Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Lógica Matemática I

Grupo 4284

Profesor: M. en C. Fernando Javier Nuñez Rosales

Ayudante: Hugo Víctor García Martínez

Notas de clase: Francisco García Reyes

Definición.

Una *proposición* es una sentencia o enunciado al que se le puede asignar un valor de verdad.

Ejemplo

1. AMLO es el mejor presidente que ha tenido México.
2. Este enunciado es falso.

En 2. supongamos que el enunciado es $\boxed{verdadero}$. Así, lo que dice es cierto. Así, el enunciado es $\boxed{falso}$. Supongamos, por otro lado que es $\boxed{falso}$, así, lo que dice es falso. Por lo que lo verdadero es lo contrario a lo que dice, es decir, el enunciado es $\boxed{verdadero}$.

1. sí es proposición.
2. no es proposición.

Definición.

Una *función proposicional* es un enunciado o afirmación que contempla algún tipo de variable y que cuando se consideran valores fijos para las variables, este se convierte en una proposición.

Ejemplos

1. "x es el mejor presidente que ha tenido México."
2. "$x < y$"
3. "$x \in y$"
4. "$x = \sup A$"

Definición.

Una *tipo de semejanza* es un conjunto de la siguiente forma

$$\tau = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{O}_m\right) \cup \mathscr{C}$$

donde

1. Ningún símbolo de τ es la sucesión de otros símbolos en τ.
2. Para cada $n \in \mathbb{Z}^{>0}$, el conjunto $\mathcal{R}_n$ se dirá que es un conjunto de *letras relacionales* de aridad n.
3. Para cada $m \in \mathbb{Z}^{>0}$, el conjunto $\mathcal{O}_m$ se dice que es de *letras funcionales* de aridad m.
4. Nada obliga a los uniendos a **no** ser vacíos.
5. Los elementos del conjunto $\mathscr{C}$ se llaman *constantes*.

1. $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$

   $\mathcal{R}_2 = \{\leq\}$, $\mathcal{R}_n = \varnothing$ si $n \neq 2$

   $\mathcal{O}_2 = \{+, \cdot\}$, $\mathcal{O}_n = \varnothing$ si $n \neq 2$

   $\mathscr{C} = \{0, 1\}$.

   Así, $\tau_1 = \{\leq\} \cup \{+, \cdot\} \cup \{0, 1\}$
2. $(\mathbb{Z}, +, 0)$

   $\mathcal{R}_n = \varnothing$ para toda n

   $\mathcal{O}_2 = \{+\}$, $\mathcal{O}_n = \varnothing$ si $n \neq 2$

   $\mathscr{C} = \{0\}$.

   $\tau_2 = \{+\} \cup \{0\}$
3. $(\mathbb{N}, +, 0)$

   $\tau_3 = \{+\} \cup \{0\}$
4. $(G, *, e)$

   $\mathcal{R}_n = \varnothing$

   $\mathcal{O}_2 = \{*\}$, $\mathcal{O}_m = \varnothing$ si $m \neq 2$

   $\mathscr{C} = \{e\}$.

   Así, $\tau_4 = \{*\} \cup \{e\}$

Definición.

Sea U un conjunto no vacío y f una función. Se dice que f es una *operación sobre* U si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ tal que $f : U^n \to U$.

Espacios vectoriales.

Sea $\mathbb{F} = (F, +, \cdot, 0^{\mathbb{F}}, 1^{\mathbb{F}})$ un campo y $\mathbb{V} = (V, +^{\mathbb{V}}, 0)$.
$+$ es conmutativa, asociativa, tiene neutros y es 0 es inútil.
Para cada $\alpha \in F$ y $x \in V$, $\quad \alpha x \in V$.
Para toda $\alpha, \beta \in F, x \in V$, $\quad (\alpha +^{\mathbb{F}} \beta)x = \alpha x +^{\mathbb{V}} \beta x$.
Para toda $\alpha \in F$, para toda $x, y \in V$, $\quad \alpha(x +^{\mathbb{V}} y) = \alpha x +^{\mathbb{V}} \alpha y$.

$\tau_{\text{ev}} = \varnothing \cup \{+^{\mathbb{V}}\} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in F\} \cup \{0^{\mathbb{V}}\}$

Espacios vectoriales normados.

$(\mathbb{V}, \|\ \ \|)$. $\mathbb{V}$ es espacio vectorial y $\|\ \ \| : V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ tal que

$$\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$
$$\|\alpha \vec{v}\| = |\alpha| \|\vec{v}\|$$
$$\|\vec{v} + \vec{u}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{u}\|$$

$\tau_{\text{evn}} = \tau_{\text{ev}} \cup \{R_r \mid r \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$
Se entiende $R_r \subseteq V$ con $R_r = \{\vec{v} \in V \mid \|\vec{v}\| = r\}$

Definición.

Sea $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos. Se define

(1) $A_1 \times A_2 = \{(a, b) \mid a \in A_1 \text{ y } b \in A_2\}$

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ par ordenado de Kuratowski.

$(a, b) = (x, y) \iff a = x \text{ y } b = y$.

---

(2) $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} = (A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$

(3) Dado un conjunto A, se dice que el conjunto R es una *relación n-aria sobre A* si y sólo si $R \subseteq A^n$.

(4) f una función se llama *operación sobre* A si y sólo si existe $m \in \mathbb{Z}^{>0}$ tal que $f : A^m \to A$.

Ejemplo en (3).

$\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n < m\}$
$\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n \mid m\}$
$\{(n,m,l) \in \mathbb{Z}^3 \mid n \equiv_l m\}$

Estructuras de primer orden o estructuras elementales.

Nos interesa la conducta entre cada uno de sus elementos.

Definición (Interpretación para un tipo de semejanza).

Sea τ un tipo de semejanza y A un conjunto no vacío. Se define una *interpretación para* τ *sobre el conjunto* A como una función

$$I : \tau \to \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(A^n) \right)$$

donde ${}^{B}C = \{f \subseteq B \times C \mid f \text{ función}\}$ tal que

1. Para todo $R \in \mathcal{R}_n$, $\quad R^{\mathfrak{A}} = I(R) \in \mathscr{P}(A^n)$,
2. Para todo $f \in \mathcal{O}_m$, $\quad f^{\mathfrak{A}} = I(f) : A^m \to A$
3. Para cada $c \in \mathscr{C}$, $\quad I(c) \in A$

Definición.

Sea τ un tipo de semejanza, A un conjunto no vacío e I una función interpretación para τ sobre A. Se define como una τ-*estructura elemental* al par $\mathfrak{A} = (A, I)$.

De ahora en adelante se escribirá para estos casos lo siguiente:

1. $s \in \tau \quad s^{\mathfrak{A}} = I(s)$
2. $\mathfrak{A} = \left(A, \left\{ R^{\mathfrak{A}} \mid R \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_n \right\}, \left\{ f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{O}_m \right\}, \left\{ c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \mathscr{C} \right\} \right)$

Definición.

Una *estructura elemental* es una cuarteta ordenada de la forma

$$\mathfrak{A} = (A, \mathcal{R}, \mathcal{O}, \mathscr{C})$$

donde

1. A es un conjunto no vacío.
2. $\mathcal{R}$ es un conjunto de relaciones sobre A (con aridades "distintas").
3. $\mathcal{O}$ es un conjunto de operaciones sobre A.
4. $\mathscr{C} \subseteq A$.

Ejemplos.

1. $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \varnothing, \{+^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}\}, \{0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}\})$

   donde $+^{\mathfrak{R}}$ es la suma real, $\cdot^{\mathfrak{R}}$ es el producto real, $0^{\mathfrak{R}}$ el cero real, $1^{\mathfrak{R}}$ el uno real.

2. $\mathfrak{A} = (\mathscr{P}(\mathbb{N}), \varnothing, \{+^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}\}, \{0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}\}) \quad x, y \subseteq \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x +^{\mathfrak{A}} y &= x \cup y \\ x \cdot^{\mathfrak{A}} y &= x \cap y \\ 0^{\mathfrak{A}} &= \varnothing \\ 1^{\mathfrak{A}} &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ejemplos con el tipo $\tau = \{+, \cdot\} \cup \{0, 1\}$.

$A = \mathbb{R} \quad +^{\mathfrak{A}} =$ suma real $\quad \cdot^{\mathfrak{A}} =$ producto real $\quad 0^{\mathfrak{A}} =$ cero real $\quad 1^{\mathfrak{A}} =$ uno real

$A = \mathbb{R}[x] \quad +^{\mathfrak{A}} =$ suma de polinomios $\quad \cdot^{\mathfrak{A}} =$ producto de polinomios
$0^{\mathfrak{A}} =$ polinomio cero $\quad 1^{\mathfrak{A}} =$ polinomio uno

$A = \mathfrak{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) \quad +^{\mathfrak{A}} =$ suma de matrices $\quad \cdot^{\mathfrak{A}} =$ producto de matrices
$0^{\mathfrak{A}} =$ matriz cero $\quad 1^{\mathfrak{A}} =$ matriz identidad

$A = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \quad +^{\mathfrak{A}} = \cup \quad \cdot^{\mathfrak{A}} = \cap \quad 0^{\mathfrak{A}} = \varnothing \quad 1^{\mathfrak{A}} = \mathbb{N}$

$A = \mathbb{N} \quad +^{\mathfrak{A}} =$ suma natural $\quad \cdot^{\mathfrak{A}} =$ producto natural $\quad 0^{\mathfrak{A}} = 0 \quad 1^{\mathfrak{A}} = 1$

$A = \mathbb{Z} \quad +^{\mathfrak{A}} = \text{suma entera} \quad \cdot^{\mathfrak{A}} = \text{producto entero} \quad 0^{\mathfrak{A}} = 0 \quad 1^{\mathfrak{A}} = 1$

$A = C[X, \mathbb{R}] \quad \forall g, h \in C[X, \mathbb{R}] \quad (g +^{\mathfrak{A}} h)(x) = g(x) +^{\mathfrak{R}} h(x) \quad (g \cdot^{\mathfrak{A}} h)(x) = g(x) \cdot^{\mathfrak{R}} h(x)$
$0^{\mathfrak{A}}(x) = 0 \quad 1^{\mathfrak{A}}(x) = 1$

Ejemplos con el tipo $\tau = \{f_1^2\} \cup \{c\}$.

Dado un grupo

$$(G, *, e) \qquad * : G \times G \to G \qquad e \in G$$

$A = S_n = \{g : \{1, \dots, n\} \to \{1 \dots, n\} \mid g \text{ biyectiva}\}$
$(f_1^2)^{\mathfrak{A}} = \circ$ composición $\quad c^{\mathfrak{A}} = \mathrm{id}(\{1, \dots, n\})$

$A = S_\infty = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid g \text{ biyectiva}\} \quad (f_1^2)^{\mathfrak{A}} = \circ$ composición $\quad c^{\mathfrak{A}} = \mathrm{id}(\mathbb{N})$

$A = (0, \infty) \quad (f_1^2)^{\mathfrak{A}} =$ producto real $\quad c^{\mathfrak{A}} = 1$ real

$A = \mathbb{N} \quad (f_1^2)^{\mathfrak{A}} = +^{\mathfrak{A}}$ suma natural $\quad c^{\mathfrak{A}} = 1$

$A = \mathbb{N} \quad (f_1^2)^{\mathfrak{A}} = +^{\mathfrak{A}}$ suma natural $\quad c^{\mathfrak{A}} = 28$

Ejemplos con el tipo $\tau = \{R\} \subseteq \mathcal{R}_2$.

$A = \mathbb{N} \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n < m\}$

$A = \mathbb{N} \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(n, m) \mid 2n = m\}$

$A = \{x \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \mid x \text{ triángulo}\} \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \mid x \text{ semejante a } y\}$

Cualquier relación de equivalencia

$A = \mathbb{Z} \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(n, m) \mid \exists k(n \cdot k = m)\}$

$A = \mathscr{P}(\mathbb{N}) \quad R^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in \mathscr{P}(\mathbb{N}) \times \mathscr{P}(\mathbb{N}) \mid x \subseteq y\}$

$A = \mathbb{Z}$ Fijo un natural k, $R^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n \equiv_k m\}$

$A = \{x \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \text{ es una recta}\}$ $R^{\mathfrak{A}} = \{(x, y) \mid x \| y\}$

¿Cuál es el tipo de semejanza para obtener a los reales como $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado?

$\tau_{\mathbb{R}-\mathrm{ev}} = \{P_r \mid r \in \mathbb{R}\} \cup \{+\} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{c\}$

$A = \mathbb{R}$

Si $a, b \in \mathbb{R}$ $a +^{\mathfrak{A}} b = a +^{\mathfrak{R}} b$

Para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha^{\mathfrak{A}}(r) = \alpha r$

$c^{\mathfrak{A}} = 0$

$P_r^{\mathfrak{A}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \|x\| = r\}$

$A = \mathbb{R}^n$

$+^{\mathfrak{A}} =$ suma de n-adas

$f_\alpha^{\mathfrak{A}}((a_1, \ldots, a_n)) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n)$

$c^{\mathfrak{A}} = (0, \ldots, 0)$

$P_r^{\mathfrak{A}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \|a_1, \ldots, a_n\| = r\}$

Definición (Lenguaje de primer orden).

Sea τ un tipo de semejanza. Se definen los *símbolos del lenguaje de primer orden del tipo* τ y se le llamará

$$\mathcal{L}_\tau = \tau \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{\exists, \forall\} \cup \{\approx\} \cup \{\ ),(,\text{'}\ \}$$

---

donde

τ	es el tipo de semejanza,
$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$	las variables,
$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$	conectivos lógicos,
$\{\exists, \forall\}$	cuantificadores,
$\{\approx\}$	la igualdad,
$\{\ ),(,\text{'}\ \}$	símbolos auxiliares.

Definición (Término).

Sea τ un tipo de semejanza. Se define el conjunto de τ-*términos*, (si no hay peligro de confusión solo se llamarán *términos*) como el conjunto de sucesiones finitas de elementos de $\mathcal{L}_\tau$ tales que $\mathbf{TRM}_\tau$ denota el conjunto de τ-términos y se tiene que

$$\mathbf{TRM}_\tau \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{Z}^{>0}} (\mathcal{L}_\tau)^n$$

que cumple las siguientes cláusulas.

(A) $\mathscr{C} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ las constantes y las variables son términos.

(B) Si $f \in \mathcal{O}_m \subseteq \tau$ y $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{TRM}_\tau$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{TRM}_\tau$.

(C) Solo son términos los construidos con (A) y (B).

Ejemplos de términos para el tipo de semejanza $\tau_{\mathbf{ev}-\mathbb{R}} = \{+\} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \cup \{c_0\}$

1. $c_0 \in \mathbf{TRM}_\tau$
2. $f_2(c_0) \in \mathbf{TRM}_\tau$
3. $x_{26} + x_{35} \in \mathbf{TRM}_\tau$
4. $f_{31}(x_{28} + x_{35}) \in \mathbf{TRM}_\tau$
5. $f_{28}(x_{28} + x_{35}) \in \mathbf{TRM}_\tau$

¿El siguiente es un término?

$$(((f_7((x_0 \cdot x_0) \cdot x_0)) + f_2(x_0 \cdot x_0)) + x_0)$$

$$7x^3 + 2x^2 + x$$

Observación (Metateorema de lectura única para términos).

Sea τ un tipo de semejanza y $t \in \mathbf{TRM}_\tau$. Así, se cumple una y sólo una de las siguientes.

1. t es una constante de τ ó t es una variable.
2. Existen $n \in \mathbb{Z}^{>0}$, $f \in \mathcal{O}_n$ y $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{TRM}_\tau$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

¿El siguiente es un término?

$$(((f_7((x_0 \cdot x_0) \cdot x_0)) + f_2(x_0 \cdot x_0)) + f_1(x_0))$$

Ejemplo de término

$$f_2(f_3(x_0 + f_7(x_1)))$$

Usando lectura única para términos:

$$\begin{array}{rl} f_2(f_3(x_0 + f_7(x_1))) & \text{es término, si} \\ f_3(x_0 + f_7(x_1)) & \text{es término, si} \\ x_0 + f_7(x_1) & \text{es término, si} \\ x_0 \text{ es término y si } f_7(x_1) & \text{es término, si} \\ x_1 & \text{es término} \end{array}$$

x_0 sí es término por (A) y x_1 también es término por (A).
$\therefore$ $(f_2(f_3(x_0 + f_7(x_1)))$ sí es término.

Ejemplo de NO término

$$f_2 + x_0$$

Usando lectura única para términos:

$$\begin{array}{rl} f_2 + x_0 & \text{es término, si} \\ f_2 \text{ es término y } x_0 \text{ es término.} & \end{array}$$

Pero f_2 NO es término, x_0 sí es término por (A).
$\therefore$ $f_2 + x_0$ NO es término.

Definición.

Sea $\mathscr{A}$ un conjunto de símbolos, donde ningún símbolo de $\mathscr{A}$ es la sucesión de otros símbolos en él. Se define *la estrella de Kleene de $\mathscr{A}$*, como

$$\mathscr{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{A}^n$$

$\mathscr{A}^0 = \{\varnothing\}$ la palabra vacía.

Definición (Asignación para las variables).

Sea τ un tipo de semejanza y $\mathfrak{A}$ una τ-estructura elemental, es decir

$$\mathfrak{A} = \langle A, \{R^{\mathfrak{A}} \mid R \in \bigcup_{n=1} \mathscr{R}_n\}, \{f^{\mathfrak{A}} \mid f \in \bigcup_{m=1} \mathscr{O}_m\}, \{c^{\mathfrak{A}} \mid c \in \mathscr{C}\}\rangle.$$

Una asignación para las variables en la τ-estructura $\mathfrak{A}$ será una función

$$s : \mathbb{N} \to A.$$

Informalmente, el hada s "convierte" a las variables en términos de A.

Definición (Interpretación de un τ-término).

Sea τ un tipo de semejanza y $\mathfrak{A}$ una τ-estructura elemental y $s : \mathbb{N} \to A$ una asignación para las variables. Para cada $t \in \mathbf{TRM}_\tau$ se define por recursión sobre $\mathbf{TRM}_\tau$ *la interpretación de t en $\mathfrak{A}$ bajo s* y se denota con $t^{\mathfrak{A}}[s]$,

1. (Paso base).

   a) Si $c \in \mathscr{C}$, entonces $c^{\mathfrak{A}}[s] = c^{\mathfrak{A}}$.

   b) Si $t = x_n$, entonces $x_n^{\mathfrak{A}}[s] = s(n)$.

2. (Paso recursivo).

   Sea $m \in \mathbb{Z}^{>0}$, $f \in \mathcal{O}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{TRM}_\tau$ tales que para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $t_i^{\mathfrak{A}}[s]$,

$$(f(t_1, \ldots, t_m))^{\mathfrak{A}}[s] = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[s], \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}[s])$$

Ejemplo.

Sea el tipo de semejanza $\tau_{\mathrm{AP}} = \{\mathrm{s}\} \cup \{+, \cdot\} \cup \{c_0\}$ y sea la estructura $\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, {c_0}^{\mathfrak{N}} \rangle$, donde $\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}$ es la sucesor, $+^{\mathfrak{N}}$ la suma, $\cdot^{\mathfrak{N}}$ el producto, ${c_0}^{\mathfrak{N}} = 0$. Tomemos las asignaciones $\mathsf{a}_1(n) = 1$ y $\mathsf{a}_2(m) = m$.

1. ${c_0}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1] = {c_0}^{\mathfrak{N}} = 0$

   ${c_0}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2] = {c_0}^{\mathfrak{N}} = 0$

2. $(\mathrm{s}(c_0))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1] = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}({c_0}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1]) = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(0) = 1$

   $(s(c_0))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2] = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}({c_0}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2]) = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(0) = 1$

3. $(\mathrm{s}(x_2) + \mathrm{s}(\mathrm{s}(x_3))))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1] = (\mathrm{s}(x_2))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1] +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}(\mathrm{s}(x_3)))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1]$

   $= (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}({x_2}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1])) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}(x_3))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1]) = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathsf{a}_1(2)) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_3^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_1])))$

   $= \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(1) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathsf{a}_1(3)))) = 2 +^{\mathfrak{N}} \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(1)) = 5$

   $(\mathrm{s}(x_2) + \mathrm{s}(\mathrm{s}(x_3))))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2] = (\mathrm{s}(x_2))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2] +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}(\mathrm{s}(x_3)))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2]$

   $= (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}({x_2}^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2])) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}(x_3))^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2]) = \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathsf{a}_2(2)) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(x_3^{\mathfrak{N}}[\mathsf{a}_2])))$

   $= \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(2) +^{\mathfrak{N}} (\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathsf{a}_2(3)))) = 3 +^{\mathfrak{N}} \mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(\mathrm{s}^{\mathfrak{N}}(3)) = 3 + 5 = 8$

Definición

Un término algebraico es un arreglo de la forma αx^n donde $\alpha \in \mathbb{R}$, x una incógnita y $n \in \mathbb{N}$. Se llama *polinomio* a la suma de términos algebraicos de la forma

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots, \alpha_n x^n \left(= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \right)$$

Sea el tipo de semejanza $\tau_{\mathbb{R}} = \{\leq\} \cup \{+, \cdot\} \cup \{c_0, c_1\}$. Considere x una variable de $\mathcal{L}_{\tau_{\mathbb{R}}}$. Se define por recursión sobre $n \in \mathbb{N}$ el término x^n como sigue

$$x_0^0 = c_1$$
$$x_0^{n+1} = x_0^n \cdot x_0$$

Así $x_0^n \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$.

Paso base.
P.D. $x_0^0 \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$

$$x_0^0 = c_1 \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}} \text{ por (A)}$$

(HI) Supongamos que $x_0^n \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$.
P.D. $x_0^{n+1} \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$

$$x_0^{n+1} = x_0^n \cdot x_0$$

Pero $\cdot \in \mathcal{O}_2$, $x_0 \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$ por (A) y por HI $x_0^n \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$.
Usando (B), $x_0^n \cdot x_0 \in \mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$ $\square$.

Considere el polinomio

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots, \alpha_n x^n$$

Así el $\tau_{\mathbb{R}}$-término $x_1 + (x_2 \cdot x_0) + (x_3 \cdot x_0^2) + \cdots + (x_{n+1} \cdot x_0^n)$

Teorema fundamental del Álgebra:

Todo polinomio de grado n tiene por lo menos una raíz.

$\varphi \leftrightharpoons \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_{n+1} (\neg (c_0 \approx x_{n+1}) \to \exists x_0 (x_0 + x_2 x_0 + \cdots + x_{n+1} x_0^n \approx c_0))$

$$\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad \text{(TFA)}$$

Observación

Se puede construir una representación de $\mathbb{N}$ en $\mathbf{TRM}_{\tau_{\mathbb{R}}}$.

$$\begin{aligned} \overline{0} &= c_0 \\ \overline{n+1} &= \overline{n} + c_1 \end{aligned}$$

$$\overline{1} = \overline{0+1} = \overline{0} + c_1 = c_0 + c_1$$

$$\overline{2} = \overline{1+1} = \overline{1} + c_1 = c_0 + c_1 + c_1$$

$$\overline{3} = \overline{2+1} = \overline{2} + c_1 = c_0 + c_1 + c_1 + c_1$$

Para el siguiente ejemplo tomar a *como* s *la asignación*

$(x_0^n)^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}]$

$(x_0^0)^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] = {c_1}^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] = {c_1}^{\mathfrak{R}} = 1$

$(x_0^{n+1})^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] = (x_0^n \cdot x_0)^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] = (x_0^n)^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} {x_0}^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] = (x_0^n)^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} \mathsf{a}[0]$

Ejemplo.
Sea $\mathsf{a}(x_n) = \dfrac{1}{n+1}$.

$$(x_1 + (x_2 \cdot x_0) + ((x_3 \cdot x_0^2) + (x_4 \cdot x_0^3)))^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}]$$

$$\begin{aligned} &= x_1^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] +^{\mathfrak{R}} (x_2^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}]) +^{\mathfrak{R}} (x_3^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} (x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}])) \\ &\quad +^{\mathfrak{R}} (x_4^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} (x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot^{\mathfrak{R}} (x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}] \cdot x_0^{\mathfrak{R}}[\mathsf{a}]))) \end{aligned}$$

Teorema fundamental de las bases

Toda función lineal definida en una base se puede extender a todo el espacio.

Sean V y W espacios vectoriales, $\beta \subseteq V$ una base para V y $\varphi : \beta \to W$ lineal, es decir,
$\varphi(\lambda\vec{x}) = \lambda\varphi(\vec{x})$ con $\lambda \in \mathbb{F}, \vec{x} \in \beta$
$\forall \vec{x}, \vec{y}(\varphi(\vec{x} + \vec{y} = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y}))$

Definición (τ-fórmulas atómicas).

Sea τ un tipo de semejanza. Se define la clase de las τ-fórmulas atómicas $\mathbf{ATM}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\tau^*$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{ATM}_\tau = &\{(t_1 \approx t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbf{TRM}_\tau\} \\ &\cup \{R(t_1, \ldots, t_m) \mid m \in \mathbb{Z}^{>0}, R \in \mathcal{R} \text{ y } t_i \in \mathbf{TRM}_\tau\} \end{aligned}$$

Ejemplo.

Sea $\tau_{\mathbb{R}} = \{\leq\} \cup \{+, \cdot\} \cup \{c_0, c_1\}$

$$(c_0 \approx c_1) \in \mathbf{ATM}_\tau$$
$$(x_{28} + x_{35} \leq c_0) \in \mathbf{ATM}_\tau$$
$$(c_0 \leq c_1) \in \mathbf{ATM}_\tau$$

Definición (τ-fórmulas).

Sea τ un tipo de semejanza. Se define la clase de las τ-fórmulas $\mathbf{FRM}_\tau \subseteq \mathcal{L}_\tau^*$

(A) $\mathbf{ATM}_\tau \subseteq \mathbf{FRM}_\tau$

(B) Suponga que $\varphi, \psi \in \mathbf{FRM}_\tau$ y x una variable, así:

$(\neg\varphi) \in \mathbf{FRM}_\tau$, $(\varphi \to \psi) \in \mathbf{FRM}_\tau$ $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \mathbf{FRM}_\tau$ $(\varphi \wedge \psi) \in \mathbf{FRM}_\tau$

$(\varphi \vee \psi) \in \mathbf{FRM}_\tau$ $(\exists x\varphi) \in \mathbf{FRM}_\tau$ $(\forall x\varphi) \in \mathbf{FRM}_\tau$

(C) Los únicos elementos de $\mathbf{FRM}_\tau$ son los construidos con (A) y (B).

Sea $\tau_{\mathbb{P}} = \{\leq\} \cup \{\,|\,\} \cup \{\equiv_k \mid k > 0\} \cup \{s\} \cup \{+, \cdot\} \cup \{c_0, c_1\}$

$$(c_0 \equiv_{28} c_1)$$

$$(x_{28} \leq c_0)$$

$$((x_1 + (x_2 \cdot x_3) \equiv_3 (x_2 \cdot ((s(x_3)) + x_{28})))$$

$$((c_= \mid (x_2 + x_3))$$

$$(x_2 \mid (x_3 \cdot (x_{28} + x_{35})))$$

Hilbert:
“Nadie podrá expulsarnos jamás del paraíso que Cantor construyó para nosotros”.

“Tendremos que saber, sabremos”.

Programa de Hilbert

Fundamentaremos la matemática desde la consistencia.

Área de la matemática $\rightsquigarrow$ axiomas.

Se dirá que el área está validada syss desde la teoría no se demuestran contradicciones.

Aritmética

Teoremas de Gödel

Aritmética: $\mathbb{N}, s, +, \cdot, 0$

Conjuntos: Pertenencia $\in$

El tipo de semejanza para la teoría de conjuntos es $\tau = \{\in\}$.

$$(\exists x(\forall z(\neg(z \in x)))) \text{ es } \mathbf{FRM}_{\{\in\}}$$

$$(\forall x(\forall y(\forall w((w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x \approx y)))) \text{ es } \mathbf{FRM}_{\{\in\}}$$

pues $w \in x$ es $\mathbf{ATM}_\tau$, $w \in y$ es $\mathbf{ATM}_\tau$, $x \approx y$ es $\mathbf{ATM}_\tau$
así $(w \in x \leftrightarrow w \in y)$ es $\mathbf{FRM}_\tau$, entonces $((w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x \approx y)$ es $\mathbf{FRM}_\tau$,
$(\forall w((w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x \approx y))$ es $\mathbf{FRM}_\tau$
$(\forall y(\forall w((w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x \approx y)))$ es $\mathbf{FRM}_\tau$
Por lo tanto, $(\forall x(\forall y(\forall w((w \in x \leftrightarrow w \in y) \to x \approx y))))$ es $\mathbf{FRM}_\tau$

$$(\forall x(\forall y(\exists z(\forall w((w \in z) \leftrightarrow ((w \approx x) \vee (w \approx x) \vee (w \approx y)))))))$$

$$(\forall x(\exists y(\forall z((z \in y) \to (\exists w((z \in w) \wedge (w \in x)))))))$$

$$\bigcup x = \{z \mid (\exists w((z \in w) \wedge (w \in x)))\}$$

$$\forall x \exists y \forall z((z \in y) \leftrightarrow z \subseteq x) \text{ pero } z \subseteq x \text{ abrevia } \forall w((w \in z) \to (w \in x))$$

$$(\forall x(\exists y(\forall z((z \in y) \leftrightarrow (\forall w((w \in z) \to (w \in x)))))))$$

$$(\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall z(z \in x \to z \cup \{z\} \in x)))$$

¿Cómo se ve la Lógica de Proposiciones?

$$L = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\rightarrow, \neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow\} \cup \{), (\}$$
$$\overline{L} \subseteq L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

1. $P_n \in \overline{L}$
2. $A, B \in \overline{L}$, entonces $(\neg A), (A \star B) \in \overline{L}$ con $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$
3. Todo elemento de $\overline{L}$ viene de 1 o 2.

Ejemplos:

- P_n
- $(P_m \star P_n)$
- $(\neg P_m)$
- $(P_n \star (P_m \star P_k))$
- $((P_m \star P_k) \star P_n)$

Asignaciones

$$v : L \rightarrow \{0, 1\}$$
$$v(P_m) = \begin{cases} 0 & P_m \text{ falso} \\ 1 & P_m \text{ verdadero} \end{cases}$$

$$\overline{v} : \overline{L} \rightarrow \{0, 1\} \text{ tal que}$$

$\overline{v}(\alpha \wedge \beta) = \overline{v}(\alpha)\overline{v}(\beta)$

$\overline{v}(\alpha \vee \beta) = \text{máx}\{\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)\}$

$\overline{v}(\neg \alpha) = 1 - \overline{v}(\alpha)$

Teorema

Sea $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos tal que, $\forall n, m$ si $n \leq m$ entonces $A_n \subseteq A_m$. Si $k > 0$ y $a_1, \ldots, a_k \in \bigcup_{n < \omega} A_n$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $a_1, \ldots, a_k \in A_M$

Teorema

Si $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists a_n \in \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m \right) \setminus A_n$, entonces $|\{a_n : n \in \mathbb{N}\}| = \aleph_0$.

Naturales

$$
\begin{aligned}
0 =& \varnothing \\
1 =& \{0\} \\
2 =& \{0, 1\} \\
3 =& \{0, 1, 2\} \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

$m + 1 = \{0, \dots, m\}$

Infinito potencia vs infinito actual

Definición (Cantor-finito). Un conjunto a se dice *finito* si $\exists n \in \mathbb{N}$ y $\exists : n \to a$ biyectiva.

Un conjunto es Cantor-infinito si y sólo si no es Cantor-finito.

Definición (Dedekind-infinito).
Un conjunto X es *Dedekind-infinito* si $\exists E \subsetneq X$ tal que $E \sim X$

(AE) *Dedekind-infinito* si y sólo si *Cantor-infinito*

Definición (Ocurrencia).

Para x una variable y $t \in \mathbf{TRM}_\tau$, se define la relación "x *ocurre en* t".

1. x ocurren en y si y sólo si $x = y$.
2. x ocurren en c no pasa.
3. x ocurren en $f(t_1, \dots, t_n)$ si y sólo si x ocurren en algún t_i con $i \leq k$.

Teorema

Sea $\mathfrak{A}$ una τ-estructura y $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 : \mathbb{N} \to A$ y $t \in \mathbf{TRM}_\tau$.
Si para toda variable x que ocurre en t se tiene que $x^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = x^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$,
entonces $t^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = t^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$

Definición (variable que ocurren en una τ-fórmula).

Sea t un término y x una variable. Se define por recursión sobre la construcción de fórmulas, que *la variable x ocurre en la fórmula φ*.

1. x ocurre en la fórmula $(t_1 \approx t_2)$ si y sólo si x aparece en el término t_1 o en t_2.
2. x ocurre en la fórmula $R(t_1, \ldots, t_m)$ si y sólo si x aparece en alguno de los t_i.
3. Supongamos como paso recursivo que sabe lo que es que x ocurra en φ y que x ocurra en ψ.
   a) x ocurre en $(\neg\varphi)$ si y sólo si x ocurre en φ.
   b) x ocurre en $(\varphi \star \psi)$ si y sólo si x ocurre en φ o x ocurre en ψ, con $\star \in \{\to, \to, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$.
   c) x ocurre en $Qy\varphi$ si y sólo si x ocurre en φ o $x = y$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$.

$(A \subseteq \mathbb{N} \wedge \varnothing \in A \wedge \forall n(n \in A \to s(n) \in A))$

PBO $\equiv \forall A \subseteq \mathbb{N}(\varnothing \neq A \to \exists x \in A \forall y \in A(x \leq y))$

AP

Sea $\mathbf{P}(x)$ una propiedad sobre x. $\mathbf{P}(0) \wedge \forall y(\mathbf{P}(y) \to \mathbf{P}(s(y))) \to \forall x \mathbf{P}(x)$.

ZFC $\vdash$ **AP**

$$\exists x(\varnothing \in X \wedge \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

$$\begin{aligned} 0 =& \varnothing \\ n+1 = \{0, \ldots, n\} =& \{0, \ldots, n-1\} \cup \{n\} = n \cup \{n\} \\ n =& \{0, \ldots, n-1\} \end{aligned}$$

$$\omega = \bigcap\{x \mid x \text{ es inductivo}\}$$
$$\omega \subset X$$

$$0! = 1$$
$$s(n)! = n!$$

$$n + 0 = n$$
$$n + s(m) = s(n+m)$$

Teorema de recursión

Sea a conjunto, $F : V \times V \to V$, $\exists! f : \omega \to V$ tal que

$$f(o) = a$$

$$f(s(n)) = F(s(n), f(n))$$

Definición.

Sea f una función y $\mathcal{U}$ un conjunto.
Se dice que f es una *operación sobre* $\mathcal{U}$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ tal que $f : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U}$.

A n se le llama la *aridad* de f.

Definición ($\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo) *(Enderton).*

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ una familia de operaciones sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.
Un conjunto C se llama *conjunto* $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-*inductivo* si y sólo si

(A) $\mathcal{B} \subseteq C$

(B) C es cerrado bajo las operaciones de $\mathfrak{F}$, es decir,

si $f \in \mathfrak{F}$ y tiene aridad $n \in \mathbb{Z}^{>0}$, $\forall c_1, \dots, c_n \in C$ entonces $f(c_1, \dots, c_n) \in C$.

Proposición.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ una familia de operaciones sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.
La intersección arbitraria de $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivos es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Prueba:

Sea $\{C_i \mid i \in I\}$ una familia de $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivos.

P.D. $\mathcal{B} \subseteq \bigcap_{i \in I} C_i$. Cada C_i es un $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo y por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq C_i$.

P.D. $\bigcap_{i \in I} C_i$ es cerrada bajo las operaciones de $\mathfrak{F}$.

Sea $f \in \mathfrak{F}$ una operación de aridad $m \in \mathbb{Z}^{>0}$ y $a_1, \dots a_m \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

P.D. $f(a_1, \dots, a_m) \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

Como $a_1, \dots, a_m \in \bigcap_{i \in I} C_i$, se tiene que para toda $i \in I$ $a_1, \dots, a_m \in C_i$.

Como cada C_i es un $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo, entonces $f(a_1, \dots, a_m \in C_i$.

Así, $f(a_1, \dots, a_m) \in \bigcap_{i \in I} C_i$. $\square$

Definición.

Sea $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ una familia de operaciones sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.
Se define el *$\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo generado por $\mathcal{B}$ y $\mathfrak{F}$ en $\mathcal{U}$*,

$$\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathfrak{F}} = \bigcap \{C \subseteq \mathcal{U} \mid C \text{ es } \mathcal{B}\text{-}\mathfrak{F}\text{-inductivo}\} = \mathcal{B}^*$$

Observación

De ahora en adelante, serán $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ una familia de operaciones sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.

Observación

$$\text{Si } a \neq \varnothing, \text{ sea } c \in a$$
$$\bigcap a = \{x \in c \mid \forall b \in a(x \in a)\}$$
$$\bigcup a = \{x \mid \exists y \in c(x \in y)\}$$

Definición.

$$\mathcal{B}^* = \bigcap \{C \subseteq \mathcal{U} \mid C \text{ es } \mathcal{B}\text{-}\mathfrak{F}\text{-inductivo}\}$$

Observación

1. $\mathcal{B}^*$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.
2. Si $X \subseteq \mathcal{U}$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo, entonces $\mathcal{B}^* \subseteq X$.

Como X es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo, entonces $X \in \{C \subseteq U \mid C \text{ es } \mathcal{B}\text{-}\mathfrak{F}\text{-inductivo}\}$
$\mathcal{B}^* = \{x \in X \mid \forall C \subseteq \mathcal{U} \;\; \mathcal{B}\text{-}\mathfrak{F}\text{-inductivo}(X \in C)\} \subseteq X$.
$\mathcal{B}^*$ es el $\subseteq$-menor $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Definición ($\mathcal{B}_*$).

Se define por recursión sobre $\mathbb{N}$ la familia de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$$
$$\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \cup \{f(u_1, \ldots, u_m) \mid m \in \mathbb{Z}^{>0}, f \in \mathcal{F}, m = \text{arid}(f), u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_n\}$$
$$\mathcal{B}_* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

Observación

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_{n+1}$$
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n < m \Rightarrow \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}_m$$

Teorema.

$$\mathcal{B}_* = \mathcal{B}^*$$

Prueba:

$\boxed{\supseteq}$ Por la observación 2 basta probar que $\mathcal{B}_*$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Como $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_0 \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, entonces $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}_*$.

Para ver que "$\mathcal{B}_*$ es cerrado bajo $\mathfrak{F}$".

Sean $m \in \mathbb{Z}^{>0}$, $f \in \mathcal{F}$ de aridad m y $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_*$. Tenemos que $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es $\subseteq$-creciente y $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_*$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_k$. En efecto, $\forall j \leq m \, \exists k_j \in \mathbb{N}$ tal que $u_j \in \mathcal{B}_{k_j}$. Sea $k = \text{máx}\{k_j \mid j = 1, \ldots, m\}$. Por la observación 3, $\forall j \leq m, \mathcal{B}_k \supseteq \mathcal{B}_{k_j}$. Así $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_k$. Así, $f(u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{B}_{k+1} \subseteq \mathcal{B}_*$. Por lo tanto $\mathcal{B}_*$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo. Por la observación 2, se tiene que $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}_*$.

$\boxed{\subseteq}$ **P.D.** $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}^*$.

P.D. $\forall n \in \mathbb{N}(\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}^*)$.

Esta prueba se hará por inducción.

Base: $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^*$ porque $\mathcal{B}^*$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

H.I. Supongamos que $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}^*$.

P.D. $\mathcal{B}_{n+1} \subseteq \mathcal{B}^*$.

Sea $X \in \mathcal{B}_{n+1}$. Si $X \in \mathcal{B}_n \overset{H.I.}{\subseteq} \mathcal{B}^* \ \checkmark$.

Si $X \in \mathcal{B}_{n+1} \setminus \mathcal{B}_n$, entonces existe $m \in \mathbb{Z}^{>0}$, existe $f \in \mathcal{F}$ de aridad m, existen $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_n$ tal que $X = f(u_1, \ldots, u_m)$. Como $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}^*$ por H.I. Por lo tanto $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}^*$ y como $\mathcal{B}^*$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo, en particular es "cerrado bajo $\mathfrak{F}$" por lo que $X = f(u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{B}^*$.

$\therefore \mathcal{B}_{n+1} \subseteq \mathcal{B}^*$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}^*$

$\therefore \mathcal{B}_* \subseteq \mathcal{B}^*$

$\therefore \mathcal{B}^* = \mathcal{B}_*$ $\square$

Recordatorio

Sean $\mathcal{U}$ un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ una familia de operaciones sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$.
$\mathcal{B}^* = \bigcap \{C \subseteq \mathcal{U} \mid C \text{ es } \mathcal{B}\text{-}\mathfrak{F}\text{-inductivo}\}$
$\mathcal{B}_* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ donde $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$
$\mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \cup \{f(u_1, \ldots, u_m) \mid \exists m \in \mathbb{Z}^{>0}, \exists f \in \mathcal{F}, m = \mathrm{arid}(f), u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{B}_n\}$

Teorema de inducción para $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivos.

Sea $\mathbf{P}(x)$ una propiedad sobre los elementos de $\mathcal{U}$. Si

1. para todo $b \in \mathcal{B}$, se tiene que $\mathbf{P}(b)$
2. $\mathbf{P}(x)$ es cerrado bajo $\mathfrak{F}$

entonces $\forall z \in \langle\mathcal{B}\rangle_{\mathfrak{F}}\ \mathbf{P}(z)$.

Prueba:

Sea $C = \{u \in \mathcal{U} \mid \mathbf{P}(u)\}$. Por 1, $\mathcal{B} \subseteq C$. Por 2, C es cerrado bajo $\mathfrak{F}$.
$\therefore C$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo. Así, $\langle\mathcal{B}\rangle_{\mathfrak{F}} \subseteq C$. $\therefore \forall z \in \langle\mathcal{B}\rangle_{\mathfrak{F}}\ \mathbf{P}(z)$. $\square$

Teorema.

$\mathbf{TRM}_\tau$ es un $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Prueba:

Considere $\mathcal{U} = \mathcal{L}_\tau^*$. $\mathcal{B} = \mathrm{var} \cup \mathscr{C}$.
Para cada $m \in \mathbb{Z}^{>0}$ y cada $f \in \mathcal{O}_m$ se define $\Phi_f : \mathcal{U}^m \to \mathcal{U}$ tal que para todos $u_1, \ldots, u_m \in \mathcal{U}$, $\Phi_f(u_1, \ldots, u_m) = f(u_1, \ldots, u_m)$. Sea $\mathfrak{F} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}^{>0}} \{\Phi_f \mid f \in \mathcal{O}_m\}$.

Afirmación

$\langle\mathcal{B}\rangle_{\mathfrak{F}} = \mathbf{TRM}_\tau$

Prueba:

$\boxed{\subseteq}$ Basta probar que $\mathbf{TRM}_\tau$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Por (A) en la definición de $\mathbf{TRM}_\tau$, $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{TRM}_\tau$.

Afirmamos que (B) en la definición de $\mathbf{TRM}_\tau$ implica que $\mathbf{TRM}_\tau$ es cerrado bajo $\mathfrak{F}$. Sea $\Phi_f \in \mathfrak{F}$, así $\exists m \in \mathbb{Z}^{>0}$ tal que $m = \operatorname{arid}(\Phi_f)$ y sean $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{TRM}_\tau$.

$$\Phi_f(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m) \overset{(B)}{\in} \mathbf{TRM}_\tau.$$

Así, $\mathbf{TRM}_\tau$ es $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo y por lo tanto $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathbf{TRM}_\tau$

$\boxed{\supseteq}$ Sea $t \in \mathbf{TRM}_\tau$. Por (C), t nació de (A) o de (B).

Caso (A). $t \in \operatorname{Var} \cup \mathscr{C}$. $\therefore t \in \mathcal{B}$.

Caso (B). $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, con $f \in \mathcal{O}_m$ y $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{TRM}_\tau$.

$t = \Phi_f(t_1, \ldots, t_m)$, al *destripar* los términos y como son finitos se puede llegar a que $t_1, \ldots, t_m \in \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathfrak{F}}$. □

Definición *alternativa.*

$\mathbf{TRM}_\tau$ es el $\subseteq$-menor subconjunto de $\mathcal{L}_\tau^*$ tal que

(A) $\mathscr{C} \cup \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ las constantes y las variables son términos.

(B) Si $f \in \mathcal{O}_m \subseteq \tau$ y $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{TRM}_\tau$, entonces $f(t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{TRM}_\tau$.

Observación

De esta definición, $\langle \mathcal{B} \rangle_{\mathfrak{F}} \subseteq \mathbf{TRM}_\tau \subseteq \langle \mathcal{B} \rangle_{\mathfrak{F}}$

Definición (variables que aparecen/ocurren).

Se define el *conjunto de variables que aparecen* (ocurren) como sigue:

$$\mathbf{VA} : \mathbf{TRM}_\tau \to \mathscr{P}(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$$

$$\mathbf{VA}(c) = \varnothing$$

$$\mathbf{VA}(x_n) = \{x_n\}$$

$$\mathbf{VA}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{VA}(t_m)$$

Y usaremos **VA** o **VO** para denotar este conjunto.

Observación

$|\mathbf{VO(t)}| < \aleph_0$

Teorema.

Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$. Para todo $t \in \mathbf{TRM}_\tau$, para cualesquiera $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 : \mathbb{N} \to A$.
$\boxed{\text{Si } \mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(t) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(t), \text{ entonces } t^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = t^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]}$ $\ldots$ $\mathbf{M}(t)$

Prueba:

Sabemos que $\mathbf{TRM}_\tau$ es un $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo, es el $\subseteq$-menor $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo que tiene a las variables, a las constantes y es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales. Sea $T = \{t \in \mathbf{TRM}_\tau \mid \mathbf{M}(t)\} \subseteq \mathbf{TRM}_\tau$.
P.D. T tiene a las variables, a las constantes y es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales.
P.D. $x_n \in T$. P.D. $\mathbf{M}(x_n)$.
Sean $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 : \mathbb{N} \to A$ tales que $\mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(x_n) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(x_n)$.
P.D. ${x_n}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = {x_n}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$
Como $\mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(x_n) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(x_n) \cdots \star$, entonces $\mathsf{a}_1 \restriction \{x_n\} = \mathsf{a}_2 \restriction \{x_n\}$.
Así, ${x_n}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = \mathsf{a}_1(n) \overset{\star}{=} \mathsf{a}_2(n) = {x_n}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$

P.D. Si $c \in \mathscr{C}$, entonces $\mathbf{M}(c)$.
Sean $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 : \mathbb{N} \to A$ tales que $\mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(c) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(c)$. Así $c^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$.

Veamos que T es cerrado bajo la aplicación de letras funcionales.
Consideremos $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ y sean $\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2 : \mathbb{N} \to A$ tales que
$\mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(f(t_1, \ldots, t_m)) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(f(t_1, \ldots, t_m))$.
H.I. $\mathbf{M}(t_j)$.
Como $\text{vo}(f(t_1, \ldots, t_m)) = \bigcup_{j=1}^{m} \text{vo}(t_j)$, entonces $\mathsf{a}_1 \restriction \bigcup_{j=1}^{m} \text{vo}(t_j) = \mathsf{a}_2 \restriction \bigcup_{j=1}^{m} \text{vo}(t_j)$, entonces para toda $j \leq m$ se tiene que $\mathsf{a}_1 \restriction \text{vo}(t_j) = \mathsf{a}_2 \restriction \text{vo}(t_j)$.
Por H.I. se tiene que ${t_j}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = {t_j}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$.
$f(t_1, \ldots, t_m)^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1] = f^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1], \ldots, {t_m}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_1]) \overset{\text{H.I.}}{=} f^{\mathfrak{A}}({t_1}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2], \ldots, {t_m}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2])$
$\overset{\text{Int. trm}}{=} f(t_1, \ldots, t_m)^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}_2]$

Definición (asignación modificada).

Sea $\mathsf{a} : \mathbb{N} \to A$, x_n una variable y $a \in A$. Se define una nueva asignación para las variables como sigue

$$\mathsf{a}\left(x_n/a\right)\left(x_m\right) = \begin{cases} \mathsf{a}(m) & m \neq n \\ a & m = n \end{cases}$$

$\mathsf{a}\left(x_n/a\right)\left(x_m\right) = \left(\mathsf{a} - \{(n, \mathsf{a}(n))\}\right) \cup \{(n, a)\}$
$\ldots \mathsf{a}(x_{n_1}/a_1, \ldots, x_{n_m}/a_m)$

Definición (verdad de Tarski).

Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $\mathsf{a} : \mathbb{N} \to A$ una asignación para las variables. Se escribe

$$\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}]$$

para indicar que *la estructura* $\mathfrak{A}$ *satisface la fórmula* φ *bajo la asignación* a, lo que se define por recursión sobre la construcción de fórmulas como sigue:

1. Sean $t_1, t_2 \in \mathbf{TRM}_\tau$.
   $\mathfrak{A} \models (t_1 \approx t_2)[\mathsf{a}]$ si y sólo si ${t_1}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}] = {t_2}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}]$
2. Sean $t_1, \ldots, t_m \in \mathbf{TRM}_\tau$ y $R \in \mathcal{R}_m$.
   $\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_m)[\mathsf{a}]$ si y sólo si $\langle {t_1}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}], \ldots, {t_m}^{\mathfrak{A}}[\mathsf{a}] \rangle \in R^{\mathfrak{A}}$
3. Sean $\varphi, \psi \in \mathbf{FRM}_\tau$.
   a) $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si no es el caso que $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}]$.
   b) $\mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}]$ y $\mathfrak{A} \models \psi[\mathsf{a}]$.
   c) $\mathfrak{A} \models (\varphi \vee \psi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}]$ o $\mathfrak{A} \models \psi[\mathsf{a}]$.
   d) $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models (\neg\varphi)[\mathsf{a}]$ o $\mathfrak{A} \models \psi[\mathsf{a}]$.
   e) $\mathfrak{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models (\varphi \to \psi)[\mathsf{a}]$ y $\mathfrak{A} \models (\psi \to \varphi)[\mathsf{a}]$.
   f) $\mathfrak{A} \models (\exists x_n \varphi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}(n/a)]$.
   g) $\mathfrak{A} \models (\forall x_n \varphi)[\mathsf{a}]$ si y sólo si para cada $a \in A$ pasa $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}(n/a)]$.

En esta definición los *pasos base* son las fórmulas atómicas, mientras que los *pasos recursivos* son sobre la aplicación de conectivos a fórmulas y sobre cuantificadores a fórmulas.

En el tipo $\tau = \{\leq\} \dots$.
$\mathfrak{R} \models \forall x_2(0 \leq x_1)[\mathsf{a}]$
si y sólo si para cada $r \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{R} \models (0 \leq x_2)[\mathsf{a}(2/r)]$
si y sólo si para cada $r \in \mathbb{R}$, $0^{\mathfrak{R}} \leq^{\mathfrak{R}} \mathsf{a}(2/r)(2)$
si y sólo si $0^{\mathfrak{R}} \leq^{\mathfrak{R}} r$, pero esto es "para toda $r \in \mathbb{R}$".
Por lo que $\mathfrak{R} \not\models \forall x_2(0 \leq x_1)[\mathsf{a}]$

$$\exists x_1(x_0 \leq x_1)$$

Sea la estructura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathfrak{N}})$.
$\mathfrak{N} \not\models \exists x_1(x_0 \leq x_1)$
$\mathfrak{N} \models \forall x_1 \forall x_2((x_1 < x_2) \vee (x_2 < x_1) \vee (x_1 \approx x_2))$

Definición (verdad).

Sea $\mathfrak{A} \in V_\tau$ y $\varphi \in \mathbf{FRM}_\tau$. Se dice que φ es *verdadera en* $\mathfrak{A}$ si y sólo si para toda asignación para las variables $\mathsf{a} : \mathbb{N} \to A$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi[\mathsf{a}]$.

En este caso se escribe $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Definición (alfabeto proposicional, lenguaje proposicional).

Definimos el *alfabeto proposicional* (lenguaje proposicional),

$$\mathcal{L}_{\mathsf{Prop}} = L \cup \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} \cup \{), (\}$$

donde

$$\begin{array}{ll} L = \{P_n \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{las letras proposicionales,} \\ \{\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\} & \text{conectivos lógicos,} \\ \{\ ), (, \ \} & \text{símbolos auxiliares.} \end{array}$$

Definición.

$$\mathcal{L}^*_{\mathsf{Prop}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n_{\mathsf{Prop}}$$

Definición (fórmulas proposicionales).

Se define el conjunto de *fórmulas proposicionales* $\overline{L} \subseteq \mathcal{L}^*_{\mathsf{Prop}}$ como sigue:

1. Las letras proposicionales son fórmulas, $L \subseteq \overline{L}$.
2. Si $\alpha, \beta \in \overline{L}$, entonces $(\neg\alpha), (\alpha \star \beta) \in \overline{L}$ con $\star \in \{\rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow\}$.
3. $\overline{L}$ es el $\subseteq$-menor conjunto que cumple 1 y 2.

Observación

$\overline{L}$ tiene inducción y recursión, es decir, se puede ver como $\mathcal{B}$-$\mathfrak{F}$-inductivo.

Ejemplos:

- P_n
- $(P_m \star P_n)$
- $(\neg P_m)$
- $(P_n \star (P_m \star P_k))$
- $((P_m \star P_k) \star P_n)$

Definición (asignación de verdad).

Se le llama *asignación de verdad para las letras proposicionales* a una función $v : L \rightarrow \{0,1\}$, decimos que P_n es verdad bajo v si y sólo si $v(P_n) = 1$.

$$v(P_n) = \begin{cases} 0 & P_n \text{ falso} \\ 1 & P_n \text{ verdadero} \end{cases}$$

Definición (asignación extendida).

Sea v una asignación de verdad para las letras proposicionales. Se define la *asignación extendida* como $\overline{v} : \overline{L} \rightarrow \{0,1\}$ por recursión sobre la construcción de fórmulas.

1. Paso base: $\overline{v}(P_n) = v(P_n)$
2. Paso recursivo: Sean $\alpha, \beta \in \overline{L}$.

$\overline{v}((\neg\alpha)) = 1 - \overline{v}(\alpha)$.

$\overline{v}((\alpha \wedge \beta)) = \overline{v}(\alpha) \cdot \overline{v}(\beta)$.

$\overline{v}((\alpha \vee \beta)) = \text{máx}\{\overline{v}(\alpha), \overline{v}(\beta)\}$.

$\overline{v}((\alpha \rightarrow \beta)) = 0$ si sólo si $\overline{v}(\alpha) = 1$ y $\overline{v}(\beta) = 0$.

$\overline{v}((\alpha \leftrightarrow \beta)) = \overline{v}((\alpha \rightarrow \beta)) \cdot \overline{v}((\beta \rightarrow \alpha))$.

Teorema.

$\overline{v}$ es única.

Teorema (de concordancia).

Sean u, v asignaciones de verdad para las letras proposicionales.
Para cada α si u y v dan el mismo valor de verdad a todas las letras proposicionales que aparecen en α, entonces $\overline{u}(\alpha) = \overline{v}(\alpha)$.

Observación

¿Cuántas asignaciones de verdad para letras hay?

$$|{}^{L}2| = 2^{|L|} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$

Definición (letras que aparecen).

Se define el conjunto de *letras que aparecen* $\mathsf{LA} : \overline{L} \to \mathscr{P}(\{P_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ como sigue:

Paso base: $\mathsf{LA}(P_n) = \{P_n\}$.

Paso recursivo:

$\mathsf{LA}((\neg\alpha)) = \mathsf{LA}(\alpha)$.

$\mathsf{LA}((\alpha \star \beta)) = \mathsf{LA}(\alpha) \cup \mathsf{LA}(\beta),\ \star \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$.

$$\begin{aligned} & \mathsf{LA}(((P_0 \vee P_1) \to (\neg P_{28}))) = \mathsf{LA}((P_0 \vee P_1)) \cup \mathsf{LA}((\neg P_{28}))) \\ = \ & \mathsf{LA}(P_0) \cup \mathsf{LA}(P_1) \cup \mathsf{LA}(P_{28}) = \{P_0\} \cup \{P_1\} \cup \{P_{28}\} = \{P_0, P_1, P_{28}\} \end{aligned}$$

Teorema (de concordancia).

Sea $\varphi \in \overline{L}$. Para cualesquiera $v_1, v_2 : L \to \{0, 1\}$.
Si $v_1 \restriction \mathsf{LA}(\varphi) = v_2 \restriction \mathsf{LA}(\varphi)$, entonces $\overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)$.

Prueba:

Defínase $\Phi = \{\varphi \in \overline{L} \mid \text{ si } v_1 \restriction \mathsf{LA}(\varphi) = v_2 \restriction \mathsf{LA}(\varphi), \text{ entonces } \overline{v_1}(\varphi) = \overline{v_2}(\varphi)\}$
$\Phi \subseteq \overline{L}$. Probaremos que 1. $L \subseteq \Phi$ y 2. Φ es cerrado bajo la aplicación de conectivos.
Si probamos esto, $\overline{L} \subseteq \Phi$.
En efecto, considere $P_n \in L$ y $v_1, v_2 : L \to \{0, 1\}$ tales que
$v_1 \restriction \mathsf{LA}(P_n) = v_2 \restriction \mathsf{LA}(P_n) \ldots \star$.
$\overline{v_1}(P_n) = v_1(P_n) \overset{\star}{=} v_2(P_n) = \overline{v_2}(P_n)$.
$\therefore P_n \in \Phi$.

Para el paso recursivo, considere $\alpha, \beta \in \Phi$.
P.D. $(\neg\alpha), (\alpha \triangle \beta) \in \Phi$, con $\triangle \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$.

Sean $v_1, v_2 : L \to \{0,1\}$ tales que $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}((\neg\alpha)) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}((\neg\alpha)) \ldots \mathsf{H.I.}$.
P.D. $\overline{v_1}((\neg\alpha)) = \overline{v_2}((\neg\alpha))$.
$\overline{v_1}((\neg\alpha)) \overset{\text{Def. de } \overline{v}}{=} 1 - \overline{v_1}(\alpha)$. Por otro lado, como $\mathsf{LA}((\neg\alpha)) = \mathsf{LA}(\alpha)$ y $\mathsf{H.I.}$ se tiene que $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha)$ y como $\alpha \in \Phi$, entonces $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha) \ldots *$.
Así, $\overline{v_1}((\neg\alpha)) \overset{\text{Def.} \overline{v_1}}{=} 1 - \overline{v_1}(\alpha) \overset{*}{=} 1 - \overline{v_2}(\alpha) = \overset{\text{Def.} \overline{v_2}}{=} \overline{v_2}((\neg\alpha))$.
$\therefore (\neg\alpha) \in \Phi$.

P.D. $(\alpha \wedge \beta) \in \Phi$.
Sean $v_1, v_2 : L \to \{0,1\}$ tales que $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}((\alpha \wedge \beta)) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}((\alpha \wedge \beta)) \ldots \star$
De $\star$ se tiene que $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha) \cup \mathsf{LA}(\beta) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha) \cup \mathsf{LA}(\beta)$, en particular se tiene que $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}(\alpha)$ y $v_1 \upharpoonright \mathsf{LA}(\beta) = v_2 \upharpoonright \mathsf{LA}(\beta)$.
Como $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $\overline{v_1}(\alpha) = \overline{v_2}(\alpha)$ y $\overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\beta)$.
$\overline{v_1}((\alpha \wedge \beta)) = \overline{v_1}(\alpha) \cdot \overline{v_1}(\beta) = \overline{v_2}(\alpha) \cdot \overline{v_2}(\beta) = \overline{v_2}((\alpha \wedge \beta))$.
$\therefore (\alpha \wedge \beta) \in \Phi$.

Definición (consecuencia lógica).

Sean $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$.
Se dice que α es *consecuencia lógica* de Σ si y sólo si para toda asignación de verdad v para L, si $\overline{v}(\sigma) = 1$ para cada $\sigma \in \Sigma$, entonces $\overline{v}(\alpha) = 1$.

En este caso se escribe $\Sigma \models \alpha$.

$\{P_0, P_1\} \models (P_0 \wedge P_1)$

Definición (tautología).

Una fórmula $\alpha \in \overline{L}$ se llama *tautología* si y sólo si $\varnothing \models \alpha$.

Se escribe $\models \alpha$ para denotar que $\varnothing \models \alpha$.

Definición (satisfacible).

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$, Σ se llama *satisfacible* si y sólo si existe una asignación de verdad para las letras, v tal que $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\}$.

$\{P_0, (\neg P_0)\}$

Teorema 1 (teorema de monotonía).

Sean $\Gamma, \Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$. $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $\Sigma \models \alpha$.

Prueba:

Sea v una asignación para las letras tales que $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\}$.
P.D. $\overline{v}(\alpha) = 1$.
Como $\Gamma \subseteq \Sigma$, entonces $\overline{v}[\Gamma] \subseteq \{1\}$. Como $\Gamma \models \alpha$ y $\overline{v}[\Gamma] \subseteq \{1\}$, por definición de consecuencia lógica, $\overline{v}(\alpha) = 1$.

Teorema 2 (Modus Ponens semántico).

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha, \beta \in \overline{L}$. $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models (\alpha \rightarrow \beta)$, entonces $\Sigma \models \beta$.

Prueba:

Sea v una asignación para las letras tales que $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\} \ldots \star$.
Como $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models (\alpha \rightarrow \beta)$, de la definición de consecuencia lógica y de $\star$ se tiene que $\overline{v}(\alpha) = \overline{v}((\alpha \rightarrow \beta)) = 1$. Así $\overline{v}(\beta) = 1$, de lo contrario $\overline{v}(\beta) = 0$, entonces $\overline{v}((\alpha \rightarrow \beta)) = 0$ y así 1=0,

Teorema 3.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$. $\Sigma \models \alpha$ si y sólo si $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}$ es insatisfacible.

Prueba:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}$ es satisfacible. Así, existe $v : L \rightarrow \{0,1\}$ tal que $\overline{v}[\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}] \subseteq \{1\}$. De lo anterior, $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\}$ y $\overline{v}((\neg\alpha)) = 1$. Luego $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\}$ y $\overline{v}(\alpha) = 0$. $\therefore \Sigma \not\models \alpha$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $\Sigma \not\models \alpha$. Así, existe $v : L \rightarrow \{0,1\}$ tal que $\overline{v}[\Sigma] \subseteq \{1\}$ y $\overline{v}(\alpha) = 0$. En particular, $\overline{v}((\neg\alpha)) = 1 - \overline{v}(\alpha) = 1 - 0$. Entonces $\overline{v}[\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}] \subseteq \{1\}$.
$\therefore \Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}$ es satisfacible.

Teorema 4 (teorema de corte).

Sean $\Gamma, \Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$. $\Sigma \models \gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\Gamma \models \alpha$, entonces $\Sigma \models \alpha$.

Prueba:

Sea $u : L \rightarrow \{0,1\}$ tal que $\overline{u}[\Sigma] \subseteq \{1\} \ldots \star$.
Como $\Sigma \models \gamma$, para cada $\gamma \in \Gamma$ y $\star$, se tiene que $\overline{u}[\Gamma] \subseteq \{1\}$.
Como $\Gamma \models \alpha$, entonces $\overline{u}(\alpha) = 1$.

Teorema 5 (teorema de la deducción semántico).

Sea $\Gamma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha, \beta \in \overline{L}$. $\Gamma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Gamma \models (\alpha \to \beta)$.

Prueba:

$\boxed{\Rightarrow}$ Sea $v : L \to \{0,1\}$ tal que $\overline{v}[\Gamma] \subseteq \{1\}$. Supongamos que $\overline{v}((\alpha \to \beta)) = 0$. Así, $\overline{v}(\alpha) = 1$ y $\overline{v}(\beta) = 0$. Entonces $\overline{v}[\Gamma \cup \{\alpha\}] \subseteq \{1\}$ y $\overline{v}(\beta) = 0$. Por lo tanto $\Gamma \cup \{\alpha\} \not\models \beta$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $u : L \to \{0,1\}$ tal que $\overline{u}[\Gamma \cup \{\alpha\}] \subseteq \{1\}$. Como $\overline{u}[\Gamma \cup \{\alpha\}] \subseteq \{1\}$, en particular $\overline{u}[\Gamma] \subseteq \{1\}$ y como $\Gamma \models (\alpha \to \beta)$, entonces $\overline{u}((\alpha \to \beta)) = 1$ y como $\overline{u}(\alpha) = 1$ se tiene que $\overline{u}(\beta) = 1$.

Axiomas del cálculo proposicional

A1 $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$
A2 $((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$
A3 $((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$

$\models (\alpha \to (\beta \to \alpha))$
$\models ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$
$\models ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$

Metateorema.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{L}$.
(A) $\models (\alpha \to (\beta \to \alpha))$
(B) $\models ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$
(C) $\models ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$
(D) $\models ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to \alpha)$

$$(\alpha \to (\beta \to \alpha))$$

$$\begin{array}{ccccc} (\alpha & \to & (\beta & \to & \alpha)) \\ & \downarrow & & & \\ & 0 & & & \\ \downarrow & & & \downarrow & \\ 1 & & & 0 & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 1 & & 0 \end{array}$$

Para que una $v : L \to \{0,1\}$ sea tal que $\overline{v}((\alpha \to (\beta \to \alpha))) = 0$ es necesario que $\overline{v}(\alpha) = 1$ y $\overline{v}(\alpha) = 0$.

$$((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$$

$(\alpha$	$\to$	$(\beta$	$\to$	$\gamma))$	$\to$	$((\alpha$	$\to$	$\beta)$	$\to$	$(\alpha$	$\to$	$\gamma)))$
1	1		0		0	1	1	1	0	1	0	0

$$((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$$

$(((\neg$	$\alpha)$	$\to$	$(\neg\beta))$	$\to$	$(((\neg\alpha$	$\to$	$\beta)$	$\to$	$\alpha))$
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0

$$((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (\beta \to \alpha)$$

$(((\neg\alpha)$	$\to$	$(\neg$	$\beta))$	$\to$	$(\beta$	$\to$	$\alpha))$
1	1	1	0	0	1	0	0

Definición.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{L}$. Las siguientes fórmulas son consideradas *axiomas* del CProp.

(A) $\models (\alpha \to (\beta \to \alpha))$

(B) $\models ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)))$

(C) $\models ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$

Definición.

Llamamos MP a la relación ternaria entre fórmulas.
$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathsf{MP}$ si y sólo si $\varphi_1 = (\varphi_2 \to \varphi_3)$ o $\varphi_2 = (\varphi_1 \to \varphi_3)$.

Definición.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_2 \in \overline{L}$. Llamamos a la sucesión $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *una deducción* en el CProp desde Σ si y sólo si para toda $j \leq n$ ocurre alguna de las siguientes:

(A) $\varphi_i \in \Sigma$;

(B) φ_i sea alguna instancia de algún axioma;

(C) Existen $j, k < i$, tales que $(\varphi_j, \varphi_k, \varphi_i) \in \mathsf{MP}$. "Se infirió por MP de anteriores".

Definición.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\varphi \in \overline{L}$. Se dice que φ *se deduce desde* Σ en el CProp si y sólo si existe $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \overline{L}$ tales que

(A) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es una deducción en el CProp desde Σ, y

(B) $\varphi_n = \varphi$.

Teorema (Correctud).

CProp es correcto.

Sean $\alpha \in \overline{L}$ y $\Sigma \subseteq \overline{L}$. Si $\Sigma \vdash \alpha$, entonces $\Sigma \models \alpha$.

Prueba:

La demostración se hace por inducción sobre la longitud de la deducción. Como $\Sigma \vdash \alpha$, entonces existen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \overline{L}$ tales que $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es la deducción en el CProp desde Σ y $\varphi_n = \alpha$.
Sea $i \leq n$ y supongamos que para toda $j < i$, $\Sigma \models \varphi_j$. Como $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ es una deducción en el CProp desde Σ y $i \leq n$ se cumple alguna de las siguientes

(A) $\varphi_i \in \Sigma$, o

(B) φ_i es axioma lógico, o

(C) φ_i se infiere de anteriores por MP.

C.1. $\varphi_i \in \Sigma$.

Aquí es obvio que $\Sigma \models \varphi_i$.

C.2. φ_i es axioma lógico.

Así, $\models \varphi_i$. En particular, $\Sigma \models \varphi_i$.

C.3. Existen $j, k < i$ tales que $(\varphi_j, \varphi_k, \varphi_i) \in \mathsf{MP}$.

Hipótesis de inducción: $\Sigma \models \varphi_j$ y $\Sigma \models \varphi_k$.

Supongamos que $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$. Así $\Sigma \models (\varphi_j \to \varphi_i)$ y $\Sigma \models \varphi_j$.

Por un resultado anterior (*modus ponens semántico*), $\Sigma \models \varphi_i$. $\square$

$$\vdash (\alpha \to \alpha)$$

1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) = \varphi_1 \in \Delta$
2. $((\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))) \in \Delta$
3. $((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ MP(1,2)
4. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \in \Delta$
5. $(\alpha \to \alpha)$ MP(3, 4)

Así, $\vdash (\alpha \to \alpha)$

$$\{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma)\} \vdash (\alpha \to \gamma)$$

1. $(\alpha \to \beta) \in \Sigma$
2. $(\beta \to \gamma) \in \Sigma$
3. $(\alpha \to (\beta \to \delta)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \in \Delta$
4. $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \in \Delta$
5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma))$ MP(2, 4)
6. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ MP(5, 3)
7. $(\alpha \to \gamma)$ MP(7, 6)

$$\{(\neg\beta \to \neg\alpha), \alpha\} \vdash \beta$$

ψ_1 α hipótesis

ψ_2 $(\neg\beta \to \neg\alpha)$ hipótesis

ψ_3 $((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta)$ axioma 2

ψ_4 $(((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta)$ MP(3, 2)

ψ_5 $\alpha \to ((\neg\beta) \to (\alpha))$ axioma 1

ψ_6 $((\neg\beta) \to \alpha)$ MP(3, 1)

ψ_7 β MP(6, 4)

$\vdash (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$

$\{(\neg\alpha \to \neg\beta), \beta\} \vdash \alpha$

Lema.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m$ deducciones en el CProp desde Σ. Así la lista $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ donde $\alpha_i = \begin{cases} \psi_i & i \leq m \\ \varphi_{i-m} & m < i \end{cases}$, es una deducción desde Σ.

Prueba.

Como $\Sigma \vdash \alpha$ entonces existe $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \overline{L}$ una deducción desde Σ en el CProp tal que $\varphi_m = \alpha$. Análogamente, como $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$, existe $\psi_1, \ldots, \psi_n$ una sucesión finita de fórmulas que es una deducción desde Σ en el CProp y $\psi_n = (\alpha \to \beta)$. Sea $\alpha_1, \ldots, \alpha_n.\alpha_{n+1}, \alpha_{n+m}$ la lista dada por $\alpha_i = \begin{cases} \psi_i & i \leq m \\ \varphi_{i-m} & m < i \end{cases}$. Se define $\alpha_{m+n+1} = \beta$. Afirmamos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+m}, \alpha_{n+m+1}$ es una deducción desde Γ en el CProp. En efecto, sea $j \leq n+m+1$. Así, α_j cumple alguno de las tres opciones de la definición de deducción si $j \leq m+n$, solo falta verificar el caso cuando $j = n+m+1$, pero ahí α_{n+m+1} se obtuvo de MP de α_n y α_{n+m}.

Lema.

Sean $\Sigma, \Gamma \subseteq \overline{L}$ y $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \overline{L}$. Si $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ es una deducción en el CProp desde Σ y $\Sigma \subseteq \Gamma$, entonces $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ es una deducción desde Σ en el CProp.

Lema.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha, \beta \in \overline{L}$. Si $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ y $\Sigma \vdash \alpha$, entonces $\Sigma \vdash \beta$.

Teorema (de la deducción).

Sean $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha, \beta \in \overline{L}$. $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

Prueba.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como $\Sigma \vdash (\alpha \to \beta)$, por monotonía $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash (\alpha \to \beta)$. Pero $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$, usando el lema se tiene $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Se probará por inducción sobre la longitud de la deducción. Como $\Sigma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, entonces existe una lista finita $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \overline{L}$ tales que

1. $\psi_m = \beta$ y
2. Para cada $i \leq m$ se tiene alguno de los siguientes:

(A) $\psi_i \in \Sigma \cup \{\alpha\}$,

(B) ψ_i es la instancia de algún axioma del CProp, o

(C) ψ_i se infirió de anteriores por MP.

Ahora probaremos que para cada $i \leq m$, se tiene que $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_i)$.
La hipótesis de inducción es que para toda $j < i$ se tiene que $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_j)$.
Caso A. Si $\psi_i = \alpha$.
Sabemos que $\vdash (\alpha \to \alpha)$, por monotonía $\Sigma \vdash (\alpha \to \alpha)$. Pero usando que $\alpha = \psi_i$ se tiene $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_i)$.

Ahora, si $\psi_i \in \Sigma$.
Así, $\Sigma \vdash \psi_i$. Por otro lado, $\vdash (\psi_i \to (\alpha \to \psi_i))$ por ser la instancia de un axioma. Por monotonía se tiene que $\Sigma \vdash (\psi_i \to (\alpha \to \psi_i))$. Usando Meta-Modus Ponens se tiene que $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_j)$.

Caso B. ψ_i es la instancia de un axioma.
Entonces $\vdash \psi : i$, pero por otro lado $\vdash (\psi_i \to (\alpha \to \psi_i))$. Así, por Meta-Modus Ponens $\vdash (\alpha \to \psi_i)$ y por monotonía $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_i)$.

Caso C. ψ_i se infirió de anteriores por MP.
Existen $k, l < i$, sin pérdida de la generalidad asumamos que $\psi_l = (\psi_k \to \psi_i)$.
Usando la hipótesis inductiva, se tiene que $\Sigma \vdash (\alpha \to (\psi_k \to \psi_i))$ y $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_k)$.
Por otro lado, $\Sigma \vdash (\alpha \to (\psi_k \to \psi_i)) \to ((\alpha \to \psi_k) \to (\alpha \to \psi_i))$.
Usando MP se tiene $\Sigma \vdash (\alpha \to (\psi_k \to \psi_i))$.
De nuevo, usando MP se tiene $\Sigma \vdash (\alpha \to \psi_i)$.

Definición.

Sea $\Gamma \subseteq \overline{L}$. Γ se llama *consistente* si y sólo si no existe $\varphi \in \overline{L}$ tal que $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash (\neg\varphi)$.

Metateorema (reducción al absurdo).

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$. Si $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}$ es inconsistente, entonces $\Sigma \vdash \alpha$.

Prueba.

Como $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\}$ es inconsistente, entonces existe $\beta \in \overline{L}$ tal que $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash \beta$ y $\Sigma \cup \{(\neg\alpha)\} \vdash (\neg\beta)$, Aplicando el teorema de la deducción a ambas, entonces $\Sigma \vdash (\neg\alpha) \to \beta$, $\Sigma \vdash (\neg\alpha) \to (\neg\beta)$. Por monotonía y de la definición de deducción se tiene que $\Sigma \vdash ((\neg\alpha) \to (\neg\beta)) \to (((\neg\alpha) \to \beta) \to \alpha)$, aplicando Meta-Modus Ponens dos veces, se tiene que $\Sigma \vdash \alpha$.

Lema.

Sea $\Gamma \subseteq \overline{L}$. Γ es consistente si y sólo si existe $\varphi \in \overline{L}$ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$.

Prueba.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que para toda $\varphi \in \overline{L}$ se tiene que $\Gamma \vdash \varphi$.
En particular $\Gamma \vdash P_0$ y $\Gamma \vdash (\neg P_0)$, entonces Γ es inconsistente.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que Γ es inconsistente, es decir, existe $\alpha \in \overline{L}$ tal que $\Gamma \vdash \alpha \ \ldots(1)$ y $\Gamma \vdash \neg\alpha \ \ldots(2)$.
Sea $\varphi \in \overline{L}$. P.D. $\Gamma \vdash \varphi$. Usando la definición de deducción y monotonía se tiene que $\Gamma \vdash ((\neg\varphi) \to (\neg\alpha)) \to (((\neg\varphi) \to \alpha) \to \varphi) \ \ldots(3)$. Por otro lado, igual por monotonía y definición de deducción, $\Gamma \vdash (\neg\alpha) \to ((\neg\varphi) \to (\neg\alpha)) \ \ldots(4)$.
Análogamente, $\Gamma \vdash (\alpha) \to ((\neg\varphi) \to \alpha) \ \ldots(5)$. Por $\mathsf{MMP}(5,1)$, $\Gamma \vdash (\neg\varphi \to \alpha) \ldots(6)$.
Análogamente, por $\mathsf{MMP}(4,2)$, se obtiene $\Gamma \vdash (\neg\varphi) \to (\neg\alpha) \ \ldots(7)$.
De $\mathsf{MMP}(3,7)$, $\Gamma \vdash (((\neg\varphi) \to \alpha) \to \varphi) \ \ldots(8)$. Usando $\mathsf{MMP}(8,6)$, $\Gamma \vdash \varphi$.

Lema.

$\Gamma \nvdash \varphi$ si y sólo si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente.

Prueba.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \varphi$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ pero $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Teorema.

$\Sigma \not\models \alpha$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfacible

$\Sigma \nvdash \alpha$ entonces $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es consistente.

Lema.

Si Σ es consistente, entonces Σ es satisfacible.

Lema (Lindenbaum).

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\varphi \in \overline{L}$. Si Σ es consistente, entonces para cada $\varphi \in \overline{L}$, $\Sigma \cup \{\varphi\}$ es consistente o $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es consistente.

Prueba.

Supongamos que existe $\varphi \in \overline{L}$ tal que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ y $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ son inconsistentes, entonces tenemos que

(1) $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$

(2) $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\alpha$

(3) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \alpha$

(4) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\alpha$

Usando el teorema de la deducción se obtiene

(5) $\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha)$

(6) $\Sigma \vdash (\varphi \to \neg\alpha)$

(7) $\Sigma \vdash (\neg\varphi \to \neg\alpha)$

(8) $\Sigma \vdash (\neg\varphi \to \alpha)$

Luego, de (5) y (8), usando la ley de tercio excluido $\Sigma \vdash \alpha$ Análogamente de (6) y (7), usando la ley de tercio excluido $\Sigma \vdash \neg\alpha$. Por lo tanto Σ es inconsistente.

Observación

$$\aleph_0 = |L| \leq |\overline{L}| \leq |\mathcal{L}_L^*| = |\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_L^n| = \aleph_0$$

Lema.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$ y $\alpha \in \overline{L}$. $\Sigma \vdash \alpha$ si y sólo si existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma_0 \vdash \alpha$.

Prueba.

$\boxed{\Leftarrow}$ Mononotía.

$\boxed{\Rightarrow}$ Como $\Sigma \vdash \alpha$, entonces existe una lista finita de fórmulas. $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \overline{L}$ tales que:

1. $\sigma_n = \alpha$
2. para cada $i \leq n$ se tiene alguna de las siguientes
   a) $\sigma_i \in \Sigma$, o
   b) σ_i es la instancia de algún axioma del CProp,
   c) σ_i se obtuvo por MP de anteriores.

Definimos $\Sigma_0 = \Sigma \cap \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Así, $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, $|\Sigma_0| \leq n$. Trivialmente $\Sigma_0 \vdash \alpha$.

Lema.

Sea $\Sigma \subseteq \overline{L}$. Si Γ es consistente, entonces existe $\Delta \subseteq \overline{L}$ tal que

(A) $\Gamma \subseteq \Delta$,

(B) Δ es consistente, y

(C) Para cada $\alpha \in \overline{L}$, $\alpha \in \Delta$ o $(\neg\alpha) \in \Delta$.

Prueba.

Probaremos que Δ cumple A, B y C.
(A) es trivial, $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n = \Delta$.
(B) P.D. Δ es consistente.
Supongamos que Δ es inconsistente. Así, existe $\beta \in \overline{L}$ tal que $\Delta \vdash \beta$ y $\Delta \vdash (\neg\beta)$. Así, existen $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq \Delta$ finitos tales que $\Delta_1 \vdash \beta$ y $\Delta_2 \vdash (\neg\beta)$. Notemos que la sucesión $\{\Gamma_n\}_n$ es $\subseteq$-creciente, ya que $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{en otro caso} \end{cases}$
$\Gamma_n \subseteq_{n+1}$. Como Δ_1 y Δ_2 son finitos, entonces $\Delta_1 \cup \Delta_2$ también lo es. Como $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es finito y $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \bigcup_n \Gamma_n$, entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Delta_1 \cup \Delta_2 \subseteq \Gamma_{N_0}$, pero $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \beta$, $\Delta_1 \cup \Delta_2 \vdash \neg\beta$, por monotonía $\Gamma_{N_0} \vdash \beta$ y $\Gamma_{N_0} \vdash \neg\beta$, una contradicción.
Por lo tanto Δ es consistente.
(C) se cumple trivialmente, ya que si $\alpha \in \overline{L}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha = \varphi_n$ y así $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$ o $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg\varphi_n\}$ y por lo tanto $\varphi_n \in \Delta$ o $\neg\varphi_n \in \Delta$.

Definimos $v : L \to \{0, 1\}$ dada por $v(P_n) = 1$ si y sólo si $P_n \in \Delta$.

Lema.

Para cada $\varphi \in \overline{L}$, $\varphi \in \Delta$ si y sólo si $\overline{v}(\alpha) = 1$.

Prueba.

Paso base. $\overline{v}(P_k) = 1$ si y sólo si $\overline{v}(P_k) = 1$ si y sólo si $P_k \in \Delta$.

Paso inductivo. Sean $\alpha, \beta \in \overline{L}$ tal que $\overline{v}(\alpha) = 1$ si y sólo si $\alpha \in \Delta$ y $\overline{v}(\beta) = 1$ si y sólo si $\beta \in \Delta$.

Así, $\overline{v}((\neg\alpha)) = 1$ si y sólo si $\overline{v}(\alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha \notin \Delta$ si y sólo si $(\neg\alpha) \in \Delta$.

Luego, $\overline{v}((\alpha \to \beta)) = 0$ si y sólo si $\overline{v}(\alpha) = 1$ y $\overline{v}(\beta) = 0$ si y sólo si $\alpha, (\neg\beta) \in \Delta$.

Afirmamos que $(\alpha \to \beta) \in \Delta$.

Supongamos que $(\alpha \to \beta) \in \Delta$, así $\alpha, (\neg\beta), (\alpha \to \beta) \in \Delta$.

Notemos que 1. $\Delta \vdash \alpha$, 2. $\Delta \vdash (\neg\beta)$ y 3. $\Delta \vdash (\alpha \to \beta)$. De 3. y 1, $\Delta \vdash \beta$.

Teorema.

Si Γ es consistente, entonces Γ es satisfacible.

Prueba.

Como Γ es consistente, existe $\Delta \subseteq \overline{L}$ tal que

(A) $\Gamma \subseteq \Delta$,

(B) Δ es consistente y

(C) para toda $\varphi \in \overline{L}$, $\varphi \in \Delta$ o $\neg\varphi \in \Delta$.

Se define $v : L \to \{0, 1\}$ como antes, $v(P_m) = 0$ si y sólo si $P_m \notin \Delta$. Así, por el lema anterior $\overline{v}(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Delta$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\overline{v}(\gamma) = 1$ para cada $\gamma \in \Gamma$, es decir, Γ es satisfacible.

Bibliografía

- Amor, J. A. (1997). *Inducción y Recursión*. Miscelánea Matemática, 26, 1–16. Sociedad Matemática Mexicana.
- Amor, J. A. (2013). *Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su relación con el Teorema de Completud*, UNAM.
- Amor, J. A. & Rojas, R. (1991). *Sistemas Formales*, Vínculos Matemáticos No. 149, FC-UNAM.
- Enderton, H. (1972). *A Mathematical Introduction to Logic*.
- Kleene, S. C. (1967). *Mathematical Logic*. Wiley.
- Mendelson, E. (1987). *Introduction to Mathematical Logic*, 3a ed. Wadsworth.
- Solís, J., Torres, Y. (1995). *Lógica Matemática*, UAM-I.