Actividad 4 - Órbita planetaria

Exactas Programa

Verano 2019

En esta actividad vamos trabajar con objetos en movimiento, veremos cómo actúan ciertas fuerzas sobre ellos y computaremos qué les sucederá en el futuro.

La idea subyacente es que un objeto en movimiento va pasando por distintas posiciones en el espacio a medida que transcurre el tiempo; a esa secuencia de posiciones la llamamos *trayectoria*. Si imaginamos una máquina de coser, podríamos pensar que cada vez que la aguja da una puntada, va generando un nuevo punto en la costura. En este caso la costura representa todos los puntos por los que fue pasando la aguja.

El algoritmo de Verlet es un método por el cual podemos determinar la trayectoria de un objeto de masa M en movimiento. Para ello necesitamos conocer:

- la posición actual (p_{actual}), al tiempo actual lo llamaremos t.
- la posición previa (p_{previa}) en un instante de tiempo al que llamaremos $t - \Delta t$.
- la fuerza F que actúa sobre el objeto.

Si tenemos estos datos, podemos calcular[1] la próxima posición del objeto (p_{prox}) en el tiempo $t + \Delta t$ con la fórmula:

$$p_{prox} = 2 * p_{actual} - p_{previa} + \frac{F}{M} * \Delta t^2$$

Lanzamiento vertical

Vamos a computar la trayectoria de un objeto cuando es lanzado hacia arriba. La fuerza que actúa sobre el cuerpo es:

$$F_y = -M * g$$

En este caso podemos escribir el algoritmo de Verlet para la altura como:

$$y(t + \Delta t) = 2 * y(t) - y(t - \Delta t) + \frac{F_y}{M} * \Delta t^2$$

1. Definir las variables necesarias para realizar la simulación:
   - `dt = 0.001` para el paso temporal (en segundos)
   - `numero_pasos = 500` el número de pasos a simular
   - `g = 9.8` la aceleración de la gravedad en $\frac{m}{s^2}$
   - `y0 = 0` la posición desde la que es lanzado el objeto en m
   - `vy = 10` la velocidad con la que es lanzado el objeto en m/s
   - `y1 = 0.01` la posición en el instante t=0 $+ dt$ en m
2. Generar dos listas para poder almacenar los valores que ocurrieron:
   - `tiempos = []`

[1] De manera aproximada, pero con una muy buena aproximación

- `alturas = []`

3. Para poder utilizar el algoritmo de Verlet necesitamos dos puntos iniciales (que tenemos que agregar en este orden):

   - a la lista de tiempos: `0`, `dt`
   - a la lista de posiciones `y0`, `y1`

   que serán las condiciones iniciales.

4. Simular la posición del objeto para la cantidad de pasos definidos. Para hacerlo puede completar el siguiente código.

```
    for i in range(1, numero_pasos - 1):
      #actualizo la posicion
      y_actual = alturas[i]
      y_prev = alturas[i-1]
      nueva_posicion = 2 * y_actual - y_prev - g * dt**2
      alturas.append(___COMPLETAR___)

      #actualizo el tiempo
      nuevo_tiempo = tiempos[i] + dt
      tiempos.append(___COMPLETAR___)
```

5. Graficar la posición del objeto respecto del tiempo con el siguiente código:

```
      plt.title("Posicion del objeto")
      plt.plot(tiempos, alturas,'r')
      plt.xlabel('tiempo (s)')
      plt.ylabel('altura (m)')
      plt.show()
```

6. Modificar las condiciones iniciales y responder:

   - ¿Cuántos pasos más hay que simular para que el objeto alcance su posición inicial y cuánto tiempo *real* toma en bajar?
   - si se desea que el objeto tarde más de 5 segundos en retornar a su posición original, ¿Con qué velocidad inicial debe ser lanzado?

   Realizar los gráficos correspondientes para cada una de estas situaciones.

La órbita terrestre

Queremos resolver el problema de dos cuerpos celestes en el espacio. La tierra y el sol se atraen con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia entre ellos al cuadrado:

$$F = -G \times \frac{m_{sol} \times m_{tierra}}{r^2}$$

donde m_1 y m_2 son las masas de cada uno de ellos y r es la distancia entre los dos cuerpos que se calcula usando sus coordenadas (x, y): $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Y G es la constante de gravitación: $G = 6{,}693E - 11 \frac{m^3}{s^2 * kg}$.

En la Figura 1 se ilustra un esquema. La fuerza gravitatoria opera en la dirección de $\vec{r}$, es decir en la dirección de la recta que une a los dos cuerpos.

Si miran con atención la Figura 1, ¿Pueden ver que el vector $\vec{r}$ cambia a medida que la Tierra se desplaza a lo largo de su órbita? No sólo cambia su módulo, también cambia su dirección.

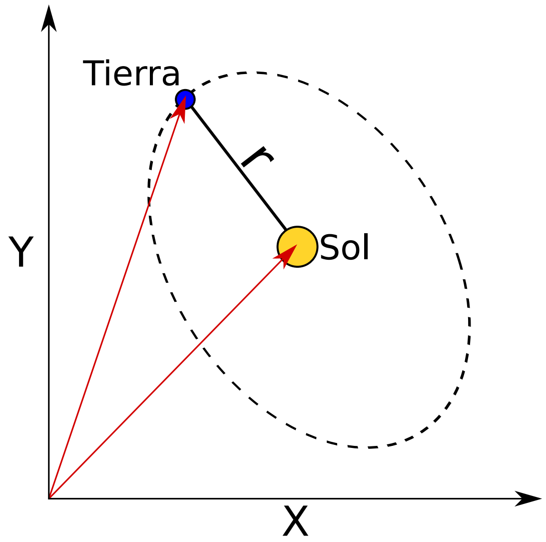

Figura 1: Esquema de la órbita de la Tierra alrededor del sol. La línea punteada muestra la trayectoria que sigue la Tierra, mientras que r indica la distancia Tierra-Sol

Podemos escribir la fuerza ($\vec{F}$) gravitatoria que el Sol ejerce sobre la Tierra utilizando un sistema de coordenadas (x, y) como el de la figura. Luego, se puede descomponer el problema bidimensional (x, y) en dos problemas unidimensionales, uno en la dirección x y otro en la dirección y, y podemos usar la receta de Verlet para cada coordenada:

$$x(t + \Delta t) = 2 * x(t) - x(t - \Delta t) + \frac{F_x}{m_{tierra}} * \Delta t^2$$

$$y(t + \Delta t) = 2 * y(t) - y(t - \Delta t) + \frac{F_y}{m_{tierra}} * \Delta t^2$$

La fuerza de atracción depende de la distancia y la calcularemos coordenada a coordenada:

- $\Delta_x = x_{sol} - x_{tierra}$
- $\Delta_y = y_{sol} - y_{tierra}$

Con estos valores podemos calcular la fuerza de cada coordenada:

$$F_x = \frac{G * m_{tierra} * m_{sol}}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} * \frac{\Delta_x}{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}$$

$$F_y = \frac{G * m_{tierra} * m_{sol}}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} * \frac{\Delta_y}{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}$$

1. Explorar en la página de la NASA para obtener la masa y el radio del sol y de la tierra: `https://solarsystem.nasa.gov/solar-system/sun/by-the-numbers/`

2. Para simplificar el sistema usaremos sólo dos dimensiones (x, y)[2]. Además supondremos que el sol se encuentra estático en la posición $(0, 0)$. Por lo demás usaremos estos parámetros correspondientes a un momento particular de la órbita[3]:

   - `x_tierra = [-147095000000.0, -147095000000.0]` (atención que es necesario poner el .0 decimal para que se pueda usar `np.sqrt()` para la raíz cuadrada)
   - `y_tierra = [2617920000.0, 0.0]`

[2]Pueden extenderlo a 3 dimensiones más tarde.

[3]Pueden actualizar las condiciones iniciales al día que quiera consultando la página de la NASA: `https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi`

- `dt = 60 * 60 * 24` para que el paso del tiempo sea un día en segundos.
- `tiempo_total = 400` para simular un poco más de un año.

Completar el siguiente esqueleto para poder simular la rotación de la tierra alrededor del sol.

```
for i in range(1, tiempo_total - 1):
  #calculo los deltas
  delta_x = ___COMPLETAR___
  delta_y = ___COMPLETAR___

  # calculo la fuerza de x
  f_x = ___COMPLETAR___

  #actualizo la posicion x
  x_actual = ___COMPLETAR___
  x_prev = ___COMPLETAR___

  x_nueva = ___COMPLETAR___
  x_tierra.append(x_nueva)

  # idem para y
  ___COMPLETAR___

  #actualizo el tiempo
  dias.append(i)
```

3. Con los datos simulados, graficar las coordenadas (x, y) para cada día calculado de la tierra y agregar el sol. Comprobar que la tierra vuelve a su punto de origen.

4. Calcular y graficar la distancia entre el sol y la tierra y decidir en qué fecha aproximada ocurren los siguientes fenómenos astronómicos:

   Perihelio: mínima distancia de la Tierra al Sol.

   Afelio: máxima distancia de la Tierra al Sol.

5. Buscá en la página de la NASA la posición de la Tierra el día de tu nacimiento y fijate si podés determinar qué día ocurrió el primer perihelio de tu vida.

   Te puede ser útil el siguiente link: https://www.timeanddate.com/date/dateadd.html