Algortimos 2: Práctica 2

Martín Lombardo "mlomb"

Junio-Julio 2021

1 Ejercicio 1

Probar utilizando las definiciones que $f \in \mathcal{O}(h)$.

1. $f(n) = n^2 - 4n - 2$ y $h(n) = n^2$

   $f \in \mathcal{O}(h) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot h(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot h(n) \\ n^2 - 4n - 2 &\leq c \cdot n^2 \\ -4n - 2 &\leq c \cdot n^2 - n^2 \\ -4n - 2 &\leq (c-1) \cdot n^2 \end{aligned}$$

   Tomando $c = 2$:

   $$\begin{aligned} -4n - 2 &\leq n^2 \\ n^2 + 4n + 2 &\geq 0 \\ &\forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

2. $g(n) = n^k$, $h(n) = n^{k+1}$ y $f \in \mathcal{O}(g)$
   Por transitividad si $f \in \mathcal{O}(g)$ y $g \in \mathcal{O}(h)$ sabemos que $f \in \mathcal{O}(h)$.
   Sabemos que $f \in \mathcal{O}(g)$, entonces veamos que $g \in \mathcal{O}(h)$:

   $g \in \mathcal{O}(h) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ g(n) \leq c \cdot h(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} g(n) &\leq c \cdot h(n) \\ n^k &\leq c \cdot n^{k+1} \\ 0 &\leq c \cdot n^{k+1} - n^k \\ 0 &\leq c \cdot n \cdot n^k - n^k \\ 0 &\leq (c \cdot n - 1) \cdot n^k \end{aligned}$$

   Tomando $c = 2$:

   $$0 \leq (2n-1) \cdot n^k$$
   $$(2n-1) \geq 0 \wedge n^k \geq 0 \implies (2n-1) \cdot n^k \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3. $g(n) = \log n$, $h(n) = n$ y $f \in \mathcal{O}(g)$

Por transitividad si $f \in \mathcal{O}(g)$ y $g \in \mathcal{O}(h)$ sabemos que $f \in \mathcal{O}(h)$.
Sabemos que $f \in \mathcal{O}(g)$, entonces veamos que $g \in \mathcal{O}(h)$:

$g \in \mathcal{O}(h) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ g(n) \leq c \cdot h(n)\ \forall n \geq n_0$

$$\begin{aligned} g(n) &\leq c \cdot h(n) \\ \log n &\leq c \cdot n \\ n &\leq e^{c \cdot n} \end{aligned}$$

Tomando $c = 1$ hacemos inducción con $n_0 = 1$:
H.I: $h \leq e^h$
Q.P.Q: $HI \implies h + 1 \leq e^{h+1}$
Caso base: $1 \leq e^1$ ✓
Paso inductivo:

$$\begin{aligned} h + 1 &\leq e^{h+1} && \iff \\ h + 1 &\leq e^h \cdot e && \iff \\ e^h + 1 &\leq_{H.I}\ e^h \cdot e && \iff \\ 1 &\leq e^h \cdot e - e^h && \iff \\ 1 &\leq e^h \cdot (e - 1) && \iff \end{aligned}$$

$(e - 1) \geq 1 \wedge \underline{e^h} \geq 1 \implies e^h \cdot (e - 1) \geq 1\ \forall h \geq n_0$

Entonces como $f \in \mathcal{O}(g)$ y $g \in \mathcal{O}(h)$ probamos que $f \in \mathcal{O}(h)$.
Nota: e^h es monótonamente creciente.

2 Ejercicio 2

Determinar la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones. JUSTIFICAR.

1. $2^n = \mathcal{O}(1)$ FALSO

   $f(n) = 2^n$
   $g(n) = 1$

   $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ 2^n &\leq c \\ \log_2 2^n &\leq \log_2 c \\ n &\leq \log_2 c \end{aligned}$$

   Con cualquier $c \in \mathbb{R}_{>0}$, cuando $n = \lfloor \log_2 c \rfloor + 1$ la desigualdad ya no se cumple.

2. Para todo $k \in \mathbb{N}, 2^k = \mathcal{O}(1)$ VERDADERO

   $f(n) = 2^k$
   $g(n) = 1$

   $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ 2^k &\leq c \end{aligned}$$

   Tomando $c = 2^k$ la desigualdad se cumple $\forall k \in \mathbb{N}$.

3. $n = \mathcal{O}(n!)$ VERDADERO

   $f(n) = n$
   $g(n) = n!$

   $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ n &\leq c \cdot n! \\ 1 &\leq c \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

   Tomando $c = 1$ y $n_0 = 2$ se cumple $\forall n \geq n_0$.

4. $\log n = \mathcal{O}(n)$ VERDADERO

   $f(n) = \log n$
   $g(n) = n$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} =_{L'H} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0 \implies \log n \in \mathcal{O}(n)$$

5. $n! = \mathcal{O}(n^n)$ VERDADERO

   $f(n) = n!$
   $g(n) = n^n$

   $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot g(n) \\ n! &\leq c \cdot n^n \end{aligned}$$

   Tomamos $c = 1$ y hacemos inducción con $n_0 = 1$.
   H.I: $h! \leq h^h$
   Q.P.Q: $HI \implies (h+1)! \leq (h+1)^{h+1}$
   Caso base: $1! \leq 1^1$ ✓
   Paso inductivo:

   $$\begin{aligned} (h+1)! &\leq (h+1)^{h+1} && \iff \\ (h+1)\cdot h! &\leq (h+1)\cdot(h+1)^h && \iff_{H.I} \\ (h+1)\cdot h^h &\leq (h+1)\cdot(h+1)^h && \iff_{h+1>0} \\ h^h &\leq (h+1)^h && \iff \\ \sqrt[h]{h^h} &\leq \sqrt[h]{(h+1)^h} && \iff \\ h &\leq h+1 && \iff \\ 0 &\leq 1 \end{aligned}$$

   Entonces, $f \in \mathcal{O}(g)$.

6. $n! = \mathcal{O}(2^n)$ FALSO

   $f(n) = n!$
   $g(n) = 2^n$

   Vemos el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n}$$

   Para ver este límite, usemos el criterio de D'Alambert:

   $$A_n = \frac{n!}{2^n}, A_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot n!}{2} \cdot \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty = L$$

   $$L > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n} = +\infty$$

   Según la propiedad del ejercicio 4b, como el límite es $+\infty \Longrightarrow f \notin \mathcal{O}(g)$.

7. $2^n = \mathcal{O}(n!)$ VERDADERO

   $f(n) = 2^n$
   $g(n) = n!$

   Vemos el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$$

   Para ver este límite, usemos el criterio de Cauchy:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{2^n}{n!}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} = 0 = L$$

   $$L < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

   Como el límite da 0, por las propiedades del límite, $f \in \mathcal{O}(g)$.

8. $2^n n^2 = \mathcal{O}(3^n)$ VERDADERO

   $f(n) = 2^n n^2$
   $g(n) = 3^n$

   Vemos el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2}{3^n}$$

   Para ver este límite, usemos el criterio de Cauchy:

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{2^n n^2}{3^n}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{n^2}}{3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{2}{3} = L$$

   $$L < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n^2}{3^n} = 0$$

   Como el límite da 0, por las propiedades del límite, $f \in \mathcal{O}(g)$.

9. Para todo $i, j \in \mathbb{N}$, $i \cdot n = \mathcal{O}(j \cdot n)$ VERDADERO

   $f(n) = i \cdot n$
   $g(n) = j \cdot n$

   $f \in \mathcal{O}(g) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0$

   $$\begin{aligned} f(n) &\leq c \cdot g(n) && \iff \\ i \cdot n &\leq c \cdot j \cdot n && \iff_{n>0} \\ i &\leq c \cdot j && \iff_{j>0} \\ \frac{i}{j} &\leq c \end{aligned}$$

   Siempre se puede tomar $c = \frac{i}{j}$ para que se cumpla la desigualdad.

10. Para toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f = \mathcal{O}(f)$ VERDADERO

    $f \in \mathcal{O}(f) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot f(n)\ \forall n \geq n_0$

    Con tomar $c = 1$ la desigualdad se cumple siempre.

3 Ejercicio 4

a)
$\Rightarrow$) Sea $0 < l < \infty$. Entonces dado un $\epsilon > 0$, existe un n_0 tal que $|\frac{f(n)}{g(n)} - l| < \epsilon\ \ \forall n \geq n_0$. Desarrollando el modulo: $-\epsilon + l < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + l$. De ahi $(-\epsilon + l)g(n) < f(n) < (\epsilon + l)g(n)$. En particular tomando $k_1 = -\epsilon + l$ y $k_2 = \epsilon + l$ con $l > \epsilon$ se satisface que f cumple la condicion para pertenecer en Θ(g)

$\Leftarrow$) Sea $f \in \Theta(g)$. Luego existen $k_1, k_2 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 g(n) \leq f(n) \leq k_2 g(n)$ para todo $n \geq n_0$. De forma que $k_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq k_2$. La sucesion formada por $\frac{f(n)}{g(n)}$ esta acotada.
Sabemos que $l \geq 0$ ya que $f(n)$ y $g(n)$ pertenecen a los naturales. Sea $l = 0$. Entonces $-\epsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ a partir de un n_0. En particular, tomando $\epsilon = \frac{k_1}{2}$, se llega a que $\frac{f(n)}{g(n)} \leq \frac{k_1}{2}$. Pero por hipotesis $\frac{k_1}{2} < k_1 \leq \frac{f(n)}{g(n)}$. De forma que se llega a un absurdo y $l > 0$. Ademas como la sucesion esta acotada no puede diverger. Resultando en $0 < l < \infty$

b)
$\Rightarrow$) Sea $l = \infty$, luego dado un $M > 0$, $\frac{f(n)}{g(n)} > M$ para todo $n \geq n_0$. Resultando en $f(n) > Mg(n)$. Por lo tanto $f \in \Omega(g)$. Como consecuecia ademas no existe ningun $n_0 \in \mathbb{N}$ ni $k > 0$ tal que $f(n) \leq kg(n)$ para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $f \notin \mathcal{O}(g)$

$\Leftarrow$) Sea $f \in \Omega(g)$ y $f \notin \mathcal{O}(g)$. Asumo que $\frac{f(n)}{g(n)}$ es acotada superiormente. Es decir, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{f(n)}{g(n)} < k$. Pero como $f \notin \mathcal{O}(g)$, para cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$ existe un n tal que $\frac{f(n)}{g(n)} > a\ \ \forall a \in \mathbb{R}_{>0}$. Entonces $\frac{f(n)}{g(n)}$ no es acotada superiormente. Y como el limite existe, de ser $l < \infty$ la sucesion deberia ser acotada, pero como no lo es: $l = \infty$.

c)
$\Rightarrow$) Sea $l = 0$. Entonces dado un $\epsilon > 0$, $-\epsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$. Luego $f(n) < \epsilon g(n)$, entonces $f \in \mathcal{O}(g)$ al cumplirse la definicion. Ademas, como la desigualdad vale para todo $\epsilon > 0$, no existe n_1 tal que $f(n) \geq kg(n)$ para todo $n \geq n_1$. De forma que $f \notin \Omega(g)$.

$\Leftarrow$) Sea $f \in \mathcal{O}(g)$ y $f \notin \Omega(g)$. Asumo que $l \neq 0$. Luego por tricotomia $l > 0$ o $l < 0$. Sabemos que $l \geq 0$ ya que $f(n)$ y $g(n)$ pertenecen a los naturales. Sea entonces $l > 0$.
De ser $0 < l < \infty$, dado un $\epsilon > 0$, $-\epsilon + l < \frac{f(n)}{g(n)} < \epsilon + l$. Por el 4)a) se tiene que $f \in \Omega(g)$.
De ser $l = \infty$, por el b) $f \notin \mathcal{O}(g)$.
Por hipotesis, ambas consecuencias son falsas, de forma que $l = 0$.

4 Ejercicio 5

1. $T_{peor}(n) \in O(n)$
2. $T_{peor}(n) \in O(n^2)$
3. $T_{peor}(n) \in O(n^2)$
4. $T_{peor}(n) \in O(log_2(n))$
5. $T_{peor}(n) \in O(n^3)$

5 Ejercicio 7

(habría que desarrollar más)

1. Falso porque $\Theta(n^2) = \mathcal{O}(n^2) \cap \Omega(n^2)$.
2. Falso porque $\Omega(n \log n) \cap \mathcal{O}(n) = \varnothing$.
3. Falso, no existe una "cota superior" para las funciones, siempre podés encontrar una mayor (por ejemplo multiplicando por n).
4. Unsure

6 P 1C2021 Complejidad

Sean k y c dos constantes enteras mayores a 1.
Marquen **todos** los items correctos. Demuestre por qué los otros no lo son.

1. $n^k \in \bigstar(c^n)$ VERDADERO

   $f(n) = n^k$
   $g(n) = c^n$

   Veo el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n}$$

   Uso el criterio de D'Alambert para poder resolverlo:

   $$A_n = \frac{n^k}{c^n}, A_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{c^{n+1}}$$

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{c^{n+1}} \cdot \frac{c^n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{c \cdot c^n} \cdot \frac{(n+1)^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{(n \cdot (1+\frac{1}{n}))^k}{n^k} =$$

   $$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{n^k \cdot (1+\frac{1}{n})^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^k}{c} = \frac{1}{c} = L$$

   $$L = \frac{1}{c} <_{c>1} 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{c^n} = 0$$

   Como el límite es 0, por propiedades del límite concluyo que:

   i) $n^k \in \mathcal{O}(c^n)$ VERDADERO
   ii) $n^k \notin \Omega(c^n)$ Entonces $n^k \in \Omega(c^n)$ FALSO.
   iii) $n^k \notin \Omega(c^n) \Longrightarrow n^k \notin \Theta(c^n)$ Entonces $n^k \in \Theta(c^n)$ FALSO.

2. $\log_k n \in \bigstar(\log_c n)$

   $f(n) = \log_k n$
   $g(n) = \log_c n$

   Veo el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log_k n}{\log_c n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n}{\log k}}{\frac{\log n}{\log c}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n} \cdot \frac{\log c}{\log k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log c}{\log k} = \frac{\log c}{\log k}$$

   Como el límite da distinto de cero ($c > 1$) y menor a ∞, puedo concluir por propiedades del límite que $\Theta(\log_k n) = \Theta(\log_c n)$. Entonces puedo concluir:

   i) $\log_k n \in \mathcal{O}(\log_c n)$ VERDADERO
   ii) $\log_k n \in \Omega(\log_c n)$ VERDADERO
   iii) $\log_k n \in \Theta(\log_c n)$ VERDADERO

3. Si $k > c$ entonces $(cn)^k \in \bigstar((kn)^c)$

   $f(n) = (cn)^k$
   $g(n) = (kn)^c$

   Veo el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(cn)^k}{(kn)^c} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^k \cdot n^k}{k^c \cdot n^c} =_{k>c} \lim_{n\to\infty} \frac{c^k \cdot n^{k-c}}{k^c} = +\infty$$

   Como el límite da $+\infty$, por propiedades del límite puedo concluir:

i) $(cn)^k \notin \mathcal{O}((cn)^k)$ Entonces $(cn)^k \in \mathcal{O}((cn)^k)$ FALSO

ii) $(cn)^k \in \Omega((cn)^k)$ VERDADERO

iii) $(cn)^k \in \Omega((cn)^k) \Longrightarrow (cn)^k \notin \Theta((cn)^k)$ Entonces $(cn)^k \in \Theta((cn)^k)$ FALSO

4. Si $k > c$ entonces $c^n \in \bigstar(k^n)$

$f(n) = c^n$
$g(n) = k^n$

Veo el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{k^n}$$

Uso el criterio de Cauchy para resolver el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{c^n}{k^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{c^n}}{\sqrt[n]{k^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{k} = \frac{c}{k} = L$$

$$L = \frac{c}{k} <_{k>c} 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{k^n} = 0$$

Como el límite da 0, por propiedades de los límite puedo concluir:

i) $c^n \in \mathcal{O}(k^n)$ VERDADERO

ii) $c^n \notin \Omega(k^n)$ Entonces $c^n \in \Omega(k^n)$ FALSO.

iii) $c^n \notin \Omega(k^n) \Longrightarrow c^n \notin \Theta(k^n)$ Entonces $c^n \in \Theta(k^n)$ FALSO.

7 P 1C2017 Complejidad

1. $\Omega(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$.
   Si se toma $f(n) = n^3$, se puede ver que $f \in \Omega(n)$ pero $f \notin \mathcal{O}(n^2)$. Entonces $\Omega(n) \nsubseteq \mathcal{O}(n^2)$.

2. $\mathcal{O}(n^2) \subseteq \Omega(n)$.
   Si se toma $f(n) = 1$, se puede ver que $f \in \mathcal{O}(n^2)$ pero $f \notin \Omega(n)$. Entonces $\mathcal{O}(n^2) \nsubseteq \Omega(n)$.

8 P 2C2017 Complejidad

Discutir la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente en cada caso:

1. Si $f \in O(n)$ y $g(n) = n^2$, entonces $f \circ g \in \mathcal{O}(g)$.

   $$\begin{aligned} f(n) \in \mathcal{O}(n) &\iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c \cdot n\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{n=g(n)} \exists\, n_0' \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(g(n')) \leq c \cdot g(n')\ \forall n' \geq \lceil \sqrt{n_0} \rceil \\ &\iff f \circ g \in \mathcal{O}(g) \end{aligned}$$

   Puedo reemplazar n por $g(n)$ porque $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   VERDADERO

2. Si $f \in O(n)$ y $g(n) = n^2$, entonces $g \circ f \in \mathcal{O}(f)$.

   Si tomamos $f(n) = n$ no se cumple ($n^2 \notin \mathcal{O}(n)$). (*desarrollar*)
   FALSO

9 P 1C2018 Complejidad

Discutir la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente en cada caso:

1. Si $f(n) \in \mathcal{O}(n)$ entonces $2^{f(n)} \in \mathcal{O}(2^n)$.

   Si tomamos $f(n) = 2n$ no se cumple. (*desarrollar*)

   FALSO

2. Siendo $f \cdot g$ la función $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, vale que $f \cdot g \in \Theta(máx\{f, g\}^2)$.

   Si tomamos $f(n) = n$ y $g(n) = 1$ no se cumple ($n \notin \Theta(n^2)$ ($n \notin \Omega(n^2)$)). (*desarrollar*)

   FALSO

10 P 1C2019 Complejidad

Dadas funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ positivas, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de que sean verdaderas, demostrarlas. En caso de que sean falsas, exhibir un contraejemplo justificando claramente por qué contradice la afirmación.

1. Si $f(n) \in \Omega(g(n))$ entonces $f(n)^3 \in \Omega(g(n)^3)$.

   $$\begin{aligned} f(n) \in \Omega(g(n)) &\iff \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \geq c \cdot g(n)\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{*} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n)^3 \geq c^3 \cdot g(n)^3\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{k=c^3} \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n)^3 \geq k \cdot g(n)^3\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff f(n)^3 \in \Omega(g(n)^3)\ \checkmark \end{aligned}$$

   *: x^3 es monótonamente creciente y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

   VERDADERO

2. Si $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ entonces $3^{f(n)} \in \mathcal{O}(3^{g(n)})$.
   Si tomamos $f(n) = 2\log_3 n$ y $g(n) = \log_3 n$ no se cumple.

   $\log_3 n \in \mathcal{O}(\log_3 n) \implies f(n) = 2\log_3 n \in \mathcal{O}(\log_3 n)$

   Ahora veamos que $3^{2\log_3 n} \notin \mathcal{O}(3^{\log_3 n})$, para eso tomo el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{\log_3 n}}{(3^{\log_3 n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   Entonces, como el límite da 0, por las propiedades del límite $3^{f(n)} \notin \mathcal{O}(3^{g(n)})$.

   FALSO

11 R 1C2019 Complejidad

Discutir la veracidad de las siguientes afirmaciones, justificando adecuadamente (con una demostración o exhibiendo un contraejemplo) en cada caso:

1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Si $f(n) \in \mathcal{O}(\log_2 n)$, entonces $2^{f(n)} \in \mathcal{O}(n)$.

   Si tomamos $f(n) = 2\log_2 n$ veamos que no se cumple.

   $\log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n) \implies f(n) = 2\log_2 n \in \mathcal{O}(\log_2 n)$

   Ahora veamos que $2^{2\log_2 n} \notin \mathcal{O}(n)$, para eso tomo el límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(2^{\log_2 n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   Entonces, como el límite da 0, por las propiedades del límite $2^{f(n)} \notin \mathcal{O}(n)$.

   FALSO

2. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Entonces vale que $f \cdot g \in \Omega(\textit{mín}\{f, g\})$.
   Recordar que las funciones $f\cdot g$ y $\textit{mín}\{f, g\}$ se definen así: $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$; $\textit{mín}\{f, g\}(x) = \textit{mín}\{f(x), g(x)\}$.

   $f \cdot g \in \Omega(\textit{mín}\{f, g\}) \iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f \cdot g(n) \geq c \cdot \textit{mín}\{f, g\}(n)\ \forall n \geq n_0$

   Si $\textit{mín}\{f, g\} = f$

   $$\begin{aligned} &f(n) \cdot g(n) \geq c \cdot \textit{mín}\{f(x), g(x)\} \iff \\ &f(n) \cdot g(n) \geq c \cdot f(n) \iff_{f(n)!=0} \\ &\qquad g(n) \geq c \end{aligned}$$

   Tomando $c = 1$ y $n_0 = 1$, $g(n) \geq 1$ se cumple $\forall n \geq n_0$ ya que la imagen de $g(n)$ es $\mathbb{N}$.
   Análogo para cuando $\textit{mín}\{f, g\} = g$.

   VERDADERO

12 R 1C2020 Complejidad

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$ constantes, $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, y $h(h) = q(n) + 1$, donde $q(n)$ es la cantidad de veces que 2 divide exactamente a n (por ejemplo, $q(1) = 0$, $q(2) = 1$, $q(8) = 3$, $q(10) = 1$).
Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar detalladamente.

1. $f(n) \in \Omega(f(n)^2) \implies f(n) \in \mathcal{O}(1)$

$$\begin{aligned} f(n) \in \Omega(f(n)^2) &\iff \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \geq c \cdot f(n)^2\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{f(n) \in \mathbb{R}^+} \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ 1 \geq c \cdot f(n)\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{c \in \mathbb{R}^{>0}} \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ \frac{1}{c} \geq f(n)\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff_{c' = \frac{1}{c}} \exists\ n_0 \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{>0}\ f(n) \leq c' \cdot 1\ \forall n \geq n_0 \\ &\iff f(n) \in \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

VERDADERO

2. $f(n) \in \Omega(g(n)) \implies f(n)^2 \in \Omega(g(n))$
Veamos que si $f(n) = g(n) = \frac{1}{n}$ esto no se cumple.

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \frac{1}{n} \in \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \checkmark$$

Esto debería implicar que $f(n)^2 \in \Omega(g(n))$. Veamos el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)^2}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como el límite da 0, por propiedades de los límites, $f(n)^2 \notin \Omega(g(n))$.

FALSO

3. $n! \in \Theta((n+1)!)$

$f(n) = n!$
$g(n) = (n+1)!$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Como el límite da 0, por propiedades de los límites, $f(n) \notin \Omega(g(n)) \implies f(n) \notin \Theta(g(n))$.

FALSO

4. $(n+a)^b \in \Theta(n^b)$

$f(n) = (n+a)^b$
$g(n) = n^b$

Veo el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+a)^b}{n^b} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+a}{n}\right)^b = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} + \frac{a}{n}\right)^b = (1+0)^b = 1$$

Como el límite da un número distinto de cero y menor a infinito, por las propiedades de los límites $\Theta((n+a)^b) = \Theta(n^b) \implies (n+a)^b = \Theta(n^b)$.

VERDADERO

5. $nf(m) + mg(n) \in \mathcal{O}(f(nm) + g(nm))$
No ni idea man, tiene 2 variables??? :what:

6. $h(n) \in O(n)$, y es la cota más justa posible.
Con inducción se puede probar que $h(n) \leq \log_2 n$.
Como $h(n) \leq \log_2 n \subset \mathcal{O}(\log_2 n) \subset \mathcal{O}(n)$.

VERDADERO

7. $\log_2 n \in O(h(n))$
   Si n es impar, entonces $h(n) = 1$.
   Entonces, si n es impar $\log_2 n \notin \mathcal{O}(1)$.

8. Hay una cantidad infinita de funciona $i(n)$, tal que $i(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.

   Tomando $i(n) = h(n) + k$ con $k \in \mathbb{R}^+$, tenemos infinitas funciones que pertencen ya que $h(n) \in \mathcal{O}(h(n))$ y $k \in \mathcal{O}(1)$ y $\mathcal{O}(1) \subseteq \mathcal{O}(h(n))$ por lo que $i(n) \in \mathcal{O}(h(n))$.

   VERDADERO

13 Datazos

$$\frac{\log a}{\log b} = \log_b a$$

$$\frac{\log_k n}{\log_c n} = \frac{\log c}{\log k}$$

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$$