelson. Rational theory of warrant pricing. Industrial Management Review, 6: 13–39, 1965.
- [26] Tirthajyoti Sarkar. Brownian motion with python. 2020. URL <https://towardsdatascience.com/brownian-motion-with-python-9083ebc46ff0>.
- [27] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces. Princeton University Press, 2009.
- [28] Thorvald N. Thiele. Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthode des moindres carrés. C. A. Reitzel, 1880.